T.C.

HARRAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİ BOYUTLU HÜCRESEL DÖNÜŞÜMLERİN CEBİRSEL YAPISI

Ferhat ŞAH

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA

2009

T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİ BOYUTLU HÜCRESEL DÖNÜŞÜMLERİN CEBİRSEL YAPISI

Ferhat ŞAH

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2009

Doç. Dr. Hasan AKIN danışmanlığında, Ferhat ŞAH'ın hazırladığı "İki Boyutlu Hücresel Dönüşümlerin Cebirsel Yapısı" konulu bu çalışma 10/06/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Birinci Danışman: Doç. Dr. Hasan AKIN

İkinci Danışman: Prof. Dr. İrfan ŞİAP

Üye: Doç. Dr. Vatan KARAKAYA

Üye: Doç. Dr. Seyit TEMİR

Üye: Yrd. Doç. Dr. Abdullah YILDIRIM

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım

Prof. Dr. İbrahim BOLAT
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÖZ

Yüksek Lisans Tezi

İKİ BOYUTLU HÜCRESEL DÖNÜŞÜMLERİN CEBİRSEL YAPISI

Ferhat ŞAH

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hasan AKIN
Yıl: 2009, Sayfa: 71

Bu tezde pek çok disiplinde son derece yaygın olarak kullanılan 2D CA'ların davranışları, matris cebirleri kullanılarak matematiksel bir model ile $\mathbb{Z}_3$ ve $\mathbb{Z}_2$ cisimleri üzerinde incelenmektedir. $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde 170N ve 170P kuralları ile üretilen sonlu 2D lineer CA'ların temsili matrisleri daha önceki çalışmalardan faydalanılarak elde edilmektedir. $\mathbb{Z}_2$ üzerinde sonlu 2D lineer CA'lar için kullanılan metotla, $\mathbb{Z}_3$ üzerinde tanımlanan 2460N ve 2460P yerel kurallarla üretilen sonlu 2D lineer CA'ların temsili matrisleri elde edilmektedir.

ANAHTAR KELİMELER: Hücresel Dönüşüm, Matris Cebirleri, Temsili Matris, Sıfır Sınır Şartı Periyodik Sınır Şartı.

ABSTRACT

Master Thesis

ALGEBRAIC STRUCTURE OF TWO DIMENSIONAL CELLULAR AUTOMATA

Ferhat ŞAH

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hasan AKIN
Year: 2009, Page: 71

In this thesis, the behaviors of 2D CA that is widely used in many disciplines have been studied over the fields $\mathbb{Z}_3$ and $\mathbb{Z}_2$ by using matrix algebra with the help of a mathematical model. The representing matrices of finite 2D linear CAs generated by the rule numbers 170N and 170P over the field $\mathbb{Z}_2$ are obtained by means of previous studies. The representing matrices of finite 2D linear CAs generated by the rule numbers 2460N and 2460P over the field $\mathbb{Z}_3$ are obtained via used method for finite 2D linear CAs over $\mathbb{Z}_2$.

KEY WORDS: Cellular Automata, Matrix Algebra, Representing Matrices, Null Boundary Condition, Periodic Boundary Condition.

TEŞEKKÜR

Her güzel eser etkin bir çalışmanın ürünüdür. Ama hiçbir çalışma birlikte yapılanlar kadar güzel olamaz. Birlikte yapılan güzelliklerin bir örneği olduğunu düşündüğüm, yoğun çalışma ve uğraşlar sonucunda ortaya çıkan bu tezimin tamamlanmasında bana yol gösteren ve benden hiçbir desteklerini esirgemeyen değerli danışmanlarım Doç. Dr. Hasan AKIN'a ve Prof. Dr. İrfan ŞİAP'a teşekkür ederim.

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

1. GİRİŞ

Hücresel Dönüşüm (cellular automata, kısaca CA) ilk olarak fizik ve biyoloji alanlarında ve bilgisayar biliminde modelleme için kullanıldı. CA teorisi Ulam ve Von Neumann (1966) tarafından ilk olarak incelendi. Von Neumann (1966) bir CA'nın evrensel olabileceğini ve tasarlanmış bir CA'nın herhangi bir hesaplamayla yeniden yapılandırılabileceğini gösterdi. O zamandan beri çoğu araştırmacılar karmaşık bir sistemin davranışlarını modellemek için CA'nın incelenmesine ilgi duydular. Hedlund (1969) sadece matematiksel bir bakışla CA'yı sistematik olarak inceledi. Wolfram (1983) polinom cebirlerinin yardımıyla bir boyutlu CA'yı inceledi.

Diğer taraftan iki boyutlu CA (2D CA) henüz çok iyi incelenmemiştir. Packard ve Wolfram (1985) 5 komşuluklu CA'ya bağlı olarak iki boyutlu CA üzerinde bazı gözlemlerde bulunmuşlardır. Pries (1986) polinom cebirlerinin benzer bir türüne dayanarak grup özelliklerini açıklamak için bir boyutlu CA'yı inceledi.

Son yıllarda CA lar farklı amaçlar için birçok bilim dalında genişçe inceleniyor. Das ve ark. (1993) matris cebirlerinin yardımıyla bir boyutlu CA'nın karakterizasyonunu genişlettiler ve lineer CA'nın teoriksel analizi için yeni bir yöntem takdim ettiler. CA'nın analizini farklı olarak polinom cebirlerine dayandırdılar. Bu yeni yöntem aynı zamanda hybrid CA lar ile ilgilendi. Bir CA'nın matris karekterizasyonu formülüze edildi.

Khan ve ark. (1997), $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde bütün en yakın komşuluklu 2D CA lineer dönüşümlerini incelemek için bir çözüm yolu geliştirdiler. İki boyutlu lineer CA ları ayırmak için yeni bir metot geliştirdiler ve farklı kurallar ile 2D CA'ların karakterizasyonunu incelemek için bu metodu denediler. Onlar sadece iki boyutlu periyodik sınırlı dokuz komşuluklu lineer CA'ların karakterizasyonu ile ilgilenmişlerdir.

Inokuchi ve ark. (1998) 156 kuralı tarafından üretilen bir boyutlu CA'nın davranışlarını incelediler.

Choudhury ve ark. (1999) $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde 2D CA'ların özel bir hybrid dönüşümünün karakterizasyonunun en genel halini verdiler. Ayrıca diğer bir çalışmada Choudhury ve Dihidar (2004) matris cebirleri yardımıyla bir boyutlu CA teorisini 2D CA'ların karakterizasyonunu elde etmek için genişletmişlerdir. Bununla birlikte Sınırlandırılmış Dikey Komşuluk (RVN) olarak bilinen toplamsal 2D CA'nın özel bir sınıfını verdiler. Bu sınıflarda, bir hücrenin dikey bağımlılığı ya tepedeki hücrelerle veya alttaki hücrelerle sınırlandırılmıştır.

Ayrıca bu çalışmada Choudhury ve Dihidar (2004) $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde basit ve güzel bir matematiksel model ile matris cebirlerini kullanarak, periyodik ve sıfır sınır şartlı iki boyutlu en yakın komşuluklu lineer CA'ların davranışlarını karekterize etmek için incelediler.

Ying ve ark. (2008), Khan ve ark. (1997)' nın bu yeni kuralını takiben ve matris cebirlerini kullanarak Khan'ın (1997) 170N kuralı ile 2D CA'ların bazı önemli karakterlerini incelediler. Ying ve ark. (2008) $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde 2D CA lar için verilen bir konfigürasyonun hangi durumda Garden Of Eden olacağını belirlediler ve Garden Of Eden sayısını bulmak için bir algoritma verdiler.

Şimdiye kadar yapılan çalışmaların hepsinde $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde 2D CA lar incelenmiştir. Ne yazık ki $\mathbb{Z}_3$ cismi üzerinde 2D CA henüz çok iyi incelenmemiştir. Şiap ve ark. (2009), $\mathbb{Z}_3$ cismi üzerinde bazı özel kurallarla 2D CA'ların karakterizasyonları ile ilgili bir çalışmayı bildiri olarak sundular. İlgili çalışmada 2460N ve 2460P özel kurallarının periyodik ve sıfır sınır şart altında bazı karakterizasyonları incelemişlerdir. İlgili çalışma tezimiz için bir temel teşkil edecektir.

Akın ve ark. (2009) $\mathbb{Z}_3$ cismi üzerinde CA'ların özel bir hybrid dönüşümünün karakterizasyonunun en genel halini verdiler.

Şiap ve ark. (2009) $\mathbb{Z}_3$ cismi üzerinde 2460N kuralı ile üretilen 2D CA'ların öngörüntüsü altında verilen herhangi bir konfigürasyonun Garden of Eden (GOE) sayısını elde ettiler.

Bu tezde $\mathbb{Z}_2$ üzerinde 2D CA'ların çalışılmış olan karakterizasyonları irdelenerek elde edilen sonuçlar $\mathbb{Z}_3$ cismi için genelleştirilecektir.

Şimdi bir yerel kural yardımıyla üretilen bir boyutlu CA'ların tanımını verelim.

1.1. Ana Kavramlar

$\mathbb{Z}_m = \{0,1,2,...,m-1\}$ halkası verilsin. $x = (x_n)_{n=-\infty}^{n=\infty}$ iki taraflı sonsuz bir dizi olsun. Bu şekildeki dizilerin uzayı $\mathbb{Z}_m^{\mathbb{Z}}$ ile gösterilir. Yarıçapı r olan f lokal kuralı $f:\mathbb{Z}_m^{2r+1} \to \mathbb{Z}_m$ olmak üzere $f(x_{-r},\ldots,x_r) = \left(\sum_{i=-r}^{i=r} a_i x_i\right)(\operatorname{mod} m)$ ile tanımlansın. Bu f lokal kuralı ile üretilen $F:\mathbb{Z}_m^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}_m^{\mathbb{Z}}$ dönüşümüne toplamsal (additive) CA denir. Bu dönüşüm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$Fx = (y_n)_{n=-\infty}^{n=\infty}, y_n = f\left(x_{n-r},\ldots,x_{n+r}\right) = \left(\sum_{i=-r}^{i=r} a_i x_{n+i}\right)(\operatorname{mod} m).$$

(1.1.1)

2D CA'e giriş yapmadan önce bir boyutlu CA üzerinde kısa bir bilgi verelim. $\mathbb{Z}_2$ üzerinde tanımlanan bir boyutlu CA yapısı her birinin değerini 0 veya 1 olarak kabul edilen hücre veya blokların bir örgüsü olarak düşünülebilir (Das ve ark., 1990).

Eğer $r=1$ kabul edilirse, bu durumda bir hücrenin bir sonraki durumu kendisine ve her iki komşusuna bağlı olarak düşünülebilir. Hücreler yalnız yerel komşuluğa bağlı belirleyici kurallara göre ayrık zaman dilimlerinde gelişme gösterir.

Matematiksel olarak *i*. hücrenin bir sonraki geçiş durumu (*i*-1)., *i*. ve (*i*+1). hücrelerin hali hazırdaki durumunun bir fonksiyonu olarak temsil edilebilir. f yerel kuralı ile üretilen bir CA

$$q_i\left(t+1\right)= f\,(q_{i-1}(t), q_i(t), q_{i+1}(t))$$

olarak verilir (Khan ve ark., 1997).

Eğer bir hücrenin gelecek durum fonksiyonu bir doğruluk tablosu formunda ifade edilirse, sonucun ondalık eşdeğer kısmı, hücrenin kural sayısı olarak adlandırılır.

Komşuluk Durumu	:	111	110	101	100	011	010	001	000	
Gelecek Durum	:	0	1	0	1	1	0	1	0	kural 90
Gelecek Durum	:	0	1	1	1	1	0	0	0	kural 120

Yukarıda verdiğimiz iki CA kuralı için 2. ve 3. satırlar (t+1). anda i. hücrenin karşılık gelen durumlarını verirken en üstteki satır t. anda 3 komşu hücrenin mümkün olan tüm sekiz durumunu verir. Şimdi sonraki bölümlerde kullanacağımız tanımları verelim. Bundan sonraki tanımlarımız 2D CA lar için göz önüne alınmaktadır.

1.1.1. Tanım: Eğer sonlu 2D CA konfigürasyonun m satır ve n sütunlardan oluşan bütün hücrelerine aynı kural uygulanırsa o zaman CA' ya tekdüze veya düzenli CA denir (Khan ve ark., 1997).

1.1.2. Tanım: Eğer sonlu bir 2D CA konfigürasyonunun farklı hücrelerine farklı kurallar uygulanırsa bu CA' ya hybrid (melez) CA denir (Khan ve ark., 1997).

1.1.3. Tanım: En yakın kenar hücreleri 0 olan 2D CA ya sıfır sınır şartlı (null boundary condition) CA lar denir ve bu durum kısaca N ile gösterilir (Khan ve ark., 1997).

1.1.4. Tanım: En yakın kenardaki hücreleri birbiri ile bitişik olan 2D CA ya periyodik sınır şartlı (periodic boundary condition) CA lar denir ve bu durum kısaca P ile gösterilir (Khan ve ark., 1997).

1.1.5. Tanım: $A \neq \emptyset$ bir küme ve Δ, A da bir ikili işlem olsun. (A,Δ) cebirsel yapısına aşağıdaki aksiyomaları sağlıyorsa bir grup denir:

i. Δ, A da bir ikili işlemdir.

ii. Δ İşleminin A da birleşme özelliği vardır. Yani; $\forall a,b \in A$ için $a\Delta(b\Delta c) = (a\Delta b)\Delta c$

iii. Δ İşleminin A da birim elemanı vardır. Yani; $\forall a \in A$ için $a\Delta e = e\Delta a = a$ olacak şekilde $\exists e \in A$ vardır.

iv. Δ işlemine göre A daki her elemanın tersi vardır. Yani; $\forall a \in A$ için $a\Delta a^{-1} = a^{-1}\Delta a = e$ olacak şekilde $\exists a^{-1} \in A$ vardır.

Eğer (A,Δ) bir grup ve $\forall a,b \in A$ için $a\Delta b = b\Delta a$ değişme özelliğide sağlanıyorsa gruba değişmeli veya abel grubu denir.

1.1.6. Tanım: $A \neq \emptyset$ kümesi üzerinde tanımlı ikili işlem "$+$"ve "." olsun. $(A,+,.)$ cebirsel yapısı $\forall x,y,z \in A$ için,

a) (A,+) değişmeli bir gruptur;

b) "." işleminin A da birleşme özelliği vardır. Yani; $x.(y.z) = (x.y).z$;

c) "." işleminin "$+$" işlemi üzerinde soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır. Yani, $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$, $(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$ şartlarını sağlıyorsa bu yapıya halka denir.

1.1.7. Tanım: Değişmeli ve birimli bir A halkasının sıfırdan farklı her elemanının çarpma işlemine göre tersi varsa A halkasına bir cisim denir.

1.1.8. Tanım: $A \neq \emptyset$ bir cümle ve F, reel veya karmaşık sayılar cismi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa A ya F üzerinde lineer uzay denir:

a) $(A,+)$ bir değişmeli gruptur.

b) $\forall x,y \in A$ ve $\alpha,\beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır:

b1) $\alpha \cdot x \in A$ dır.

b2) $\alpha\cdot(x+y) = \alpha\cdot x + \alpha\cdot y$

b3) $(\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$

b4) $(\alpha\cdot\beta)\cdot x=\alpha\cdot(\beta\cdot x)$

b5) $1\cdot x=x$ (Burada 1, F ' nin birim elemanıdır.)

1.1.9. Tanım: A, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve B, A'nın bir alt kümesi olsun. B kümesi lineer bağımsız ve B, A yı geriyorsa B ye F üzerinde A'nın bir bazı (tabanı) denir.

1.1.10. Tanım: A, F cismi üzerinde sıfırdan farklı bir vektör uzayı olsun. A'nın herhangi bir bazındaki vektör sayısına A'nın boyutu denir.

1.1.11. Tanım: $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ olsun. A matrisinin satır uzayının boyutuna A matrisinin satır rankı denir.

1.1.12. Tanım: $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ olsun. A matrisinin sütun uzayının boyutuna A matrisinin sütun rankı denir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1. $\mathbb{Z}_2$ Cismi Üzerinde 2-Boyutlu CA (2D CA)

Bu bölümde $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde iki boyutlu Hücresel dönüşümlerin karakterizasyonu üzerinde daha önce yapılan çalışmalar, tezin bütünlüğü ve konunun daha iyi anlaşılması açısından biraz daha genişletilerek incelenecektir. Khan ve ark. (1997) 2D CA'ların karakterizasyonlarını 170N ve 170P için incelediler. Choudhury ve ark. (2004) $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde 170N ve 170P için 2D CA'ların karakterizasyonunun en genel halini ifade ettiler.

Şimdi $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde 2D CA'ların tanımı verilsin. İki boyutlu $\mathbb{Z}^2$ tamsayı örgüsünü ve $\sigma : \mathbb{Z}^2 \to \{0,1\}$ elemanlı $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ konfigürasyon uzayı göz önüne alınsın. Bir $n \in \mathbb{Z}^2$ noktasındaki σ'nin değeri σ_n ile tanımlanabilir. $u_1, u_2, \ldots, u_s \in \mathbb{Z}^2$ farklı vektörlerinin bir sonlu kümesi ve bir $f : \{0,1\}^s \to \{0,1\}$ fonksiyonu verilsin.

$T : \Omega \to \Omega$ genel geçiş dönüşümü $(T\sigma)_n = f\left(\sigma_{n+u_1}, \ldots, \sigma_{n+u_s}\right),\ n \in \mathbb{Z}^2$ olmak üzere bir CA, (Ω, T) çifti ile tanımlanır.

Matematiksel olarak (i, j). hücrenin bir sonraki (t+1) zamandaki durumu o hücreye en yakın olan komşulukların t. zamandaki durumuna bağlıdır. Bu durum aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Khan ve ark., 1997).

$$\begin{aligned} z_{(i,j)}^{(t+1)} &= f(z_{(i,j)}^{(t)}, z_{(i+1,j)}^{(t)}, z_{(i+1,j-1)}^{(t)}, z_{(i,j-1)}^{(t)}, z_{(i-1,j-1)}^{(t)}, z_{(i-1,j)}^{(t)}, z_{(i-1,j+1)}^{(t)}, z_{(i,j+1)}^{(t)}, z_{(i+1,j+1)}^{(t)}) \\ &= (z_{(i,j)}^{(t)} + z_{(i+1,j)}^{(t)} + z_{(i+1,j-1)}^{(t)} + z_{(i,j-1)}^{(t)} + z_{(i-1,j-1)}^{(t)} + \\ &\quad z_{(i-1,j)}^{(t)} + z_{(i-1,j+1)}^{(t)} + z_{(i,j+1)}^{(t)} + z_{(i+1,j+1)}^{(t)}) \pmod 2. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Bu bölümde, Khan ve ark. (1997) nın $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde bazı 2D CA' ların karakterizasyonunu incelerken kullandıkları yöntemler açıklanarak, anlam bütünlüğünün sağlanması ve konunun daha iyi anlaşılabilmesi için bu işlemler biraz daha ayrıntılı olarak incelenmektedir. Khan ve ark. (1997) nın verdiği bu yöntem aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

İki boyutlu en yakın komşuluklu lineer CA da, CA'nın belirli bir hücresinin gelecek durumu, hücrenin hali hazırdaki durumundan ve ona en yakın olan sekiz komşu hücreden etkilenir. Farklı bağımlılıklar çeşitli CA kuralları ile hesaplanır. Bu tezde sadece lineer kurallar göz önüne alınmaktadır. Özel bir kural ile bu işlemler yapılabilir.

Çizelge 2.1. Komşuluklara göre kural numaraları

64	128	256
32	1	2
16	8	4

Çizelge 2.1.'deki merkez kutu, hücrenin hali hazırdaki durumunu ve diğer bütün kutular o hücrenin en yakın sekiz komşuluğunu belirtirler. Her bir kutunun içindeki numara, hali hazırdaki hücrelerin belirli komşulukları ile iş birliği yaparak kendi kural numarasını belirler.

Eğer merkez hücre sadece kendisine bağlı ise bu durum "Kural 1" olarak adlandırılır. Eğer merkez hücre sadece tepesindeki komşu hücreye bağlı ise buna "Kural 128"denir.

Bir hücre, iki veya daha fazla komşu hücreye bağlı ise o zaman kural numarası ilgili hücrelerin sayılarının aritmetik toplamıdır. Örneğin 2D CA Kural 171N (128+32+8+2+1), sıfır sınır şartları altında merkez hücrenin beş komşusuna (üst, sol, sağ, alt ve kendisi) bağlıdır. Hâlbuki Kural 171P, periyodik sınır şartı (Periodic Boundary Condition) altında aynı komşuluklara bağlıdır.

2D CA' ların davranışı bir matematiksel model ile analiz edilir. Hücrelerin satır ve sütun bağımlılıklarını elde etmek için;

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

temel matrisler kullanılır.

Aşağıdaki Teorem, X_t konfigurasyonunun belli bir 2D CA altında ötelemesi ile elde edilen yeni X_{t+1} konfigurasyonunu nasıl tespit edildiğini belirtmesi açısından önemlidir. Ayrıca, 2D CA'ların karakterizasyonları için de son derece gereklidir.

2.1.1. Teorem: (1,2,4,8,16,32,64,128,256) kuralları ile elde edilen 2D CA lar X_t konfigurasyonunu öteleyerek, X_{t+1} konfigurasyonunu aşağıdaki şekilde temsil ederler (Khan ve ark., 1997):

Kural 1 $\Rightarrow [X_{t+1}] = [X_t]$,

Kural 2 $\Rightarrow [X_{t+1}] = [X_t][T_2]$,

Kural 4 $\Rightarrow [X_{t+1}] = [T_1][X_t][T_2]$,

Kural 8 $\Rightarrow [X_{t+1}] = [T_1][X_t]$,

Kural 16 $\Rightarrow [X_{t+1}] = [T_1][X_t][T_1]$,

Kural 32 $\Rightarrow [X_{t+1}] = [X_t][T_1]$,

Kural 64 $\Rightarrow [X_{t+1}] = [T_2][X_t][T_1]$,

Kural 128 $\Rightarrow [X_{t+1}] = [T_2][X_t]$,

Kural 256 $\Rightarrow [X_{t+1}] = [T_2][X_t][T_2]$.

İspat:

$$[X_t] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ ($a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ bileşenleri 0 veya 1 değerini alır.)

t zamandaki 3×3 tipinde bir konfigürasyon olsun.

a) $\left[X_{t+1}\right]$'in $\left[X_t\right]$ ye eşit olduğu durum Kural 1 olarak bilinir. Yani;

Kural 1: $\left[X_{t+1}\right]=\left[X_t\right]=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

b) $\left[X_t\right]$ yi $\left[T_2\right]$ ile soldan çarparak bir CA'nın (t+1) inci zamandaki durumunu elde ederiz ki bu Kural 2 olarak bilinir. Gerçekten,

$$\left[X_{t+1}\right]=\left[X_t\right]\left[T_2\right]=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \end{pmatrix}.$$

c) $\left[X_t\right]$ yi $\left[T_1\right]$ ile sağdan çarparak bir CA'nın (t+1) inci zamandaki durumunu elde ederiz ki bu Kural 8 olarak bilinir. Gerçekten,

$$\left[X_{t+1}\right]=\left[T_1\right]\left[X_t\right]=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) $\left[X_t\right]$ yi $\left[T_1\right]$ ile önce soldan çarparak ve daha sonra sağdan $\left[T_2\right]$ ile çarparak bir CA'nın (t+1). zamandaki durumunu elde ederiz ki bu Kural 4 olarak bilinir.

Gerçekten,

$$\left[X_{t+1}\right]=\left[T_1\right]\left[X_t\right]\left[T_2\right]=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Benzer şekilde diğer durumlarda gösterilebilir.

Bu teoremin ispatında başka bir metotta kullanılabilir. Bu da bir kuralı birden fazla hücre ile ilişkilendirerek yani bir veya daha fazla kural ile birleştirerek de gösterilebilir. Bunun için aşağıdaki teorem verilebilir:

2.1.2. Teorem: İkinci bir kural ile oluşturulan bir CA'nın bir sonraki geçiş durumu, ilgili başlangıç kurallarının matrislerinin modül 2 ye göre toplamı olarak temsil edilebilir (Khan ve ark., 1997).

Teoremin ispatı bir örnekle gösterilebilir. Kural 3'ü Kural 1 ve Kural 2' nin parça (modül) 2 ye göre toplamı olarak yazılırsa CA 'nın bir sonraki geçiş durumu;

Kural 3=Kural 1+Kural 2, $[X_{t+1}]=[X_t]+[X_t][T_2]$ olarak temsil edilir.

Benzer olarak Kural 170; Kural 2, Kural 8, Kural 32 ve Kural 128 'in modül 2 ye göre toplamı olarak yazılır. Bu durumda CA'nın bir sonraki geçiş durumu;

Kural 170=Kural 2+Kural 8+Kural 32+Kural 128 olarak yazılır ve

$$\begin{aligned}[X_{t+1}] &= [X_t][T_2]+[T_1][X_t]+[X_t][T_1]+[T_2][X_t] \\ &= [X_t][T_1+T_2]+[T_1+T_2][X_t] \\ &= [X_t][S]+[S][X_t]\end{aligned}$$

(burada $[S]=[T_1+T_2]$ olduğu kabul edilir.)

Bunu açıklamak için bir örnek ele alalım:

$[X_t]=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 3×3 tipinde bir konfigürasyon olsun. Şimdi bu konfigürasyonu sıfır sınır şartlı Kural 3 ile tanımlanan 2D CA altındaki görüntüsünü elde eldim.

Kural 3=Kural 1+Kural 2,

$$[X_{t+1}] = [X_t] + [X_t][T_2]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Burada $[X_t]$ keyfi olarak seçilmiştir. Benzer olarak;

Kural 170=Kural 2+Kural 8+Kural 32+Kural 128 olarak yazılır ve

$$[X_{t+1}] = [X_t][S] + [S][X_t]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Şimdi 2D CA’ların karakteristik davranışları incelenebilir.

2.2. 2D CA' ların Temsili Matrislerinin Elde Edilişi

İki boyutlu hücresel dönüşümlerin temsili matrislerini incelerken kuralların her birini T ile gösterilen bir dönüşüme çevrilebilir. Bu durum aşağıdaki şekilde ifade edilebilir (Khan ve ark., 1997).

$$T_{m\times n}(X)=[T]_{mn\times mn}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}_{mn\times 1}=\begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \\ \vdots \\ X_m' \end{bmatrix}_{mn\times 1}.$$

Bu T matrisi 2D CA' ların temsil matrisi olarak adlandırılır.

Burada $X_1, X_2, \ldots X_m$ X ' in satırları ve $X'_1, X'_2, \ldots X'_m$ de X 'in ürettiği bir sonraki durumun yani X' ü nün satırlarıdır.

2.2.1. Verilen keyfi bir R kuralı İçin 2D CA'ların temsili matrislerinin bulunması

Biraz sonra vereceğimiz Teorem ile T dönüşümü altında verilen keyfi bir R kuralı için düzgün olarak uygulanmış bütün 2D CA hücreleri formülüze edilmeye çalışılacaktır.

2.2.1.1. Teorem: Herhangi bir R kuralı için iki boyutlu dönüşüm matrisi aşağıdaki şekilde temsil edilebilir (Khan ve ark., 1997):

$$T_R=\begin{pmatrix} D & U & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ L & D & U & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & D & U & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & L & D & U \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & L & D \end{pmatrix}_{mn\times mn}.$$

Burada D,L,U $n \times n$ tipinden aşağıdaki matrislerden biridir:

$$(0),(I),(T_1),(T_2),(I+T_1),(I+T_2),(S) \text{ ve } (I+S).$$

İspat: Yukarıdaki temsil matrisin ilk sütununu elde etmek için, aşağıda verilen doğal baz kullanılabilir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}.$$

Şimdi R kuralı ilk satırdan başlayarak her bir hücreye uygulanır. İspatı yaparken

$$T(X)_{m \times n} = [T]_{mn \times mn} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}_{mn \times 1} = \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \\ \vdots \\ X_m' \end{bmatrix}_{mn \times 1}$$

dönüşümünden faydalanılır. İlk olarak T_R'nin ilk sütunu elde edilir. Şimdi doğal taban matrisindeki bir bileşeni sağa doğru kaydırılıp elde edilen ikinci doğal taban vektörüne, bir kez daha R kuralı uygulanır. Bu seferde T_R'nin ikinci kolonu elde edilir. Bu şekilde devam edilirse geriye kalan tüm sütunlar elde edilir.

Teoremin daha iyi anlaşılabilmesi küçük örneklerdeki uygulaması aşağıda verilmiştir.

2.2.1.2. Örnek: 3×3 tipindeki 2D CA'nın boyutunu hesap edelim. Bütün hücreler üzerinde uygulanmış Kural 2 ye karşılık gelen T matrisini elde etmek için aşağıdaki adımları takip edilir. Kural 2 ye karşılık gelen T matrisinin 1. sütununu elde etmek için 3×3 tipindeki doğal taban matrisleri kullanılır. Örneğin, T'nin 1. sütununu elde etmek için aşağıdaki doğal taban matrisi kullanılır.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times3} .$$

Şimdi 2D CA 'nın bir durumu gibi, doğal taban matrisi dikkate alınarak T_{R_2} 'nin (1.) ilk sütununu elde etmek için Kural 2 uygulanır. Önce Kural 2 hatırlansın.

Kural 2; $\left[X_{t+1}\right]=\left[X_t\right]\left[T_2\right]=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \end{pmatrix}.$

Şimdi adımlar uygulayanabilir. Önce; T dönüşümü düşünülsün. T dönüşümü Kural 2 ye uyarlanabilir.

$$T(X)_{m\times n} = [T]_{mn\times mn}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}_{mn\times1} = \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \\ \vdots \\ X_m' \end{bmatrix}_{mn\times1}$$

$$=[T]_{mn\times mn}.\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_{3\times1} = \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix}_{3\times1} .$$

Burada a_1, a_2, a_3 X 'in satırları a'_1, a'_2, a'_3 ise X 'in bir sonraki durumu olan X' 'nün satırlarıdır. $a_1=\left[a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}\right]^T_{1\times3}$, $a_2=\left[a_{21} \; a_{22} \; a_{23}\right]^T_{1\times3}$, $a_3=\left[a_{31} \; a_{32} \; a_{33}\right]^T_{1\times3}$ şeklindedir. Böylece

$$T(X)_{3\times 3}=[T]_{9\times 9}\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{bmatrix}_{9\times 1} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{13} \\ 0 \\ a_{22} \\ a_{23} \\ 0 \\ a_{32} \\ a_{33} \\ 0 \end{bmatrix}_{9\times 1}$$

elde edilir.

Buradan T dönüşümü yukarıda verilen teoremden faydalanılarak bulunabilir. Yani, aşağıdaki doğal taban matrisini kullanılıp Kural 2 ye karşılık gelen T dönüşümü bulunur.

2.2.1.3. Not: T dönüşümün temsil matrislerini elde etmek için taban vektörlerinin görüntülerini temsil matrisin sütunları olarak alındığında matris elde edilmiş olur.

Yani;

$T:V\to W,\ v\in V$ ve $v=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$ ise $T(v)=a_1T(e_1)+a_2T(e_2)+a_3T(e_3)$ şeklindedir. Buradan taban vektörlerinin görüntülerini temsil matrisin sütunları olarak alındığında

$$\begin{pmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \end{pmatrix}_{3\times 1}.\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=T(v)$$

matrisi elde edilmiş olur ki bu da istenilen matristir. Aşağıdaki doğal taban matrisini kullanarak Kural 2 ye karşılık gelen T dönüşümü bulunabilir.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}.$$

İlk olarak doğal taban matrisinin görüntüleri temsil matrisin sütunları olarak alındığında ve daha sonra Kural 2 uygulandığında

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dönüşümü elde edilir.

Şimdi doğal taban matrisindeki 1 sağa doğru kaydırılıp bir kez daha Kural 2 uygulansın. Bu durumda

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

bulunur.

T dönüşümü elde edilene kadar her seferinde 1 sağa doğru kaydırılıp Kural 2 uygulanırsa

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

olarak bulunur.

Şimdi elde edilen T_{R_2} kuralı (yani Kural 2 ye karşılık gelen T dönüşümü) yazılabilir:

$$\left(T_{R_2}\right)_{9\times 9}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}_{9\times 9}=\begin{pmatrix}T_1&O_3&O_3\\O_3&T_1&O_3\\O_3&O_3&T_1\end{pmatrix}_{9\times 9}.$$

Böylece elde edilen bu matrise ilgili 2D sonlu CA ya karşılık gelen temsili matris denilir. Bu tezimizde, bazı kurallarla üretilen 2D sonlu CA lar tarafından elde edilen temsili matrislerin bulunması en önemli amaçlarımızdan biridir. Bu temsil mat rislerinin elde edilmesini kısaca karekterizasyon olarak ifade etmekteyiz.

Lineer cebirden biliyoruzki T dönüşümümüzün satır uzayının boyutu bulunurken matrisimizin boyutundan rankı çıkarılarak hesaplanır. Yani; Boy(T_{R_2}) = $\text{Boy}\left(V\right)$-$\text{Rank}\left(T_{R_2}\right)$=9–6=3 olur.

2.2.2. 170 kuralı'nın temsili matrisinin bulunması

Bazı özel dönüşümler için çok ilginç sonuçların bazıları verilebilir. Bu kısımda Kural 170' in temsili matrisi incelenecektir. Kural 170'in temsili matrisini sıfır sınır şartı ve periyodik sınır şartı altında daha önce incelenmiş ve bu durumlarda genelleme yapılmıştır (Khan ve ark., 1997) ve (Choudhury ve ark., 2004). Bu tezde konunun bütünlüğü bakımından Kural 170 sıfır sınır şartı ve periyodik sınır şartı altında biraz daha ayrıntılı olarak incelenecektir. Bunu yapmadan önce ilk olarak Kural 170 ifade edilsin.

Çizelge 2.2. Kural 170

64	**<u>128</u>**	256
<u>32</u>	1	**<u>2</u>**
16	**<u>8</u>**	4

Çizelge 2.2.'deki altı çizili kutucukların içindeki rakamların toplamı Kural 170' i verir. Kura170=Kural 2+Kural 8+Kural 32+Kural 128 olarak yazılır ve dikkat edilecek olursa baklava dilimi şeklindedir. Şimdi Kural 170N ye karşılık gelen temsili matrisler bulunabilir. Bunu yaparken m (satır) ve n (sütun) lara çeşitli değerler verilerek onların temsili matrisleri sıfır sınır şartı altında bulunabilir.

Bir kaç örnek verdikten sonra 170N durumu en genel halde ifade edilecektir. Daha sonra 170P ye karşılık gelen temsili matrisler, yine m (satır) ve n (sütun) lara değerler verilerek periyodik sınır şartı altında bulduktan sonra 170P'nin de en genel halde temsili matrisleri ifade edilecektir.

2.2.3. 170N kuralı ile üretilen sonlu 2D CA'nın temsili matrisi

170N kuralına karşılık gelen temsili matrislerin en genel halini bulmak için yukarıda belirtilen m ve n değerleri özelleştirilerek temsili matrisler bulunduktan sonra en genel hali verilecektir. Birkaç örnek üzerinde çalışmalar aşağıda verilmiştir. Bu kesimde sadece 170N kuralına karşılık gelen temsili matrisleri bulacağız.

2.2.3.1. Örnek: Bu örnekte $m = 2$ ve $n = 2$ alarak 170N'nin temsili matrisi bulunabilir. Bunun için ilk önce sıfır sınır şartı altında 2×2 tipinde hücrelerden oluşmuş 2D CA' nın konfigürasyonu yazalım. Daha sonra bu hücrelere 170 kuralı uygulayalım.

Çizelge 2.3. 2x2 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

0	0	0	0
0	x_{11}	x_{12}	0
0	x_{21}	x_{22}	0
0	0	0	0

Çizelge 2.3.'de 170N kuralı uygulandığında T dönüşümü altında yeni bir konfigürasyon elde edilir ve bu konfigürasyon aşağıdaki gibidir:

$$x_{21} + x_{12} = y_{11}$$

$$x_{11} + x_{22} = y_{12}$$

$$x_{11} + x_{22} = y_{21}$$

$$x_{12} + x_{21} = y_{22} \quad .$$

Şimdi doğal taban matrisini kullanarak bunlara karşılık gelen T temsili matrisi bulalım.

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Buradan elde edilen matris; $T_{R_{170N}}=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}_{4\times4}=\begin{pmatrix}S_2&I_2\\I_2&S_2\end{pmatrix}_{4\times4}$ şeklindedir.

2.2.3.2. Örnek: $m=3$ ve $n=3$ alarak 170N kuralına karşılık gelen temsili matrisi bulalım. Bunun için ilk önce sıfır sınır şartı altında 3×3 tipinde hücrelerden oluşmuş 2D CA'nın konfigürasyonu yazılsın. Daha sonra bu hücrelere 170N kuralı uygulansın.

Çizelge 2.4. 3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

0	0	0	0	0
0	x_{11}	x_{12}	x_{13}	0
0	x_{21}	x_{22}	x_{23}	0
0	x_{31}	x_{32}	x_{33}	0
0	0	0	0	0

Şimdi Çizelge 2.4.'de 170N kuralı uygulandığında T dönüşümü altında yeni bir konfigürasyon elde edilir ve bu konfigürasyon aşağıdaki gibidir:

$$x_{21}+x_{12}=y_{11}$$

$$x_{11}+x_{22}+x_{13}=y_{12}$$

$$x_{12}+x_{23}=y_{13}$$

$$x_{11}+x_{31}+x_{22}=y_{21}$$

$$x_{12}+x_{21}+x_{32}+x_{23}=y_{22}$$

$$x_{13}+x_{22}+x_{33}=y_{23}$$

$$x_{21} + x_{32} = y_{31}$$

$$x_{22} + x_{31} + x_{33} = y_{32}$$

$$x_{23} + x_{32} = y_{33} \ .$$

Şimdi doğal taban matrisini kullanılarak bunlara karşılık gelen T temsili matrisi yazalım.

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Eğer elde edilen sütun matrisleri sırasıyla bitiştirilirse, bu durumda karşılık gelen temsili matris aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$T_{R_{170N}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{9\times 9} = \begin{pmatrix} S_3 & I_3 & O_3 \\ I_3 & S_3 & I_3 \\ O_3 & I_3 & S_3 \end{pmatrix}_{9\times 9}.$$

2.2.3.3 Örnek: Şimdide kare olmayan bir konfigürasyon yani $m = 4, n = 3$ alalım. İlk önce sıfır sınır şartı altında 4×3 tipinde hücrelerden oluşmuş 2D CA'nın konfigürasyonu yazılır ve daha sonra bu hücrelere 170N kuralı uygulanır.

Çizelge 2.5. 4x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

0	0	0	0	0
0	x_{11}	x_{12}	x_{13}	0
0	x_{21}	x_{22}	x_{23}	0
0	x_{31}	x_{32}	x_{33}	0
0	x_{41}	x_{42}	x_{43}	0
0	0	0	0	0

Şimdi Çizelge 2.5.'de 170N kuralı uygulandığında *T* dönüşümü altında yeni bir konfigürasyon elde edilir ve bu konfigürasyon aşağıdaki gibidir:

$$x_{21} + x_{12} = y_{11}$$

$$x_{11} + x_{22} + x_{13} = y_{12}$$

$$x_{12} + x_{23} = y_{13}$$

$$x_{11} + x_{31} + x_{22} = y_{21}$$

$$x_{12} + x_{21} + x_{32} + x_{23} = y_{22}$$

$$x_{13}+x_{22}+x_{33}=y_{23}$$

$$x_{21}+x_{41}+x_{32}=y_{31}$$

$$x_{22}+x_{31}+x_{42}+x_{33}=y_{32}$$

$$x_{23}+x_{32}+x_{43}=y_{33}$$

$$x_{31}+x_{42}=y_{41}$$

$$x_{32}+x_{41}+x_{43}=y_{42}$$

$$x_{33}+x_{42}=y_{43}\ .$$

Doğal taban matrisini kullanarak bunlara karşılık gelen sütun vektörlerini yazalım.

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Böylece yukarıdaki örneklerde de olduğu gibi elde edilen sütun matrisleri yan yana eklenirse $m=4$ ve $n=3$ için 170N kuralına karşılık gelen temsili matris aşağıdaki şekilde bulunur:

$$T_{R_{170N}}=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0\end{pmatrix}_{12\times12}=\begin{pmatrix}S_3&I_3&O_3&O_3\\I_3&S_3&I_3&O_3\\O_3&I_3&S_3&I_3\\O_3&O_3&I_3&S_3\end{pmatrix}_{12\times12}.$$

Eğer $m=4,\ n=4$ olarak alınırsa temsili matris aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$T_{R_{170N}} = \begin{pmatrix} S_4 & I_4 & O_4 & O_4 \\ I_4 & S_4 & I_4 & O_4 \\ O_4 & I_4 & S_4 & I_4 \\ O_4 & O_4 & I_4 & S_4 \end{pmatrix}_{16\times 16}.$$

Keyfi *m* ve *n* için $\left(T_{170N}\right)_{mn\times mn}$ temsili matrisinin genel formu aşağıdaki gibidir:

$$\left(T_{170N}\right)_{mn\times mn} = \begin{pmatrix} S & I & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ I & S & I & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & S & I & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & S & I & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & I & S & I \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & I & S \end{pmatrix}.$$

Blok alt matrislerin her biri $n\times n$ tipinde kare matristir ve S matriside aşağıdaki gibidir:

$$S_{n\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2.4. 170P kuralı ile üretilen sonlu 2D CA'nın temsili matrisi

170P kuralına karşılık gelen temsili matrislerin en genel halini bulmak için yukarıda belirtilen m ve n değerleri özelleştirilerek temsili matrisler bulunduktan sonra en genel hali verilecektir. Şimdi birkaç örnek verilerek 170P'nin temsili matrisinin en genel halini bulalım.

2.2.4.1. Örnek: $m=3$ ve $n=3$ alarak 170P kuralına karşılık gelen temsili matrisi bulalım. Bunun için ilk önce periyodik sınır şartı altında 3×3 tipinde hücrelerden oluşmuş 2D CA'nın konfigürasyonu yazılsın. Daha sonra bu hücrelere 170P kuralı uygulansın.

Çizelge 2.6. 3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfügürasyon

x_{33}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{31}
x_{13}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{11}
x_{23}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{21}
x_{33}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{31}
x_{13}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{11}

Çizelge 2.6.'da 170P kuralı uygulandığında T dönüşümü altında yeni bir konfigürasyon elde edilir, bu konfigürasyon aşağıdaki gibidir.

$$x_{13}+x_{31}+x_{21}+x_{12}=y_{11}$$

$$x_{11}+x_{22}+x_{13}+x_{32}=y_{12}$$

$$x_{33}+x_{12}+x_{23}+x_{11}=y_{13}$$

$$x_{31}+x_{23}+x_{11}+x_{22}=y_{21}$$

$$x_{12}+x_{21}+x_{32}+x_{23}=y_{22}$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{33}+x_{13}=y_{23}$$

$$x_{11}+x_{33}+x_{21}+x_{32}=y_{31}$$

$$x_{31} + x_{12} + x_{33} + x_{22} = y_{32}$$

$$x_{32} + x_{13} + x_{31} + x_{23} = y_{33} \ .$$

Şimdi doğal taban matrisini kullanarak bunlara karşılık gelen T_{170P} temsili matrisi bulunabilir.

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Bir önceki kesimde olduğu gibi elde edilen sütun matrisleri sırasıyla birbirine eklenirse $T_{R_{170P}}$ temsili matrisi aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$T_{R_{170P}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{9\times 9} = \begin{pmatrix} S^*_3 & I_3 & I_3 \\ I_3 & S^*_3 & I_3 \\ I_3 & I_3 & S^*_3 \end{pmatrix}_{9\times 9} .$$

2.2.4.2. Örnek: Şimdi kare olmayan bir durumu $m = 4$ ve $n = 3$ için inceleyelim. O halde ilk önce periyodik sınır şartı altında 4×3 tipinde hücrelerden oluşmuş 2D CA'nın konfigürasyonu yazılsın. Daha sonra bu hücrelere 170P kuralı uygulanarak temsili matris yazılacaktır.

Çizelge 2.7. 4x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

x_{43}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{41}
x_{13}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{11}
x_{23}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{21}
x_{33}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{31}
x_{43}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{41}
x_{13}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{11}

Çizelge 2.7.'de 170P kuralı uygulandığında T dönüşümü altında yeni bir konfigürasyon elde edilir ve bu konfigürasyon düzenlenirse

$$x_{13} + x_{41} + x_{21} + x_{12} = y_{11}$$

$$x_{11} + x_{22} + x_{13} + x_{42} = y_{12}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{23} + x_{43} = y_{13}$$

$$x_{31} + x_{23} + x_{11} + x_{22} = y_{21}$$

$$x_{12} + x_{21} + x_{32} + x_{23} = y_{22}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{33} + x_{13} = y_{23}$$

$$x_{41} + x_{33} + x_{21} + x_{32} = y_{31}$$

$$x_{31} + x_{22} + x_{33} + x_{42} = y_{32}$$

$$x_{32} + x_{23} + x_{43} + x_{31} = y_{33}$$

$$x_{43} + x_{11} + x_{42} + x_{31} = y_{41}$$

$$x_{41} + x_{12} + x_{43} + x_{32} = y_{42}$$

$$x_{42} + x_{13} + x_{41} + x_{33} = y_{43} \ .$$

denklemleri elde edilir.

Burada doğal taban matrisi kullanılarak bunlara karşılık gelen $T_{R_{170P}}$ temsili matrisi bulunabilir.

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\\1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\1\\1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Yukarıdaki gibi düşünülürse, bu durumda temsili matris aşağıdaki gibi bulunur:

$$T_{R_{170P}}=\begin{pmatrix}0&1&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1&0\\1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0\\0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1\\0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&0\end{pmatrix}_{12\times12}=\begin{pmatrix}S^*{}_3&I_3&O_3&I_3\\I_3&S^*{}_3&I_3&O_3\\O_3&I_3&S^*{}_3&I_3\\I_3&O_3&I_3&S^*{}_3\end{pmatrix}_{12\times12}.$$

2.2.4.3. Örnek: Şimdi m sayısı n den küçük olsun yani, $m=3$ ve $n=4$ alalım. İlk önce periyodik sınır şartı altında 3×4 tipinde hücrelerden oluşmuş 2D CA‘nın konfigürasyonu çizelge 2.2.4.3.1 deki gibi düzenlenebilir.

Çizelge 2.8. 3x4 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

x_{34}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{31}
x_{14}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{11}
x_{24}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{21}
x_{34}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{31}
x_{14}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{11}

Çizelge 2.8.'de 170P kuralı uygulanırsa; o zaman T dönüşümü altında yeni bir konfigürasyon elde edilir ve bu konfigürasyonun elemanları aşağıdaki gibidir:

$$x_{14}+x_{31}+x_{21}+x_{12}=y_{11}$$
$$x_{11}+x_{22}+x_{13}+x_{32}=y_{12}$$
$$x_{14}+x_{12}+x_{23}+x_{33}=y_{13}$$
$$x_{34}+x_{13}+x_{11}+x_{24}=y_{14}$$
$$x_{11}+x_{22}+x_{31}+x_{24}=y_{21}$$
$$x_{21}+x_{32}+x_{23}+x_{12}=y_{22}$$
$$x_{13}+x_{33}+x_{24}+x_{22}=y_{23}$$
$$x_{34}+x_{21}+x_{23}+x_{14}=y_{24}$$
$$x_{32}+x_{11}+x_{34}+x_{21}=y_{31}$$
$$x_{33}+x_{22}+x_{12}+x_{31}=y_{32}$$
$$x_{34}+x_{13}+x_{23}+x_{32}=y_{33}$$
$$x_{24}+x_{14}+x_{31}+x_{33}=y_{34}\ .$$

Yukarıdaki mantıktan hareketle doğal taban matrisi kullanılarak bunlara karşılık gelen $T_{R_{170P}}$ temsili matrisi bulunabilir.

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\\0\\1\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\1\\0\\1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Buradan elde edilen matris aşağıdaki şekildedir:

$$T_{R_{170P}} = \begin{pmatrix} 0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0 \\ 1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&1&0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&0 \end{pmatrix}_{12\times12} = \begin{pmatrix} S^*{}_4 & I_4 & I_4 \\ I_4 & S^*{}_4 & I_4 \\ I_4 & I_4 & S^*{}_4 \end{pmatrix}_{12\times12}.$$

Genel formu elde edebilmek için $m = 4,\ n = 4$ karesel bir konfigürasyon alınırsa 2D CA‘nın konfigürasyonunun T dönüşümüne karşılık gelen temsili matrisi

$$T_{R_{170P}} = \begin{pmatrix} S^*{}_4 & I_4 & O_4 & I_4 \\ I_4 & S^*{}_4 & I_4 & O_4 \\ O_4 & I_4 & S^*{}_4 & I_4 \\ I_4 & O_4 & I_4 & S^*{}_4 \end{pmatrix}_{16\times16}.$$

olarak bulunur. Şimdi genellemeye gidebiliriz. Verilen herhangi bir m ve n için $\left(T_{170P}\right)_{mn\times mn}$ temsili matrisinin genel formu aşağıdaki gibidir:

$$\left(T_{170P}\right)_{mn\times mn} = \begin{pmatrix} S^* & I & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & I \\ I & S^* & I & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & S^* & I & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & S^* & I & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & I & S^* & I \\ I & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & I & S^* \end{pmatrix}.$$

Ayrıntılı bilgi için Choudhury ve Dihidar (2004) bakınız.

Blok alt matrislerin her biri $n \times n$ tipinde kare matristir ve S^* matrisi

$$S^*_{n\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

olarak bulunur. Choudhury ve Dihidar (2004)’e bakınız.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu çalışmada, uygulanan temel yöntem şudur; Bu konuda yapılmış olan bütün çalışmalar internet üzerinden ve değişik kütüphanelerden veya bizzat çalışmanın yazarından istenmek suretiyle temin edilmiştir.

Bu elde edilen kaynaklar değerlendirilerek yapılan çalışmalara ilave sonuçlar elde edilmeye çalışılmıştır. Özellikle Khan ve ark. (1997) ve Choudhury ve ark. (2004) çalışmalarından yararlanılmıştır. Khan ve ark. (1997) $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde 2D CA'ların temsili matrislerinin elde edilişini 170N ve 170P özel kuralı ile incelemişlerdir. Aynı zamanda Choudhury ve ark. (2004) bazı özel kurallar için 2D CA'ların temsili matrislerinin en genel halini vermişlerdir.

Bu tezde, Khan ve ark. (2004) nın 170P ve 170N için incelediği 2D CA'ların temsili matrisleri, konunun daha iyi anlaşılması için biraz daha genişletilerek tekrar incelendi. Bu tezde ilk kez olarak Khan ve arkadaşlarının (2004) lineer CA'ların temsili matrislerini incelemek için yaptığı çalışmalardan faydalanılarak $\mathbb{Z}_3$ cismi üzerinde 2460N ve 2460P özel kurallarına karşılık gelen temsili matrisler incelenildi ve 2460P için bazı özel durumlara da değinildi.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. $\mathbb{Z}_3$ Cismi Üzerinde 2D CA' ların Temsili Matrislerinin Elde Edilişi

Bölüm 2 de $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde 2D CA'ların davranışları üzerinde duruldu. Yani, $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde matris cebirleri kullanılarak, iki boyutlu en yakın komşuluklu lineer CA'ların periyodik ve sınır şartı altında karakterizasyonuna bakıldı.

$\mathbb{Z}_3$ cismi üzerinde 2D CA lara literatürde henüz rastlanmadı. Şiap ve ark. (2009) $\mathbb{Z}_3$ cismi üzerinde bazı özel kurallarla 2D CA'ların karakterizasyonları ile ilgili bir çalışmayı bildiri olarak sundular. Bu çalışmada 2460N ve 2460P özel kuralın periyodik ve sıfır sınır şartı altında karakterizasyonunu incelemişlerdir. Akın ve ark. (2009) $\mathbb{Z}_3$ cismi üzerinde CA'ların özel bir hybrid dönüşümünün temsili matrisinin en genel halini verdiler. Siap ve ark. (2009) $\mathbb{Z}_3$ cismi üzerinde 2460N kuralı ile üretilen 2D CA'ların öngörüntüsü altında verilen herhangi bir konfigürasyonun GOE sayısını elde ettiler.

Bu tezde, $\mathbb{Z}_3$ cismi üzerinde matris cebirleri kullanılarak 2-boyutlu periyodik sınır şartı ve sıfır sınır şartı altındaki bazı özel kurallarla üretilen sonlu lineer CA' ların temsili matrisleri elde edilmektedir.

İlk olarak $\mathbb{Z}_3$ cismi üzerinde CA'nın tanımı verilecektir. Daha sonra 2460N ve 2460P'nin periyodik ve sıfır şartlar altında temsili matrisleri incelenip genel bir formül elde edilecektir. İki boyutlu $\mathbb{Z}^2$ tamsayı örgüsünü ve $\sigma : \mathbb{Z}^2 \to \{0,1,2\}$ elemanlı $\Omega = \{0,1,2\}^{\mathbb{Z}^2}$ konfigürasyon uzayı göz önüne alınsın. Bir $n \in \mathbb{Z}^2$ noktasındaki σ'nin değeri σ_n ile tanımlanır. $u_1, u_2, \ldots, u_s \in \mathbb{Z}^2$ farklı elemanların bir sonlu kümesi ve bir $f : \{0,1,2\}^s \to \{0,1,2\}$ fonksiyonu verilsin.

$T:\Omega \to \Omega$ genel geçiş dönüşümü $(T\sigma)_n = f\left(\sigma_{n+u_1},\ldots,\sigma_{n+u_s}\right),\ n \in \mathbb{Z}^2$ olmak üzere bir CA ile f lokal kuralı $\left(\Omega, T\right)$ çifti olarak tanımlanır.

Matematiksel olarak (i, j). hücrenin bir sonraki (t+1). durumu o hücreye en yakın olan komşulukların t. durumuna bağlıdır. Bu durum aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} z_{(i,j)}^{(t+1)} &= f\,(z_{(i,j)}^{(t)}, z_{(i+1,j)}^{(t)}, z_{(i+1,j-1)}^{(t)}, z_{(i,j-1)}^{(t)}, z_{(i-1,j-1)}^{(t)}, z_{(i-1,j)}^{(t)}, z_{(i-1,j+1)}^{(t)}, z_{(i,j+1)}^{(t)}, z_{(i+1,j+1)}^{(t)}) \\ &= (a_0 z_{(i,j)}^{(t)} + a_1 z_{(i+1,j)}^{(t)} + a_2 z_{(i+1,j-1)}^{(t)} + a_3 z_{(i,j-1)}^{(t)} + a_4 z_{(i-1,j-1)}^{(t)} \\ &\quad + a_5 z_{(i-1,j)}^{(t)} + a_6 z_{(i-1,j+1)}^{(t)} + a_7 z_{(i,j+1)}^{(t)} + a_8 z_{(i+1,j+1)}^{(t)}) \ (\mathrm{mod}\, 3)\ . \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Burada $a_0, a_1, ..., a_8 \in \{1, 2\}$ dir.

Genellikle CA'ların bir sonraki durumu için her bir hücrenin değeri t dokuz komşu hücreye bağlı olmayabilir. Her bir hücre değeri ona bağımlı olan komşu hücrelerin toplamına $\mathbb{Z}_3$ üzerinde 2D CA'ların kural numarası denir. Bu bölümde izlenilecek yol Khan ve ark. (2004) tarafından yapılan çalışmadaki gibi olacaktır. Ancak, $\mathbb{Z}_3$ cismine bağlı genellemeler yapılacaktır.

Şimdi 2D CA da bir lineer kural için kural numarasını açıklayan geleneksel metot aşağıdaki Çizelge 4.1. , Çizelge 4.2. , Çizelge 4.3. de açıklanabilir.

Çizelge 4.1. Sıfır Sınır Şartı

0	0	0	0	0
0	$z_{(i-1,j+1)}$	$z_{(i,j+1)}$	$z_{(i+1,j+1)}$	0
0	$z_{(i-1,j)}$	$z_{(i,j)}$	$z_{(i+1,j)}$	0
0	$z_{(i-1,j-1)}$	$z_{(i,j-1)}$	$z_{(i+1,j-1)}$	0
0	0	0	0	0

Çizelge 4.2. Periyodik Sınır Şartı

$z_{(i+1,j-1)}$	$z_{(i-1,j-1)}$	$z_{(i,j-1)}$	$z_{(i+1,j-1)}$	$z_{(i-1,j-1)}$
$z_{(i+1,j+1)}$	$z_{(i-1,j+1)}$	$z_{(i,j+1)}$	$z_{(i+1,j+1)}$	$z_{(i-1,j+1)}$
$z_{(i+1,j)}$	$z_{(i-1,j)}$	$z_{(i,j)}$	$z_{(i+1,j)}$	$z_{(i-1,j)}$
$z_{(i+1,j-1)}$	$z_{(i-1,j-1)}$	$z_{(i,j-1)}$	$z_{(i+1,j-1)}$	$z_{(i-1,j-1)}$
$z_{(i+1,j+1)}$	$z_{(i-1,j+1)}$	$z_{(i,j+1)}$	$z_{(i+1,j+1)}$	$z_{(i-1,j+1)}$

Burada $z_{(k,h)} \in \mathbb{Z}_3$ şeklindedir. $\mathbb{Z}_3$ te komşu hücrelere karşılık gelen kuralların numarası aşağıdaki tabloda tanımlanmıştır:

Çizelge 4.3. Komşuluklara göre kuralların numaraları

$(a_6)729$	$(a_7)2187$	$(a_8)6561$
$(a_5)243$	(a_0) 1	$(a_1)3$
$(a_4)81$	$(a_3)27$	$(a_2)9$

Çizelge 4.3.'deki merkez kutu $((a_0)$ 1) hali hazırdaki hücreyi temsil eder ve diğer kutular o hücrenin sekiz komşu hücrelerini belirtir. Burada $3^9 = 6561$ kural vardır ve bunların hepsi lineerdir. İlk ve son hücrelerin komşuluklarının durumlarına göre, iki yaklaşım mevcuttur:

En kenardaki hücreleri birbiri ile bitişik olan 2D CA ya periyodik sınır şartlı CA lar denir. (çizelge 4.2. ye bakınız.). En kenar hücreleri 0 olan 2D CA ya sıfır sınır şartlı CA lar denir. (çizelge 4.1.'e bakınız.)

4.1.1. Kural 2460 tarafından üretilen temsili matrislerin elde edilişi

Bu tezin bu bölümünde Kural 2460 tarafından üretilen $\mathbb{Z}_3$ üzerindeki 2D CA'ların periyodik ve sıfır sınır şartı altında temsili matrisleri incelenip genel durumu ifade edilecektir. İki boyutlu hücresel dönüşümlerin temsili matrisinin nasıl bulunacağını $\mathbb{Z}_2$ üzerinde 2D CA'ların temsili matrisleri bazı özel kurallar için genellerken ayrıntılı olarak gösterildi. Şimdi $\mathbb{Z}_3$ üzerinde bazı özel kurallar için 2D CA'ların temsili matrisleri elde edilip, genel durumu ifade edilecektir.

Bu kısımda, Kural 2460' ın temsili matrisi sıfır sınır şartı ve periyodik sını şartı altında incelenip bu durumlarda genelleme yapılacaktır. Bunu yapmadan önce ilk olarak Kural 2460 ı ifade edelim.

$$f_{2460N}(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}) = ax_{12} + bx_{23} + cx_{32} + dx_{21} (\bmod 3)$$

Şeklinde verilen f lokal kuralını göz önüne alalım.

Çizelge 4.4. Kural 2460N

x_{11}	$a\,x_{12}$	x_{13}
$d\,x_{21}$	x_{22}	$b\,x_{23}$
x_{31}	$c\,x_{32}$	x_{33}

Çizelge 4.5. Kural 2460

729	**2187**	6561
243	1	**3**
81	**27**	9

Yukarıdaki Çizelge 4.5. 'de altı çizili kutucukların içindeki rakamların toplamı Kural 2460'ı verir. Kural 2460=Kural 3+Kural 27+Kural 243+Kural 2187 olarak yazılır ve dikkat edilecek olursa baklava dilimi şeklindedir. Kural 2460N ye karşılık gelen temsili matris bulunabilir. Bunu yaparken m(satır) ve n (sütun) lara çeşitli değerler verilerek onların temsili matrislerini sıfır sınır şartı altında bulunacaktır. Bir kaç örnek verdikten sonra 2460N durumu en genel halde ifade edilecektir. Daha sonra 2460P ye karşılık gelen temsili matris, yine m(satır) ve n (sütun) lara değerler verilerek periyodik sınır şartı altında bulduktan sonra 2460P' nin de en genel halde temsili matrisi ifade edilecektir. İlk olarak daha önceki kesimde $\mathbb{Z}_2$ için verdiğimiz bazı teoremleri $\mathbb{Z}_3$ içinde verelim.

4.1.1.1. Teorem: Bütün başlangıç kurallarının (1, 3, 9, 27, 81, 273, 729, 2460, 6561) bir sonraki durumu aşağıdaki gibidir:

Kural 1 $\Rightarrow [X_{t+1}] = a_0 [X_t]$

Kural 3 $\Rightarrow [X_{t+1}] = a_1 [X_t][T_2]$

Kural 9 $\Rightarrow [X_{t+1}] = a_2 [T_1][X_t][T_2]$

Kural 27 $\Rightarrow [X_{t+1}] = a_3 [T_1][X_t]$

Kural 81 $\Rightarrow [X_{t+1}] = a_4 [T_1][X_t][T_1]$

Kural 243 $\Rightarrow [X_{t+1}] = a_5 [X_t][T_1]$

Kural 729 $\Rightarrow [X_{t+1}] = a_6 [T_2][X_t][T_1]$

Kural 2187 $\Rightarrow [X_{t+1}] = a_7 [T_2][X_t]$

Kural 6561 $\Rightarrow [X_{t+1}] = a_8 [T_2][X_t][T_2]$.

Daha önce yapılan çalışmalarda olduğu gibi hücrelerin satır ve sütun bağımlılıklarını elde etmek için;

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

temel matrisleri kullanırız.

İspat: t zamandaki bir konfigürasyon $[X_t] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ şeklinde olsun.

($a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ 0,1 veya 2 değerlerini alır).

a) $[X_{t+1}]$'in $a_0 [X_t]$ ye eşit olduğu durum Kural 1 olarak bilinir. Yani; bunun anlamı CA dönüşümünde a_0 hariç diğer bütün katsayılar 0 dır.

Kural 1: $\left[X_{t+1}\right]= a_0\left[X_t\right]=a_0\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_0a_{11} & a_0a_{12} & a_0a_{13} \\ a_0a_{21} & a_0a_{22} & a_0a_{23} \\ a_0a_{31} & a_0a_{32} & a_0a_{33}\end{pmatrix}.$

olarak bulunur.

b) $\left[X_t\right]$ yi $\left[T_2\right]$ ile soldan ve a_1 ile sağdan çarparak bir CA'nın (t+1). zamandaki durumunu elde edilir ki bu Kural 3 olarak bilinir.

$$\left[X_{t+1}\right]= a_1\left[X_t\right]\left[T_2\right]$$

$$=a_1\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$=a_1\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_{12} & a_1a_{13} & 0 \\ a_1a_{22} & a_1a_{23} & 0 \\ a_1a_{32} & a_1a_{33} & 0\end{pmatrix}.$$

c) $\left[X_t\right]$ yi $\left[T_1\right]$ ile sağdan ve a_3'ü de $\left[T_1\right]$ile soldan çarparak bir CA'nın (t+1). zamandaki durumunu elde ederiz ki bu Kural 27 olarak bilinir.

$$\left[X_{t+1}\right]=a_3\left[T_1\right]\left[X_t\right]=a_3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

$$=a_3\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_3a_{21} & a_3a_{22} & a_3a_{23} \\ a_3a_{31} & a_3a_{32} & a_3a_{33} \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

d) $\left[X_t\right]$ yi $a_2\left[T_1\right]$ ile önce soldan ve daha sonra sağdan $\left[T_2\right]$ ile çarparak bir CA'nın (t+1). zamandaki durumunu elde ederiz ki bu Kural 9 olarak bilinir.

$$\left[X_{t+1}\right]=a_2\left[T_1\right]\left[X_t\right]\left[T_2\right]$$

$$=a_2\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=a_2\begin{pmatrix}a_{22}&a_{23}&0\\a_{21}&a_{22}&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2a_{22}&a_2a_{23}&0\\a_2a_{21}&a_2a_{22}&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Benzer şekilde diğer durumlarda gösterilebilir.

4.1.1.2. Teorem: İkinci bir kural ile oluşturulan bir CA'nın bir sonraki geçiş durumu ilgili başlangıç kurallarının matrislerinin modül 3'e göre toplamı olarak temsil edilebilir.

Teoremin ispatı $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki gibidir. Örneğin; Kural 4, Kural 1 ve Kural 3'ün modül 3'e göre toplamı olarak yazılırsa CA 'nın bir sonraki geçiş durumu;

Kural 4=Kural 1+Kural 3, $[X_{t+1}]= a_0\,[X_t]+a_1\,[X_t][T_2]$

olarak temsil edilir.

Benzer olarak Kural 2460 'ı Kural 3, Kural 27, Kural 243 ve Kural 2187 'in modül 3'e göre toplamı olarak yazabiliriz. Bu durumda CA 'nın bir sonraki geçiş durumu;

Kural 2460=Kural 3+Kural 27+Kural 243+Kural 2187 olarak yazılır ve

$$\begin{aligned}[X_{t+1}] &= a_1\,[X_t][T_2]+a_3\,[T_1][X_t]+a_5\,[X_t][T_1]\;+a_7\,[T_2][X_t]\\ &=[X_t]\,[a_5T_1+a_1T_2]+[a_3T_1+a_7T_2]\,[X_t].\end{aligned}$$

Bu tez boyunca 2460 kuralını tanımlamak için, kolaylık amacıyla $a_7=a$, $a_1=b$, $a_3=c$, $a_5=d$ olarak alınacaktır. Bu durumda;

$$[X_{t+1}] = [X_t][dT_1 + bT_2] + [cT_1 + aT_2][X_t]$$
$$= [X_t][S_1] + [S_2][X_t].$$

(burada $[S_1] = [dT_1 + bT_2]$ veya $[S_2] = [cT_1 + aT_2]$ olarak kabul edilir).

Burada $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3$ şeklindedir. Örneğin 3×3 tipinde 2D sonlu CA konfigürasyonu $X_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ şeklinde olsun. Şimdi bu konfigürasyonun Kural 4 ile üretilen 2D sonlu CA altındaki görüntüsünü yazalım

Kural 4=Kural 1+Kural 3,

$$[X_{t+1}] = a_0[X_t] + a_1[X_t][T_2]$$
$$= a_0\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + a_1\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & a_0 & 0 \\ a_0 & 0 & a_0 \\ 0 & a_0 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ a_1 & a_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_0 \\ a_1 & a_1 + a_0 & a_0 \end{pmatrix}$$

olarak temsil edilir. $(X_t)_{3\times 3}$ sonlu konfigürasyonunun Kural 2460 vasıtasıyla üretilen 2D sonlu CA altındaki görüntüsü

$$[X_{t+1}] = a_1[X_t][T_2] + a_3[T_1][X_t] + a_5[X_t][T_1] + a_7[T_2][X_t]$$
$$= [X_t][a_5T_1 + a_1T_2] + [a_3T_1 + a_7T_2][X_t]$$

şeklindedir. Bu durumda düzenleme yapılırsa;

$$[X_{t+1}] = [X_t][dT_1 + bT_2] + [cT_1 + aT_2][X_t]$$
$$= [X_t][S_1] + [S_2][X_t].$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\left[d\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}.\left[\begin{pmatrix}0&d&0\\0&0&d\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\b&0&0\\0&b&0\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&d&0\\b&0&d\\0&b&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&d\\0&d+b&0\\b&b&d\end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Bu teoremleri verdikten sonra yukarıda bahsettiğimiz Kural 2460'ın periyodik sınır şartı ve sıfır sınır şartı altında temsili matrislerinin en genel halini bulalım. İlk olarak sıfır sınır şartı altında temsili matrislerin elde edilişini inceleyelim.

4.1.2. 2460N kuralı ile üretilen sonlu 2D CA'nın temsili matrisi

Kural 2460N'nin temsili matrisinin en genel halini bulmak için daha öncede belirttiğimiz gibi m ve n durumlarının bazı özel durumlarını inceleyelim: Şimdi daha önceki kesimlerde olduğu gibi konunun daha iyi anlaşılabilmesi için m ve n nin bazı değerleri için birkaç örnek verelim.

4.1.2.1. Örnek: Bu örnekte $m=2$ ve $n=2$ alarak 2460N'nin temsili matrisini inceleyelim. Bunun için ilk önce sıfır sınır şartı altında 2×2 tipindeki hücrelerden oluşmuş 2D sonlu CA'nın konfigürasyonu yazılsın. Daha sonra bu hücrelere 2460N kuralı uygulansın.

Çizelge 4.6. 2x2 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

0	0	0	0
0	x_{11}	x_{12}	0
0	x_{21}	x_{22}	0
0	0	0	0

Şimdi Çizelge 4.6.‘da 2460N kuralı uygulandığında T dönüşümü altında yeni bir konfigürasyon elde edilir ve bu konfigürasyon Y ise bunun hücreleri sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$cx_{21}+bx_{12}=y_{11}$$
$$dx_{11}+cx_{22}=y_{12}$$
$$ax_{11}+bx_{22}=y_{21}$$
$$ax_{12}+dx_{21}=y_{22}\ .$$

Şimdi doğal taban matrisleri kullanılarak bunlara karşılık temsili matris bulunabilir.

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\d\\a\\0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\0\\0\\a\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\0\\0\\d\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\c\\b\\0\end{pmatrix}.$$

buradan elde edilen matris;

$$T_{R_{2460N}}=\begin{pmatrix}0&b&c&0\\d&0&0&c\\a&0&0&b\\0&a&d&0\end{pmatrix}_{4\times4}=\begin{pmatrix}S_2(b,d)&cI_2\\aI_2&S_2(b,d)\end{pmatrix}_{4\times4}.$$

Yani, $$\begin{pmatrix} 0 & b & c & 0 \\ d & 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & d & 0 \end{pmatrix}_{4\times 4} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix}_{4\times 1} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{bmatrix}_{4\times 1}$$

olur.

4.1.2.2. Örnek: Şimdi m ve n sayılarını 2 den büyük durumlar için inceleyelim. $m=3$ ve $n=3$ olsun. İlk önce sıfır sınır şartı altında 3×3 tipinde hücrelerden oluşmuş 2D sonlu CA'nın konfigürasyonu çizelge 4.1.4.2.1 deki gibi düzenlenebilir. Daha sonra bu hücrelere 2460N kuralı uygulanırsa,

Çizelge 4.7. 3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

0	0	0	0	0
0	x_{11}	x_{12}	x_{13}	0
0	x_{21}	x_{22}	x_{23}	0
0	x_{31}	x_{32}	x_{33}	0
0	0	0	0	0

T dönüşümü altında yeni bir konfigürasyon elde edilir ve bu konfigürasyonun hücreleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} cx_{21}+bx_{12} &= y_{11} \\ dx_{11}+cx_{22}+bx_{13} &= y_{12} \\ dx_{12}+cx_{23} &= y_{13} \\ ax_{11}+cx_{31}+bx_{22} &= y_{21} \\ ax_{12}+dx_{21}+cx_{32}+bx_{23} &= y_{22} \\ ax_{13}+dx_{22}+cx_{33} &= y_{23} \\ ax_{21}+bx_{32} &= y_{31} \\ ax_{22}+dx_{31}+bx_{33} &= y_{32} \\ ax_{23}+dx_{32} &= y_{33}\ . \end{aligned}$$

O halde doğal taban matrislerini kullanarak bunlara karşılık gelen T dönüşümleri bulunur ve 2460N ye karşılık gelen temsili matris elde edilir.

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\d\\0\\a\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\0\\d\\0\\a\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\b\\0\\0\\0\\a\\0\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\0\\0\\0\\d\\0\\a\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\c\\0\\b\\0\\d\\0\\a\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\c\\0\\b\\0\\0\\0\\a\end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\c\\0\\0\\0\\d\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\c\\0\\b\\0\\d\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\c\\0\\b\\0\end{pmatrix}.$$

Önceki kesimde olduğu gibi bu sütun matrisleri yan yana yazılırsa temsili matris,

$$T_{R_{2460N}}=\begin{pmatrix}0&b&0&c&0&0&0&0&0\\d&0&b&0&c&0&0&0&0\\0&d&0&0&0&c&0&0&0\\a&0&0&0&b&0&c&0&0\\0&a&0&d&0&b&0&c&0\\0&0&a&0&d&0&0&0&c\\0&0&0&a&0&0&0&b&0\\0&0&0&0&a&0&d&0&b\\0&0&0&0&0&a&0&d&0\end{pmatrix}_{9\times 9}=\begin{pmatrix}S_3(b,d)&cI_3&O_3\\aI_3&S_3(b,d)&cI_3\\O_3&aI_3&S_3(b,d)\end{pmatrix}_{9\times 9}.$$

biçiminde elde edilir.

4.1.2.3. Örnek: Şimdi m ve n nin farklı olduğu bir durumu örnek verelim. $m = 4, n = 3$ alalım. O halde ilk önce sıfır sınır şartı altında 4×3 tipindeki hücrelerden oluşmuş 2D sonlu CA'nın konfigürasyonu çizelge 4.8 deki gibi düzenlenebilir Daha sonra bu hücrelere 2460N kuralı uygulanırsa,

Çizelge 4.8. 4x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

0	0	0	0	0
0	x_{11}	x_{12}	x_{13}	0
0	x_{21}	x_{22}	x_{23}	0
0	x_{31}	x_{32}	x_{33}	0
0	x_{41}	x_{42}	x_{43}	0
0	0	0	0	0

Çizelge 4.8.'de verilen sıfır sınır şartlı sonlu konfigurasyonun 2460N kuralı ile üretilen 2D sonlu CA altında elde edilen yeni konfigurasyonun hücreleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$cx_{21} + bx_{12} = y_{11}$$

$$dx_{11} + cx_{22} + \mathrm{b}x_{13} = y_{12}$$

$$dx_{12} + cx_{23} = y_{13}$$

$$ax_{11} + cx_{31} + bx_{22} = y_{21}$$

$$ax_{12} + dx_{21} + cx_{32} + bx_{23} = y_{22}$$

$$ax_{13} + dx_{22} + cx_{33} = y_{23}$$

$$ax_{21} + cx_{41} + bx_{32} = y_{31}$$

$$ax_{22} + dx_{31} + cx_{42} + bx_{33} = y_{32}$$

$$ax_{23} + dx_{32} + cx_{43} = y_{33}$$

$$ax_{31} + bx_{42} = y_{41}$$

$$ax_{32} + dx_{41} + bx_{43} = y_{42}$$

$$ax_{33} + dx_{42} = y_{43} \ .$$

Burada doğal taban matrisini kullanarak bunlara karşılık gelen T dönüşümleri bulunarak 2460N kuralı ile 2D CA nın temsili matrisi elde edilecektir.

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\d\\0\\a\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\0\\d\\0\\a\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\b\\0\\0\\0\\a\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\0\\0\\0\\d\\0\\a\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\c\\0\\b\\0\\d\\0\\a\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\c\\0\\b\\0\\0\\0\\a\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\c\\0\\0\\0\\d\\0\\a\\0\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\c\\0\\b\\0\\d\\0\\a\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\c\\0\\b\\0\\0\\0\\a\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\c\\0\\0\\0\\d\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\c\\0\\b\\0\\d\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\c\\0\\b\\0\end{pmatrix}.$$

Buradan elde edilen temsili matris;

$$T_{R_{2460N}} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & b & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & b & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & d & 0 & b & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & d & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & d & 0 & b & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & d & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & d & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & o & d & 0 \end{pmatrix}_{12\times 12}$$

$$= \begin{pmatrix} S_3(b,d) & cI_3 & O_3 & O_3 \\ aI_3 & S_3(b,d) & cI_3 & O_3 \\ O_3 & aI_3 & S_3(b,d) & cI_3 \\ O_3 & O_3 & aI_3 & S_3(b,d) \end{pmatrix}_{12\times 12} .$$

biçimindedir.

Genel formu ifade edebilmek için $m=4, n=4$ durumu da incelendi. Fakat burada sadece sıfır sınır şartlı 4×4 tipinde hücrelerden oluşmuş 2D sonlu CA'nın konfigürasyonunun *T* dönüşümüne karşılık gelen temsili matrisi,

$$T_{R_{2460N}} = \begin{pmatrix} S_4(b,d) & cI_4 & O_4 & O_4 \\ aI_4 & S_4(b,d) & cI_4 & O_4 \\ O_4 & aI_4 & S_4(b,d) & cI_4 \\ O_4 & O_4 & aI_4 & S_4(b,d) \end{pmatrix}_{16\times 16} .$$

şeklinde elde edilebilir.

Genel olarak keyfi $m \geq 2$ ve $n \geq 2$ doğal sayıları için düzenlenen sıfır sınır şartlı $m \times n$ tipli 2D sonlu CA konfigürasyonunun 2460N kuralı ile üretilen 2D sonlu CA dönüşümüne karşılık gelen temsili matris aşağıdaki biçimdedir;

$$\left(T_{2460N}\right)_{mn\times mn} = \begin{pmatrix} S(b,d) & cI & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ aI & S(b,d) & cI & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & aI & S(b,d) & cI & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & aI & S(b,d) & cI & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & aI & S(b,d) & cI \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & aI & S(b,d) \end{pmatrix}.$$

Burada blok alt matrislerin her biri $n \times n$ tipinde kare matrislerdir ve $S_{n\times n}(b,d)$ matriside aşağıdaki gibidir (Şiap ve ark. (2009))

$$S_{n\times n}(b,d) = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ d & 0 & b & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & b & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d & 0 \end{pmatrix}.$$

4.1.3. 2460P kuralı ile üretilen sonlu 2D CA'nın temsili matrisi

Kural 2460P'nin temsili matrisinin en genel halini bulmak için yukarıda belirttiğimiz gibi *m* ve *n* durumlarının bazı özel durumlarını inceleyelim: Şimdi daha önceki kesimlerde olduğu gibi konunun daha iyi anlaşılabilmesi için *m* ve *n* nin bazı değerleri için birkaç örnek verelim.

4.1.3.1. Örnek: $m = 3$ ve $n = 3$ olsun. Burada ilk önce periyodik sınır şartı altında 3×3 tipinde hücrelerden oluşmuş 2D sonlu CA ya karşılık gelen temsili matrisi bulalım.

Çizelge 4.9. 3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

x_{33}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{31}
x_{13}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{11}
x_{23}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{21}
x_{33}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{31}
x_{13}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{11}

Çizelge 4.9.'daki $(X_t)_{3\times3}$ konfigürasyonunun her bir hücresine 2460P kuralı ile üretilen 2D sonlu CA uygulanırsa yeni konfigürasyonun hücreleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$ax_{31} + dx_{13} + cx_{21} + bx_{12} = y_{11}$$

$$ax_{32} + dx_{11} + cx_{22} + bx_{13} = y_{12}$$

$$ax_{33} + dx_{12} + cx_{23} + bx_{11} = y_{13}$$

$$ax_{11} + dx_{23} + cx_{31} + bx_{22} = y_{21}$$

$$ax_{12} + dx_{21} + cx_{32} + bx_{23} = y_{22}$$

$$ax_{13} + dx_{22} + cx_{33} + bx_{21} = y_{23}$$

$$ax_{21} + dx_{33} + cx_{11} + bx_{32} = y_{31}$$

$$ax_{22} + dx_{31} + cx_{12} + bx_{33} = y_{32}$$

$$ax_{23} + dx_{32} + cx_{13} + bx_{31} = y_{33} \ .$$

Doğal taban matrislerini kullanarak bunlara karşılık gelen T dönüşümleri bulunarak 2460P kuralı ile üretilen 2D sonlu CA ya karşılık gelen temsili matris aşağıdaki gibi elde edilir. Bu sütun matrisleri sırasıyla,

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\d\\b\\a\\0\\0\\c\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\0\\d\\0\\a\\0\\0\\c\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d\\b\\0\\0\\0\\a\\0\\0\\c\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\0\\0\\0\\d\\b\\a\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\c\\0\\b\\0\\d\\0\\a\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\c\\d\\b\\0\\0\\0\\a\end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\0\\0\\c\\0\\0\\0\\d\\b\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\a\\0\\0\\c\\0\\b\\0\\d\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\a\\0\\0\\c\\d\\b\\0\end{pmatrix}.$$

biçimindedir ve bu sütun matrisleri yan yana eklenerek;

$$T_{R_{2460P}}=\begin{pmatrix}0&b&d&c&0&0&a&0&0\\d&0&b&0&c&0&0&a&0\\b&d&0&0&0&c&0&0&a\\a&0&0&0&b&d&c&0&0\\0&a&0&d&0&b&0&c&0\\0&0&a&b&d&0&0&0&c\\c&0&0&a&0&0&0&b&b\\0&c&0&0&a&0&d&0&b\\0&0&c&0&0&a&b&d&0\end{pmatrix}_{9\times 9}$$

$$=\begin{pmatrix}S^*{}_3(b,d)&cI_3&aI_3\\aI_3&S^*{}_3(b,d)&cI_3\\cI_3&aI_3&S^*{}_3(b,d)\end{pmatrix}_{9\times 9}$$

temsili matrisi bulunur. Şimdi karesel olmayan bir konfigürasyona 2460P kuralı uygulayalım.

4.1.3.2. Örnek: $m=4$ ve $n=3$ olsun. Önce 4x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bu konfigürasyonu peryodik sınır şartlı halde aşağıdaki çizelgede düzenleyelim.

Çizelge 4.10. 4x3tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

x_{43}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{41}
x_{13}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{11}
x_{23}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{21}
x_{33}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{31}
x_{43}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{41}
x_{13}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{11}

Bu çizelgede elde edilen $(X_t)_{4\times3}$ tipli peryodik sınır şartlı konfigürasyonunun her bir hücresine 2460P kuralı ile üretilen 2D sonlu CA uygulanırsa elde edilen yeni konfigürasyonun hücreleri aşağıdaki gibidir:

$$ax_{41}+dx_{13}+cx_{21}+bx_{12}=y_{11}$$

$$ax_{42}+dx_{11}+cx_{22}+bx_{13}=y_{12}$$

$$ax_{43}+dx_{12}+cx_{23}+bx_{11}=y_{13}$$

$$ax_{11}+dx_{23}+cx_{31}+bx_{22}=y_{21}$$

$$ax_{12}+dx_{21}+cx_{32}+bx_{23}=y_{22}$$

$$ax_{13}+dx_{22}+cx_{33}+bx_{21}=y_{23}$$

$$ax_{21}+dx_{33}+cx_{41}+bx_{32}=y_{31}$$

$$ax_{22}+dx_{31}+cx_{42}+bx_{33}=y_{32}$$

$$ax_{23}+dx_{32}+cx_{43}+bx_{31}=y_{33}$$

$$ax_{31}+dx_{43}+cx_{11}+bx_{42}=y_{41}$$

$$ax_{32}+dx_{41}+cx_{12}+bx_{43}=y_{42}$$

$$ax_{33} + dx_{42} + cx_{13} + bx_{41} = y_{43} \ .$$

Doğal taban matrisleri kullanılarak bunlara karşılık sütun matrisleri sırasıyla aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\d\\b\\a\\0\\0\\0\\0\\0\\c\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\0\\d\\0\\a\\0\\0\\0\\0\\0\\c\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d\\b\\0\\0\\0\\a\\0\\0\\0\\0\\0\\c\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\0\\0\\0\\d\\b\\a\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\c\\0\\b\\0\\d\\0\\a\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\c\\d\\b\\0\\0\\0\\a\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\c\\0\\0\\0\\d\\b\\a\\0\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\c\\0\\b\\0\\d\\0\\a\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\c\\d\\b\\0\\0\\0\\a\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\0\\0\\0\\0\\0\\c\\0\\0\\0\\d\\b\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\a\\0\\0\\0\\0\\0\\c\\0\\b\\0\\d\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\a\\0\\0\\0\\0\\0\\c\\d\\b\\0\end{pmatrix}.$$

Eğer elde edilen bu sütun matrisleri sırasıyla yan yana eklenirse o zaman temsili matris;

$$T_{R_{2460P}} = \begin{pmatrix} 0 & b & d & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ d & 0 & b & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ b & d & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & 0 & b & d & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & d & 0 & b & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & d & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & b & d & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & d & 0 & b & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & d & 0 & 0 & 0 & c \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & b & d \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & d & 0 & b \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & d & 0 \end{pmatrix}_{12\times 12}$$

$$= \begin{pmatrix} S^*_3(b,d) & cI_3 & O_3 & aI_3 \\ aI_3 & S^*_3(b,d) & cI_3 & O_3 \\ O_3 & aI_3 & S^*_3(b,d) & cI_3 \\ cI_3 & O_3 & aI_3 & S^*_3(b,d) \end{pmatrix}_{12\times 12}.$$

biçiminde elde edilir.

4.1.3.3. Örnek: Şimdide $m < n$ olsun. Kolaylık olsun diye $m = 3$ ve $n = 4$ olarak alalım. Eğer önceki örnekteki yol izlenirse;

Çizelge 4.11. 3x4 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

x_{34}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{31}
x_{14}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{11}
x_{24}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{21}
x_{34}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{31}
x_{14}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{11}

çizelgesi elde edilir. Böylece önceki örnekteki gibi yeni konfigürasyon hücreleri

$$\begin{aligned}
ax_{31} + dx_{14} + cx_{21} + bx_{12} &= y_{11} \\
ax_{32} + dx_{11} + cx_{22} + bx_{13} &= y_{12} \\
ax_{33} + dx_{12} + cx_{23} + bx_{14} &= y_{13} \\
ax_{34} + dx_{13} + cx_{24} + bx_{11} &= y_{14} \\
ax_{11} + dx_{24} + cx_{31} + bx_{22} &= y_{21} \\
ax_{12} + dx_{21} + cx_{32} + bx_{23} &= y_{22} \\
ax_{13} + dx_{22} + cx_{33} + bx_{24} &= y_{23} \\
ax_{14} + dx_{23} + cx_{34} + bx_{21} &= y_{24} \\
ax_{21} + dx_{34} + cx_{11} + bx_{32} &= y_{31} \\
ax_{22} + dx_{31} + cx_{12} + bx_{33} &= y_{32} \\
ax_{23} + dx_{32} + cx_{13} + bx_{34} &= y_{33} \\
ax_{24} + dx_{33} + cx_{14} + bx_{31} &= y_{34} \ .
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Doğal taban matrisleri kullanılırsa;

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\d\\0\\b\\a\\0\\0\\0\\c\\0\\0\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\0\\d\\0\\0\\a\\0\\0\\0\\c\\0\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\b\\0\\d\\0\\0\\a\\0\\0\\0\\c\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}d\\0\\b\\0\\0\\0\\0\\a\\0\\0\\0\\c\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\0\\0\\0\\0\\d\\0\\b\\a\\0\\0\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\c\\0\\0\\b\\0\\d\\0\\0\\a\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\c\\0\\0\\b\\0\\d\\0\\0\\a\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\c\\d\\0\\b\\0\\0\\0\\0\\a\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\0\\0\\0\\c\\0\\0\\0\\0\\d\\0\\b\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\a\\0\\0\\0\\c\\0\\0\\b\\0\\d\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\a\\0\\0\\0\\c\\0\\0\\b\\0\\d\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\a\\0\\0\\0\\c\\d\\0\\b\\0\end{pmatrix}.$$

sütun matrisleri elde edilir, bu sütun matrisleri yardımıyla,

$$T_{R_{2460P}}=\begin{pmatrix}0&b&0&d&c&0&0&0&a&0&0&0\\d&0&b&0&0&c&0&0&0&a&0&0\\0&d&0&b&0&0&c&0&0&0&a&0\\b&0&d&0&0&0&0&c&0&0&0&a\\a&0&0&0&0&b&0&d&c&0&0&0\\0&a&0&0&d&0&b&0&0&c&0&0\\0&0&a&0&0&d&0&b&0&0&c&0\\0&0&0&a&b&0&d&0&0&0&0&c\\c&0&0&0&a&0&0&0&0&b&0&d\\0&c&0&0&0&a&0&0&d&0&b&0\\0&0&c&0&0&0&a&0&0&d&0&b\\0&0&0&c&0&0&0&a&b&0&d&0\end{pmatrix}_{12\times12}$$

$$=\begin{pmatrix}S^*_4(b,d)&cI_4&aI_4\\aI_4&S^*_4(b,d)&cI_4\\cI_4&aI_4&S^*_4(b,d)\end{pmatrix}_{12\times12}.$$

temsili matrisi bulunur.

Eğer $m=4,n=4$ alınırsa $T_{R_{2460P}}$ temsil matrisi;

$$T_{R_{2460P}} = \begin{pmatrix} S^*{}_4(b,d) & cI_4 & O_4 & aI_4 \\ aI_4 & S^*{}_4(b,d) & cI_4 & O_4 \\ O_4 & aI_4 & S^*{}_4(b,d) & cI_4 \\ cI_4 & O_4 & aI_4 & S^*{}_4(b,d) \end{pmatrix}_{16\times 16}.$$

biçimde bulunur.

Şimdi $m \geq 3, n \geq 3$ için $\left(T_{2460P}\right)_{mn\times mn}$ temsili matrisinin genel formu aşağıdaki gibidir:

$$\left(T_{2460P}\right)_{mn\times mn} = \begin{pmatrix} S^*(b,d) & cI & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & aI \\ aI & S^*(b,d) & cI & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & aI & S^*(b,d) & cI & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & aI & S^*(b,d) & cI & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & aI & S^*(b,d) & cI \\ cI & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & aI & S^*(b,d) \end{pmatrix}.$$

Burada elde edilen blok alt matrislerin her biri $n\times n$ tipindeki kare matrislerdir ve $S^*{}_{n\times n}(b,d)$ matriside aşağıdaki biçimdedir.

$$S^*{}_{n\times n}(b,d) = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & d \\ d & 0 & b & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & b & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d & 0 & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d & 0 \end{pmatrix}.$$

Şimdi $\mathbb{Z}_3$ cismi üzerinde kural 2460P'nin karakterizasyonu hesaplanırken $m=2\,,n=2$ ve $m=2\,,n\geq 3$ ve $m\geq 3\,,n=2$ olması halinde bazı özel durumlarla karşılaştık. Bu durumlara birkaç örnek verelim.

4.1.3.4. Örnek: $m=2$ ve $n=2$ durumunu göz önüne alalım. Bu halde peryodik sınır şartlı 2D sonlu CA konfigürasyonunu ifade eden çizelge aşağıdaki gibidir:

Çizelge 4.12. 2x2 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

x_{22}	x_{21}	x_{22}	x_{21}
x_{12}	x_{11}	x_{12}	x_{11}
x_{22}	x_{21}	x_{22}	x_{21}
x_{12}	x_{11}	x_{12}	x_{11}

Eğer Çizelge 4.12.'deki peryodik sınır şartlı $\left(X_t\right)_{2\times 2}$ konfigürasyonunun her bir hücresine 2460P kuralı ile üretilen 2D sonlu CA uygulanırsa elde edilen yeni konfigürasyonun hücreleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
ax_{21}+dx_{12}+cx_{21}+bx_{12} &= y_{11}\\
ax_{22}+dx_{11}+cx_{22}+bx_{11} &= y_{12}\\
ax_{11}+dx_{22}+cx_{11}+bx_{22} &= y_{21}\\
ax_{12}+dx_{21}+cx_{12}+bx_{21} &= y_{22}\ .
\end{aligned}$$

Doğal taban matrisleri kullanılarak bunlara karşılık sütun matrisleri;

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\b+d\\a+c\\0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b+d\\0\\0\\a+c\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c\\0\\0\\b+d\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\a+c\\b+d\\0\end{pmatrix}.$$

olarak bulunur.

Buradan elde edilen temsili matris;

$$T_{R_{2460P}} = \begin{pmatrix} 0 & b+d & a+c & 0 \\ b+d & 0 & 0 & a+c \\ a+c & 0 & 0 & b+d \\ 0 & a+c & b+d & 0 \end{pmatrix}_{4\times 4} = \begin{pmatrix} (b+d)I^{*} & (a+c)I_2 \\ (a+c)I_2 & (b+d)I^{*} \end{pmatrix}_{4\times 4}.$$

olarak bulunur.

4.1.3.5. Örnek: $m=2$ ve $n=3$ özel durumunu göz önüne alalım.

Çizelge 4.13. 2x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

x_{23}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{21}
x_{13}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{11}
x_{23}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{21}
x_{13}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{11}

Önceki örnekte olduğu gibi yeni konfigürasyon hücreleri sırasıyla;

$$\begin{aligned} ax_{21} + dx_{13} + cx_{21} + bx_{12} &= y_{11} \\ ax_{22} + dx_{11} + cx_{22} + bx_{13} &= y_{12} \\ ax_{23} + dx_{12} + cx_{23} + bx_{11} &= y_{13} \\ ax_{11} + dx_{23} + cx_{11} + bx_{22} &= y_{21} \\ ax_{12} + dx_{21} + cx_{12} + bx_{23} &= y_{22} \\ ax_{13} + dx_{22} + cx_{13} + bx_{21} &= y_{23}\ . \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Doğal taban matrisleri kullanılarak bunlara karşılık gelen sütun matrisler;

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\d\\b\\a+c\\0\\0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\0\\d\\0\\a+c\\0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d\\b\\0\\0\\0\\a+c\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c\\0\\0\\0\\d\\b\end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\a+c\\0\\b\\0\\d\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\a+c\\d\\b\\0\end{pmatrix}.$$

biçimindedir. Böylece $(T_{R_{2460P}})_{2.3\times 2.3}$ temsili matrisi

$$(T_{R_{2460P}})_{2.3\times 2.3}=\begin{pmatrix}0&d&b&a+c&0&0\\b&0&d&0&a+c&0\\d&b&0&0&0&a+c\\a+c&0&0&0&d&b\\0&a+c&0&b&0&d\\0&0&a+c&d&b&0\end{pmatrix}_{6\times 6}$$

$$=\begin{pmatrix}S^*\left(b,d\right)&(a+c)I_3\\(a+c)I_3&S^*\left(b,d\right)\end{pmatrix}_{6\times 6}.$$

biçiminde elde edilir.

Eğer $m=2$, $n\geq 3$ alınırsa, bu takdirde $\left(T_{2460P}\right)_{2n\times 2n}$ temsili matrisi

$$\left(T_{2460P}\right)_{2n\times 2n}==\begin{pmatrix}S^*\left(b,d\right)&(a+c)I_n\\(a+c)I_n&S^*\left(b,d\right)\end{pmatrix}_{2n\times 2n}.$$

şeklinde elde edilir.

4.1.3.6. Örnek: $m=4$ ve $n=2$ olsun. Yine peryodik sınır şartlı konfigürasyon aşağıdaki tabloda gösterilebilir.

Çizelge 4.14. 4x2 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

x_{42}	x_{41}	x_{42}	x_{41}
x_{12}	x_{11}	x_{12}	x_{11}
x_{22}	x_{21}	x_{22}	x_{21}
x_{32}	x_{31}	x_{32}	x_{31}
x_{42}	x_{41}	x_{42}	x_{41}
x_{12}	x_{11}	x_{12}	x_{11}

Çizelge 4.14.'deki ilgili hücrelere 2460P kuralı ile üretilen 2D sonlu CA uygulanırsa, oluşan yeni konfigürasyonun hücreleri sırasıyla;

$$ax_{41}+dx_{12}+cx_{21}+bx_{12}=y_{11}$$
$$ax_{42}+dx_{11}+cx_{22}+bx_{11}=y_{12}$$
$$ax_{11}+dx_{22}+cx_{31}+bx_{22}=y_{21}$$
$$ax_{12}+dx_{21}+cx_{32}+bx_{21}=y_{22}$$
$$ax_{21}+dx_{32}+cx_{41}+bx_{32}=y_{31}$$
$$ax_{22}+dx_{31}+cx_{42}+bx_{31}=y_{32}$$
$$ax_{31}+dx_{42}+cx_{11}+bx_{42}=y_{41}$$
$$ax_{32}+dx_{41}+cx_{12}+bx_{41}=y_{42}\ .$$

biçiminde olur.

Eğer doğal taban matrisleri kullanılırsa, bunlara karşılık gelen sütun matrisleri sırasıyla,

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\b+d\\a\\0\\0\\0\\c\\0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b+d\\0\\0\\a\\0\\0\\0\\c\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\0\\0\\b+d\\0\\0\\a\\0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\c\\b+d\\0\\0\\a\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\c\\0\\b+d\\0\\a\\0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\c\\b+d\\0\\0\\a\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\0\\0\\0\\c\\0\\0\\b+d\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\a\\0\\0\\0\\c\\b+d\\0\end{pmatrix}.$$

biçimindedir ve son olarak elde edilen temsili matris aşağıdaki gibidir:

$$T_{R_{2460P}}=\begin{pmatrix}0&b+d&c&0&0&0&a&0\\b+d&0&0&c&0&0&0&a\\a&0&0&b+d&c&0&0&0\\0&a&b+d&0&0&c&0&0\\0&0&a&0&0&b+d&c&0\\0&0&0&a&b+d&0&0&c\\c&0&0&0&a&0&0&b+d\\0&c&0&0&0&a&b+d&0\end{pmatrix}_{8\times8}$$

$$=\begin{pmatrix}(b+d)I^{*}&cI_2&O_2&aI_2\\aI_2&(b+d)I^{*}&cI_2&O_2\\O_2&aI_2&(b+d)I^{*}&cI_2\\cI_2&O_2&aI_2&(b+d)I^{*}\end{pmatrix}_{8\times8}.$$

Yine $m \geq 3$ ve $n = 2$ olması durumunda $\left(T_{2460P}\right)_{m2\times m2}$ temsili matrisi aşağıdaki formdadır:

$$\left(T_{2460P}\right)_{2m\times 2m} = \begin{pmatrix} (b+d)I^{*} & cI_2 & 0 & \cdots & aI_2 \\ aI_2 & (b+d)I^{*} & cI_2 & \cdots & 0 \\ 0 & aI_2 & (b+d)I^{*} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ cI_2 & 0 & \cdots & \cdots & (b+d)I^{*} \end{pmatrix}_{2m\times 2m}$$

Böylece bu bölümde $\mathbb{Z}_3$ cismi üzerinde matris cebirlerini kullanarak 2D sonlu CA'ların bazı özel kurallarına karşılık gelen temsili matrisler elde edildi.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

CA, birçok bilim dalında incelenen bir kavramdır. Fizik ve biyoloji alanında ve bilgisayar bilimleri gibi birçok alanda olayları modellemek için CA kavramı farklı yönleriyle incelenmiştir. Örneğin hücresel dönüşümler karmaşık sistemlerin davranışlarını incelemek için kullanılırlar. CA, son yıllarda, bilgisayar biliminde kullanılmaya başlandı (Choudhury ve ark., 2004). Sistem dizayncıları yazılım tabanlarından çeşitli karmaşık fonksiyonları silikon tabanlı donanım bloklarına yerleştirmeyi deniyorlar.

Paralel işleyen mimariler talebi, hızlı hesaplamalara daha önce görülmemiş artan ihtiyaç ile büyük önem kazandı. Bunun sonucu olarak, VLSI' da kolaylıkla uygulanabilen paralel işleyen mimariler, 2D CA' ların kullanımını teşvik etti (Khan ve ark., 1997). Bu çalışmada daha çok CA kavramının bazı özel lokal kurallar tarafından sıfır sınır şartı ve periyodik sınır şartı altında üretilen temsili matrislerin elde edilişi incelendi.

Son yıllarda popüler olan CA'nın karakteristik özellikler için birçok makale yazılmıştır (Khan ve ark., 1997; Choudhury ve ark., 2004; Siap ve ark., 2009).

5.2. Öneriler

Bu çalışmada genellikle $\mathbb{Z}_2$ ve $\mathbb{Z}_3$ cisimleri üzerinde 2D CA'ların temsili matrislerinin elde edilişi üzerinde duruldu. Bu temsili matrisler bazı özel kurallar için sıfır sınır şartı ve periyodik sınır şartı altında incelenildi. İleriye dönük olarak, CA temsili matrislerin elde edilişi farklı cisim ve halkalar için tekrar incelenebilir.

KAYNAKLAR

AKIN, H., SİAP, I., and SAH, F. 2009. Two dimensional hybrid cellular automata over ternary fields, Proceedings of the Third İnternational Conference on Modelings, Simulation and Applied optimization Sharjah, U.A.E, January 20–22.

CHATTOPADHYAY, P., CHOUDHURY, P. P., and DIHIDAR, K., 1999. Characterisation of a particular hybrid transformation of two-dimensional cellular automata, Computers and Mathematics with Applications 38: 207–216.

DAS, A.K., and CHAUDHURI, P.P.,1993.Vector space theoretic analysis of additive cellular automata and its applications for pseudo-exhaustive test pattern generation, *IEEE Trans. On Computers* 42 (3), 340–352.

DIHIDAR, K., and CHOUDHURY, P.P., 2004. Matrix algebraic formulae concerning some exceptional rules of two dimensional cellular automata, Inf. Sci. 165: 91–101.

HEDLUND, G.A., 1969. Endomorphisms and automorphisms of full shift dynamical system, Math. Syst. Theor. 3: 320–375.

INOKUCHI, S. 1998. On behaviors of cellular automata with rule 156, Bull. Inform. Cybernet. 30 (1) . 121–131.

KHAN, A. R., CHOUDHURY, P. P., DIHIDAR, K., MITRA, S., and SARKAR, P., 1997. VLSI architecture of a cellular automata, Comput. Math. Applic. 33: 79–94.

PACKARD, N. H., and WOLFRAM, 1985. S. two-dimensional cellular automata, Journal of Statistical Physics 38: (5/6), 901–946.

PRIES, W., THANAILAKIS, A., CARD, H.C., 1986. Group properties of cellular automata and VLSI applications, IEEE Trans. On. Computers C–35 (12) 1013–1024.

SİAP, I., AKIN, H., and SAH, F., 2009. Garden of eden configurations for 2D cellular automaton with rule 2460N, submitted.

SİAP, I., AKIN, H., and SAH, F., 2009. Characterization of two dimensional cellular automata over ternary fields, Proceedings of the Third İnternational Conference on Modelings, Simulation and Applied optimization Sharjah, U.A.E, pp. January 20-22 22-24.

VON NEUMANN, J., 1966. The theory of self-reproducing automata, (Edited by A.W.Burks), Univ. of Illinois Press, Urbana.

WOLFRAM, S., 1983. Statistical mechanics of cellular automata, Rev. Mod. Phys. 55 (3). 601–644.

YING, Z., ZHONG, Y., and PEI-MIN, D., 2009. On behavior of two-dimensional cellular automata with an exceptional rule, Information Sci. 179 (5) 613–622.

ÖZGEÇMİŞ

21.01.1983 de Adana'nın Ceyhan ilçesinde doğdu. İlkokulu Dumlupınar İlkokulunda, ortaokulu Pamukkale Ortaokulunda bitirdikten sonra, lise öğrenimini Ceyhan Lisesinde (Yabancı dili ağırlıklı lise) tamamladı. 2002 yılında İnönü Üniversitesi Adıyaman Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandıktan sonra, 2006 yılında birincilikle mezun oldu. Aynı yılın güz döneminde Harran Üniversitesi Fen Bilimler Ensititüsünde yüksek lisansa başladı. 2007 yılı güz döneminde Adıyaman Üniversitesinde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Halen Adıyaman Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.

ÖZET

Birinci bölümde, genel olarak ihtiyaç duyulan tanımlar çok fazla detaya girilmeden verildi.

İkinci bölümde $\mathbb{Z}_2$ üzerinde 2D CA'nın tanımı verildi. Bu kısımda, bazı özel metodlarla üretilen $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki 2D lineer CA'ların temsili matrisleri incelendi. Khan ve ark. (1997) 170N ve 170P için iki boyutlu lineer hücresel dönüşümlerin periyodik sınır şartı ve sıfır sınır şartı altında karakterizasyonlarını incelediler. Choudhury ve ark. (2004) 170N ve 170P'nin karekterizasyonlarının en genel halini ifade ettiler. Bu kısımda tezin bütünlüğünü sağlamak ve konunun daha anlaşılabilir hale getirebilmek için, $\mathbb{Z}_2$ üzerinde yapılan çalışmalar genişletilerek tekrar yazıldı.

Üçüncü bölümde, $\mathbb{Z}_3$ cismi üzerinde periyodik ve sıfır sınır şartları altında 2460N ve 2460P kuralları ile üretilen sonlu 2D lineer CA'ların temsili matrisleri elde edildi. Ayrıca, 2460P kuralı için bazı özel durumlar incelenmektedir.

Bu tezde, $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerindeki sonlu 2D CA lar için elde edilen bazı sonuçlar, $\mathbb{Z}_3$ cismi üzerindeki sonlu 2D CA lar için genelleştirilmektedir.

SUMMARY

In the first chapter, basic definitions have been introduced without going into details.

In the second chapter, the definition of finite 2D linear CA over $\mathbb{Z}_2$ has been given. The representing matrices of finite 2D linear CA over $\mathbb{Z}_2$ generated by some special rules have been studied. Khan et al. (1977) studied the characterization of 2D CA under the null boundary condition and periodic boundary condition for 170N and 170P. Choudhury et al. (2004) declared the most general form of the characterization of 170N and 170P. In this chapter, for the sake of completeness of the thesis and to make the subject more understandable, the studies over the field $\mathbb{Z}_2$ and the proofs have been included too.

In the third chapter, the representing matrices of finite 2D linear CA over $\mathbb{Z}_3$ generated by the rule numbers 2460N and 2460P under null boundary and periodic boundary conditions have been given. Moreover, for rule number 2460P some special cases have been studied.

In this thesis, some results obtained for finite 2D CA over the field $\mathbb{Z}_2$ are generalized for finite 2D CA over the field $\mathbb{Z}_3$