T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TOPLAMSAL CELLULAR AUTOMATANIN KAOTİKLİĞİ VE ENTROPİ ÇEŞİTLERİ

Feride ALTINGÖZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2007

Yrd. Doç. Dr. Hasan AKIN danışmanlığında, Feride ALTINGÖZ'ün hazırladığı "Toplamsal Cellular Automatanın Kaotikliği ve Entropi Çeşitleri" konulu bu çalışma …/…/… tarihinde aşağıdaki juri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hasan AKIN

Üye : Doç. Dr. Vatan KARAKAYA

Üye : Yrd. Doç. Dr. Seyit TEMİR

Bu tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Prof. Dr. İbrahim BOLAT
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

ÖZ

Yüksek Lisans Tezi

TOPLAMSAL CELLULAR AUTOMATANIN KAOTİKLİĞİ VE ENTROPİ ÇEŞİTLERİ

Feride ALTINGÖZ

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hasan AKIN

Yıl: 2007, Sayfa: 83

Bu tezde, $\mathbf{Z}_n$ halkası üzerinde tanımlanan toplamsal bir-boyutlu cellular automatanın kaotikliği ve entropinin iki çeşidi (topolojik ve ölçüm entropi) incelenmektedir. İyi bilinir ki eğer $T_{f[l,r]}$ geçiş dönüşümü, başlangıç şartlarına duyarlı, topolojik geçişken ve X üzerinde yoğun periyodik orbite sahip ise, o zaman $(X, T_{f[l,r]})$ dinamik sistemi Devaney'in kaos tanımına göre kaotiktir. Temel amacımız $\mathbf{Z}_n$ halkası üzerinde tanımlanan toplamsal terslenebilen bazı bir-boyutlu cellular automataların Devaney'in kaos tanımına göre kaotikliği kavramını incelemektir. $\mathbf{Z}_2$ üzerinde Favati ve ark., (1997) tarafından elde edilen n_f doğal sayısı, p asal olmak üzere $\mathbf{Z}_p$ için genelleştirilmektedir. Ayrıca, gösterilmektedir ki eğer toplamsal bir-boyutlu cellular automata kaotik ise, o zaman tersi ve $n$ci ötelemesi de kaotiktir.

ANAHTAR KELİMELER: Topolojik Entropi, Cellular Automata, Topolojik Geçişkenlik, Sabit Noktalar, Duyarlılık, Kaotiklik

ABSTRACT

Master Thesis

CHAOTICITY OF ADDITIVE CELLULAR AUTOMATA AND KINDS OF ENTROPY

Feride ALTINGÖZ

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Hasan AKIN

Year: 2007, Pages: 83

In this thesis, the chaoticity of additive one-dimensional cellular automata defined over the ring $\mathbf{Z}_n$ and two kinds of entropy (topological and measure theoretical entropy) are studied. It is well known that a dynamical system $(X, T_{f[l,r]})$ is chaotic according to Devaney's definition of chaos if its transition map $T_{f[l,r]}$ is sensitive to initial conditions, topologically transitive, and has dense periodic orbits on X. Our main aim is to investigate the notion of chaotic according to Devaney's definition of chaos of some invertible additive one-dimensional cellular automata automata defined over the ring $\mathbf{Z}_n$. The natural number n_f which obtained by Favati *et.al.* (1997) over $\mathbf{Z}_2$ is generalized to $\mathbf{Z}_p$, where p is a prime number. Furthermore, it is shown that if an additive one-dimensional cellular automata is chaotic, then its inverse and *n*th iteration of this map are chaotic.

KEY WORDS: Topological entropy, Cellular Automata, Topological Transitivity, Fixed Points, Sensitivity, Chaoticity

TEŞEKKÜR

Yoğun çabalar sonucunda oluşturduğum tezin hazırlanması aşamasında sonsuz desteğini, bilgisini ve sabrını esirgemeyen saygı değer hocam Yrd. Doç. Dr. Hasan AKIN' a, bölümde varlığıyla bana hep destek olan sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Seyit TEMİR' e, hayatımın her safhasında arkamda olan annem Emine ALTINGÖZ' e ve Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı ile bana maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a teşekkürü bir borç bilirim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sayfa no</u>

1. GİRİŞ

İlk bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanacağımız tanım ve teoremleri vereceğiz. Teoremlerin birçoğu ilgili kaynaklarda ispatlandığından ispatlarını vermeyeceğiz.

1.1 Kümeler

1.1.1. Tanım

Ortak özelliklere sahip nesnelerin topluluğuna küme denir. Kümeyi meydana getiren nesnelere kümenin elemanları adı verilir.

1.1.2. Tanım

Eğer bir A kümesinin her bir elemanı B kümesinin de elemanı ise A kümesine B kümesinin alt kümesi denir ve $A \subset B$ ile gösterilir. $A \subset B \Leftrightarrow [a \in A \Rightarrow a \in B]$ Eğer $A \subset B$ ve $B \subset A$ ise A ve B kümeleri eşittir. $A = B$ ile gösterilir. Yani $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ ve $B \subset A$ dır.

1.1.3. Tanım

Bir X kümesinin tüm alt kümelerinin kümesine X 'in *kuvvet kümesi* denir.

1.1.4. Tanım

Elemanı olmayan kümeye boş küme denir ve { } biçiminde veya $\varnothing$ sembolü ile gösterilir.

1.1.5. Tanım

Bir A kümesinin aşikar alt kümeleri; A kümesinin kendisi ve boş kümedir.

1.1.6. Tanım

Üzerinde çalıştığımız kümeleri alt küme olarak kabul eden kümeye evrensel küme denir E harfiyle gösterilir.

1.1.7. Tanım

A ve B gibi iki kümenin ikisine de ait olan elemanlardan oluşan kümeye A ile B kümelerinin kesişim kümesi denir. $A \cap B$ ile gösterilir. Başka bir deyişle $A \cap B = \{x : x \in A \ ve\ x \in B\}$. Eğer $A \cap B = \varnothing$ ise A ile B ayrıktır.

1.1.8. Tanım

A ve B gibi iki kümenin en az birine ait olan elemanlardan oluşan kümeye A ile B kümesinin birleşim kümesi denir. $A \cup B$ ile gösterilir. Başka bir ifadeyle $A \cup B = \{x : x \in A \ veya\ x \in B\}$ ile gösterilir.

1.1.9. Tanım

A kümesine ait olup B kümesine ait olmayan elemanların oluşturduğu kümeye "A kümesinin B den farkı " veya " A fark B " denir. $A \setminus B = \{x : x \in A \ ve\ x \notin B\}$ ile gösterilir. A ve B kümesinden en az birine ait olan elemanlardan oluşan kümeye bu iki kümenin simetrik farkı denir ve $A\Delta B$ ile gösterilir veya $A\Delta B = \{x : x \in (A \cup B) \ ve\ x \in (B \cap A)\}$ şeklinde de gösterilebilir.

1.1.10. Tanım

Bir A kümesi verilsin. Bu kümeye ait olmayan fakat evrensel kümeye ait olan elemanlardan oluşan kümeye A kümesinin *tümleyeni* denir. A^t veya A^c şeklinde gösterilir. $A^t = A^c = \{x : x \in A \text{ ve } x \notin E\}$ şeklinde de gösterilebilir.

1.1.11. Tanım

$S=\varnothing$, S sonlu veya $S \sim \mathbb{N}$ ise S kümesine sayılabilir denir. Bu durumda herhangi bir S kümesi sayılabilirse ya boştur veya $\mathbb{N}$ ' nin bir alt kümesi ile aralarında 1-1 eşleme vardır.

1.1.12. Tanım

$A \subset \mathbb{R}$ olsun. Her $x \in A$ için $x \geq a$ olacak şekilde bir a reel sayısı varsa A kümesi alttan sınırlıdır denir. a sayısına da A' nın bir alt sınırı denir. Benzer olarak, A' nın her x elemanı için $x \leq b$ olacak şekilde bir b reel sayısı varsa A kümesi üstten sınırlıdır denir ve b sayısına da A' nın bir üst sınırı adı verilir. Alttan ve üstten sınırlı olan kümeye sınırlı küme adı verilir. Bir A kümesi için k bir üst sınır ise; k' dan büyük her sayıda bir üst sınırdır. Benzer olarak *m, A*' nın bir alt sınırı ise m den küçük her sayıda A'nın bir alt sınırıdır. Şu halde üstten sınırlı bir kümenin sonsuz çoklukta üst sınırı, alttan sınırlı bir kümenin sonsuz çoklukta alt sınırı vardır.

1.1.13. Tanım

Üstten sınırlı bir A kümesinin üst sınırlarının en küçüğüne A nın en küçük üst sınırı veya *supremum*u denir ve sup*A* ile gösterilir. Alttan sınırlı bir A kümesinin alt sınırlarının en büyüğüne de A' nın en büyük alt sınırı veya *infimum*u denir ve inf*A* ile gösterilir.

1.1.14. Tanım

Eğer bir A kümesinin supremumu bu kümenin bir elemanı ise bu elemana kümenin en büyük elemanı veya *maximum* elemanı denir. Aynı şekilde A' nın en büyük alt sınırı A' ya ait ise bu elemana A' nın en küçük elemanı veya *minimum* elemanı adı verilir.

1.1.15. Tanım (Tamlık Aksiyomu)

Boş olmayan ve bir üst sınıra sahip olan her A reel sayı kümesinin bir en küçük üst sınırı vardır (Royden, 1978). Bir kümenin en küçük üst sınırının kümeye ait olması gerekmez. Aynı şey en büyük alt sınır için de geçerlidir.

1.1.16. Tanım

$\overline{A} = A \cup A'$ şeklindeki $\overline{A}$ kümesi A'nın kapanışını göstermek üzere; A' kümesi A nın yığılma noktalarının kümesidir. $A \subset X$ ve $x_0 \in X$ olsun.

$A \cap (B_r(x_0) \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$ ise x_0'a A'nın bir yığılma noktası denir. A'nın yığılma noktalarının kümesi A' ile gösterilir.

1.2. Fonksiyonlar

1.2.1. Tanım

A ve B iki küme olsun. A dan B ye olan bir f bağıntısı aşağıdaki özellikler sahipse f ' ye A dan B ye bir *fonksiyon* denir.

a) Her $x \in A$ için $(x,y) \in f$ olacak şekilde B de en az bir y elemanı vardır.

b) $(x, y) \in f$ ve $(x, z) \in f$ ise $y=z$ dir .

1.2.2. Tanım

$f : A \to B$ fonksiyonu için $f(A)=B$ oluyorsa f ' ye örten fonksiyon, aksi takdirde f ' ye *içine fonksiyon* denir. Buna göre, eğer f örten ise her $y \in B$ için $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in A$ vardır.

1.2.3. Tanım

$f : A \to B$ şeklinde bir fonksiyon olsun.

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

kümesine A' nın f altındaki *görüntüsü*;

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

kümesine de B' nin f altındaki *ters görüntüsü* denir. A nın farklı elemanlarının B deki görüntüleri de farklı ise f 'ye bire bir fonksiyon denir. Başka bir deyişle $\forall x_1, x_2 \in A$ için;

$$x_1 \neq x_2 \iff f(x_1) \neq f(x_2)$$

dir.

1.2.4. Tanım

$T>0$ olmak üzere, $f(x+T)=f(x)$ bağıntısı, tanım aralığına ait her x için gerçekleniyorsa $f(x)$ fonksiyonuna periyodik bir fonksiyon, T sayılarının en küçüğüne de fonksiyonun *periyod*u denir.

1.2.5. Tanım

$f: X \to \mathbb{R}$ tanımlansın. Her $x \in X$ için, $f(x) \leq M$ olacak şekilde bir M sayısı varsa $f(x)$ fonksiyonuna bu aralıkta *üstten sınırlı* denir. Bir aralıktaki her x için $m \leq f(x)$ olacak şekilde bir m sayısı varsa $f(x)$ fonksiyonuna bu aralıkta *alttan sınırlı* denir. Alttan ve üstten sınırlı fonksiyonlara sınırlı fonksiyon denir. $m \leq f(x) \leq M$ şeklinde gösterir.

1.2.6. Tanım

Bir aralığa ait x_1, x_2 gibi iki nokta için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) \leq f(x_2)$ ise $f(x)$ 'e bu aralıkta *azalmayan*, $f(x_1) < f(x_2)$ ise $f(x)$ ' e bu aralıkta *monoton artan* ve $f(x_1) \geq f(x_2)$ ise $f(x)$ ' e *artmayan*, $f(x_1) > f(x_2)$ ise $f(x)$ ' e bu aralıkta *azalan* denir.

1.2.7. Tanım

$y = f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında kesin monoton artan olsun. Bu takdirde $[a, b]$ aralığındaki her x değerine bir y değeri karşılık geldiği gibi, $[f(a), f(b)]$ aralığındaki her y değerine de $[a, b]$ aralığında bulunan bir x değeri karşılık gelir. $x = f^{-1}(y)$ şeklinde ki ifadeye $f(x)$ ' in *tersi* denir.

1.3. Diziler

1.3.1. Tanım

Tanım kümesi **N** doğal sayılar kümesi olan her fonksiyona bir dizi denir. Eğer bir dizinin değer kümesi **R** reel sayılar kümesi ise diziye reel terimli dizi denir. Bir (a_n) dizisi n doğal sayısına a_n elemanını karşılık getiriyorsa, a_n elemanına dizinin *genel terimi* denir.

1.3.2. Tanım

$\forall \varepsilon > 0$ ve $a \in \mathbf{R}$ olsun. $M=\{x \in \mathbf{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a- \varepsilon, a+\varepsilon)$ kümesine a' nın ε-komşuluğu adı verilir. $M \setminus \{a\}$ kümesine de a' nın delinmiş ε-komşuluğu denir.

1.3.3. Tanım

$\forall \varepsilon > 0$ için $n > \mathbf{N}(\varepsilon)$ iken $|a_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\mathbf{N}(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı bulunabiliyorsa (a_n) dizisinin limitinin a olduğu söylenir $(a_n) \to a$ veya $\lim a_n = a$ ile gösterilir. (a_n) dizisinin bir limiti varsa bu diziye yakınsak dizi denir. Yakınsak olmayan diziye ıraksak dizi denir. $\forall n \in \mathbf{N}$ için $|a_n| < M$ eşitsizliğini gerçekleyecek bir $M \in \mathbf{R}^+$ varsa (a_n) dizisine *sınırlı dizi* denir.

1.3.4. Tanım

(a_n) reel terimli bir dizi olsun. $\forall n \in \mathbf{N}$ için $a_n \leq a_{n+1}$ ise (a_n) dizisi monoton artan dizidir. $\forall n \in \mathbf{N}$ için $a_n \geq a_{n+1}$ ise (a_n) dizi monoton azalandır. Eğer $i \neq j$ için $(a_i \cap a_j) = \varnothing$ ise (a_n) dizisine *ayrık dizi* denir.

1.4. Metrik Uzaylar

1.4.1. Tanım

X boştan farklı bir küme olmak üzere $d : X \times X \to \mathbb{R}$ ile tanımlı bir fonksiyon verilsin. Eğer d fonksiyonu;

a) $\forall\ x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$;

b) $\forall\, x, y \in X$ için $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

c) $\forall\; x, y \in X$ için $d(x,\, y) = d(y,\, x)$;

d) $\forall\, x, y, z \in X$ için $d(x,\, z)\ \le d(x,\, y) + d(y,\, z)$

aksiyomlarını sağlarsa *d* fonksiyonuna *X* üzerinde bir metrik ve (*X*, *d*) ikilisine de *metrik uzay* denir.

1.4.2. Tanım

(*X*, *d*) bir metrik uzay ve $G \subset X$ olsun. Eğer $\forall x \in G$ için $B(x, \varepsilon) \subset G$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ var ise *G* kümesine *açık küme* denir. Eğer $F \subset X$ kümesinin *X*-*F* tümleyeni açık ise *F* kümesine *kapalı küme* denir.

1.4.3. Tanım

(*X*, *d*) metrik uzayında açık kümelerin bir $\{G_i :\ i \in I\}$ ailesi verilsin. Bu durumda;

a) Eğer $A \subset X$ için $A \subset \bigcup_{i \in I} G_i$ oluyorsa $\{G_i :\ i \in I\}$ ailesine *A* kümesinin bir *açık örtüsü* denir.

b) Eğer bir açık örtünün $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ olacak şekilde bir alt örtüsü varsa $\{G_i : 1 \le i \le n\}$ ailesine *sonlu alt örtü* denir.

c) Eğer *A* kümesinin her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye indirgenebiliyorsa *A*’ ya *kompakt küme* denir.

d) *X* kompakt bir küme ise (*X*, *d*) metrik uzayına *kompakt metrik uzay* denir.

1.5. Topolojik Uzaylar

1.5.1. Tanım

X bir küme olsun. *X* in boş olmayan alt kümelerinin bir τ ailesi verilsin. Eğer τ ailesi;

a) $X, \varnothing \in \tau$

b) $G_1, G_2, G_3, ..., G_n \in \tau$ ise $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$ **(** $n \in \mathbb{N}$)

c) Her $i \in I$ için $G_i \subset \tau$ olduğunda $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$.

şartları sağlanıyorsa τ ya X üzerinde bir topoloji, (X**,** τ) ikilisine de *topolojik uzay* denir.

Not

(X, τ) topolojik uzay ise τ' nun elemanlarına açık kümelerdir.

1.5.2. Tanım

(X, τ) topolojik uzay olsun. Bir $x \in X$ için,

a) x noktasını içeren her açık kümeye x noktasının bir açık komşuluğu denir.

b) x noktasının bir açık komşuluğunu kapsayan X in her alt kümesine x'in bir *komşuluğu* denir.

1.5.3. Tanım

(X, τ) topolojik uzay olsun. $A \subset X$ ve $x \in A$ olmak üzere eğer A kümesi x noktasının bir açık komşuluğunu kapsıyorsa x noktasına A' nın bir *iç noktası* denir.

1.5.1. Önerme

Bir kümenin açık olması için gerek ve yeter koşul kümenin her noktasının iç noktası olmasıdır (Kelley, 1955; Lipschutz, 1965).

1.5.4. Tanım

(X, τ_1) ve (Y, τ_2) iki topolojik uzay ve $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Bir $x \in X$ için;

a) $f(x)$'in her V komşuluğu için $f(U) \subset V$ olacak şekilde x'in bir U komşuluğu bulunabilirse f'ye x noktasında *sürekli* denir.
b) Eğer f fonksiyonu her $x \in X$ için sürekli ise *τ-sürekli* denir.

1.5.1. Teorem

X, Y ve Z topolojik uzayları verilsin. Eğer $f: X \to Y$ ve $g: Y \to Z$ fonksiyonları sürekli iseler $h = gof : X \to Z$ bileşke fonksiyonu da süreklidir (Kelley,1955; Lipschutz, 1965).

1.6. Kümeler Cebiri

Bu kesimde bir dinamik sistemi oluşturmak için kullanılan cebir ve σ –cebir kavramlarını vereceğiz.

1.6.1. Tanım

X kümesinin alt kümelerinin herhangi bir kümesine X' in alt kümelerinin bir sınıfı denir.

1.6.2. Tanım

X kümesinin alt kümelerinin boş olmayan bir $\mathcal{A}$ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanırsa bu $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir *cebir* denir.

i) $X \in \mathcal{A}$;

ii) Her $E \in \mathcal{A}$ için $E^t \in \mathcal{A}$, $(X \setminus E \in \mathcal{A})$;

iii) $k = 1, 2, \ldots, n$ için $E_k \in \mathcal{A}$ ise $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$.

Eğer iii) yerine $\forall n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$ şartı sağlanırsa $\mathcal{A}$'ya $\sigma -$ cebir denir.

1.6.1. Örnek

$X = \{a, b, c\}$ olsun. $P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$ şeklindeki $P(X)$ kuvvet kümesi bir σ –cebirdir.

1.6.2. Örnek

$X=\{a, b, c, d, e\}$ olsun. $\mathcal{A}=\{\emptyset, X\}$ şeklindeki $\mathcal{A}$ kümesi bir σ –cebirdir.

1.6.3. Örnek

$f: X \rightarrow Y$ fonksiyon olsun. $\mathcal{A}$, Y üzerinde bir σ –cebir olduğunda $f^{-1}(\mathcal{A})=\{f^{-1}(A): A\in\mathcal{A}\}$ kümesi de X üzerinde bir σ –cebirdir.

1.6.3. Tanım

Bir K sınıfını kapsayan σ -cebirlerinin en küçüğüne K'nın ürettiği *σ –cebir* denir.

1.6.4. Tanım

$\mathbb{R}$ ' deki tüm (a, b) aralıklarının ürettiği σ-cebirine *Borel cebiri* denir ve $B(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $B(\mathbb{R})$'nin her elemanına da *Borel kümesi* denir.

1.7. Ölçüm Kavramı

1.7.1. Tanım

Bir X kümesi ve onun alt kümelerinden oluşan bir $\mathcal{A}$ σ-cebirinin oluşturduğu $(X, \mathcal{A})$ ikilisine *ölçülebilir uzay* denir. A, $\mathcal{A}$ içindeki herhangi bir küme ise A' ya $\mathcal{A}$ *ölçülebilir küme* denir.

1.7.2. Tanım

$(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir bir uzay olmak üzere, $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu,

i) $\mu(\emptyset)=0$;

ii) Her $A\in\mathcal{A}$ için $\mu(A)\geq 0$;

iii) Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$

özelliklerini sağlarsa fonksiyona bir ölçüm fonksiyonu veya kısaca *ölçüm* adı verilir.

1.7.1. Örnek

$\{(X_\alpha, \mathcal{B}_\alpha, \mu_\alpha)\}$ ölçüm uzaylarının bir sınıfı olsun. (X_α) kümeleri ayrık olsun. O zaman $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$, $\mathcal{B} = \{B : \alpha$ için $(B \cap X_\alpha) \in \mathcal{B}_\alpha\}$, $\mu(B) = \sum_\alpha \mu_\alpha(B \cap X_\alpha)$ ifadeleri kullanarak yeni bir ölçüm uzayını tanımlanabilir. Buna göre;

a) $\mathcal{B}$ bir σ-cebirdir.

b) μ bir ölçümdür (Cohn, 1980).

1.7.1. Önerme

$\mathbb{R}$ ’ nin boş olmayan bütün açık (kapalı) alt kümelerinin sınıfı tarafından üretilen aile σ-cebirdir (Cohn, 1980).

1.7.3. Tanım

Yukarıda ki önermeden elde edilen σ-cebire *Borel σ-cebiri* denir. $B(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$’ ye topolojik *ölçülebilir uzay* denir. $B(\mathbb{R})$’ nin elemanlarına ise *Borel kümeleri* denir.

1.7.4. Tanım

$(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ topolojik ölçülebilir uzay olsun. $\lambda : B(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$\lambda([a, b]) = \begin{cases} b - a & a \neq b \\ 0 & a = b \end{cases}$$

ile tanımlanan küme fonksiyonu $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ üzerinde bir ölçümdür. Ayrıca λ’ ya uzunluk ölçümü veya “ *Lebesgue ölçümü*” denir. $(\mathbf{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ üçlüsüne de *topolojik ölçüm uzayı* denir.

1.7.5. Tanım

X kümesi boş olmayan herhangi bir küme ve $\mathcal{A}$, X kümesi üzerinde bir σ-cebir olsun. $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ fonksiyonu tanımlansın. $\mu(X) = 1$ ise $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçüm uzayına *olasılık ölçüm uzayı* denir.

1.7.1. Teorem

$(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay ve A, X' in bir altkümesi olsun. Bu takdirde $f : \mathcal{A} \to (-\infty,\ \infty)$ fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

a) Her $t \in \mathbb{R}$ için $\{x \in A : f(x) < t\} \in \mathcal{A}$;

b) Her $t \in \mathbb{R}$ için $\{x \in A : f(x) \leq t\} \in \mathcal{A}$;

c) Her $t \in \mathbb{R}$ için $\{x \in A : f(x) \geq t\} \in \mathcal{A}$;

d) Her $t \in \mathbb{R}$ için $\{x \in A : f(x) > t\} \in \mathcal{A}$ (Cohn, 1980).

1.7.6. Tanım

$(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay ve $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu 1.7.1. Teoreminin aksiyomlarından herhangi birini sağlarsa f ' ye ölçülebilir fonksiyon denir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1. Dinamik Sistemlere Giriş

Bir dinamik sistemin ölçüm entropisini hesaplamak için ölçümü koruyan dönüşüm tanımına ihtiyaç vardır.

2.1.1. Tanım

$(X, \mathcal{A}, \mu_1)$, $(Y, \mathcal{B}, \mu_2)$ iki ölçüm uzayı olsun. $T: X \rightarrow Y$ ölçülebilir fonksiyon olsun. T ölçülebilir, 1-1, örten ve aynı zamanda T^{-1}de ölçülebilir ise T ye terslenebilir dönüşüm denir. $A \in \mathcal{B}$ için $\mu_1(T^{-1}A) = \mu_2(A)$ oluyorsa T dönüşümüne *ölçümü koruyan dönüşüm* denir.

2.1.2. Tanım

$(X, \mathcal{A}, \mu_1)$ ve $(Y, \mathcal{B}, \mu_2)$ iki ölçüm uzayı olsun. $T: X \rightarrow Y$, T tersinir, 1-1 ve örten ise *izomorfizma* dır. X ve Y uzaylarına izomorf uzaylar denir ve kısaca $X \approx Y$ ile gösterilir. $T: X \rightarrow X$ ve T, 1-1 ve örten ise *otomorfizma* dır. T birebir, örten ve ölçümü koruyan, T^{1}de ölçümü koruyan dönüşüm ise T'ye *ölçümü koruyan tersinir dönüşüm* denir. T örten ise *endomorfizma* dır.

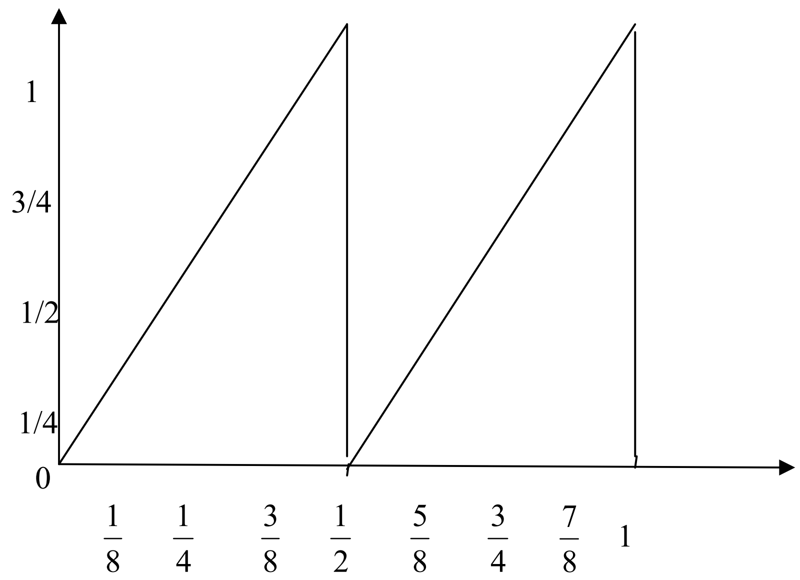
2.1.3. Tanım

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçüm uzayı ile T endomorfizması verilsin. Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(T^{-1}(A) = \mu(A)$ eşitliğini sağlayan μ ölçümüne T-değişmez ölçüm denir.

2.1.1. Örnek

$$Tx = 2x(\mathrm{mod}\,1) = \begin{cases} 2x & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

şeklindeki dönüşüme diyadik dönüşüm denir. Burada T ölçümü korur mu?



Şekil 2.1 Diyadik dönüşümünün grafiği

Değer kümesinden bir A kümesini alalım. $A=[\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ şeklinde A kümesinin T dönüşümü altında ters görüntüsünü alırsak

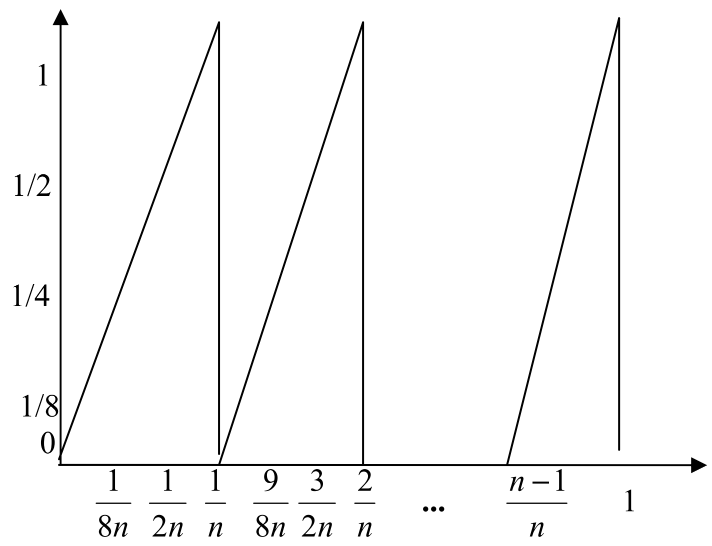
$$T^{-1}(A)= [\frac{1}{8}, \frac{3}{8})\cup[\frac{5}{8}, \frac{7}{8})$$

elde edilir. Şimdi A kümesinin ölçümünü alalım. $\mu(A)=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ dir. $T^{-1}(A)$ ifadesinin ölçümünü alırsak $\mu(T^{-1}(A)) = \mu([\frac{1}{8}, \frac{3}{8}) \cup [\frac{5}{8}, \frac{7}{8}))$ bu ifadeden $\mu(T^{-1}(A)) = \frac{1}{2}$ olduğu görülür. Böylece $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ olur. Bu ise T' nin μ ölçümünü koruduğunu gösterir. T dönüşümü $T([0, 1))=[0, 1)$ olduğundan endomorfizmadır.

2.1.2. Örnek

$$Tx = nx(mod 1) = \begin{cases} nx & 0 \le x < \frac{1}{n} \\ nx-1 & \frac{1}{n} \le x < \frac{2}{n} \\ \dots & \dots \\ nx-(n-1) & \frac{n-1}{n} \le x < 1 \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}^{+}$ olacak şekilde bir n-adic dönüşüm tanımlayalım. Acaba T ölçümü korur mu?



Şekil 2.2. n-adic dönüşümünün grafiği

değer kümesinden bir A kümesini $A=[\frac{1}{8}, \frac{1}{2})$ biçiminde alalım. A kümesinin T dönüşümü altında ters görüntüsünü alırsak;

$T^{1}(A)=[\frac{1}{8n}, \frac{1}{2n})\cup[\frac{9}{8n}, \frac{3}{2n})\cup[\frac{17}{8n}, \frac{5}{2n})\cup[\frac{25}{8n}, \frac{7}{2n})\cup...\cup[1-\frac{7}{8n}, 1-\frac{1}{2n})$ şeklinde olacaktır. Şimdi A ve $T^{-1}(A)$ kümelerinin ölçümünü alalım. $\mu(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ ve

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu([\frac{1}{8n}, \frac{1}{2n})\cup[\frac{9}{8n}, \frac{3}{2n})\cup[\frac{17}{8n},\frac{5}{2n})\cup[\frac{25}{8n},\frac{7}{2n})\cup...\cup[1-\frac{7}{8n},1-\frac{1}{2n}))$$

$$=((\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n})+(\frac{3}{2n}-\frac{9}{8n})+(\frac{5}{2n}-\frac{17}{8n})+(\frac{7}{2n}-\frac{25}{8n})+...+((1-\frac{1}{2n})-(1-\frac{7}{8n}))$$

$$=\frac{3}{8n}+\frac{3}{8n}+...+\frac{3}{8n} \quad =\frac{3}{8n}.n \ =\frac{3}{8}$$

elde edilir. Bu durumda $\mu(T^{-1}(A))=\mu(A)$ eşitliği doğrudur. O halde T ölçümü koruyan dönüşümdür. $T(x)$ dönüşümü $T([0,\ 1))=[0,\ 1)$ eşitliğini sağladığından endomorfizmadır.

2.1.4. Tanım

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçüm uzayı ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere; $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ dörtlüsüne *ölçüm- teorik dinamik sistem* denir. (X, T) ile gösterilebilir.

2.1.5. Tanım

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçüm uzayı ile T endomorfizması verilsin. Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için; $\mu(T^{-1}(A))=\mu(A)=\mu(T(A))$ eşitliği varsa T dönüşümünün tersi vardır.

2.2. Bernoulli ve Markov Ölçümleri

Bu kesimde sembolik dinamik sistemleri vereceğiz.

2.2.1. Tanım

X_i boştan farklı kümeleri ve $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ kümeside X_i lerin kartezyen çarpımını göstermek üzere; $B \subset \Omega$ bir alt kümesi verilsin, burada B=$\{x = (x_1\ x_2\ x_3\ \ldots x_n\ \ldots) \in \Omega \quad x_{i_1} \in B_{i_1},\ x_{i_2} \in B_{i_2},\ \ldots,\ x_{i_k} \in B_{i_k}\}$ ve $B_{i_1} \subset X_{i_1}$, $B_{i_2} \subset X_{i_2}$, $B_{i_3} \subset X_{i_3}$, ..., $B_{i_k} \subset \mathrm{X}_{i_k}$ şeklindedir. Bu B kümesine Ω ' nın sonlu boyutlu silindirik alt kümesi denir. $\{x \in \Omega :\ x_{i_1} = \alpha_1,\ x_{i_2} = \alpha_2,\ \ldots,\ x_{i_n} = \alpha_n\}$ kümesinde bir silindirik kümedir. S sınıfı bu sonlu boyutlu silindirik kümelerin ailesini göstersin. Bu takdirde S sınıfı Ω üzerinde bir yarı halkadır (Denker ve ark., 1969). Eğer bir silindirik kümenin x_i bileşenlerinin indisleri ardışık olarak geliyorsa bu silindir kümesine *ince silindirik kümesi* denir. Bundan sonra kolaylık olması bakımından;

$$\{x \in \Omega : x_n = i_1, x_{n+1} = i_2, x_{n+2} = i_3, \ldots, x_{n+s} = i_{s+1}, i_1, i_2, \ldots, i_{s+1} \in S\}$$

şeklindeki ince silindirik kümesini ${}_n[i_1 i_2 \ldots i_{s+1}]_{n+s}$ ile göstereceğiz.

2.2.1. Örnek

$A = \{w \in \Omega : x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0\} = {}_1[010]_3$ kümesi ince silindirik kümedir. Fakat $B = \{w \in \Omega : x_1 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1\}$ kümesi ince silindirik küme değildir. Çünkü x_2 elemanı sabitlenmemiştir. Ancak kolayca görülebilir ki B kümesi iki ince silindirik kümenin birleşimi olarak yazılabilir.

2.2.2. Örnek

E=$\{0, 1\}$ kümesi için $P(E)$=$\{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \emptyset\}$ şeklinde bir σ-cebir olmak üzere (E, $P(E)$) bir ölçülebilir uzaydır ve $V_i = (p_i,\ q_i)$ olmak üzere V_i, (E, P(E)) üzerinde birer ölçümdür. Böylece $V_i(\{0\}) = p_i$, $p_i \geq 0$ ve $V_i(\{1\}) = q_i$, $q_i \geq 0$, $p_i + q_i = 1$ olduğundan $(E, P(E), V_i)$ üçlüsü bir olasılık ölçüm uzayıdır. Şimdi Ω tek taraflı sonsuz dizilerden oluşan bir çarpım uzayı olsun. $w \in \Omega$ olmak üzere; w =(x_1, x_2, ..., x_n, ...) verilsin ($x_i \in \{0, 1\}$).

$$\mu(\{w \in \Omega : x_i = 0\}) = \mu({}_i[0]) = V_i(\{0\}) = p_i$$

$$\mu(\{w \in \Omega : x_i = 1\}) = \mu({}_i[1]) = V_i(\{1\}) = q_i \text{ ve } p_i + q_i = 1$$

olacaktır. Böylece

$$\prod_{i=0}^{\infty} (E, P(E), V_i) = (\Omega, \Im, \mu)$$

uzayı bir çarpım ölçüm uzayıdır, burada $\Im$ bir çarpım σ-cebiri ve μ de bir çarpım ölçümüdür.

2.2.1. Uyarı

İnce silindir olmayan kümeler ince silindir kümelerin birleşimi olarak yazılabilir (Denker ve ark. 1976). Örneğin $\{w \in \Omega : x_1 = 1, x_3 = 0\}$ kümesi ince değildir. O halde;

$$\{w \in \Omega : x_1 = 1, x_3 = 0\} = \{w \in \Omega : x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0\} \cup \{w \in \Omega : x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0\}$$

biçiminde elde ederiz. Şimdi bunun Bernoulli ölçümüne bakalım.

$$\mu(\{w \in \Omega : x_1 = 1, x_3 = 0\}) = V_1(1).\, V_2(0).\, V_3(0) + V_1(1).\, V_2(1).\, V_3(0)$$

$$= V_1(1).V_3(0)(V_2(0) + V_2(1))$$

$$= V_1(1).\, V_3(0)(p_i + q_i)$$

$p_i + q_i = 1$ olduğundan;

$$= V_1(1).\, V_3(0)$$

olacaktır. Bu şekilde tanımlanan ölçüme *Bernoulli Ölçümü* denir.

2.2.2. Tanım

Her i= 1, 2, ..., s için $V_i = p_i$ olsun.

μ($\{w \in \Omega: x_{n_1} = i_1, x_{n_2} = i_2, ..., x_{n_k} = i_k\}$)= $V(\{i_1\}). V(\{i_2\} ... V(\{i_k\})$ için

$$V(p,q) \Rightarrow p=q=\frac{1}{2}$$

şeklinde olursa bu ölçüme *düzgün Bernoulli ölçümü* denir.

2.2.3. Tanım

$E = \{0, 1, 2, 3, ..., r\text{-}1\}$ ise $P(E)$ kuvvet kümesi; E de tanımlanan σ-cebirdir. $\mathcal{F}$ sonlu soyutlu silindirik kümeler tarafından üretilen minimal σ-cebiri olsun. Bu takdirde C={ $w \in \Omega: x_1 = i_1, x_2 = i_2, ..., x_{i+n} = i_{i+n}$} şeklindeki küme için $C \in \mathcal{F}$ dir. $\pi = \{p_0, p_1, ..., p_{r-1}\}$ bir olasılık vektörü $P=(p_{ij})_{rxr}$ bir stochastic matris olmak üzere; $\mu_{\pi p}: \mathcal{F} \to [0,1]$ küme fonksiyonu verilsin. Bu C kümesinin ölçümünü alırsak

$$\mu_{\pi p}(C) = \mu_{\pi p}(\{w \in \Omega: x_1 = i_1, x_2 = i_2, ..., x_n = i_n\})$$

$$= p_{i_1} . p_{i_1 i_2} . p_{i_2 i_3} ... p_{i_{n-1} i_n}$$

şeklinde tanımlanan $\mu_{\pi p}$ ölçümüne (π, P) ikilisi tarafından tanımlanan *Markov ölçümü* denir.

2.2.3. Örnek

A=$\{w \in \Omega: x_0 = a_0, x_1 = a_1, x_3 = a_3\}$ ince olmayan silindirik küme verilsin. Şimdi A kümesinin Markov ölçümünü hesaplayalım. Burada kolaylık olsun diye durum uzayını E= {0, 1} olarak kabul edelim A kümesini ince silindirlerin birleşimi olarak yazarsak,

$$\{w \in \Omega: x_0 = a_0, x_1 = a_1, x_3 = a_3\} = {}_0[a_0 a_1 0 a_3]_3 \cup {}_0[a_0 a_1 1 a_3]_3$$

elde ederiz. Şimdi A kümesinin Markov ölçümünü bulalım.

$$\mu_{\pi p}\{w \in \Omega: x_0 = a_0, x_1 = a_1, x_3 = a_3\} = \mu_{\pi p}\left({}_0[a_0 a_1 0 a_3]_3 \cup {}_0[a_0 a_1 1 a_3]_3\right)$$

$$= \mu_{\pi P}\left({}_0[a_0 a_1 0 a_3]_3\right) + \mu_{\pi P}\left({}_0[a_0 a_1 1 a_3]_3\right)$$

$$= p_{a_0} \cdot p_{a_0 a_1} \cdot p_{a_1 0} \cdot p_{0 a_3} + p_{a_0} \cdot p_{a_0 a_1} \cdot p_{a_1 1} \cdot p_{1 a_3}$$

$$= p_{a_0} \cdot p_{a_0 a_1} \, (p_{a_1 0} \cdot p_{0 a_3} + p_{a_1 1} \cdot p_{1 a_3})$$

olarak yazılır.

2.2.4. Tanım

$S = \{0,1,2,...,r-1\}$ kümesi için; $\sigma : S^{\mathbf{Z}} \to S^{\mathbf{Z}}$ olsun. $\sigma(x_i) = x_{i+1}$ şeklinde ki dönüşüme *shift* (kaydırma) dönüşümü denir.

2.2.1. Teorem

$\mathcal{M}_{\sigma}(S^{\mathbf{Z}})$ bütün σ-değişmez ölçümlerin kümesini göstermek üzere $\mu \in \mathcal{M}_{\sigma}(S^{\mathbf{Z}})$ için aşağıdaki özellikler geçerlidir. Burada bahsedilen ölçüm Markov ölçümüdür

1) $\sum_{a_0 \in S} \mu \, ({}_0[a_0])=1$ burada ${}_0[a_0] = \{ w \in S^{\mathbf{Z}} : x_0 = a_0 , a_0 \in S \}$ biçiminde yazılır. Yani $\mu(\bigcup_{a_o \in S} ({}_0[a_0])) = \mu(S^{\mathbf{Z}}) = 1$ dir.

2) $(a_0 \, a_1 ... a_k)$ bir blok, $n \in \mathbf{Z}$ ve $\mu({}_m[a_0 a_1 a_2 ... a_k]) \geq 0$

3) $\mu \, ({}_m[a_0 \; a_1 \; a_2 \; ... \; a_k]) = \sum_{i=0}^{r-1} \mu({}_m[a_0 a_1 a_2 ... a_k i])$

4) $\mu \, ({}_m[a_0 \; a_1 \; a_2 \; ... \; a_k]) = \sum_{i=0}^{r-1} \mu({}_{m-1}[i a_0 a_1 a_2 ... a_k])$

olacaktır (Denker ve ark., 1976).

2.3. Ayrışımlar

Bu bölümde ilk önce ergodik teorinin temel alt başlıklarından birisi olan entropi kavramı incelenecektir. En başta ayrışım tanımı verilecektir. Bir takım örneklerin ardından katılım, entropi, ölçümü koruyan dönüşümün bir σ-cebire göre entropisi ve özellikleri tanımlanacaktır. Örneklerle konunun daha iyi anlaşılması sağlanacaktır.

2.3.1. Tanım

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ olasılık ölçüm uzayı olsun. $\mathcal{A}$ nın ayrık ölçülebilir alt kümelerinden oluşan ve birleşimi X e eşit olan bir $\xi = \{A_1, A_2, A_3, ..., A_k\}$ ailesine X in bir *ölçülebilir ayrışımı* denir. Burada $k \in I$ için eğer I sonlu ise ayrışım sonludur.

2.3.1. Örnek

X kümesi bir zarın atılması sonucu muhtemel sonuçların kümesi olsun. $\xi=\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$ ise bu X kümesi için bir ayrışımdır ve X kümesi için maximum bilgi vermektedir.

2.3.2. Örnek

$([0, 1), B(\ ), \lambda)$ olasılık ölçüm uzayında $\xi = \{ [\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n})\ 0 \le i \le 2^n - 1\ n \in \mathbf{Z} \}$

şeklindeki ξ sınıfı; [0, 1) kümesinin bir ayrışımıdır. n=1 için $\xi = \{[0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, 1)\}$ olur.

2.3.2. Tanım

ξ ve η, $(X, \mathcal{A}, \mu)$' nın iki ayrışımı olsun. ξ nin her elemanı η nın elemanlarının birleşimi olarak yazılabiliyorsa η, ξ den daha incedir denir ve $\xi \le \eta$ olarak gösterilir. Eğer $\xi \le \eta$ ve $\eta \le \xi$ ise $\xi = \eta$ olur.

2.3.3. Tanım

T, (X, $\mathcal{A}$, μ) uzayının ölçümü koruyan dönüşümü, $\xi=\{B_i\}_{i\in I}$ ise X in sonlu ayrışımı olsun. Her bir $n \geq 1$ için $T^{-n}(\xi)$ de X kümesinin başka bir ayrışımıdır.

2.3.3. Örnek

$([0,1), B([0,1)), \lambda)$ Lebesgue ölçüm uzayının

η=$\{[\frac{j}{4^n}, \frac{j+1}{4^n})\ 0 \leq j \leq 4^n - 1\}$ ve $\xi=\{[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n})\ 0 \leq i \leq 2^n - 1\}$

biçiminde ki iki ayrışımı göz önüne alalım, açıktır ki $\eta \leq \xi$ dir. Örneğin;

$$\eta=\{[0, \frac{1}{4}), [\frac{1}{4}, \frac{2}{4}), [\frac{2}{4}, \frac{3}{4}), [\frac{3}{4}, 1)\},\ \xi=\{[0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, 1)\}$$

olarak alırsak, η ayrışımı, ξ ayrışımından daha ince olduğunu görebiliriz.

Bunu $\xi \leq \eta$ şeklinde gösterebiliriz.

2.3.4. Tanım

ξ ve η (X, $\mathcal{A}$, μ) nın iki ayrışımı olsun. $\xi \leq \eta$ ve $\eta \leq \xi$ ise $\xi=\eta$ olur. Eğer $\xi \leq \eta \Leftrightarrow \mathcal{A}(\xi) \leq \mathcal{A}(\eta)$ ve $\mathcal{A} \leq \zeta \Leftrightarrow \xi(\mathcal{A}) \leq \xi(\zeta)$.

2.3.5. Tanım

(X, $\mathcal{A}$, μ) uzayı için; ξ ve η, X in iki ayrışımı olsun. Eğer

$\xi=\{A_1, A_2, A_3, ..., A_n\}$, $\eta=\{C_1, C_2, C_3, ..., C_k\}$ olursa bu iki ayrışımın katılımı da yine bir ayrışımdır. $\eta \vee \xi=\{A_i \cap C_j\ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k\}$ şeklinde gösterilir.

2.3.4. Örnek

$$\xi=\{[\frac{i}{3^n}, \frac{i+1}{3^n}); 0 \leq j \leq 3^n - 1\} \text{ ve } \eta=\{[\frac{i}{6^n}, \frac{i+1}{6^n})\ 0 \leq i \leq 6^n - 1\}$$

n=1 için bu ayrışımların katılımını alalım.

ξ={ [0, $\frac{1}{3}$), [$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$), [$\frac{2}{3}$, 1)} ve η ={[0, $\frac{1}{6}$), [$\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$), [$\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$), [$\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$), [$\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$), [$\frac{5}{6}$, 1)} için;

$$\eta\vee\xi = \{ [0, \tfrac{1}{6}), [\tfrac{1}{6}, \tfrac{2}{6}), [\tfrac{2}{6}, \tfrac{3}{6}), [\tfrac{3}{6}, \tfrac{4}{6}), [\tfrac{4}{6}, \tfrac{5}{6}), [\tfrac{5}{6}, 1) \}$$

oldu. ξ ayrışımı η nın elemanlarının birleşimi olarak yazıldığı için katılım yine η ya eşittir. Yani $\xi \leq \eta$ olduğundan $\eta\vee\xi = \eta$ olacaktır.

2.3.6. Tanım

$(\xi_n)_{n\in I}$ ayrışımların bir ailesi olsun. $\bigvee_{k=1}^{n} \xi_k = \xi_1\vee\xi_2\vee\xi_3\vee\xi_4\vee \ldots \vee\xi_n$ kümesine $(\xi_n)_{n\in I}$ ayrışımlarının *inceltilmişi (refinement)* denir.

2.3.7. Tanım

Her $A_i \in \xi$ ve her $B_i \in \eta$ için μ $(A_i \,\Delta\, B_i)=0$ ise η ve ξ ayrışımlarına mod 0' a göre denk ayrışımlar denir. $\eta \approx \xi$ ile gösterilir. Eğer $\xi \subset \eta$, $\eta \subset \xi$ ise $\xi=\eta$ dir.

2.3.8. Tanım

T: $X \rightarrow X$ ölçümü koruyan dönüşüm olsun.Eğer; ξ={ A_1, A_2, ..., A_k } şeklinde bir ayrışım alırsak $T^{n}\,\xi$ ifadesi $T^{n}\,\xi$= {$T^{n} A_1$, $T^{n} A_2$, ...,$T^{n} A_k$ } olacaktır. Burada $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$ ise $T^{n}\,\mathcal{A}$ = {$T^{n} A_n$: $A\in$ $\mathcal{A}$ } $n\geq 0$ şeklindedir. Eğer $n\geq 0$ ise T^{n} aşağıdaki işlemleri sağlar. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ nin bir sonlu alt $\sigma-$cebiri olmak üzere $\xi(\mathcal{A})$ ya $\mathcal{A}$ tarafından üretilen ayrışım ve $\mathcal{A}(\xi)$ yada ξ sonlu ayrışımı tarafından üretilen *sonlu alt* $\sigma-$*cebir* denir.

2.3.9. Tanım

$\mathcal{A}$ sonlu alt cebir olsun. $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$, $\xi(\mathcal{A})$ ={ A_1, A_2, ..., A_k } $\mathcal{A}$ nın entropisi (veya $\xi(\mathcal{A})$ nın entropisi) $H(\mathcal{A})=H(\xi(\mathcal{A}))= -\sum_{i=1}^{k}\mu(A_i).\log\mu(A_i)$ olur (Walters, 1982).

Uyarı

Eğer $\mathcal{A}=\{\emptyset, X\}$ ise $H(\mathcal{A})=0$ dır. Burada $\mathcal{A}$ kesin deneyleri gösterir. Yani hiçbir belirsizlik yoktur. Eğer; $\xi(\mathcal{A})=\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ $\forall\, i\in(1, 2, 3, ..., k)$ ve $\mu(A_i)=\frac{1}{k}$ ise bu durumda; $H(\mathcal{A})=-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{k}.\log\frac{1}{k}=\log k$ olur. Burada, $\log k$ ayrışım entropisinin maksimum değeridir. Bu takdirde aşağıdakiler geçerlidir.

i) $H(\mathcal{A})\geq 0$

ii) Eğer $\mathcal{A}=\zeta$ ise $H(\mathcal{A})=H(\zeta)$

iii) $T{:}X\rightarrow X$ ölçümü koruyan dönüşüm ise $H(T^{1}\mathcal{A})=H(\mathcal{A})$ olur.

2.3.10. Tanım

$\xi(\mathcal{A})=\{A_1, A_2, A_3, ..., A_k\}$, $\xi(\mathcal{C})=\{C_1, C_2, C_3, ..., C_p\}$ olmak üzere; ζ verildiğinde $\mathcal{A}$ nın entropisi ;

$$H(\xi(\mathcal{A})/\xi(\zeta))=H(\mathcal{A}/\zeta)=-\sum_{i=1}^{p}\mu(C_i).\sum_{i=1}^{k}\frac{\mu(A_i\cap C_j)}{\mu(C_j)}.\log\frac{\mu(A_i\cap C_j)}{\mu(C_j)}$$

$$=-\sum_{i,j}\mu(A_i\cap C_j).\log\frac{\mu(A_i\cap C_j)}{\mu(C_j)}$$

burada $\mu(C_j)\neq 0$ dır.

2.3.5. Örnek

$X=[0, 1)$, $\mathcal{B}$ Borel σ-cebiri, μ-Lebesgue ölçümü olsun. X kümesi için; $\xi=\{[0, \frac{1}{3}), [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), [\frac{2}{3}, 1)\}$ ve $\eta=\{[0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, 1)\}$ gibi iki ayrışımı verilsin. ξ ve η ayrışımlarının şartlı entropisi $H(\xi/\eta)=H(\xi\vee\eta)-H(\eta))$ formülü ile bulunabilir. O halde ilk önce katılımları alınmalıdır. $\xi\vee\eta=\{[0, \frac{1}{3}), [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}), [\frac{2}{3}, 1)\}$ şeklindedir. Katılımın entropisi

$$H(\xi\vee\eta)=-\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\log\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\log\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}$$

$$=-\frac{2}{3}\log\frac{1}{3}-\frac{2}{6}\log\frac{1}{6}=\log 3+\frac{1}{3}\log 2$$

şeklindedir. η ayrışımının entropisi ise

$$H(\eta)=-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}=\log 2$$

dir. O halde bunları kullanılırsa;

$$H(\xi/\eta)=\log\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$$

şartlı entropi değeri bulunur.

2.3.6. Örnek

ξ_i ler [0, 1) in birer ayrışımı olmak üzere; $\xi_i=\{[\frac{i}{2^n},\ \frac{i+1}{2^n}):\ 0\leq i\leq 2^n-1\}$ ayrışımında n=1, n=2, n=3 için;

$$\xi_1=\{[0,\ \frac{1}{2}),\ [\frac{1}{2},\ 1)\},\ \xi_2=\{[0,\ \frac{1}{4}),\ [\frac{1}{4},\ \frac{2}{4}),\ [\frac{2}{4},\ \frac{3}{4}),\ [\frac{3}{4},\ 1)\}$$

$$\xi_3=\{[0,\ \frac{1}{8}),\ [\frac{1}{8},\ \frac{2}{8}),\ [\frac{2}{8},\ \frac{3}{8}),\ [\frac{3}{8},\ \frac{4}{8}),\ [\frac{4}{8},\ \frac{5}{8}),\ [\frac{5}{8},\ \frac{6}{8}),\ [\frac{6}{8},\ \frac{7}{8}),\ [\frac{7}{8},\ 1)\}$$

ifadeleri bulunur. Bu şekilde devam edilirse;

$$\xi_n=\{[0,\ \frac{1}{2^n}),\ [\frac{1}{2^n},\ \frac{2}{2^n}),\ [\frac{2}{2^n},\ \frac{3}{2^n}),\ [\frac{3}{2^n},\ \frac{4}{2^n}),\ ...,\ [\frac{2^n-1}{2^n},\ 1)\}$$

elde edilir. Bu ayrışımların teker teker entropileri hesaplanırsa;

$$H(\xi_1)=\log 2,\ H(\xi_2)=\log 4,\ H(\xi_3)=\log 8,\ ...,\ H(\xi_n)=\log 2^n$$

elde edilir. Şimdi

$$\xi_1\vee\xi_2\vee\ ...\ \vee\xi_{n-1}\vee\xi_n=\xi_n\ ...(1)$$

olduğu tümevarımla gösterilebilir. n=1 için $\xi_1=\xi_1$ şeklinde yazılırsa n=1 için eşitlik doğrudur. O halde n=k-1 için (1) ifadesinin doğru olduğu kabul edilsin. Yani $\xi_1 \vee \xi_2 \vee ... \vee \xi_{n-1} = \xi_{n-1}$ olsun. Şimdi n=k için (1) eşitliğinin doğru olduğu gösterilirse, $\xi_1 \vee \xi_2 \vee ... \vee \xi_{k-1} = \xi_{k-1}$ olduğundan $\xi_1 \vee \xi_2 \vee ... \vee \xi_{k-1} \vee \xi_k = \xi_{k-1} \vee \xi_k = \xi_k$ dır. Bu ise (1) önermesinin doğru olduğunu gösterir.

2.4. Ölçümü Koruyan Dönüşümün Entropisi

İlk olarak alt cebirlere ve ayrışımlara ait kümelerin entropisi olan $H(\mathcal{A})$ ifadesini bir önceki kesimde incelendi Bu kesimde ise ölçümü koruyan T dönüşümünün $\mathcal{A}$ sonlu alt $\sigma-$cebirine göre ölçüm entropisi olan $h(T,\mathcal{A})$ değeri incelenecektir. Son olarak T nin ölçüm entropi değeri $h(T)$ yi incelenerek bazı örnekler verilecektir. $\mathcal{A}$ sonlu alt cebir olsun. $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ tarafından üretilen X in sonlu ayrışımı $\xi(\mathcal{A}) = \{A_1, A_2, A_3, ..., A_k\}$ ise $\mathcal{A}$ nın entropisi (veya $\xi(\mathcal{A})$ nın entropisi)

$$H(\mathcal{A}) = H(\xi(\mathcal{A})) = -\sum_{i=1}^{k} \mu(A_1).\log \mu(A_i)$$

olduğunu biliyoruz. ξ ayrışımına göre ölçümü koruyan T dönüşümünün entropisinin tanımının ikinci aşamasını verelim.

2.4.1. Tanım

Kabul edilsin ki T: $X\rightarrow X$ ölçümü koruyan dönüşüm olsun. Eğer $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ nin sonlu alt σ-cebiri ise;

$$h(T, \xi) = h(T, \mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\bigvee_{i=0}^{n} T^{\mathrm{i}} (\mathcal{A})$$

ifadesine T' nin $\mathcal{A}$ ya göre *ölçüm entropisi* denir. Bu limit her zaman vardır ve yakınsadığı nokta $h(T, \mathcal{A})$ dır. $h(T, \mathcal{A}) \geq 0$ olduğu açıktır.

2.4.2. Tanım

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ ölçülebilir uzay ve T: $X\rightarrow X$ ölçümü koruyan dönüşüm olsun. $h(T)=\sup h(T, \mathcal{A})$ burada supremum, $\mathcal{B}$ nin tüm sonlu alt σ-cebirleri üzerinde alınır. $h(T)$ değerine T' nin *ölçüm entropi değeri* denir. Burada $h(T, \mathcal{A})$ değerinin yerine $h(T)=\sup h(T, \xi)$ alabiliriz. $H(\xi) < \infty$ olmak üzere ξ ölçülebilir ayrışımı için için $h_\mu(T) = \sup h(T,\xi)$ fonksiyonuna $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ dinamik sisteminin *ölçüm entropisi* denir. Bu fonksiyonun özelliklerine bakarsak

a) $h(T)\geq 0$, $h(T)=\infty$ da olabilir.

b) $Tx = x$ ise $h(T)$=0 dır. Bu durumda $h(T, \mathcal{A})$=0 dır. Dolayısıyla $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{A})=\mathcal{A}$ (değişmez) sabittir.

2.4.1. Teorem

(X, $\mathcal{B}$, μ) bir olasılık uzayı ve $T: X \rightarrow X$ bir ölçümü koruyan dönüşüm olsun. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{B}$ nin sonlu alt cebirlerinin bir dizisi olmak üzere; eğer $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq ... \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq ...$ ve $\bigvee_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}_n \overset{0}{=} \mathcal{B}$ ise o zaman $h(T)= \lim_{n\to\infty} h(T, \mathcal{A}_n)$ dır (Walters, 1982).

Bu teoremleri daha iyi anlamak için σ-cebir yerine ayrışımları alalım ve d-adic dönüşümü kullanalım. Burada alt σ-cebir yerine ayrışım alınmıştır.

2.4.1 Örnek

Örnek 2.1.1 de ki dönüşümü tekrar inceleyelim. $\xi(\mathcal{A})=\{[0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, 1)\}$ ayrışımının T^{-1}altında ters görüntüsünü alalım. $T^{1}([0, \frac{1}{2})=\{[0, \frac{1}{4}]\cup[\frac{1}{2}, \frac{3}{4})\}$ ve $T^{1}([\frac{1}{2}, 1)=\{[\frac{1}{4}, \frac{1}{2})\cup[\frac{3}{4}, 1)\}$ olur. Bu ikisinin katılımı ise $\xi \vee T^{1}(\xi)=\{[0, \frac{1}{4}), [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), [\frac{3}{4}, 1)\}$ dir. Bu şekilde devam edip n tane katılım alınırsa;

$$\bigvee_{i=0}^{n} T^{\mathrm{i}}(\xi)=\{[\frac{i}{2^{n+1}}, \frac{i+1}{2^{n+1}}); 0 \leq i \leq 2^{n+1}-1\}$$

şeklinde olacaktır.

2.4.2. Örnek

$\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ayrışımlar ailesi, ξ_{i} ler [0, 1] in birer ayrışımı olmak üzere;

$\xi_{\mathrm{n}}=\{[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}]: 0 \leq i \leq 2^n - 1\}$ olsun. O halde $\xi_1=\{[0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, 1)$

$\xi_2=\{[0, \frac{1}{4}), [\frac{1}{4}, \frac{2}{4}), [\frac{2}{4}, \frac{3}{4}), [\frac{3}{4}, 1)\}$ ve

$$\xi_3=\{[0,\ \frac{1}{8}),\ [\frac{1}{8},\ \frac{2}{8}),\ [\frac{2}{8},\ \frac{3}{8}),\ [\frac{3}{8},\ \frac{4}{8}),\ [\frac{4}{8},\ \frac{5}{8}),\ [\frac{5}{8},\ \frac{6}{8}),\ [\frac{6}{8},\ \frac{7}{8}),\ [\frac{7}{8},\ 1)\}$$

böyle devam edilirse;

$$\xi_n=\{[0,\ \frac{1}{2^n}),\ [\frac{1}{2^n},\ \frac{2}{2^n}),\ [\frac{2}{2^n},\ \frac{3}{2^n}),\ [\frac{3}{2^n},\ \frac{4}{2^n}),\ ...,\ [\frac{2^n-1}{2^n},\ 1)\}$$

dir. Görüldüğü gibi n büyüdükçe ayrışım incelmektedir. $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3 \leq \ ... \ \leq \xi_n \ \leq ...$ olduğu açıktır. Böylece ξ_1 ayrışımının ters görüntüsü alınırsa; 2.4.1 nolu Teoremden $\xi_1=\{[0,\ \frac{1}{2}),\ [\frac{1}{2},\ 1)$ için;

$$T^{-1}(\xi_1)=\{[0,\ \frac{1}{4})\cup[\frac{2}{4},\ \frac{3}{4}),\ [\frac{1}{4},\ \frac{2}{4})\ \cup[\frac{3}{4},\ 1)\}$$

$$\bigvee_{i=0}^{n} T^{-i}(\mathcal{A})=\bigvee_{i=0}^{n} T^{-i}(\xi)$$

$$=\bigvee_{i=0}^{n} T^{-i}([0,\ \frac{1}{2}),\ [\frac{1}{2},\ 1)\}=B([0,\ 1))$$

Böylece Walters (1982) Theorem 4.22 den dolayı;

$$h(T)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\bigvee_{i=0}^{n-1}T^{-i}(\xi)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.n\log2=\log2$$

$$\xi=\{[0,\ \frac{1}{2}),\ [\frac{1}{2},\ 1)\ \}$$

için; $T^{-1}(\xi)=\{[0,\ \frac{1}{4})\cup[\frac{2}{4},\ \frac{3}{4}),\ [\frac{1}{4},\ \frac{2}{4})\ \cup[\frac{3}{4},\ 1)\}$ olup bu iki ayrışımın katılımı;

$$\xi\vee T^{-1}(\xi)=\{[0,\ \frac{1}{4})\cup[\frac{2}{4},\ \frac{3}{4}),\ [\frac{1}{4},\ \frac{2}{4})\ \cup[\frac{3}{4},\ 1)\}$$

olur.

$$T^2(\xi)=\{[0,\frac{1}{8})\cup[\frac{1}{2},\frac{5}{8})\cup[\frac{2}{8},\frac{3}{8})\cup[\frac{6}{8},\frac{7}{8}),[\frac{1}{8},\frac{2}{8})\cup[\frac{5}{8},\frac{6}{8})\cup[\frac{3}{8},\frac{4}{8})\cup[\frac{7}{8},1)\}$$

$$\xi\vee T^{-1}(\xi)\vee T^{-2}(\xi)=\{[\frac{i}{8},\frac{i+1}{8}):\ 0\leq i<7\ \}$$

böylece devam edilirse; $\bigvee_{i=0}^{n} T^{-i}(\xi_i) = \xi_n$ elde edilir.

$$\bigvee_{i=0}^{n} T^{-i}(\xi)=\bigvee_{i=0}^{n} T^{-i}([0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, 1)) =\{[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}): \ 0\leq i\leq 2^n\text{-}1\}=\xi_n$$

ifadesi bulunacaktır. Bunun entropisi ise

$$-2^n . \frac{1}{2^n}.\log\frac{1}{2^n}=-\log(2^n)^{-1}=\log 2^n=n.\log 2$$

o halde

$$h(T, \xi_1)= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\xi_1)) =\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\xi_n)$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ 2^n . \frac{1}{2^n}.\log\frac{1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}.n.\log 2=\log 2$$

olur. Böylece

$$\sup h(T, \xi)=\sup\log 2$$

$$=\log 2=h(T)$$

elde edilir.

2.5. Topolojik Entropi

Topolojik entropi kavramını ilk olarak Adler ve ark. (1965) tarafından tanımlandı. Daha sonra Bowen, (1971) ayrılabilir ve üretilebilir kümeleri kullanarak bir topolojik dinamik sistemin topolojik entropisini tanımladı. 1965 ten beri bu konu ile ilgili çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bu tezde bu iki tanım göz önüne alınmamaktadır daha çok D'amico ve ark., (2003) tarafından verilen ve bir yerel kuralın katsayıları vasıtasıyla kolayca elde edilen bir algoritma kullanılmaktadır. Bu çalışmada belirtildiği gibi çok boyutlu CA nın topolojik entropisi ya sıfır yada sonsuzdur. Dolayısıyla burada sadece bir boyutlu toplamsal CA'lar dikkate alınacaktır. Bu konuda ayrıntılı bilgi için Akın, (2005) ve Akın, (2007) ye bakılabilir.

2.5.1. Tanım

α, X'in bir açık örtüsü olsun. $N(\alpha)$ ile α nın sonlu alt örtülerinden eleman sayısı en az olanının eleman sayısını gösterirsek α açık örtüsünün entropisi $H(\alpha)=\log N(\alpha)$ olarak tanımlanır.

2.5.2. Tanım

α, X' in bir açık örtüsü ve T: $X \to X$ sürekli bir dönüşüm olmak üzere T nin α ya göre entropisi; $h(T,\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\vee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha)$ biçiminde tanımlanır.

2.5.3. Tanım

Eğer $T : X \to X$ sürekli bir dönüşüm ise T nin topolojik entropisi

$h(T) = \sup_{\alpha} h(T,\alpha)$ biçiminde tanımlanır. Burada X' in tüm açık örtüleri göz önüne alınır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu tezde çalışma prensipleri şunlardır: ilgilenilen konu ile ilgili geçmişte yapılan çalışmalar, internet üzerinden ve farklı kütüphanelerden elde edilen kitaplar, makaleler ve dergiler temin edildi ve bu kaynaklar iyice incelenip değerlendirildi. Daha önceden yapılan çalışmalara yeni sonuçlar eklenerek ulaşılmak istenen yere varmaya çalışılacaktır. Özellikle ele alınan çalışmalar şunlardır ki; Devaney, (1989)'in yeniden tanımladığı kaotiklik kavramı incelenecektir. Bu kitapta bulunan bir takım sorular detaylı olarak araştırılacaktır. Banks ve ark., (1992)'nın çalışmasından faydalanarak Devaney, (1989)' in tanımladığı kaotikliği elde etmek için sadece topolojik geçişkenlik ve periyodik noktaların yoğunluğunun yeterli olduğu tezimizde önemli bir yol kat etmemize sebep olacaktır. Favati ve ark., (1997) da ise $f(x_{-r},\ldots,x_r)=\sum_{i=-r}^{r}\lambda_i.x_i(\mathrm{mod}\,p)$ şeklinde ki bir Cellular Automata (kısaca CA) leftmost (rightmost) permütatif ise topolojik geçişkendir ve p asal ise yoğun periyodik orbite sahiptir sonucundan faydalanılacaktır. Kaotik olan CA lara örnekler bulduğumuz gibi "hem kendisi hem de tersi kaotik olan CA var mıdır?" sorusuna yanıt olabilecek bazı sonuçlar elde edilecektir. Aynı zamanda Favati ve ark., (1997) çalışmalarında elementar CA'nın bir doğal sayıya nasıl karşılık geldiğini vermişlerdi. Bu sonucu genelleştirerek sadece $\mathbf{Z}_2$ için değil, $\mathbf{Z}_n$ içinde böyle bir doğal sayı bulmaya yarayacak bir formül elde edilerek diğer bilim dallarında bir takım açık problemler oluşturabilecek yeni sonuçlar elde edilecektir. Bunlara ek olarak topolojik entropi ile kaotiklik arasında bir bağlantı var mı sorusu araştırılacaktır ve pozitif topolojik entropiye sahip CA'ların kuvvetli kaotik olduğu görülecektir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Çalışmanın asıl kısmını içeren bu bölümde Devaney, (1989)' in kaos tanımı için gerekli olan topolojik geçişkenlik, periyodik noktaların yoğunluğu ve duyarlılığı kavrayabilmek için bir takım örneklendirmeler yapılmaktadır. Ayrıca Favati ve ark., (2003) da ele alınan elementer CA' nın karşılık geldiği sayı bulunmuştu. Bu sayı elementer olmayan CA' lar için genelleştirilecektir. Bunların yanı sıra "toplamsal CA ne zaman kaotik olur?" ayrıca "terslenebilen CA kaotik midir?" bu sorulara cevap olabilecek bir takım sonuçlar elde edilecektir. Favati ve ark., (2003) da gösterildi ki; $f(x_{-r},...,x_{-r}) = \sum_{i=-r}^{r} \lambda_i . x_i (\text{mod}\, p)$ yerel kuralı tarafından üretilen CA, ancak p asal ise ve verilen yerel kural leftmost (rightmost) permütatif ise kaotiktir. p asal, $f : \mathbf{Z}_p^{2r+1} \to \mathbf{Z}_p$ ve $f(x_{-r},\ ...,\ x_r) = \sum_{i=-r}^{r} \lambda_i . x_i (\text{mod}\, p)$ şeklindeki yerel kuralı için; $\forall\ i = -r,\ -(r-1),\ ...,\ j-1,\ j+1,\ ...,\ r$ için $\lambda_i = 0$ fakat $\lambda_j \neq 0$ şeklinde ise bu yerel kural tarafından üretilen $T_{f[-r,r]}$ dönüşümü terslenebilirdir, kaotiktir ve terside kaotiktir sonucu detaylı olarak açıklanmaktadır. Bunların yanı sıra pozitif topolojik entropiye sahip dönüşümlerin kuvvetli kaotik olduğu verilmektedir. İnanıyoruz ki elde edilen bu sonuçlar sonlu diğer halkalar üzerinde tanımlanan çok boyutlu CA'ların kaotiklik kavramı incelenebilir.

4.1. İki Hücre Arası Uzaklık ve Shift (Kaydırma) Dönüşümü

Bu kesimde iki sonsuz dizi arasında ki mesafeyi bulabilmek için Devaney, (1989)' den faydalanılarak metrik tanımlanmıştı. Ayrıca tanımlanan metrik, duyarlılık kavramında kullanılacaktır.

4.1.1. Tanım

$\Sigma_2 = \{s = (s_0,\ s_1,\ s_2,\ ...) \mid s_j = 0 \text{ veya } 1\}$ şeklinde bir uzay ele alınsın. Bu uzay elemanları 0 ve 1 den oluşan dizi uzayıdır. Daha genel olarak elemanları 0 ve n-1 arasında ki tamsayılardan oluşan bir dizi uzayı oluşturulabilir. Bu uzay $\Sigma_n = \{s = (s_0 s_1 s_2 ...) \mid s_j = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n\text{-}1\}$ şeklindedir. Şimdi Σ_2 için bir metrik tanımlayarak bu uzay metrik uzaya dönüştürülsün. $s,\ t \in \Sigma_2$ olsun. Bu iki dizi arasındaki mesafe aşağıdaki metrikle belirlenebilir.

$$d(s,t) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-|i|}.\,| s_i - t_i |$$

$| s_i - t_i |$ arasındaki mesafe ya 0 yada 1 dir.

$$d(s,t) \le 2$$

geometrik seri ile sınırlanabilir. Bu seri yakınsaktır. Örneğin eğer; $s = (0\ 0\ 0\ ...)$ ve $t = (1\ 1\ 1\ ...\ )$ olarak alınırsa bu durumda $d(s,\ t) = 2$ olur. Yukarıda tek taraflı dizilerden bahsedildi. İki taraflı sonsuz dizileri alınırsa sonucun;

$$d(s,t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{-|i|}.\,| s_i - t_i | \le 3$$

şeklinde olacağı açıktır.

4.1.1. Önerme

d , Σ_2 üzerinde bir metriktir (Devaney, 1989).

Şimdi tek taraflı sonsuz dizilerden oluşan $\Sigma_2 = \{s = (s_0 s_1 s_2 ...) \mid s_i = 0 \text{ veya } 1\}$ dizi uzayı göz önüne alınsın. Aşağıda ki önermeyi verelim.

4.1.2. Önerme

$s,t \in \Sigma_2$ ve $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ için $s_i = t_i$ olsun. O halde $d(s,t) \leq \frac{1}{2^n}$ dir. Tersine olarak eğer $d(s,t) \leq \frac{1}{2^n}$ ise $i \leq n$ için $s_i = t_i$ dir (Devaney, 1989).

Yukarıda Σ_2 için bir metrik tanımlanmıştır. Şimdi Σ_n çarpım uzayı göz önüne alınsın ve Σ_n bir metrik tanımlansın. $\Sigma_n = \{s = (s_0 s_1 s_2 \ldots) \mid s_j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n\text{-}1\}$ olmak üzere $s_i, t_i \in \Sigma_n$ için; $d_1(s,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{n^i}$ olsun. d_1 tüm metrik özelliklerini sağlar. d_1 in maximum değeri

$$d_1(s,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{n^i} \leq (n-1).\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n^i} = (n-1).\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = n$$

dir. Yani $d_1(s,t) \leq n$ olacaktır.

4.1.2. Tanım

Σ_2 Tanım 4.1.1. deki gibi tanımlansın. $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ olmak üzere $\sigma(s_0 s_1 s_2 \ldots) = (s_1 s_2 s_3 \ldots)$ şeklindeki dönüşüme *shift* (kaydırma) dönüşümü denir. Bu dönüşüm süreklidir.

4.2. Cellular Automata

Bu kesimde tezin en önemli kısmını oluşturan ve pek çok disiplinde (bilgisayar bilimleri, fizik, biyoloji vs.) farklı amaçlar için kullanılan dönüşümler olan CA' nın bazı özellikleri incelenecektir.

4.2.1. Tanım

$m \geq 2$ için $\mathbf{Z}_m$={ 0, 1, 2, 3, …,m-1} halkası verilsin. $x = (x_n)_{n=-\infty}^{n=\infty}$ iki taraflı sonsuz dizi olsun. Bu şekildeki dizilerin uzayını $\mathbf{Z}_m^{\mathbf{Z}}$ ile gösterelim. Yarıçapı r olan f yerel kuralı $f : \mathbf{Z}_m^{r-l+1} \to \mathbf{Z}_m$ olmak üzere

$$f(x_l, ..., x_r) = \left(\sum_{i=l}^{r} a_i x_i \right) (\operatorname{mod} m)$$

ile tanımlanır. Bu f yerel kuralı ile üretilen $T_{f[l,r]} : \mathbf{Z}_m^{\mathbf{Z}} \to \mathbf{Z}_m^{\mathbf{Z}}$ dönüşümüne toplamsal CA denir. Bu dönüşüm aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$T_{f[l,r]} x = (y_n)_{n=-\infty}^{n=\infty}, y_n = f(x_{n+l}, ..., x_{n+r}) = \left(\sum_{i=l}^{r} a_i x_i \right) (\operatorname{mod} m),$$

burada $a_i \in \mathbf{Z}_m$ dir.

Tezimizde l, r ve f yi vurgulamak için bir boyutlu CA' yı $T_{f[l,r]}$ ile göstereceğiz.

4.2.2. Tanım

$\mathbf{Z}_m$ bir halka olmak üzere $f : \mathbf{Z}_m^n \to \mathbf{Z}_m$ olarak tanımlanan dönüşüme yerel kural denir. f kuralının k. ötelemesi $f^k : \mathbf{Z}_m^{k(n-1)+1} \to \mathbf{Z}_m$ biçiminde olup aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$f^k(x_1, x_2, ... x_{n+(n-1)}, ..., x_{k(n-1)+1})$$

$$= f^{(k-1)}(f(x_1, x_2, ... x_n), f(x_2, x_3, ... x_{n+1}), ..., f(x_{(k-1)(n-1)}, ..., x_{k(n-1)+1})$$

(Shereshevsky, 1992).

4.2.3. Tanım ($\mathbf{Z}_m$ üzerinde bir boyutlu Toplamsal CA)

Eğer özel olarak *l*=-*r* alınırsa bu durumda bir boyutlu toplamsal $T_{f[l,r]}$ için f yerel kuralı;

$$f(x_{-r},...,x_r) = \left(\sum_{i=-r}^{r} a_i x_i\right)(\text{mod}\, m) \; \ldots(2)$$

ile tanımlanır. Burada $i \in \{-r,...,r\}$ için $a_i \in \mathbf{Z}_m$ ve $f \neq 0$ olursa o zaman a_{-r} ve a_r arasındaki değerlerden en az biri sıfırdan farklıdır. Şimdi formal kuvvet serilerini kullanarak $\mathbf{Z}_m^{\mathbf{Z}}$ konfigürasyon uzayını tanımlayalım. Her bir $x \in \mathbf{Z}_m^{\mathbf{Z}}$ konfigürasyonuna $P_x(X) = \sum_{i \in Z} x_i X^i$ formal kuvvet serisi karşılık gelir. $T_{f[-r,r]} : \mathbf{Z}_m^{\mathbf{Z}} \to \mathbf{Z}_m^{\mathbf{Z}}$ toplamsal CA dönüşümünü $f(x_{-r},...,x_r) = \left(\sum_{i=-r}^{r} a_i x_i\right)(\text{mod}\, m)$ yerel kuralı ile tanımlandı. $A_f(X) = \sum a_i X^{-i}$ sonlu formal kuvvet serisini $T_{f[l,r]}$, CA dönüşümü ile ilişkilendirilebilir. Bu durumda $x \in \mathbf{Z}_m^{\mathbf{Z}}$ için

$$P_{F(X)}(X) \equiv P_X(X).A_f(X)(\text{mod}\, m)$$

ile gösterilir. Burada f yerel kuralının *k*. ötelemesini sonlu formal kuvvet serisinin *k*. kuvvetini alınarak elde edilebilir. Bu teknik son derece kolaydır. Ayrıntılı bilgi için Akın, (2006), Akın, (2007) ve Manzini ve Margara, (1998) çalışmalarına bakılabilir.

4.2.4. Tanım

$g : A \to A$ bir dönüşüm, $f(x_{-k},\, ...,\, x_k) = g(x_0)$ eşitliği sağlanırsa $f : A^{2k+1} \to A$ yerel kuralına aşikar denir.

4.2.5. Tanım (Permütatiflik)

$\mathbf{Z}_m$ üzerinde $x_1, x_2, ..., x_n$ *n*-bloğunun her biri için f yerel kural $B_n(\mathbf{Z}_m)$ den $\mathbf{Z}_m$ ye tanımlanan fonksiyon olsun. Eğer *n*>1 ve $\overline{x}_2, \overline{x}_3, ..., \overline{x}_n$ $\mathbf{Z}_m$'nin sabit elemanları olmak üzere $g(x_1) = f(x_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, ..., \overline{x}_n)$ $x_1 \in \mathbf{Z}$ olarak tanımlanırsa, bu durumda $g : \mathbf{Z}_m \to \mathbf{Z}_m$ gibi bir fonksiyon olur. Eğer $\overline{x}_2, \overline{x}_3, ..., \overline{x}_n$ 'nin her seçimi için g, $\mathbf{Z}_m$ in bir permütasyonu ise f, x_1 de permütatiftir. n>1 olmak üzere $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_{n-1})$, $\mathbf{Z}_m^{n-1}$ in sabit bir bloğu olsun. Bu durumda $x_n \in \mathbf{Z}_m$ olmak üzere $g(x_n) = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_{n-1}, x_n)$ fonksiyonu $\mathbf{Z}_m$ den $\mathbf{Z}_m$ ye tanımlanan bir fonksiyon olur. Eğer $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_{n-1}$ in her bir seçimi için g, $\mathbf{Z}_m$ in bir permütasyonu olarak tanımlanırsa, f, x_n de *permütatif* denir (Hedlund, 1969).

4.2.6. Tanım

$-r \le i \le r$ ve $i \in \mathbf{Z}$ olmak üzere;

1) i<0 (i>0);

2) f yerel kuralı i. değişkende permütatiftir;

3) f yerel kuralı x_j değişkenine bağlı değildir. Burada $j < i$, $(j > i)$

şartları sağlanırsa (2) denklemindeki f yerel kuralına *leftmost (rightmost) permütatif* denir.

4.2.1. Örnek

f yerel kuralını $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 (\bmod 3)$ olarak tanımlayalım. Bu durumda sonlu formal kuvvet serisi $A_f(X) = \sum_{i=-r}^{r} a_i X^{-i}$ olarak tanımlandığından $A_f(X)$yi $A_f(X) = X^{-1} + 2X^{-2}$ olarak bulunur. $P_x(X) = \sum_{i \in Z} x_i X^i$ olarak tanımlandığından

$$P_{F(X)} \equiv P_x(X).(X^{-1} + 2X^{-2})(\bmod 3) = \sum_{i \in Z} x_i X^i.(X^{-1} + 2X^{-2})\ (\bmod 3)$$

$$= \sum_{i \in Z} x_i X^{i-1} (\bmod 3) + \sum_{i \in Z} x_i X^{i-2} (\bmod 3)$$

bulunacaktır. Şimdi f fonksiyonunun 2. kuvveti alınırsa $f^2 : \mathbf{Z}_3^{3.(2-1)} \to \mathbf{Z}_3$ den $f^2 : \mathbf{Z}_3^3 \to \mathbf{Z}_3$ elde edilir. Böylece;

$$f^2(x_1, x_2, x_3) = f(f(x_1, x_2), f(x_1, x_2)) = f(x_1 + 2x_2, x_2 + 2x_3)$$

$$= x_1 + 2x_2 + 2x_2 + 4x_3 = x_1 + 4x_2 + 4x_3 (\text{mod} 3)$$

$$= x_2 + x_3 + x_4 (\text{mod } 3)$$

olacaktır. Buradan $A_{f^2}(X) = X^{-1} + X^{-2} + X^{-3}$ olur. Dolayısıyla F^2nin formal kuvvet serisi,

$P_{F^2(X)} \equiv P_x(X).(X^{-1} + X^{-2} + X^{-3})(\text{mod} 3)$ biçiminde elde ederiz.

Bu bölümde ölçümü koruyan bir dönüşümün ölçüm entropisinin verilmesinin amacı bir sistemin kaotik olup olmadığının bulunması için bir araç olarak değerlendirilebilmesidir. İyi bilinir ki her zaman bir sistemin topolojik entropisi o sistemin ölçüm entropisinden büyük veya eşittir. Eşitliği sağlayan ölçüme *maximal entropili ölçüm* denir. Bu konu ilk olarak 1964 te William Parry tarafından ortaya atıldı. Dolayısıyla $h_\mu(T) = h_{top}(T)$ olacak şekilde ki ölçüm Parry olarak anıldı. Daha sonra pek çok yazar bu konu ile ilgilendi. (Akın, 2003) te bazı bir boyutlu toplamsal $T_{f[l,r]}$ nin ölçüm entropisi ve maximal entropili ölçümler incelendi. Böylece eğer sistemin ölçüm entropisi pozitif ise topolojik entropisi de pozitif olacağından sistem kaotiktir.

Aşağıdaki iki teorem herhangi bir $T_{f[l,r]}$ ın topolojik entropisini bir algoritma yardımıyla nasıl hesaplanacağını kesin bir formül ile vermektedir. Bu sonuçlar ilgili $T_{f[l,r]}$ yı doğuran yerel kuralın katsayıları vasıtasıyla kolayca hesaplandığından dolayı son derece önemlidir.

4.2.1. Teorem

$f(x_{-r}, ..., x_r) = \left(\sum_{i=-r}^{r} a_i x_i\right)(\text{mod}\, m)$ yerel kuralı ile verilen $\mathbf{Z}_m$ üzerindeki bir boyutlu CA, $T_{f[-r,r]}$ ve $m = p_1^{k_1}.p_2^{k_2}...p_h^{k_h}$ m nin asal çarpanlarına ayrılışı olsun. i= 1, 2, …, h için $P_i = \{0\} \cup \{j : obeb(a_j, p_i) = 1\}$ ve $L_i = \min P_i$, $R_i = \max P_i$ olarak tanımlansın. Bu durumda $(\mathbf{Z}_m^{\mathbf{Z}}, T_{f[-r,r]})$ nin sağ ve sol Lyapunov üstelleri $\lambda^+ = -\min_{1\le i\le h}\{L_i\}$ ve $\lambda^- = \max_{1\le i\le h}\{R_i\}$ sayılarıdır (D'amico ve ark., 2003).

4.2.2. Teorem

$f(x_{-r}, \ldots, x_r) = \left(\sum_{i=-r}^{r} a_i x_i\right)(\bmod m)$ yerel kuralı ile belirlenen $\mathbf{Z}_m$ üzerindeki 1-boyutlu CA, $T_{f[l,r]}$ ve m nin asal çarpanlara ayrılışı $m = p_1^{k_1}.p_2^{k_2}...p_h^{k_h}$ olsun. L_i ve R_i değerleri Teorem 4.2.1. deki gibi tanımlansın. Buna göre $T_{f[-r,r]}$' nin topolojik entropisi $H(\mathbf{Z}_m^{\mathbf{Z}}, T_{f[-r,r]}) = \sum_{i=1}^{h} k_i (R_i - L_i)\log p_i$ biçimindedir (D'amico ve ark., 2003).

Yukarıda ki teoremleri kullanılarak bir boyutlu bir toplamsal CA, $T_{f[-r,r]}$'nin topolojik entropisini Lyapunov üstelleri ve algoritma yardımıyla hesaplanacak ve böylece bu $T_{f[-r,r]}$ tarafından oluşturulan sembolik dinamik sistemin kaotik olup olmadığı incelenecektir.

4.2.2. Örnek

D'amico ve ark., (2003) tarafından incelenen örneği farklı bir yerel kural kullanarak inceleyelim. Yani $\mathbf{Z}_{5400}$ halkası üzerinde başka bir yerel kural alalım. $m = 2^3.\ 3^3.\ 5^2 = p_1^{k_1}.p_2^{k_2}.p_3^{k_3}$ biçiminde yazabiliriz. f toplamsal yerel kuralını

$$f(x_{-2}, x_{-1}, \ldots, x_4) = (19x_{-2} + 80x_{-1} + 35x_0 + 4x_1 + 12x_2 + 60x_3 + 33x_4)(\bmod 5400)$$

olarak alalım. Bu durumda;

$$P_1 = \{0\} \cup \{j : obeb(a_j, p_1) = 1\} = \{-2,\ 0,\ 4\}$$

$$P_2 = \{0\} \cup \{j : obeb(a_j, p_2) = 1\} = \{-2,\ -1,\ 0\}$$

$$P_3 = \{0\} \cup \{j : obeb(a_j, p_3) = 1\} = \{-2,\ 1,\ 2,\ 4\}$$

elde edilir. Böylece

$$L_1 = \min\ P_i = -2;\ L_2 \min P_2 = -2;\ L_3 = \min P_3 = -2$$

$$R_1 = \max P_1 = 4;\ R_2 = \max P_2 = 0;\ R_3 = \max P_3 = 4$$

olur. Bu dönüşümün topolojik entropisini bulalım. $k_1 = 3,\ k_2 = 3,\ k_3 = 2$ ve $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$ olmak üzere;

$$H(\mathbf{Z}_m^{\mathbf{Z}}, T_{f[-2,4]}) = k_1(R_1 - L_1)\log p_1 + k_2(R_2 - L_2)\log p_2 + k_3(R_3 - L_3)\log p_3$$
$$= 3.(4\text{-}(\text{-}2)).\log 2 + 3.(0\text{-}(\text{-}2))\log 3 + 2.(4\text{-}(\text{-}2))\log 5$$
$$= 3.6.\log 2 + 3.2.\log 3 + 2.6.\log 5$$
$$= 18.\log 2 + 6\log 3 + 12\log 5$$

olarak elde edilir. Burada Lyapunov sağ üsteli $\lambda^{+} = -\min_{1\le i\le 3}\{L_i\} = -(-2) = 2$

Sol üsteli ise $\lambda^{-} = \max_{1\le i\le 3}\{R_i\} = 4$ olarak bulunur.

Bu teoremlerin sonuçları ve Akın, (2006) daki makalelerden görülebildiği gibi formal kuvvet serilerinin basit özellikleri kullanılarak Shereshevsky, (1992)' nin verdiği metottan çok daha kolay olan bir metod vasıtasıyla topolojik entropinin bazı özellikleri rahatlıkla incelenebilir.

4.2.3. Örnek

$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)(\bmod 2)$ ise buna karşılık gelen formal kuvvet serisi $F(X) = X^{-2} + X^{-1}$ dir. Eğer bu serinin *n*. kuvveti alınırsa bu takdirde;

$$F^n(X) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.(X^{-2})^{n-i}.(X^{-1})^{i}$$

toplamına karşılık gelen yerel kural f^n basit hesaplamalarla ;

$$f^n(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}) = \binom{n}{0}x_n + \binom{n}{1}x_{n+1} + \ldots + \binom{n}{n-1}x_{2n-1} + \binom{n}{n}x_{2n}$$

olarak bulunur. Böylece;

$$H(\mathbf{Z}_2^{\mathbf{Z}}, T_{f[1,2]}^{n}) = H(\mathbf{Z}_2^{\mathbf{Z}}, T_{f^n[n,2n]}) = (2n - 0)\log 2 = 2n\log 2$$

elde edilir.

4.2.1. Lemma

p asal olmak üzere f yerel kuralı $\mathbf{Z}_{p^k}$ halkası üzerinde

$$f(x_{-r},...,x_r) = \left(\sum_{i=-r}^{r} a_i x_i\right) (\bmod p^k) \;\ldots(3)$$

biçiminde tanımlansın. P=$\{0\} \cup \{j : obeb(a_j, p) = 1\}$ olmak üzere L=min$P$; R=max$P$ olarak tanımlanmıştı. Şu halde (3) deki yerel kural ile üretilen bir boyutlu toplamsal CA nın topolojik entropisi $H(\mathbf{Z}_{p^k}^{\mathbf{Z}}, T_{f[-r,r]}) = k.(R-L)\log p$ dır (D'amico ve ark., 2003).

4.2.4. Örnek

$\mathbf{Z}_{3^9} = \{0,1,2,3,...,3^9-1\}$ olsun. $f : \mathbf{Z}_{3^9}^5 \to \mathbf{Z}_{3^9}$ ve $f(x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2) = 10x_{-2} + 8x_{-1} + 25x_0 + 9x_1 + 23x_2 (\bmod 3^9)$ olsun. Bu takdirde f ile üretilen $T_{f[-2,2]}$ nın topolojik entropisini algoritma metodu ile hesaplayalım.

Çözüm:

$$P=\{0\} \cup \{j : \text{obeb}(a_j, p) = 1\} = \{0\} \cup \{j : \text{obeb}(a_j, 3) = 1\} = \{-2, -1, 0, 2\}$$

$L = \min P = -2; R = \max P = 2$ dir. O halde topolojik entropi

$$H(\mathbf{Z}_{3^9}^{\mathbf{Z}}, T_{f[-2,2]}) = k(R-L)\log p = 9.(2-(-2))\log 3 = 36\log 3 = \log 3^{36}$$

olarak hesaplanır. Yukarıda ki örneklerde verilen yerel kuralın n. ötelemesi alınırken klasik metot kullanıldı. Fakat Margara ve ark., (1998) çalışmalarında gösterdiler ki yerel kuralın n. ötelemesi formal kuvvet serisi kullanılarak daha kolay bulunabilir. Şimdi bu durumu açıklayan bir örnek verelim.

4.2.5. Örnek

$f(x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2) = 2x_{-2} + 3x_2 (\bmod 5)$ yerel kuralını ele alalım. Bu yerel kural tarafından üretilen toplamsal CA ise $T_{f[-2,2]}$ olsun. Şimdi bu dönüşümün n. ötelemesini ve topolojik entropisini bulalım.

Çözüm:

$f(x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2) = 2x_{-2} + 3x_2 (\bmod 5)$ yerel kuralının formal kuvvet serisi $F(X)=2X^2+3X^{-2}$ şeklinde olacaktır. P={-2, 0, 2} olduğundan L=-2 ve R=2 dir. Dolayısıyla $H(\mathbf{Z}_5^{\mathbf{Z}},T_{f[-2,2]})=1.(2-(-2)).\log 5=$ 4.log5 olacaktır. Şimdi yerel kuralın ötelemeleri sonucunda oluşan yerel kuralları aşağıdaki metotla bulunabilir.

$$F^n(X)=\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}.(2X^2)^{n-v}.(3X^{-2})^v$$

olarak alınırsa $F^n(X)$ 'e karşılık gelen yerel kural;

$$f^n(x_{-2n},...,x_{2n})=2^n.x_{-2n}+...+3^n x_{2n}(\bmod 5)$$

olur. Böylece f^n yerel kuralı için; 5 bölmez 2^n ve 5 bölmez 3^n olduğunda $L=-2n$ ve $R=2n$ olur. Böylece

$$H(\mathbf{Z}_5^{\mathbf{Z}},T^n_{f[-2,2]})=H(\mathbf{Z}_5^{\mathbf{Z}},T_{f^n[-2n,2n]})=n.H(\mathbf{Z}_5^{\mathbf{Z}},T_{f[-2,2]})$$

elde edilir.

4.2.6. Örnek

$f:\mathbf{Z}_4^3\to\mathbf{Z}_4$ olmak üzere $\mathbf{Z}_4=\{0,1,2,3\}$ halkası üzerinde f yerel kuralı $f(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2+x_3(\bmod 4)$ olarak tanımlansın. f yerel kuralı ile üretilen bir boyutlu toplamsal $T_{f[1,3]}$ CA fonksiyonunun topolojik entropi değerini algoritma ve Lyapunov üstellerinden yararlanarak hesaplayalım.

Çözüm:

$\mathbf{Z}_4=\{0,1,2,3\}$ halkası üzerinde f nin hem sağ hem de sol permütatif olduğu Hedlund, (1969) da ki tanımdan dolayı açıktır. Şimdi $T_{f[1,3]}$ nin topolojik entropi değerini algoritma ve Lyapunov üstelleri yardımıyla hesaplanırsa;

$$P=\{0\}\cup\{j:obeb(a_j,p)=1\}=\{0\}\cup\{j:obeb(a_j,2)=1\}=\{0,1,2,3\}$$

$$L=\min(P)=0;\ R=\max(P)=3$$

olur. Sağ ve sol Lyapunov değerleri

$$\lambda^-=\max\{R\}=3;\lambda^+=-\min\{L\ \}=0$$

olarak elde edilir. Buradan da $T_{f[1,3]}$ nin topolojik entropisi

$$H(\mathbf{Z}_4^{\mathbf{Z}},T_{f[1,3]})=k.(R-L)\log p=2.(3-0)\log 2=6\log 2=\log 2^6$$

ve böylece

$$H(\mathbf{Z}_4^{\mathbf{Z}}, T_{f[1,3]}) = (\lambda^+ + \lambda^-)\log m = (3+0)\log 4 = 3\log 4 = \log 4^3$$

olur. Böyle devam edersek mod$m$ için topolojik entropisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mathbf{Z}_m = \{0,1,2,...,m-1\} \text{ için } H(\mathbf{Z}_4^{\mathbf{Z}}, T_{f[1,3]}) = 3\log m = \log m^3$$

4.2.7. Tanım (Terslenebilirlik)

$m = p_1^{k_1}.p_2^{k_2}.p_3^{k_3}...p_h^{k_h}$ verilsin. $T_{f[l,r]}, f(x_l,...,x_r) = \sum_{i=l}^{r} \lambda_i.x_i (\mathrm{mod}\, m)$ tarafından doğrulan CA olsun. Bu CA nın terslenebilir olması için $\forall j = 1,2,3,...,h$ için p_j asal sayılarının her biri sadece ve sadece f nin λ_i katsayılarından sadece birini bölemez ancak kalan katsayıların hepsini bölmesi gerekir. Yani $\forall j = 1,2,...,k-1,k+1,...,h$ için $p_i \setminus \lambda_j$ ancak $i \neq j$ ve $obeb(p_i, \lambda_j) = 1$.

Tezimizde daha öncede belirtildiği gibi sadece bir boyutlu toplamsal CA larla ilgileneceğiz.

4.2.2. Lemma

$m =$ $p_1^{k_1}.p_2^{k_2}...p_h^{k_h}$ olmak üzere $F(X)$, Z_m üzerinde tanımlanmış sonlu formal kuvvet serisi olsun. $F(X).G_i(X) \equiv 1$ (mod $p_i^{k_i}$) olacak şekilde sonlu h tane $G_1,...,G_h$ formal kuvvet serisi verilsin, bu durumda

$$F(X).G(X) \equiv 1 (\mathrm{mod}\, m)$$

eşitliğini sağlayacak bir sonlu G sonlu formal kuvvet serisi bulunabilir (Manzini ve ark., 1998).

4.2.3. Teorem

$F(X)$, $\mathbf{Z}_{p^k}$ üzerinde tanımlanmış sonlu terslenebilir formal kuvvet serisi, λ_j ve $H(X)$, $F(X) = \lambda_j.X^{j_1} + p.H(X)$ eşitliliğinde ki gibi ve $\lambda_j.\lambda_j^{-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p_i^{k_i})$ eşitliği sağlansın. Bu durumda F verildiğinde F nin tersi

$G(X) = \lambda_j^{-1} . X(1 + p\tilde{H}(X) + p^2\tilde{H}(X) + ... + p^{k-1}\tilde{H}^{k-1}(X))$ biçimindedir. Burada $\tilde{H}(X) = -\lambda_j \; X \; H(X)$ şeklindedir (Manzini ve Margara., 1998).

Dolayısıyla $\alpha_i = m/p_i^{k_i}$ ve ebob(α_i, p_i) $= 1$ için $\beta_i.\alpha_i \equiv 1(\mathrm{mod}\; p_i^{k_i})$ olacak şekilde F nin tersini $G(X) = \sum_{i=1}^{h} \beta_i \alpha_i G_i(X)$ şeklinde yazabiliriz. (Manzini ve Margara., 1998) deki sonuçları kullanarak, Akın, (2006) ve Akın, (2007) da bir boyutlu terslenebilen CA nın topolojik entropisi ile bu dönüşümün tersinin topolojik entropisinin eşit olduğu gösterildi. Böylece şu sonuç çıkarılabilir eğer terslenebilen bir dönüşüm kuvvetli kaotik veya zayıf kaotik ise dönüşümün terside kuvvetli veya zayıf kaotiktir anlamına gelir. Bir dönüşümün tersi nasıl bulunur aşağıdaki örnekten anlaşılabilir.

4.2.7. Örnek

$f(x_3, x_4, x_5, x_6) = x_3 + 3x_4 + 6x_5 + 3x_6(\mathrm{mod}\,9)$ olsun. Verilen f yerel kuralının tersini bulalım. $f(x_3, x_4, x_5, x_6) = x_3 + 3(x_4 + 2x_5 + x_6)(\mathrm{mod}\,9)$ olduğundan

buna karşılık gelen formal kuvvet serisi;

$$\begin{aligned} F(X) &= X^{-3} + 3(X^{-4} + 2X^{-5} + X^{-6}) \\ &= X^{-3}(1 + 3(X^{-1} + 2X^{-2} + X^{-3})) \end{aligned}$$

Şeklindeki formal kuvvet serisinin tersi ise

$G(X) = X^3(1 - 3(X^{-1} + 2X^{-2} + X^{-3}))$ olur. Şimdi F ve G nin çarpımı yazılırsa;

$$F(X).G(X) = X^{-3}(1 + 3(X^{-1} + 2X^{-2} + X^{-3})).X^3(1 - 3(X^{-1} + 2X^{-2} + X^{-3}))(\mathrm{mod}\,9)$$

$$= 1(\mathrm{mod}\,9)$$

şeklinde olacaktır. Şimdi G ye karşılık gelen yerel kural bulunsun.

$G(X) = X^3(1 - 3(X^{-1} + 2X^{-2} + X^{-3})) = X^3 - 3(X^2 + 2X^1 + X^0)$ idi. O halde;

$$\begin{aligned} g(x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0) &= x_{-3} - 3(x_{-2} + 2x_{-1} + x_0)(\mathrm{mod}\,9) \\ &= x_{-3} + 6(x_{-2} + 2x_{-1} + x_0)(\mathrm{mod}\,9) \\ &= x_{-3} + 6x_{-2} + 3x_{-1} + 6x_0(\mathrm{mod}\,9) \end{aligned}$$

oldu. $T_{f[3,6]}$ CA'nın tersi $T_{g[-3,0]}$ dir. Bu durum ise $T_{f[3,6]}$ nin 1-1 ve örten olduğunu gösterir. $T_{f[3,6]}$ süreklidir. Dolayısıyla $T_{g[-3,0]}$ de süreklidir. O halde T

homeomorfizmadır. Şimdi iki farklı asal çarpanı olan bir doğal sayı ile verilen bir yerel kuralın tersini bulacağız.

4.2.8. Örnek

$F(X) = 15X^{-2} + X - 30X^{3} (\bmod 3^2.5^2)$ alınırsa bu durumda tanım gereği F terslenebilirdir ve bu fonksiyonun tersi;

$G(X) = 37(-36X^{-8} - 12X^{-5} + 144X^{-3} + X^{-2} + 24X^{0} - 144X^{2}) \ (\bmod 3^2.5^2)$

biçimindedir.

Çözüm:

F yi düzenlersek

$$\begin{aligned} F(X) &= 15X^{-2} + X - 30X^{3} \\ &= X[1 + 15X^{-3} - 30X^{2}] \\ &= X[1 - 5(-3X^{-3} + 6X^{2})] \end{aligned}$$

olur. Bu formal kuvvet serisinin 5^2 ye göre tersi

$$\begin{aligned} G_1(X) = X^{-1}[1 + 5(-3X^{-3} + 6X^{2})] &= X^{-1}[-15X^{-3} + 1 + 30X^{2}] \\ &= -15X^{-4} + X^{-1} + 30X (\bmod 5^2) \end{aligned}$$

şeklinde olacaktır. Yani $F(X).G_1(X) \equiv 1 (\bmod 5^2)$ dir. Şimdi bu denklik sağlanıyor mu görelim.

$$(15X^{-2} + X - 30X^{3}).(-15X^{-4} + X^{-1} + 30X) \equiv 1 (\bmod 5^2)$$

$$F(X) = X[1 + 15X^{-3} - 30X^{2}] = X[1 - 3(-5X^{-3} + 10X^{2})]$$

şimdi $F(X)$ in 3^2 ye göre tersi bulunursa;

$$\begin{aligned} G_2(X) = X^{-1}[1 + 3(10X^{2} - 5X^{-3})] &= X^{-1}[1 + 30X^{2} - 15X^{-3})] \\ &= -15X^{-4} + X^{-1} + 30X \end{aligned}$$

$F(X).G_2(X) \equiv 1 (\bmod 3^2)$ denkliğini sağlayıp sağlamadığı gösterilirse;

$$(15X^{-2} + X - 30X^{3}).(-15X^{-4} + X^{-1} + 30X) \equiv 1 (\bmod 3^2)$$

şeklinde olacağı açıktır. O halde β_1 ve β_2 uygun sayılar olmak üzere;

$$\begin{aligned} G(X) &= 25.\beta_1 G_1(X) + 9.\beta_2 G_2(X) \\ &= 25\beta_1 (-15X^{-4} + X^{-1} + 30X) + 9\beta_2 (-15X^{-4} + X^{-1} + 30X) \end{aligned}$$

olarak bulunacaktır.

4.3. Elementer CA

Favati ve ark., (1997) periyodik orbitlerin inşası için $\mathbf{Z}_2$ de çalışmışlar ve her bir yerel kuralı katsayılarını farklı alarak farklı birer doğal sayıya karşılık getirmiş ve bir formül oluşturmuşlardır. Burada bu formülü $\mathbf{Z}_3=\{0,1,2\}$ için ve daha genel düşünerek $\mathbf{Z}_p=\{0,1,2,...,p-1\}$ için tekrar oluşturuldu.

4.3.1. Tanım

$f:\mathbf{Z}_2^{2k+1}\rightarrow\mathbf{Z}_2$ şeklinde ki toplamsal f yerel kuralı için; k=1 ise bu yerel kural tarafından üretilen CA ya Elemanter CA denir. Kısaca ECA ile gösterilir. ECA nın hesaplanması için kolay bir yol aşağıdadır. f yerel kuralı tabanlı ECA, n_f doğal sayısına dönüşür.

$$n_f=f(0,\ 0,0).2^0+f(0,\ 0,\ 1).2^1+f(0,\ 1,0).2^2+f(0,\ 1,\ 1).2^3+$$
$$...+f(1,\ 1,\ 1).2^7$$

Bu ifadeyi ECA_{n_f} ile gösterebiliriz. Şimdi yerel kuralı yazalım.

$f(x_{-1},\ x_0,\ x_1)=ax_{-1}+\ bx_0+\ cx_1\ \pmod 2$ burada ki a, b, c katsayılarına Boolen katsayıları denir. ECA için a= 1, b= 1, c= 1 olarak alalım.

$f(x_{-1},\ x_0,\ x_1)=x_{-1}+x_0+x_1 \pmod 2$ şeklinde olacaktır. O halde;

$$f(0,\ 0,0).2^0\rightarrow 0$$
$$f(0,\ 0,\ 1).2^1\rightarrow 2$$
$$f(0,\ 1,0).2^2\rightarrow 4$$
$$f(0,\ 1,\ 1).2^3\rightarrow 0$$
$$f(1,\ 0,0).2^4\rightarrow 16$$
$$f(1,\ 0,\ 1).2^5\rightarrow 0$$
$$f(1,\ 1,0).2^6\rightarrow 0$$
$$f(1,\ 1,\ 1).2^7\rightarrow 128$$

Bu sonuçları

$$n_f=f(0,\ 0,0).2^0+f(0,\ 0,\ 1).2^1+f(0,\ 1,0).2^2+...+f(1,\ 1,\ 1).2^7\ \ldots(1)$$

formülünde yerine yazılırsa n_f =150 olacaktır. 150 kuralı bulundu.

$f(x_{-1}, x_0, x_1) = ax_{-1} + bx_0 + cx_1 \pmod 2$ deki katsayılar değiştirilip *a*= 0, *b*=0, *c*= 1 olarak alınsın. Bu durumda yerel kural $f(x_{-1}, x_0, x_1) = x_1 \pmod 2$ şeklinde olacaktır. Kullanılan konfigürasyon sayısı 8 dir.

$$f(0,\ 0,\ 0).2^0 \to 0$$

$$f(0,\ 0,\ 1).2^1 \to 2$$

$$f(0,\ 1,\ 0).2^2 \to 0$$

$$f(0,\ 1,\ 1).2^3 \to 8$$

$$f(1,\ 0,\ 0).2^4 \to 0$$

$$f(1,\ 0,\ 1).2^5 \to 32$$

$$f(1,\ 1,\ 0).2^6 \to 0$$

$$f(1,\ 1,\ 1).2^7 \to 128$$

$n_f = 170$ oldu. Buradan 170 kuralı elde edildi. Katsayıları değiştirip; *a*= 1, *b*= 1, *c*= 0 olarak alınırsa $n_f = 60$ kuralı bulunur. O halde bir tablo oluşturulabilir.

$RULE(KURAL)$	a,b,c
0	$a = 0,\ b = 0,\ c = 0$
204	$a = 0,\ b = 1,\ c = 0$
170	$a = 0,\ b = 0,\ c = 1$
240	$a = 1,\ b = 0,\ c = 0$
60	$a = 1,\ b = 1,\ c = 0$
102	$a = 0,\ b = 1,\ c = 1$
90	$a = 1,\ b = 0,\ c = 1$
150	$a = 1,\ b = 1,\ c = 1$

Favati ve ark., (1997) elementer CA üzerinde çalışmış ve bu CA'ya karşılık gelen bir n_f doğal sayısını bulmak için bir formül geliştirmişlerdir. Şimdi bu sayıyı

$\mathbf{Z}_3$ için hesaplansın. $f:\mathbf{Z}_3^{2k+1}\to\mathbf{Z}_3$ yerel kuralı için k=1 olsun. Bu durumda olası konfigürasyonlar;

(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 2), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 2, 0), (0, 2, 1), (0, 2, 2), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 2), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 0), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (2, 0, 0), (2, 0, 1), (2, 0, 2), (2, 1, 0), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 0), (2, 2, 1), (2, 2, 2) dir. Bu konfigürasyonların sayısı $3^3=27$ tanedir.

$f(x_{-1},\ x_0,\ x_1)=ax_{-1}\ +bx_0\ +cx_1\ (\mathrm{mod}\,3)$ olmak üzere; bu yerel kurala karşılık gelen doğal sayı;

$$n_f=f(0,\ 0,\ 0).3^0+f(0,0,1).3^1+f(0,0,2).3^2+f(0,1,0).3^3+...+f(0,2,2).3^8$$
$$+f(1,0,0).3^9+f(1,0,1).3^{10}+f(1,0,2).3^{11}+f(1,1,0).3^{12}+...+f(1,2,2).3^{17}$$
$$+f(2,0,0).3^{18}+f(2,0,1).3^{19}+f(2,0,2).3^{20}+f(2,1,0).3^{21}+...+f(2,2,2).3^{26}\ \ldots(2)$$

dır.

4.3.1. Örnek

$f(x_{-1},x_0,x_1)=x_{-1}+2x_0+x_1(\mathrm{mod}\,3)$ yerel kuralının karşılık geldiği n_f doğal sayısını bulalım.

Çözüm:

Yukarıda ki (2) formülü kullanılarak sonuca ulaşılmaya çalışılırsa;

$$f(0,\ 0,\ 0).3^0\to 0$$
$$f(0,\ 0,\ 1).3^1\to 3$$
$$f(0,\ 0,\ 2).3^2\to 18$$
$$f(0,\ 1,\ 0).3^3\to 54$$
$$f(0,\ 1,\ 1).3^4\to 0$$
$$f(0,\ 1,\ 2).3^5\to 243$$
$$f(0,\ 2,\ 0).3^6\to 720$$
$$f(0,\ 2,\ 1).3^7\to 2187.2$$
$$f(0,\ 2,\ 2).3^8\to 0$$
$$f(1,\ 0,\ 0).3^9\to 19683$$
$$f(1,\ 0,\ 1).3^{10}\to 59049.2$$

$$f(1,\ 0,2).3^{11} \to 0$$

$$f(1,\ 1,0).3^{12} \to 0$$

$$f(1,\ 1,1).3^{13} \to 1594323$$

$$f(1,\ 1,2).3^{14} \to 3^{14}.2 = 9565938$$

$$f(1,\ 2,0).3^{15} \to 3^{15}.2 = 28697814$$

$$f(1,\ 2,1).3^{16} \to 0$$

$$f(1,\ 2,2).3^{17} \to 129140163.1$$

$$f(2,\ 0,0).3^{18} \to 3^{18}.2 = 774840978$$

$$f(2,\ 0,1).3^{19} \to 0$$

$$f(2,\ 0,2).3^{20} \to 3^{20}.1 = 3486784401$$

$$f(2,\ 1,0).3^{21} \to 3^{21}.1 = 10460353203$$

$$f(2,\ 1,1).3^{22} \to 2.3^{22} = 62762119218$$

$$f(2,\ 1,2).3^{23} \to 0$$

$$f(2,\ 2,0).3^{24} \to 0$$

$$f(2,\ 2,1).3^{25} \to 1.3^{25} = 847288609443$$

$$f(2,\ 2,2).3^{26} \to 3^{26}.2 = 5083731656658$$

olur. Şimdi bu değerler (2) formülünde yerine yazılarak sonuç aşağıdaki gibi bulunur.

$$n_f = 6008673505341$$

$(210021101022100021021102210)_3 =$ 6008673505341 şeklinde n_f doğal sayısını elde edildi. Bu şekilde düşünülerek 27 tane farklı n_f sayısı elde edilir. Çünkü her bir konfigürasyona karşılık bir n_f sayısı bulunacaktır.

Yukarıda ki ifadeleri biraz daha genelleştirerek p asal sayısı için bir n_f sayısını bulmaya çalışalım. Kullanılan yerel kural $f : \mathbf{Z}_p^{2k+1} \to \mathbf{Z}_p$ k=1 için değerlendirilirse, bu durumda olası konfigürasyonlar; (0, 0, 0), (0, 0, 1), …, (0, 0, p-1), …, (p-1, p-1, p-1) olacaktır. O halde yerel kural aşağıdaki şekilde olacaktır.

$f(x_{-1}, x_0, x_1) = ax_{-1} + bx_0 + cx_1 (\mathrm{mod}\, p)$ burada ki *a, b, c* katsayıları 0, 1, 2, 3, …, *p*-1 sayılarından başka sayılar olamaz. Şimdi n_f sayısı için daha genel bir formül elde etmeye çalışalım.

4.3.1. Önerme

$f : \mathbf{Z}_p^{2k+1} \to \mathbf{Z}_p$ olmak üzere *p* asal, *k*=1 için yerel kural aşağıdaki gibi olsun. $f(x_{-1}, x_0, x_1) = ax_{-1} + bx_0 + cx_1 (\mathrm{mod}\, p)$ burada *a, b, c* ∈ { 0, 1, …, *p*-1} dir. Bu yerel kural tarafından üretilen CA'ya karşı gelen n_f sayısını aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$n_f = f(0,\ 0,\ 0).p^0 + f(0,\ 0,\ 1).p^1 + f(0,\ 0,\ 2).p^2 + \ldots + f(0,\ 0, p\text{-}1).p^{p-1} +$$
$$\ldots + f(p\text{-}1, p\text{-}1, p\text{-}1).p^{p^3-1}$$

Bulunan ifade 1 yarıçaplı yerel kural için kullanılır. Bu ifade *k* yarıçaplı yerel kural için yeniden yazılırsa, burada dikkat edilirse toplam p^3 tane farklı n_f sayısı elde edilecektir. Elementer CA lar için düşünülen mantık, farklı *k* sayıları içinde rahatlıkla düşünülebilir.

4.3.2. Önerme

$f : \mathbf{Z}_p^{2k+1} \to \mathbf{Z}_p$ olmak üzere

$f(x_{-r}, \ldots, x_0, \ldots, x_r) = a_{-r}x_{-r} + \ldots + a_0x_0 + \ldots + a_rx_r (\mathrm{mod}\, p)$ şeklinde ki yerel kural tarafından üretilen ($a_{-r}, \ldots, a_0, \ldots, a_r \in \{0, 1, 2, \ldots p-1\}$ CA ya karşı gelen n_f sayısını aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$n_f = f(0,\ 0,\ 0).p^0 + f(0,\ 0,\ 1).p^1 + f(0,\ 0,\ 2).p^2 + \ldots + f(0,\ 0, p\text{-}1).p^{p-1} +$$
$$\ldots + f(p\text{-}1, p\text{-}1, p\text{-}1).p^{p^{2r+1}-1}$$

Burada inanıyoruz ki daha önce $\mathbf{Z}_2$ halkası için elde edilen ve Bilgisayar Bilimleri, Fizik, Matematik ve diğer disiplinler için elde edilen sonuçlar yeniden açık problem olarak kalacaktır.

4.4. Sabit Noktalar

4.4.1. Tanım (Sabit Nokta)

$f(x)=x$ eşitliğini sağlayan tüm noktalara sabit noktalar denir. (Bir x noktasına $f^n(x)=x$ eşitliğini sağlıyorsa bu noktaya *periyodik nokta* denir).

4.4.2. Tanım

$f(x)=x$ eşitliğini sağlayan sabit x noktası için;

1) $|f'(x)|<1$ ise x noktasına çekici sabit nokta;

2) $|f'(x)|>1$ ise x noktasına itici sabit nokta;

3) $|f'(x)|=1$ ise x noktasına tepkisiz sabit nokta denir.

4.4.1. Örnek

$f_1(x)=x^3$ fonksiyonu -1, 0, 1 de sabit noktaya sahiptir. Başka periyodik noktası yoktur. Fakat $f_2(x)=x^2-1$ dönüşümü için sabit noktalar $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ dır. Aşağıda ki sonuç sabit noktalarla ilgili kesin olarak elde ettiğimiz sonuçlardan biridir.

4.4.1. Önerme

$\theta\in S^1$ ve $f:S^1\to S^1$ ve $f(\theta)=\theta+\varepsilon\sin(N\theta)(\mathrm{mod}\,1)$ olmak üzere $0<\varepsilon<\dfrac{1}{N}$ şeklinde olsun. Bu dönüşüm N tane itici sabit noktaya N tane çekici sabit noktaya sahiptir. Ayrıca k = 0, 1, 2, 3, …, N-1 olmak üzere bu fonksiyonun sabit noktaları $\theta_s=\{\dfrac{k\pi}{N}\}$ şeklindedir. k=2p ise $\dfrac{k\pi}{N}$ itici sabit noktadır ve k=2p+1 ise $\dfrac{k\pi}{N}$ çekici sabit noktadır

İspat:

$0<\varepsilon<\dfrac{1}{N}$ olmak üzere $f(\theta)=\theta+\varepsilon\sin(N\theta)$ dönüşümünün sabit noktaları $f(\theta)=\theta$ şartını sağlayan noktalardır. O halde $\theta+\varepsilon\sin(N\theta)=\theta$ den

$\varepsilon \sin(N\theta) = 0$ olur. Bu şartı sadece $\theta_s = \{\frac{k\pi}{N}\}$ şeklinde ki noktalar sağlar. Yani f dönüşümünün sabit noktaları $\theta_s = \{\frac{k\pi}{N}\}$ şeklindedir. Şimdi bu şekilde ki θ ları inceleyelim. Öncelikle dönüşümün türevini alalım.

$$f'(\theta) = (\theta + \varepsilon \sin(N\theta))' = 1 + N\varepsilon \cos N\theta$$

$\cos\theta$ fonksiyonu $\theta = k\pi$ değeri k çift ise 1 dir. $\theta = (k+1)\pi$ için ise -1 dir O halde $\theta = \frac{k\pi}{N}$ ifadesinde ki k sayısı çift ise $f'(\theta) = 1 + N\varepsilon \cos N\theta$ ifadesi $\theta = \frac{2p.\pi}{N}$ için $f'(\frac{2p.\pi}{N}) = 1 + N\varepsilon > 1$ olacağından bu noktalar itici sabit noktalardır. Fakat $\theta_s = \{\frac{k\pi}{N}\}$ ifadesindeki k sayısı tek ise $f'(\theta) = 1 + N\varepsilon \cos N\theta$ $\theta = \frac{(2p+1)\pi}{N}$ için $f'(\frac{(2p+1)\pi}{N}) = 1 - N\varepsilon < 1$ olacağından bu şekilde ki noktalar çekici sabit noktalardır.

Konunun daha iyi anlaşılması ve bütünlüğün sağlanması açısından aşağıda ki örnekleri verelim.

4.4.2. Örnek

$\theta \in S^1$ ve $f : S^1 \to S^1$ olmak üzere $f(\theta) = \theta + \varepsilon.\sin(2\theta)$ (mod1) dönüşümünü $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ için ele alalım. Dikkat edilirse f dönüşümünün sabit noktaları 0, $\frac{\pi}{2}$, π ve $\frac{3\pi}{2}$ dır. Şimdi bu noktaların hangisi çekici hangisi itici noktadır bulmaya çalışalım. Bunun için fonksiyonun 1. türevini almalıyız.

$$f'(0) = f'(\pi) = 1 + 2\varepsilon > 1 \text{ ve } f'(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{3\pi}{2}) = 1 - 2\varepsilon < 1$$

olarak bulundu. Bu durumda 0 ve π itici sabit nokta olurken; $\frac{\pi}{2}$ ve $\frac{3\pi}{2}$ çekici sabit noktadır. Daha genel olarak $f(\theta) = \theta + \varepsilon \sin(N\theta)$ dönüşümü

N tane itici sabit noktaya N tanede çekici sabit noktaya sahiptir. Fakat

$f(\theta) = \theta + \varepsilon \sin(N\theta)$ dönüşümü için $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{N}$ olarak alınmalıdır.

4.4.3. Örnek

$\theta \in S^1$ ve $f : S^1 \to S^1$ olmak üzere $f(\theta) = \theta + \varepsilon.\sin(3\theta)$ (mod 1) dönüşümünü $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{3}$ için ele alalım. Dikkat edilirse f dönüşümünün sabit noktaları 0, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{3\pi}{3}$, $\dfrac{4\pi}{3}$ *ve* $\dfrac{5\pi}{3}$ dır. Şimdi bu noktaların hangisi çekici hangisi itici noktadır bulmaya çalışalım. Bunun için fonksiyonun 1. türevini almalıyız.

$$f'(0) = f'(\frac{2\pi}{3}) = f'(\frac{4\pi}{3}) = 1 + 3\varepsilon > 1$$
$$f'(\frac{\pi}{3}) = f'(\frac{3\pi}{3}) = f'(\frac{5\pi}{3}) = 1 - 3\varepsilon < 1$$

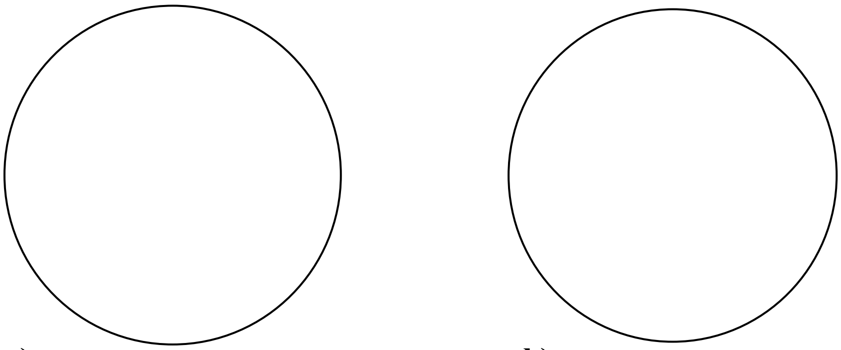
olarak bulundu. Bu durumda 0, $\dfrac{2\pi}{3}$ *ve* $\dfrac{4\pi}{3}$ itici sabit nokta olurken; $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{3\pi}{3}$ *ve* $\dfrac{5\pi}{3}$ çekici sabit noktadır.

4.4.4. Örnek

$\theta \in S^1$ ve $f : S^1 \to S^1$ olmak üzere $f(\theta) = \theta + \varepsilon.\sin(4\theta)$ (mod 1) dönüşümünü $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{4}$ için ele alalım. Dikkat edilirse f dönüşümünün sabit noktaları 0, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{2\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{4\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{4}$, $\dfrac{6\pi}{4}$ *ve* $\dfrac{7\pi}{4}$ dır. Şimdi bu noktaların hangisi çekici hangisi itici nokta olacak bulmaya çalışalım. Bunun için fonksiyonun 1. türevini almalıyız.

$$f'(0) = f'(\frac{2\pi}{4}) = f'(\frac{4\pi}{4}) = f'(\frac{6\pi}{4}) = 1 + 3\varepsilon > 1$$
$$f'(\frac{\pi}{4}) = f'(\frac{3\pi}{4}) = f'(\frac{5\pi}{4}) = f'(\frac{7\pi}{4}) = 1 - 3\varepsilon < 1$$

olarak bulundu. Bu durumda 0, $\dfrac{2\pi}{4}$, $\dfrac{4\pi}{4}$, $\dfrac{6\pi}{4}$ itici sabit nokta olurken; $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{4}$, $\dfrac{7\pi}{4}$ çekici sabit noktadır. Şimdi bu dönüşümler için faz portresi çizelim.



a) b)

Şekil 4.1

a) $f(\theta) = \theta + \varepsilon\sin(2\theta)$ nin faz portresi **b)** $f(\theta) = \theta + \varepsilon\sin(4\theta)$ nin faz portresi

4.4.3. Tanım

$F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ şeklinde ki dönüşümlere kuadratik dönüşüm denir

Şimdi bu dönüşümü ele alalım. $F_\mu(x) = x$ şartını sağlayan noktaları bulalım. $F_\mu(0) = F_\mu(1) = 0$ ve $F_\mu(p_\mu) = p_\mu$ eşitliği ancak $p_\mu = \dfrac{\mu-1}{\mu}$ olması durumunda gerçekleşir. Yani $p_\mu = \dfrac{\mu-1}{\mu}$ şeklinde ki tüm noktalar sabit noktadır. Burada $\mu \neq 0$ dır.

4.4.5. Örnek

$f(x) = x^2 - \dfrac{x}{2}$ fonksiyonunun sabit noktalarını bulalım. Bu fonksiyonun sabit noktalarını bulmamız için öncelikle aşağıdaki denklemi çözmeliyiz.

$x^2 - \dfrac{x}{2} = x$, $x^2 - \dfrac{3x}{2} = 0$, $x(x - \dfrac{3}{2}) = 0$, $x = 0$ veya $x = \dfrac{3}{2}$ fonksiyonun sabit noktalarını bulduk. Şimdi bu noktalar çekici sabit nokta mı yoksa itici sabit nokta mı onu belirleyelim. Bunun için verilen fonksiyonun türevini almalıyız.

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{2}$$

$$|f'(0)| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2} < 1$$

Bu yüzden x=0 noktası çekici sabit noktadır. $|f'(\frac{3}{2})| = |\frac{5}{2}| = \frac{5}{2} > 1$ olduğu içinde $x = \frac{3}{2}$ noktası itici sabit noktadır.

4.4.6. Örnek

$f(x) = x.(1-x)$ fonksiyonunun sabit noktalarını bulup inceleyelim.

$$x.(1-x) = x$$
$$1-x = 1$$
$$x = 0$$

görüldüğü gibi fonksiyon sadece x=0 noktasında sabit noktaya sahiptir. $f'(0)$=1 olduğundan x=0 noktası çekici nokta veya itici nokta değildir. x=0 noktası tepkisiz sabit noktadır.

4.4.7. Örnek

$f(x) = \frac{\pi}{2}\sin x$ fonksiyonunu inceleyelim. x= 0 bu fonksiyonun sahip olduğu tek sabit noktadır. $f'(0) = \frac{\pi}{2} > 1$ olduğu için x=0 noktasında fonksiyon itici sabit noktaya sahiptir.

4.4.8. Örnek

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{eğer } x \le \frac{1}{2} \\ 2-2x, & \text{eğer } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

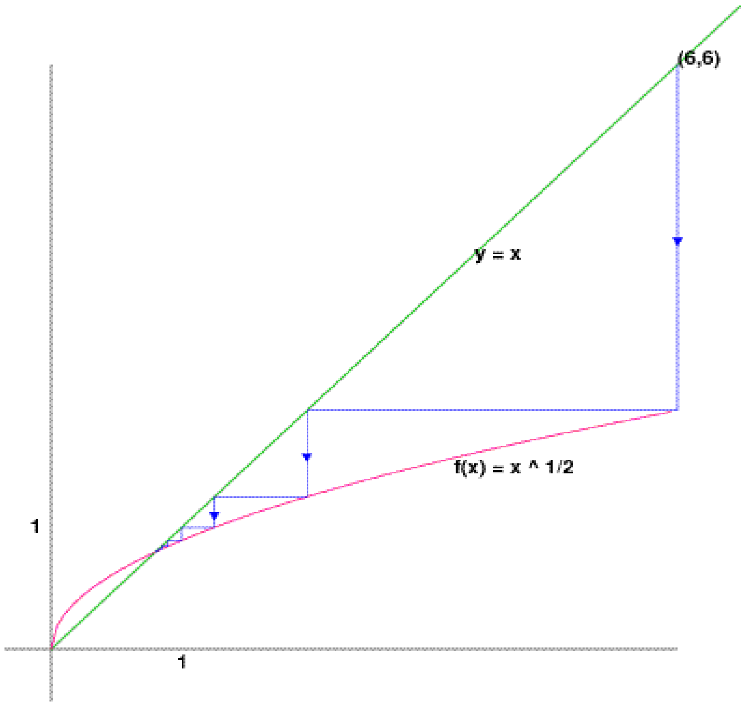
fonksiyonu verilsin. Şimdi bu fonksiyonun sabit noktalarını bulalım.

Çözüm:

0 ve $\frac{2}{3}$ sabit noktalardır.

4.4.9. Örnek

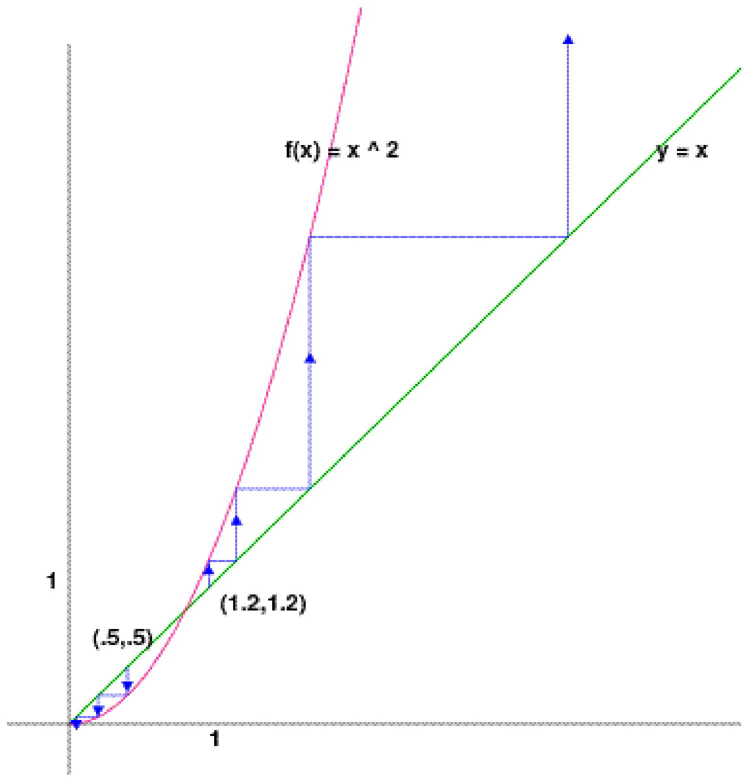
$f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunu inceleyelim. Bu fonksiyonun sabit noktaları 0 ve 1 dir. 1 noktası çekici sabit noktadır. Çünkü $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} < 1$ yani fonksiyonun türevi 1 den küçüktür. Aşağıda ki şekilde görüldüğü gibi *y=x* doğrusu ile *f* fonksiyonunun kesiştiği 1 noktasına dikkat edilirse doğrudan başlanıp eğriye giden dikmeler 1 noktasına doğru yöneliyor. Yani 1 noktasına doğru çekilme söz konusu olduğu için bu nokta çekici sabit noktadır.



Şekil 4.2. $f(x)=\sqrt{x}$ nin grafiği

4.4.10. Örnek

$f(x)=x^2$ fonksiyonunu inceleyelim. Bu fonksiyonun sabit noktaları 0 ve 1 dir. 1 noktası itici sabit noktadır. 0 noktası ise çekici sabit noktadır. Çünkü $f'(x)=2.x$ olduğundan $f'(1)=2.1=2>1$ ve $f'(0)=2.0=0<1$ olur. Aşağıda ki şekilde görüldüğü gibi *y=x* doğrusu ile *f* fonksiyonunun kesiştiği 0 noktasına dikkat edilirse doğrudan başlanıp eğriye giden dikmeler 0 noktasına yöneliyor. Yani 0 noktasına doğru çekilme söz konusu olduğu için bu nokta çekici sabit noktadır. Diğer bir sabit nokta olan 1 noktası için ise; *y=x* den başlayan ve *f* fonksiyonuna doğru çizilen dikmeler 1 noktasından uzaklaşmaktadır. O halde bu nokta itici sabit noktadır.



Şekil 4.3 $f(x) = x^2$ nin grafiği

Şekil 4.2 ve 4.3 internet üzerinde ki bazı kaynaklardan alınmıştır.

4.4.11. Örnek

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de tanımlanan $f(x) = 5x^3 + 4x^2$ şeklinde ki dönüşümün sabit noktalarını bulalım.

Çözüm:

$5x^3 + 4x^2 = x$ eşitliğini çözelim.

$$5x^3 + 4x^2 - x = 0$$

$$x.(5x-1).(x+1) = 0$$

olur. Buradan; $x = -1,\ 0,\ \dfrac{1}{5}$ elde edilir. Bu noktaları fonksiyonun 1.türevinde yerine yerleştirirsek;

$$f'(x) = 15x^2 + 8x$$

olur. O halde;

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x\text{=0 da çekici sabit nokta;} \\ \text{-1} & x\text{=-1 de itici sabit nokta;} \\ \dfrac{1}{5} & x\text{=}\dfrac{1}{5} \text{ de itici sabit nokta;} \end{cases}$$

olacaktır.

4.4.12. Örnek

$f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ fonksiyonu 4 tane itici sabit noktaya sahiptir. Bu noktalar ise $x_0 = 2$, -1, $\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ dir.

4.5. Kaotiklik

4.5.1. Tanım (Topolojik Geçişkenlik)

T: $X \to X$ sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer bazı $x \in X$ için $\{T^n(x): n \geq 0\}$ kümesi X içinde yoğun olacak şekilde $x \in X$ varsa T ye bir taraflı topolojik geçişkendir denir. T: $X \to X$ bir homeomorfizma olsun. X içinde ki bazı x elemanları için $O_T(x) = \{T^n(x) \mid n \in \mathbf{Z}\}$ kümesi X içinde yoğun ise yani $\overline{O_T(x)} = X$ ise T dönüşümüne *topolojik* geçişken denir.

4.5.2. Tanım

$x,\ f(x),\ f^2(x), \ldots$ noktalarının kümesine x in yönlendirilmiş orbit kümesi denir. $O^+(x)$ ile gösterilir. Eğer f bir homeomorfizma ise x in tüm orbitini $O(x)$ ile gösteririz. $O(x)$ kümesi $n \in \mathbf{Z}$ için $f^n(x)$ noktalarının kümesidir. Anlaşıldığı üzere bu $O(x)$ kümesi içerisinde x in geri yönlendirilmiş orbiti olan $x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \ldots O^-(x)$ kümesi de mevcuttur. Burada $O^-(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbf{Z}^-\}$ ve $O^+(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbf{Z}^+\}$ şeklindedir.

4.5.1. Teorem

Kompakt metrik uzaydaki T: $X \to X$ homeomorfizması için aşağıdakiler denktir.

i) T topolojik geçişkendir.

ii) $E \subset X$, E kapalı $TE = E$ veya $E = X$ ise E hiçbir yerde yoğun değildir.

(veya $U \subset X$, U açık, $TU = U$ ise $U = \varnothing$ veya U yoğun)

iii) U, $V \neq \varnothing$ açık kümeler olsun. $T^n(U) \cap V \neq \varnothing$ olacak şekilde $n \in \mathbf{Z}$ vardır.

iv) $\{x \in X : \overline{O_T(x)} = x\}$ kümesi G_δ da yoğundur (Walters, 1982).

4.5.1. Uyarı

Sayılabilir açık kümelerin kesişim kümesi G_δ dır.

Yukarıda topolojik geçişkenlik ile ilgili bir tanım verilmişi. Şimdi Devaney, (1989)'in tanımında kullanılan topolojik geçişkenliği başka bir şeklide ifade etmeye çalışalım.

4.5.3. Tanım (Topolojik Geçişkenlik)

X kümesi üzerinde tanımlanan herhangi bir f fonksiyonu için; $U, V \subset X$ $U, V \neq \varnothing$ için $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$ yi sağlayacak bir $n \in N$ doğal sayısı varsa f fonksiyonuna topolojik geçişken denir.

4.5.1. Örnek

$X = \{\{\frac{1}{n} : n \geq 1\} \cup \{0\}\}$ olsun. $(X, \boldsymbol{\tau})$ topolojik uzayı olsun. $T(0) = 0$ ve $T(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ olarak tanımlansın. n=1 olarak alalım. $T(\frac{1}{1}) = \frac{1}{2}$ olur. n= 2 olsun. $T^2(1) = T(T(\frac{1}{1})) = \frac{1}{3}$ elde edilir. n=3 için $T(T(T(1))) = T^3(1) = \frac{1}{4}$ olur. Bu şeklide devam edilirse;

$$O_T^+(x) = \{T^n(x) : n > 0\}$$

kümesinin elemanları elde edilir. x=1 için bu küme oluşturulsun.

$$O_T^+(1) = \{T^n(1) \mid n \geq 0\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$$

kümesinin yığılma noktası 0 dır.

$$O_T^+(x)' = \{0\}$$

$$O_T^+(1)' \cup O_T^+(1) = \overline{O_T^+(1)}$$

$$\overline{O_T^+(1)} = \{0\} \cup \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\} = X$$

oldu. Burada T dönüşümü tek taraflı topolojik geçişkendir.

4.5.2. Örnek

$f(x_{-1}, x_0, x_1) = x_{-1} + x_0 + x_1 \pmod 2$ olarak tanımlanan f yerel kuralı tarafından üretilen CA topolojik geçişken midir?

Çözüm:

Verilen f yerel kuralının topolojik geçişken olması için $\{0,1\}^{\mathbf{Z}}$ dizi uzayından alınan iki farklı U ve V silindirik kümelerinin biri sabit tutulup diğerini ötelendiğinde elde edilen iki silindirik kümeyi kesiştirip, bu kesişimin boş kümeden farklı olduğunun gösterilmesi gerekecektir. $U = \{x \in \Omega : x_0 = 1\}$ olsun.

$T^n_{f[-k,k]} = T_{f^n[-nk,nk]}$ idi. $U = \{x \in \Omega : x_0 = 1\}$ kümesini

$$\{x \in \Omega : x_0 = 1\} = \{x \in \Omega : x_{-1} = 1, x_0 = 1, x_1 = 1\}$$
$$\cup \{x \in \Omega : x_{-1} = 0, x_0 = 1, x_1 = 1\}$$
$$\cup \{x \in \Omega : x_{-1} = 1, x_0 = 1, x_1 = 0\}$$
$$\cup \{x \in \Omega : x_{-1} = 0, x_0 = 1, x_1 = 0\}$$

biçiminde yazılabilir. Şimdi $n = 1$ olarak alınsın.

$$T_{f[-k,k]}U = T_{f[-k,k]}(\{x \in \Omega : x_0 = 1\})$$
$$= \{x \in \Omega : x_1 = 1\} \cup \{x \in \Omega : x_1 = 0\} = \Omega$$

oldu. Yani ;

$$T_{f[-k,k]}(\{x \in \Omega : x_0 = 1\}) = \Omega$$

oldu. $V \subset \Omega$ olduğu için; $V \cap T(U) \neq \phi$ olur. Çünkü $V \cap T(U) = V \cap \Omega = V \neq \phi$ oldu. Yukarıda da açıkça görüldü ki f topolojik geçişkendir. Başka bir açıdan düşünülürse; verilen yerel kurala bakıldığında f nin topolojik geçişken olduğunu en baştan söylenebilir. Çünkü f yerel kuralı hem leftmost hem de rightmost permütatiftir.

4.5.3. Örnek

$f(x_{-1}, x_0, x_1) = 2x_{-1} + 2x_0 + x_1 (\mathrm{mod}\, 4)$ olarak tanımlanan f yerel kuralı tarafından üretilen $T_{f[-1,\,1]}$ şeklindeki CA ve bu yerel kuralın tersi tarafından üretilen $T_{g[-1,0]}$ dönüşümü de topolojik geçişken midir?

Çözüm:

$f(x_{-1}, x_0, x_1) = 2x_{-1} + 2x_0 + x_1 (\mathrm{mod}\, 4)$ şeklinde tanımlanan yerel kuralın rightmost permütatif olduğu için topolojik geçişken olduğunu gösterelim.

$\mathbf{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ kümesi üzerinde olası sonlu diziler; (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 2), (0, 0, 3), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 1, 3), …, (3, 3, 3) şeklinde olacaktır. Şimdi f nin rightmost permütatif olduğunu görelim.

$f(x_{-1}, x_0, x_1) = 2x_{-1} + 2x_0 + x_1 (\mathrm{mod}\, 4)$ denkleminden

$f(0,0,0) = 2.0 + 2.0 + 0 (\mathrm{mod}\, 4) = 0$, $f(0,0,1) = 2.0 + 2.0 + 1 (\mathrm{mod}\, 4) = 1$,

$f(0,0,2) = 2.0 + 2.0 + 2 (\mathrm{mod}\, 4) = 2$, $f(0,0,3) = 2.0 + 2.0 + 3 (\mathrm{mod}\, 4) = 3$ olur.

Görüldüğü gibi verilen yerel kuralın en sağdaki elemanına göre işlem yapılırsa tekrar {0, 1, 2, 3} kümesi elde ediliyor. Dolayısıyla $f(x_{-1}, x_0, x_1) = 2x_{-1} + 2x_0 + x_1 (\text{mod}\, 4)$ şeklindeki yerel kuralımız rightmost permütatif olduğu için topolojik geçişkendir. Aynı şekilde bu yerel kuralın tersinin de topolojik geçişken olup olmadığını görmek için öncelikle tersinin bulunması gerekir. $f(x_{-1}, x_0, x_1) = 2x_{-1} + 2x_0 + x_1 (\text{mod}\, 4)$ için formal kuvvet serisi oluşturalım.

$$F(X) = 2X^1 + 2X^0 + X^{-1} = X^{-1} + 2(X^1 + X^0) = X^{-1}[1 + 2(X^2 + X^1)]$$

şeklinde olacaktır. O halde bu ifadenin *F*(*X*) ile çarpıldığında mod 4 e göre tersini veren *G*(*X*) i bulunursa; $G(X) = X^1[1 - 2(X^2 + X^1)] = X^1 + 2X^3 + 2X^2$ olacağı açıktır. $F(X).G(X) \equiv 1\ (\text{mod}\, 4)$ denkliği bulunur. *G*(*X*) e karşılık gelen yerel kural ise;

$$g(x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}) = 2x_{-3} + 2x_{-2} + x_{-1} (\text{mod}\ \ 4)$$

Yani $g(x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}) = 2x_{-3} + 2x_{-2} + x_{-1} (\text{mod}\ \ 4)$ bu yerel kuralında leftmost permütatif olduğu aşikardır. O halde aynı şekilde $g(x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}) = x_{-1} + 2x_{-3} + 2x_{-2} (\text{mod}\ \ 4)$ yerel kuralıda topolojik geçişkendir.

4.5.4. Tanım

f fonksiyonunun periyodik noktalarının kümesi $P(f)$ ile gösterilsin.

$P(f) = \{x \in X : \exists n > 0 \quad f^n(x) = x\}$ şeklindedir. $\overline{P(f)} = X$ ise *f* fonksiyonunun periyodik noktaları X içinde yoğundur denir.

4.5.5. Tanım (Duyarlılık)

$N(x)$, $x \in X$ noktasının bir komşuluğu olmak üzere; herhangi $\delta > 0$ için $y \in N(x),\ n \in N$ vardır öyleki; $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$ ise f dönüşümü duyarlıdır ve δ duyarlılık sabitidir. Burada ki d Tychonoff metriğidir.
Yani;

$$d(a,b) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m^{|i|}} |\, a(i) - b(i) \,|;$$

burada $a, b \in \mathcal{A}^{Z}$, m $\mathcal{A}$ nın eleman sayısı ve d ise bir metriktir.

4.5.6. Tanım

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ olasılık ölçüm uzayı $T: X \to X$ olsun. $\forall E \in \mathcal{A}$ için $\mu(E) = \mu(T^{-1}(E))$ ise T ölçümü koruyan dönüşümdür. Bununla birlikte
T ergodiktir ancak ve ancak

$$\forall E \in F \text{ için } E = T^{-1}(E) \Rightarrow \mu(E) = 0 \text{ veya } \mu(E) = 1$$

dir. Burada T yi $f(x_{-r},...x_0,...x_r) = \sum_{i=-r}^{r} a_i.x_i (\bmod m)$ şeklinde ki bir yerel kural tarafından üretilen bir dönüşüm olarak alırsak;
T ergodik $\Leftrightarrow T$ topolojik geçişken $\Leftrightarrow$ $\gcd(m, a_{-r}, \ldots, a_0, \ldots, a_r) = 1$ denklikleri elde edilir. Bu konu ile ilgili sonuçlar için Cattaneo ve ark., (2000) na bakınız.

4.5.2. Teorem

$f : \mathbf{Z}_m^S \to \mathbf{Z}_m$ toplamsal yerel kural olmak üzere; $f(x_1, x_2, x_3,..., x_s) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i.x_i (\bmod m)$ yerel kuralı örtendir ancak ve ancak $\gcd(m, \lambda_1,...\lambda_s) = 1$ dir (Cattaneo ve ark., 2000).

4.5.7. Tanım (Devaney'in kaotiklik tanımı)

X metrik uzay, $f : X \to X$ sürekli dönüşüm olmak üzere f ye X üzerinde *kaotiktir* denir. Eğer;

1) f topolojik geçişkendir.

2) f nin periyodik noktaları X içinde yoğundur.

3) f duyarlıdır.

4.5.1. Önerme

$f : I \to I$ sürekli dönüşümü için $h(f) > 0$ ise f kaotiktir
(Block. L. S., Coppel., W. A., 1992).

4.5.8. Tanım

I kapalı ve sınırlı, $I \subset \mathbb{R}$ ve $C^0(I,I)$ kümesi $f: I \to I$ olan sürekli fonksiyonların kümesini göstermek üzere; $f \in C^0(I,I)$ ve $h(f)$, f nin topolojik entropisini göstermek üzere; $h(f) > 0$ ise f ye kuvvetli kaotik fonksiyon denir.

4.5.2. Uyarı

Bir dönüşümün kaotik olması bu fonksiyonun çok karmaşık ve beklenmedik davranmasının göstergesidir.

4.5.3. Uyarı

Knudsen, (1994) in kaotiklik tanımına göre ayrık zamanlı dinamik sistemin kaotik olması için yoğun periyodik orbite sahip olmalı ve başlangıç şartlarına duyarlı olması gerekir. Bu tanıma göre sistemin topolojik geçişken olması gerekmez. Ancak Devaney, (1989)'in tanımına göre bir boyutlu bir yarıçaplı CA nın kaotik olması için ayrıca topolojik geçişken olması gerekir. Paola ve ark., (1992) ve Favati ve ark., (1997) de gösterildi ki p bir asal sayı olmak üzere $\mathbf{Z}_p$ halkası üzerinde tanımlanan toplamsal yerel kural (sabit yerel kural olmayan) tarafından üretilen toplamsal CA hem yoğun periyodik orbite sahip ve aynı zamanda f rightmost (leftmost) permütatif ise f geçişkendir. Böylece eğer f geçişken ve yoğun periyodik orbite sahipse bu takdirde Devaney, (1989)'in kaotiklik tanımına göre kaotiktir.

Aşağıdaki Lemma periyodik orbitlerin inşasını açıklamak için verilmiştir.

4.5.1. Lemma (Hedlund, 1970)

$\mathbf{Z}_m = \{0,1,2,...,m-1\}$, $b \in \mathbf{Z}_m$ üzerinde tanımlı 1 uzunluklu sonlu konfigürasyon olsun. $N(n)$ ise, n uzunluklu konfigürasyonların sayısını göstersin (Bu konfigürasyonların hepsi b yi içermektedir). O halde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{m^n} = 1 \text{ dir.}$$

4.5.4. Örnek

$\mathbf{Z}_2 = \{0,1\}$ olarak alınsın. m=2 ve b=1 olsun. N(3) 3 uzunluklu konfigürasyonların sayısı olmak üzere 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 den dolayı N(3)=7 olur. O halde $N(n)= 2^n$ -1 elde edilir. Yukarıdaki lemmaya göre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{m^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 1 - 0 = 1$$

olacaktır. Şimdi bir yerel kuralın kaotikliğini incelerken sık sık kullanacağımız bir teoremi verelim.

4.5.3. Teorem

p bir asal sayı olmak üzere; f , $\mathbf{Z}_p = \{0,1,2,...,p-1\}$ üzerinde tanımlı sabit olmayan herhangi bir yerel kural olsun. O halde bu yerel kural tarafından üretilen CA yoğun periyodik noktalara sahiptir (Favati ve ark., 1997).

4.5.4. Teorem

$f : X \to X$ topolojik geçişken ve periyodik noktaları tanımlanan küme içinde yoğun ise bu durumda f duyarlıdır (Banks ve ark., 1992).

4.5.9. Tanım

T: $X \to X$, S:$Y\to Y$ iki dönüşüm olsun. Eğer φ: $X\to Y$ ve φT = Sφ eşitliğini sağlayan φ homeomorfizması varsa T ye S nin topolojik eşleniği denir. Şimdi Devaney, (1989)' de soru olarak bırakılan aşağıdaki önermeyi ispatlayalım.

4.5.2. Önerme

$Q_c(x) = x^2 + c$ ve $f_\mu(x) = \mu.x.(1-x)$ iki dönüşüm olsun. Eğer $c<\frac{1}{4}$ ve $\mu > 1$ ise Q_c dönüşümü f_μ dönüşümüne $h(x) = \alpha.x + \beta$ homeomorfizması altında topolojik eşleniktir.

Çözüm:

$$\begin{array}{ccc} f_\mu(x): X & \to & X \\ \text{h}\downarrow & & \downarrow h \\ Q_c(x):\ Y & \to & Y \end{array}$$

olmak üzere f_μ ve Q_c dönüşümlerinin birbirinin topolojik eşlenik olmaları için $c<\frac{1}{4}$ iken $\mu>1$ olmasıdır. Şimdi bunun doğruluğunu gösterelim.

$$f_\mu(x)=\mu.x.(1-x)$$

$$Q_c(x)=x^2+c \text{ için } h.f_\mu=Q_c.h$$

sağlanmalıdır.

$h(x) = \alpha.x+\beta$ için şimdi μ, c, α ve β sabitleri hakkında fikir edinmeye çalışalım.

$$h(f_\mu(x))=\alpha.(\mu.x.(1-x))+\beta$$

$$Q_c(h(x))=(x^2+c)\circ(\alpha.x+\beta)=(\alpha.x+\beta)^2+c$$

Bu ifadeler açılırsa;

$$h(f_\mu(x))=\alpha.\mu.x-\alpha.\mu.x^2+\beta$$

$$Q_c(h(x))=(\alpha.x+\beta)^2+c=\alpha^2.x^2+2.\alpha.\beta.x+\beta^2+c$$

olacaktır. $h.f_\mu=Q_c.h$ eşitliği var olduğundan;

$$\alpha.\mu.x-\alpha.\mu.x^2+\beta=\alpha^2.x^2+2.\alpha.\beta.x+\beta^2+c$$

eşitliğini kullanarak aradığımız değerleri bulabiliriz.

$$\alpha.\mu.x=2.\alpha.\beta.x$$

$$-\alpha.\mu.x^2=\alpha^2.x^2$$

$$\beta=\beta^2+c$$

den ;

$$\alpha.\mu=2.\alpha.\beta \text{ dan } \alpha=0 \text{ veya } \mu=2.\beta \quad (1)$$

$$-\alpha.\mu=\alpha^2 \text{ den } \alpha=0 \text{ veya } \mu=-\alpha$$

$$\beta=\beta^2+c \text{ den } c=\beta-\beta^2$$

$c<\frac{1}{4}$ ise $\mu>1$ olacaktı. (Yukarıda ki ifadelerde α =0 şartı sağlar fakat bu durumda h homeomorfizma olmaz) O halde

$$c=\beta-\beta^2<\frac{1}{4}$$

$$\beta-\beta^2-\frac{1}{4}<0$$

$$\beta^2 + \frac{1}{4} - \beta > 0 \text{ ve } (\beta - \frac{1}{2})^2 > 0$$

elde edildi. Buradan $\beta > \frac{1}{2}$ olduğu aşikardır. $\mu = 2.\beta$ olduğundan $\mu = 2.\beta > 2.\frac{1}{2} = 1$ olacaktır. Bu durumda $c < \frac{1}{4}$ ve $\mu > 1$ şartını sağlayan $f_\mu(x) = \mu.x.(1-x)$ ve $Q_c(x) = x^2 + c$ dönüşümleri $h = \alpha.x + \beta$ homeomorfizması altında topolojik eşleniktirler. Birisinin taşıdığı topolojik özellikleri diğeride taşır. Fakat metrik özellikleri taşımayabilir.

4.5.4. Uyarı

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

f kaotik olsun. X ve Y metrik uzay h bir homeomorfizma olsun. f ile g birbirine topolojik eşlenik olmak üzere acaba eşleniklik kavramı altında kaotiklik korunur mu? Yani g kaotik olmak zorunda mıdır? Geçişkenlik ve periyodik noktaların yoğunluğu kavramı topolojik kavramlardır. Duyarlılık metrik ile ilgili bir kavramdır. Duyarlılık özelliği topolojik eşleniklik kavramı altında korunmaz. Şimdi bu durumu açıklayan bir örnek verelim. Aşağıdaki örnek J.Banks ve ark., (1992) de verilmişti. Bu örneği ayrıntılı olarak açıkladık.

4.5.5. Örnek

$X = (1,\infty) \subset \mathbb{R}$ de standart metrik $x, y \in X$ için $d(x,y) = |x-y|$ şeklinde tanımlanmış olsun. $Y = \mathbb{R}^+$ olsun. $f(x) = 2x$ ve $h(x) = \log x$ olmak üzere öncelikle f ile topolojik eşlenik olan g fonksiyonunu bulalım. Yani;

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \quad \text{için;} \quad \begin{array}{ccc} (1,\infty) & \xrightarrow{f} & (1,\infty) \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^+ \end{array}$$

$h(x) = \log x$ ve $f(x) = 2x$ biliniyor şimdi $g(x)$ fonksiyonu bulunsun

$hf = gh$ eşitliği sağlanmalıdır. O halde;

$$hf = \log 2x = gh$$
$$\log 2x = g(\log x)$$
$$\log 2x = \log 2 + \log x = g(\log x)$$
$$g(x) = x + \log 2$$

şeklinde bir fonksiyondur. Şimdi f nin duyarlı olduğu gösterilsin. $x, y \in X = (1, \infty)$ ve $d(x, y) = | x - y |$ idi. Eğer f yi $f(x) = 2x$ olarak alınırsa f yi x için öteleme yapıldığında $f^n(x) = 2^n x$ olur ve y için öteleme yapıldığında $f^n(y) = 2^n y$ şeklinde elde edilir. $| x - y |< \varepsilon$ için

$$d(f^n(x), f^n(y)) = (2^n x, 2^n y) = 2^n \; | x - y |> \delta$$

şeklinde olduğundan f duyarlıdır. Şimdi g incelenirse. g yi $g(x) = x + \log 2$ olarak seçildiğinde bu fonksiyonun x için n. ötelemesi $g^n(x) = x + n.\log 2 = x + \log 2^n$ olarak bulunur ve aynı işlem y için yapılırsa; $g^n(y) = y + n.\log 2 = y + \log 2^n$ olarak bulunur. $| x - y |< \varepsilon$ için

$$d(f^n(x), f^n(y)) = (x + \log 2^n, y + \log 2^n)$$
$$= | y + \log 2^n - x - \log 2^n |$$
$$= | y - x | = | x - y | < \varepsilon$$

şeklinde olduğundan g duyarlı değildir.

4.5.6. Örnek

$A = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ olsun. $f(x) = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \end{pmatrix}$ şeklinde alınsın.

$P(f) = \{x \in A; \exists n > 0$ vardır öyleki $f^n(x) = x\}$ f nin periyodunu bulmak için öncelikle $x = a$ olsun.

$$f(a) = b$$
$$f(f(a)) = f(b) = c$$
$$f(f(f(a))) = f(c) = d$$
$$f(f(f(f(a)))) = f(d) = e$$
$$f^5(a) = f(e) = a$$

olduğundan f nin periyodu 5 dir. $P(f)=\{b,\ c,\ d,\ e,\ a\}$ oldu.

$$\overline{P(f)}=\overline{\{b,\ c,\ d,\ e,\ a\}}=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}=A$$

oldu. Yani f nin periyodik noktalarının kümesi A içinde yoğundur.

4.5.7. Örnek

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ olsun. $f(x)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ şeklinde alınsın.

$P(f)=\{x\in A;\exists n>0$ vardır öyleki $f^n(x)=x\}$ idi. f nin periyodunu bulmak için öncelikle $x=1$ alınsın;

$$f(1)=2$$
$$f(f(1))=f(2)=3$$
$$f(f(f(1)))=f(3)=4$$
$$f(f(f(f(1))))=f(4)=5$$
$$f^5(1)=f(5)=6$$
$$f^6(1)=f(6)=1$$

olduğundan f nin periyodu 6 dir. $P(f)=\{1,2,3,4,5,6\}$ oldu.

$$\overline{P(f)}=\overline{\{1,2,3,4,5,6\}}=\{1,2,3,4,5,6\}=A$$

oldu. Yani f nin periyodik noktalarının kümesi A içinde yoğundur.

Aşağıda ki önerme elde ettiğimiz temel sonuçlardan biridir.

4.5.3. Önerme

$h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ve $h(x)=ax,\ |a|>1$ şeklindeki tüm fonksiyonlar duyarlıdır.

İspat:

$h(x)=ax$ olarak alalım. Bu fonksiyonun n. ötelemesi $h^n(x)=a^n x, h^n(y)=a^n y$ dir. Buradan da kolayca görülür ki $|x-y|<\varepsilon$ iken

$$d(h^n(x),h^n(y))=|a^n x,a^n y|=|a^n||x-y|>\delta$$

olacaktır. h duyarlıdır. Ancak eğer a sabitini $-1\le a\le 1$ olarak alırsak bu durumda $h(x) = ax$ fonksiyonunun duyarlı olmadığı açıktır. Şimdi bu önermeyi açıklayan bir örnek verelim.

4.5.8. Örnek

$h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ve $h(x) = 5x$ olsun. h nin duyarlılığını açıklamak için öncelikle fonksiyonun ötelemelerini bulmalıyız. $h^n(x) = 5^n x, h^n(y) = 5^n y$ şeklinde olacaktır. Buradan görülür ki $|x - y| < \varepsilon$ iken $d(h^n(x), h^n(y)) = |5^n x, 5^n y| = |5^n||x - y| > \delta$ olacaktır. Bu ise duyarlılık için yeterlidir.

4.5.4. Önerme

p asal, $f : \mathbf{Z}_p^{2k+1} \to \mathbf{Z}_p$ olmak üzere $f(x_{-r}, \ ..., \ x_r) = \sum_{i=-r}^{r} \lambda_i . x_i (\bmod p)$ yerel kuralı için; $\forall\ i = -r, \ -(r-1), \ ..., \ j-1, j+1, \ ..., \ r$ için $\lambda_i = 0$ fakat $\lambda_j \neq 0$ şeklinde ise bu yerel kural tarafından üretilen terslenebilen $T_{f[-r,r]}$ dönüşümü kaotiktir ve terside kaotiktir.

Buradan görülür ki yukarıda verilen sonucun şartlarından dolayı obeb$(\lambda_j, p) = 1$ dır. Böylece J.Banks ve ark., (1992) dolayı kaotikliğin ilk iki şartı sağlanmaktadır. Diğer üçüncü şartta bu iki şarttan dolayı sağlanacağı açıktır. Böylece yukarıda verilen sonuçta ki CA kaotiktir. Ayrıca açıkça görülüyor ki verilen CA nın topolojik entropisi pozitiftir. Bu yüzden hiçbir özelliğe bakmadan da kaotiktir diyebiliriz.

4.5.5. Önerme

p asal, $f : \mathbf{Z}_p^{2k+1} \to \mathbf{Z}_p$ olmak üzere $f(x_{-r}, \ ..., \ x_r) = \sum_{i=-r}^{r} \lambda_i . x_i (\bmod p)$ yerel kuralı için; $\forall\ i = -r, \ -(r-1), \ ..., \ j-1, j+1, \ ..., \ r$ için $\lambda_i = 0$ fakat $\lambda_j \neq 0$ olsun bu yerel kural tarafından üretilen $T_{f[-r,r]}$ dönüşümü kuvvetli kaotiktir.

Ayrıca yukarıda ki önermeyi sağlayan yerel kural tarafından üretilen CA nın n.ötelemeside kaotiktir. Çünkü yine pozitif entropiye sahiptir. Dolayısıyla pozitif entropiye sahip olduğu için kuvvetli kaotiktir denilebilir.

4.5.9. Örnek

$f:\mathbf{Z}_7^3 \to \mathbf{Z}_7$ şeklinde tanımlansın. $f(x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2,x_3)=4x_3 \pmod 7$ yerel kuralı tarafından üretilen $T_{f[1,3]}$ dönüşümünün kaotikliğini inceleyelim.

Çözüm:

$f(x_1,x_2,x_3)=4x_3 \pmod 7$ yerel kuralı için; $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{\mathbf{Z}}$ nin elemanlarının yardımıyla yerel kuralın permütatif olduğu açıktır. Çünkü obeb(4,7)=1 dir. Verilen yerel kural $x_3$de permütatif olduğu için bu yerel kural rightmost permütatiftir. Favati ve ark., (1997) de rightmost veya leftmost permütatif olan bir yerel kural tarafından elde edilen $T_{f[-r,r]}$ nin topolojik geçişken olduğu gösterilmiştir. O halde yukarıda verilen yerel kuralda topolojik geçişkendir. Şimdi bu yerel kuralın formal kuvvet serisini oluşturarak tersi bulunsun ve terside aynı şekilde topolojik geçişken mi incelensin.

$f(x_1,x_2,x_3)=4x_3 \pmod 7$ nin formal kuvvet serisi;

$$F(X)=4X^{-3}$$

şeklindedir. Bu durumda formal kuvvet serisinin tersi olan seri;

$$G(X)=2X^{3}$$

olacaktır. Çünkü

$$F(X).G(X)=4X^{-3}.2X^{3} \equiv 8X^{-3+3} \pmod 7$$
$$\equiv 1 \pmod 7$$

$G(X)$ in yerel kuralı ise;

$$g(x_{-3},x_{-2},x_{-1})=2x_{-3} \pmod 7$$

dir.Şimdi $f(x_1,x_2,x_3)=4x_3 \pmod 7$ nin tersi olan $g(x_{-3},x_{-2},x_{-1})=2x_{-3} \pmod 7$ tarafından üretilen $T_{g[-3,-1]}$ incelenirse, bu yerel kural da leftmost permütatiftir. Görüldü ki $g(x_{-3},x_{-2},x_{-1})=2x_{-3} \pmod 7$ yerel kuralıda leftmost permütatif olduğu için topolojik geçişkendir. Böylece *f* ve *g* yerel kuralları tarafından üretilen CA lar topolojik geçişken ayrıca Favati ve ark., (1997)'dan dolayı bu iki CA yoğun periyodik noktalara sahiptir. Dolayısıyla bu iki özellik sağlandığı için 4.5.4.

teoremine göre duyarlılık şartlarını da sağlarlar. Bundan dolayı her iki CA kaotiktir. Yukarıda özel bir durum için elde ettiğimiz sonuç daha genel terslenebilen CA lar için söylenebilir mi? Hatta bu sonuçlar çok boyutlu CA lar için açık problemler ortaya çıkmaktadır.

4.5.10. Örnek

$f:\mathbf{Z}_{11}^{2.2+1} \to \mathbf{Z}_{11}$ şeklinde tanımlansın. $f(x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2)=7x_2(\mathrm{mod}11)$ yerel kuralı tarafından üretilen $T_{f[-2,2]}$ dönüşümünün kaotikliğini inceleyelim.

Çözüm:

$f(x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2)=7x_2(\mathrm{mod}11)$ yerel kuralı için; $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}^{\mathbf{Z}}$ nin elemanlarının yardımıyla yerel kuralın permütatif olduğu açıktır. Verilen yerel kural x_2 de permütatif olduğu için bu yerel kurala rightmost permütatif denilebilir. Favati va ark., (1997) de rightmost veya leftmost permütatif olan bir yerel kural tarafından elde edilen $T_{f[-k,k]}$ nin topolojik geçişken olduğu gösterilmiştir. O halde yukarıda verilen yerel kuralda topolojik geçişkendir. Şimdi bu yerel kuralın formal kuvvet serisini oluşturup tersi bulunsun ve terside aynı şekilde geçişken mi incelensin.

$$f(x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2)=7x_2(\mathrm{mod}11)$$

nin formal kuvvet serisi;

$F(X)=7X^2$ şeklindedir. Bu durumda $G(X)=8X^{-2}$ olacaktır. Çünkü

$$\begin{aligned} F(X).G(X)=7X^2.8X^{-2} &\equiv 56X^{2-2}(\mathrm{mod}11) \\ &\equiv 1(\mathrm{mod}11) \end{aligned}$$

$G(X)$ in yerel kuralı ise

$g(x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2)=8x_{-2}(\mathrm{mod}11)$ dir. Şimdi $f(x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2)=7x_2$ (mod 11) nin tersi olan $g(x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2)=8x_{-2}(\mathrm{mod}11)$ tarafından üretilen $T_{g[-2,2]}$ yi incelensin. Bu yerel kuralında leftmost permütatif olduğu açıktır. Görüldü ki $g(x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2)=8x_{-2}(\mathrm{mod}11)$ yerel kuralıda leftmost permütatif olduğu için topolojik geçişkendir.

4.5.11. Örnek

$f:\mathbb{Z}_{23}^{5}\rightarrow\mathbb{Z}_{23}$ şeklinde tanımlansın. $f(x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2)=22x_{-2}(\bmod 23)$ yerel kuralı tarafından üretilen $T_{f[-2,2]}$ dönüşümünün kaotikliğini inceleyelim.

Çözüm:

$f(x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2)=22x_{-2}(\bmod 23)$ yerel kuralı için $\{0,1,2,...,22\}^{\mathbf{Z}}$ nin elemanlarının yardımıyla yerel kuralın permütatif olduğu açıktır. Çünkü obeb(22,23)=1 dir. Verilen yerel kural x_{-2} de permütatif olduğu için bu yerel kurala rightmost permütatif denilebilir. Favati ve ark., (1997) de rightmost veya leftmost permütatif olan bir yerel kural tarafından elde edilen $T_{f[-k,k]}$ nin topolojik geçişken olduğu gösterilmiştir. O halde yukarıda verilen yerel kuralda topolojik geçişkendir. Şimdi bu yerel kuralın formal kuvvet serisini oluşturup tersini bulalım ve terside aynı şekilde geçişken mi inceleyelim.

$f(x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2)=22x_{-2}(\bmod 23)$ nin formal kuvvet serisi; $F(X)=22X^{2}$ şeklindedir. Bu durumda bu formal kuvvet serisinin tersi $G(X)=22X^{-2}$ olacaktır. Çünkü

$$F(X).G(X)=22X^{-2}.22X^{2}\equiv 484X^{-2+2}(\bmod 23)\equiv 1(\bmod 23)$$

elde ediliyor. $G(X)$ in yerel kuralı ise; $g(x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2)=22x_2(\bmod 23)$ dir. Şimdi $f(x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2)=22x_{-2}(\bmod 23)$ nin tersi olan $g(x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2)=22x_2(\bmod 23)$ tarafından üretilen $T_{g[-2,2]}$ nin kaotikliğini inceleyelim. Bu yerel kural rightmost permütatiftir. Görüldü ki $g(x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2)=22x_2(\bmod 23)$ yerel kuralı leftmost permütatif olduğu için topolojik geçişkendir. Böylece *f* ve *g* yerel kuralları tarafından üretilen CA topolojik geçişken ayrıca Favati ve ark., (1997) dan dolayı bu iki CA, toplamsal yerel kural tarafından üretildiklerinden dolayı yoğun periyodik noktalara sahiptir. Dolayısıyla bu iki özellik sağlandığından 4.5.4 Teoremine göre duyarlılık şartlarını da sağlarlar. Bundan dolayı her iki yerel kural tarafından üretilen CA kaotiktir.

4.5.12. Örnek

$f:\mathbf{Z}_{17}^5 \to \mathbf{Z}_{17}$ şeklinde tanımlansın. $f(x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2)=5x_2(\mathrm{mod}17)$ yerel kuralı tarafından üretilen $T_{f[-2,2]}$ dönüşümünün ve bu dönüşümün tersinin kaotikliğini inceleyelim.

Çözüm:

$f(x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2)=5x_2(\mathrm{mod}17)$ yerel kuralı $\{0, 1, 2, ..., 16\}^{\mathbf{Z}}$ nin elemanlarının yardımıyla yerel kuralın permütatif olduğu açıktır. Çünkü obeb(5,17)=1 dir. Yerel kural x_2 de permütatif olduğu için bu yerel kurala rightmost permütatif denilebilir. Favati ve ark., (1997) de rightmost veya leftmost permütatif olan bir yerel kural tarafından elde edilen $T_{f[-r,r]}$ nin topolojik geçişken olduğu gösterilmiştir. O halde yukarıda verilen yerel kuralda topolojik geçişkendir. Şimdi bu yerel kuralın formal kuvvet serisini oluşturup tersini bulalım ve terside aynı şekilde geçişken mi inceleyelim. $f(x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2)=5x_2(\mathrm{mod}17)$ nin formal kuvvet serisi;

$$F(X)=5X^{-2}$$

şeklindedir. Bu durumda bu formal kuvvet serisinin tersi;

$$G(X)=7X^{2}$$

olacaktır. Çünkü

$$\begin{aligned} F(X).G(X)=5X^{2}.7X^{-2} &\equiv 35X^{-2+2}(\mathrm{mod}17) \\ &\equiv 1(\mathrm{mod}17) \end{aligned}$$

elde ediliyor. $G(X)$ in yerel kuralı ise; $g(x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2)=7x_{-2}(\mathrm{mod}17)$ dir. f yerel kuralı rightmost permütatiftir. Şimdi $f(x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2)=5x_2(\mathrm{mod}17)$ nin tersi olan $g(x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2)=7x_{-2}(\mathrm{mod}17)$ tarafından üretilen $T_{g[-2,2]}$ nin kaotikliğini inceleyelim. Bu yerel kural da leftmost permütatiftir. Görüldü ki $g(x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2)=7x_{-2}(\mathrm{mod}17)$ yerel kuralı leftmost permütatif olduğu için topolojik geçişkendir. Böylece f ve g yerel kuralları tarafından üretilen $T_{f[-2,2]}$ ve $T_{g[-2,2]}$ topolojik geçişken ayrıca Favati ve ark., (1997) de bahsedildiği gibi toplamsal yerel kural tarafından üretilen CA'lar yoğun periyodik noktalara sahiptirler. Bu durumda bu iki CA toplamsal yerel kural tarafından üretildiklerinden dolayı yoğun periyodik noktalara sahiptir. Dolayısıyla bu iki özellik sağlandığından

4.5.4. nolu Teoreme göre duyarlılık şartlarını da sağlarlar. Bundan dolayı her iki yerel kural tarafından üretilen CA’lar kaotiktirler.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Dinamik Sistemler ve Kaos teorisi doğrusal olmayan karmaşık sistemlerde yapılan küçük değişimlerin ileriki zamanlarda büyük değişikliklere yol açabileceğini açıklamaya çalışan bir teoridir. Şimdiki durumdan yola çıkarak az bir süre sonra neler olabileceğini tahmin edebiliriz. Fakat uzak geleceğe ait tahminler yürütmek oldukça zordur. Kaos teorisi bu konuyu incelemektedir. Edward N. Lorenz isimli bilim adamı kaos teorisi için önemli ve durumu net şekilde açıklayan bir örnek vermiştir. Bu örneğe göre Amazon ormanlarında bir kelebeğin kanat çırpışı ile ortaya çıkan rüzgar, Avrupa'da büyük bir fırtınaya sebep olabilir. Bu teori; fizik, biyoloji, meteoroloji, iktisat gibi alanlarda araştırılmaktadır. Bu yüzden kaos ile ilgili araştırma yapıldığı zaman kelebek etkisi sıkça karşılaşılan kavramlardan biridir. Kaotik davranış aslında öngörülemeyen bir davranış şeklidir. Bir dönüşümün kaotikliği denildiği zaman o dönüşümün hareketlerini önceden kestirebiliyor muyuz sorusunun cevabını bulmamız gerekir. Entropi de bu teorinin bir parçasıdır. Entropi bir sistemin düzensizliğini ve karmaşıklığını ölçmeye çalışır. Entropi aslında bir çok bilim dalında kullanılan her birinde farklı anlamlara gelen bir kavramdır. Özellikle Fizik, Kimya, Enformasyon teorisi v.b. birçok alanda entropi farklı yönleriyle incelenmiştir. Bilindiği üzere entropi kavramının pek çok çeşidi vardır. Örneğin ölçüm entropi, topolojik entropi, rule entropi ve yönlü entropi v.b. Bu tezde entropide önemli bir yeri olan bir boyutlu CA'ların kaotikliği incelenmiş ve entropinin bir çeşidi olan topolojik entropi kavramı ile kaotiklik kavramı arasında bir bağlantı kurulmaya çalışılmıştır.

5.2. Öneriler

Bu çalışmada bir boyutlu CA'nın kaotikliği ve entropi değeri incelenmektedir. Bir CA'nın kaotik olması için ilgili yerel kuralın katsayıları nasıl olmalıdır ve terslenebilen CA'lar hangi durumda kaotiktir bu detaylar incelenerek bir takım sonuçlar elde edilmeye çalışılmaktadır. Ayrıca CA'nın topolojik entropi değeri ve sistemin kaotikliği arasındaki ilişki incelenmektedir. Bazı yazarlar tarafından incelenmiş olan Elementer CA'ya karşılık gelen bir doğal sayı bulunmuştu. Bu çalışmada bu doğal sayıyı daha genel durumlar için yeniden yapılandırılmaktadır. Kendiside, terside kaotik olan bir CA bulunmaktadır. Bununla birlikte tezde bir $\mathbf{Z}_m$ halkası üzerinde tanımlanan bir boyutlu toplamsal CA'lar göz önüne alınmaktadır. İnanılır ki toplamsal olmayan keyfi boyutlu CA'ların yukarıda zikredilen özellikleri incelenebilir. Bununla birlikte $\mathbf{Z}_m$ dışında ki diğer sonlu halkalar için benzer inceleme ve hesaplamalar yapılabileceğine inanılmaktadır Böylece bu problemler açık problem olarak kalmaktadır.

KAYNAKLAR

ADLER, R. L., KONHEIM, A.G., and Mc ANDREW, M. H., 1965. Topological Entropy. Trans. Amer. Math. Soc. 114: 309-319.

AKIN, H., 2003. On The Measure Entropy of Additive Cellular Automata f_∞. Entropy, 2003, 5: 233-238.

AKIN, H., 2006. The Topological Entropy of *n*th iteration of an Additive Cellular Automata, Appl. Math. and Computation, 174(2): 1427-1437.

AKIN, H., 2007. The Topological entropy of invertible Cellular Automata, J. Comput. Appl. Math. doi: 10.1016/j.cam.2007.01.020.

BALIBREA, F. and SNOHA, L., 2003. Topological Entropy of Devaney chaotic Maps. Topology and its Applications,133: 225–239.

BANKS, J., BROOKS, J., CAIRNS, G., DAVIS, G. and STACEY, P., 1992. On The Devaney's Definition of Chaos, Amer. Math. Monthly, 99: 332-334.

BLOCK, L. S. and COPPEL. W. A., 1992. Dynamics in One Dimension, Springer-Verlag Berlin Heidelberg., 250p.

BRAGA, G., CANANNEO, G., FLOCCHINI, E. and MAURI, G., 1993. Complex chaotic behavior of a class of subshift cellular automata. Complex Systems, 7: 269-296.

BOWEN, R. E., 1971. Entropy for Group Endomorphisms and Homogenous Spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 153: 401-414

CATTANEO, G., FINELLI, M. and MARGARA, L., 2000. Investigating topological chaos by elementary cellular automata dynamics. Theoret. Comput. Science, 244: 219-241.

COHN, D. L., 1980. Measure Theory, Birchauser, Boston, 373 p.

D'AMICO, M., MANZINI, G. and MARGARA, L., 2003. On computing the entropy of cellular automata. Theoret. Comput. Science, 290: 1629-1646.

DENKER, M., GRILLENBERG, C. and SIGMUND, K., 1976. Ergodic Theory on Compact Spaces. Springer Lecture Notes in Math., 527 p.

DEVANEY, R. L., 1989. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Addison-Wesley Reading MA., 320p.

FAVATI, P., LOTTI, G. and MARGARA, L., 1997. Additive One-Dimesional CellularAutomata Are Chaotic According to Devaney's Definition of Chaos, Theoret. Comput. Science, 174: 157-170.

HEDLUND, G. A., 1969. Endomorphisms and automorphisms of full shift dynamical system. Math. Syst. Theory., 3: 320-375.

KELLEY, J. L., 1955. General Topology, D. Van Nostrand Co., Inc. Princeton, New York. 300p.

KNUDSEN, C. 1994. Chaos without nonperiodicity, Amer. Math. Monthly 101: 563-565.

MANZINI, G., MARGARA, L. and FINELLI, M., 1998. Lyapunov Exponents Versus Expansivity in Cellular Automata, Journal of Comput. Sci., 14: 210-233.

MANZINI, G. and MARGARA, L., 1998. Invertible Linear Cellular Automata Over $\mathbf{Z}_m$, Journal of Comput. Sci., 56: 60-67.

ITO, M., OSATO, N. and NASU, M., 1983. Linear Cellular Automata over $\mathbf{Z}_m$, J. Comput. System Sci., 27: 125-140

PACKARD, N.H., 1990. The Structure of the Elementary Rule Space. Complex Systems, 4: 281-297.

SHERESHEVSKY, M. A., 1992. Ergodic properties of certain surjective cellular automata, Mh. Math. 114: 305-316.

WALTERS, P., 1982. An Introduction to Ergodic Theory, Springer-Verlag, Berlin, 250p.

ÖZGEÇMİŞ

19. 07. 1982 yılında Aydın' da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Şanlıurfa'da tamamladı. 2000 yılında Harran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2004 yılında buradan mezun oldu. 2005 yılının şubat ayında Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitü'sünde Yüksek lisansa başladı. 2005 yılının eylül ayında KPSS' yi kazanarak Devlet Su İşleri 15. Bölge Müdürlüğüne atandı. 2006 yılının mart ayında TÜBİTAK Yurt İçi Yüksek Lisans bursunu kazandı. Halen DSİ 15. Bölge Müdürlüğünde Strateji Geliştirme Şube Müdürlüğünde görev yapmaktadır. Aynı zamanda 15. Bölgenin Kalite Yönetim Biriminin İstatistik sorumlusudur.

ÖZET

Tezimiz dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümünde, ihtiyaç duyulan gerekli tanım ve teoremler detaya girilmeden verilmektedir.

İkinci bölümde ise ayrışım kavramı ve bir dinamik sistemin iki çeşit entropisi (topolojik ve ölçüm entropi) incelenmektedir.

Üçüncü bölümde materyal ve yöntemler açıklanmaktadır.

Son bölümde ise Devaney'in kaos tanımına göre kaotiklik daha detaylı olarak açıklanmaktadır. Toplamsal bir-boyutlu CA'nın kaotik davranışı incelenmektedir. Özellikle Devaney'in kaos tanımına göre kaotikliğin şartları dikkatli bir biçimde incelenmektedir. Devaney'in kitabında (1989) verilen bazı problemler çözülmektedir. İyi bilinir ki eğer geçiş dönüşümü $T_{f[l,r]}$ başlangıç şartlarına duyarlı, topolojik geçişken ve X üzerinde yoğun periyodik orbitlere sahip ise $(X, T_{f[l,r]})$ dinamik sistemi Devaney'in kaos tanımına göre kaotiktir. Favati ve ark., (1997) ispatladılar ki herhangi f lokal kuralı rightmost (leftmost) permütatif ise o zaman $T_{f[l,r]}$ geçişkendir ve onlar aynı zamanda gösterdiler ki eğer p asal sayı olmak üzere f, $\mathbf{Z}_p$ üzerinde tanımlanmış herhangi bir toplamsal yerel kural ise o zaman $T_{f[l,r]}$ yoğun periyodik orbitlere sahiptir. Banks ve ark., (1992) ispatladılar ki eğer herhangi bir T dönüşümü yoğun periyodik orbitlere sahip ve o topolojik geçişken ise o zaman bu dönüşüm başlangıç şartlarına duyarlıdır. Böylece (Banks ve ark., 1992) ve (Favati ve ark., 1997) de elde edilen sonuçlar toplamsal bir-boyutlu CA'nın kaotik olduğunu ispatlamak için kullanılmaktadır. $\mathbf{Z}_2$ üzerinde Favati ve ark., (1997) tarafından bulunan n_f doğal sayısı $\mathbf{Z}_p$ (p bir asal sayıdır) cismine genelleştirilmektedir. Ayrıca gösterilmektedir ki eğer toplamsal bir-boyutlu CA kaotik ise o zaman onun tersi ve n. ötelemesi de kaotiktir.

SUMMARY

Our thesis contains four chapter.

In the first chapter necessary definitions and theorems that we need have been given without going into details.

In the second chapter, the concept of partition and two kinds of entropy (topological and measure theoretical entropy) of a dynamical system have been investigated.

In the 3rd chapter the materials and methods have been explained.

In the last chapter, the chaoticity according to Devaney's definition of chaos has been explained more detailed. The chaotic behavior of additive one-dimensional CA has been studied. Especially the conditions of chaotic according to Devaney's definition of chaos have been investigated carefully. Some problems given in Devaney's book (1989) have been solved. It is well known that a dynamical system $(X, T_{f[l,r]})$ is chaotic according to Devaney's definition of chaos if its transition map $T_{f[l,r]}$ is sensitive to initial conditions, topologically transitive, and has dense periodic orbits on X. Favati *et al.* (1997) have proved that any local rule f is rightmost (leftmost) permutative then $T_{f[l,r]}$ is transitive and they have also shown that if f is any additive local rule defined on $\mathbf{Z}_p$, where p is a prime number, then $T_{f[l,r]}$ has dense periodic orbits. Banks *et al.* (1992) have proved that if any transformation T has dense periodic orbits and it is topologically transitive, then it is sensitive to the initial conditions. Thus, the results obtained in (Banks *et al.* 1992) and (Favati *et al.*, 1997) have been used to prove that an additive one-dimensional CA is chaotic. Some additive one-dimensional CA that are chaotic have been obtained. The natural number n_f which obtained by Favati *et al.* (1997) over $\mathbf{Z}_2$ is generalized to the field $\mathbf{Z}_p$, where p is a prime number. Furthermore, it is shown that if an additive one-dimensional CA is chaotic, then its inverse and *n*th iteration of this map are chaotic.