



**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**KESİRLİ MERTEBEDEN HAREKETLİ-HAREKETSİZ ADVEKSİYON DAĞILIM
DENKLEMİNİN THETA YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ**

**Said BOZKOYUN
MATEMATİK**

**ŞANLIURFA
2026**



**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**KESİRLİ MERTEBEDEN HAREKETLİ-HAREKETSİZ ADVEKSİYON DAĞILIM
DENKLEMİNİN THETA YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ**

**Said BOZKOYUN
MATEMATİK**

DANIŞMAN: Prof. Dr. Mahmut MODANLI

**ŞANLIURFA
2026**

TEŐEKKÖR

Çalıőmalarımız boyunca desteklerini esirgemeyen, engin bilgileriyle beni bilgilendiren çok kıymetli ve saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mahmut MODANLI'yateőekkör ederim.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	3
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÇİZELGELER DİZİNİ	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ	iv
1. GİRİŞ	1
1.1. Temel Tanımlar	3
1.2. Laplace Dönüşümünün Özellikleri	3
1.2.1. Doğrusallık Özelliği	3
1.2.2. Birinci Kaydırma	3
1.2.3. İkinci Kaydırma Özelliği	4
1.2.4. Zamanla Çarpma Özelliği	4
1.2.5. Zamanda Türev Alma Özelliği	4
1.2.6. s Değişkenine Göre Türev Özelliği	4
1.2.7. İntegral Özelliği	5
1.2.8. Konvolüsyon Özelliği	5
1.2.9. Periyodik Fonksiyon Özelliği	5
1.2.10. Başlangıç Değeri Teoremi	6
1.2.11. Son Değer Teoremi	6
1.2.12. Ölçekleme Özelliği	6
1.2.13. Dirac Delta Fonksiyonu	6
1.2.14. Heaviside Basamak Fonksiyonu	6
1.2.15. Temel Laplace Dönüşüm Tablosu	6
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	17
3. GEREÇ ve YÖNTEM	20
3.1. Theta Sonlu Fark Yöntemi	20
3.1.1. Kararlılık Analizi	20
4. BULGULAR	25
4.1. Nümerik Sonuçlar	25
5. TARTIŞMA	29
6. SONUÇLAR	31
7. ÖNERİLER	33
KAYNAKLAR	34
ÖZ GEÇMİŞ	36

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ MERTEBEDEN HAREKETLİ-HAREKETSİZ ADVEKSİYON DAĞILIM DENKLEMİNİN THETA YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Said BOZKOYUN

HARRAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mahmut MODANLI

Yıl: 2026, Sayfa: 36

Bu çalışmada Caputo kesirli türevine sahip mobil--immobil adveksiyon--difüzyon modeli ele alınmıştır. Modelin analitik çözümü Laplace dönüşüm yöntemi kullanılarak elde edilmiş ve uzay değişkeninde özfonsiyon açılımı yaklaşımı ile problem cebirsel-diferansiyel bir sisteme indirgenmiştir. Elde edilen çözümde homojen ve homojen olmayan kısımlar ayrı ayrı incelenmiş, başlangıç ve sınır koşulları sistematik olarak uygulanmıştır. Ayrıca çözümün doğrulanması için ters Laplace dönüşümü gerçekleştirilmiştir. Sayısal kısımda ise Caputo türevi için L1 yaklaşımına dayalı THETA sonlu fark şeması geliştirilmiştir. Uzay türevleri için merkezi fark, zaman ayrıklaştırması için ise ağırlıklı yöntem kullanılmıştır. Önerilen şemanın kararlılığı Von Neumann analizi ile incelenmiş ve koşulu altında koşulsuz kararlı olduğu gösterilmiştir. Ayrıca hata analizi yapılarak yöntemin mertebesinde yakınsak olduğu ispatlanmıştır. Sayısal deneyler, teorik sonuçları doğrulamış ve kesirli mertebenin sistemin taşınım ve difüzyon davranışı üzerinde önemli etkiler oluşturduğunu göstermiştir.

ANAHTAR KELİMELELER: Caputo kesirli türevi, Hareketli-hareketsiz adveksiyon-difüzyon modeli, Laplace dönüşümü yöntemi, Theta-ağırlıklı sonlu fark şeması, Von Neumann kararlılık analizi

ABSTRACT

MASTER’S THESIS

NUMERICAL SOLUTION OF THE FRACTIONAL-ORDER MOBILE–IMMOBILE ADVECTION–DISPERSION EQUATION USING THE THETA METHOD

Said BOZKOYUN

**HARRAN UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL
MATH**

Thesis Advisor: Prof. Mahmut MODANLI

Year: 2026, Page: 36

In this study, a Caputo fractional-order mobile--immobile advection--diffusion model is investigated. The analytical solution of the model is obtained using the Laplace transform method, and the problem is reduced to an algebraic-differential system via eigenfunction expansion in the spatial domain. The homogeneous and nonhomogeneous parts of the solution are treated separately, and initial and boundary conditions are systematically imposed. The inverse Laplace transform is then applied to recover the time-domain solution. For the numerical part, a theta weighted finite difference scheme based on the L1 approximation of the Caputo derivative is developed. Central difference discretization is used for spatial derivatives, while a theta-weighted time-stepping scheme is applied. The stability of the proposed scheme is analyzed using the Von Neumann method, showing that the method is unconditionally stable for Furthermore, error analysis demonstrates that the scheme achieves convergence of order. Numerical experiments confirm the theoretical results and illustrate the significant influence of the fractional order on transport and diffusion dynamics.

KEYWORDS: Caputo fractional derivative, Mobile-immobile advection-diffusion model, Laplace transform method, Theta-weighted finite difference scheme, Von neumann stability analysis

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 1.1.	Temel Laplace Dönüşüm Tablosu	6
Çizelge 4.1.	Parametreleri kullanılmıştır.	25
Çizelge 4.2.	$\alpha=0.57$, $\theta=0.5$, $\beta_1=\beta_2=\beta_3=0.01$ parametreleri kullanılmıştır.	25

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1.	$\alpha=0.57$, $\theta=0.5$, $\beta_1=\beta_2=\beta_3=0.01$ parametreleri kullanılmıştır parametreleri kullanılmıştır.Çözüm bölgesi $x, 0,1$ gider olarak alınmıştır.	26
Şekil 4.2.	$\alpha=0.57$, $\theta=0.5$, $\beta_1=\beta_2=\beta_3=0.01$ parametreleri kullanılmıştır parametreleri kullanılmıştırÇözüm bölgesi $x, 0,1$ gider ve $T=1$ olarak alınmıştır. ve olarak alınmıştır.	27
Şekil 4.3.	$\alpha=0.25, 0.5, 0.75, , \theta=0.5$, $\beta_1=\beta_2=\beta_3=0.01$ parametreleri kullanılmıştır parametreleri kullanılmıştırÇözüm bölgesi $x, 0,1$ gider ve $T=1$ olarak alınmıştır. ve olarak alınmıştır.	28

1. GİRİŞ

Görüntüleme sistemi açısından, bu sorunu ele almak için birçok model geliştirilmiştir, ancak bunların çoğu kesirli mertebeye dayanmaktadır. Zohra ve Maouni (Zohra ve Maouni 2019), gürültü giderme konusuna ulaştıklarında, görüntü işlemede kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin yeni uygulamalarını önermişlerdir. Ayrıca, kesirli mertebeden sistemlerin tamsayı dereceden daha iyi sonuçlar ürettiğini göstermişlerdir (Zohra ve Maouni, 2019). Yazarlar tarafından (İbrahim RW,2022)'de kesirli kısmi diferansiyel denklem (KKDD) kategorisine dayanan matematiksel bir model sunulmuş ve sonuç olarak tıbbi görüntülerin iyileştirilmesi için yeni bir yaklaşım önerilmiştir. (Che , 2013)'teki yazarlar, görüntü gürültüsünü azaltmak ve görüntülerdeki doku bilgisini iyileştirmek için kullanılan bir gürültü giderme modeli sunmak için kesirli dereceli kısmi diferansiyel operatörü ve varyasyonel kısmi diferansiyel denklemi birleştirdiler. Gürültü giderme yeteneğini geliştirmek ve görüntü gürültüsünü azaltmada daha önce bulunan bazı sonuçları genişletmek için, (Gouasnouane O, 2013)'teki yazarlar uzaysal kesirli türevli doğrusal olmayan bir geliştirme (KKDD) önerdiler. Yazarlar tarafından (Abirami A,2017), Crank-Nicholson ve Grünwald Letnikov fark operatörleri tekniği kullanılarak uzay kesirli difüzyon denklemi anlamında yeni bir gürültü giderme modeli önerilmiş ve CN modelinin deneysel sonuçları iyileştirilmiş bir (PSNR) değeri göstermiştir. (Pu y,2014)'deki yazarlar, doku görüntüsü denoising alanına en dik iniş ve kesirli toplam varyasyon için çok ölçekli denoising model tabanlı orantı yaklaşımını uygulamışlardır. Ayrıca (KKDD)'nin görüntü işleme alanında uygulanabileceğini açıklamışlardır. Diferansiyel denklemler, uygulamalı matematiğin önemli bir alt alanıdır ve birçok fiziksel ve mühendislik problemini modellemek, analiz etmek ve değerlendirmek için pratik bir araçtır. Özellikle dalga hareketi, akışkan dinamiği, ağ tasarımı, telekomünikasyon, elektromanyetik, dalgaların dağılımı ve elektronik dinamiğinde yaygındırlar (Koksal ME 2012 ;Misra DK 20102). Mühendislik ve fiziksel sistemlerde kullanılmalarının yanı sıra, ekonomi ve risk teorisi de dahil olmak üzere diğer birçok sosyal bilimde de kullanılırlar. Diferansiyel denklemler dinamik sistemlerin modellenmesi için ideal araçlardır. Öte yandan, parabolik denklemin özel bir türü olan hareketli-hareketsiz adveksiyon-dispersiyon modeli, ısı difüzyonu, kirleticilerin dönüşümü, yeraltı suyu, okyanus

akustik yayılımı akarsu ve nehirlerdeki çözünen madde taşınımı gibi karmaşık sistemleri modellemek için sıklıkla ortaya çıkan kısmi bir diferansiyel denklemdir (Tajadodi 2022). Kolokasyon yöntemi ve Lagrange polinomları, yazarlar tarafından (Chen z , 2022)'de (AB) kırılma operatörüne dayalı değişken mertebeli kesirli mobil-immobil adveksiyon-dispersiyon modelini sunmak için kullanılmıştır. Boubaker dalgacıları (Ray S.S.,2022)'de değişken mertebeli kesirli hareketli-hareketsiz adveksiyon-difüzyon denklemini çıkarmak için yeni bir hesaplama yöntemi uygulamıştır. Zaman kesirli hareketli-hareketsiz adveksiyon-difüzyon modeli için (Liu H,2021)'de tamamen ayrık özellikli sonlu elemanlar teknikleri önerilmiştir.

Bu tezde, Caputo kesirli türevine dayanan hareketli-hareketsiz adveksiyon-difüzyon denkleminin tam ve yaklaşık çözümleri incelenecektir. Bu model,

Şimdi bu tezde kullanılan temel tanım ve teoremleri verelim. Kesirli kısmi diferansiyel denklemler (FPDE'ler), anomal difüzyon, hafıza etkileri ve karmaşık sistemlerdeki yerel olmayan dinamikleri tanımlayabilme yetenekleri nedeniyle önemli bir araştırma konusu hâline gelmiştir. Klasik tam sayı mertebeli modellerden farklı olarak, kesirli türevler viskoelastik malzemelerde, gözenekli ortamlarda, akışkan akışında ve biyolojik taşınım süreçlerinde ortaya çıkan kalıtsal özellikleri ifade edebilmektedir.

Kesirli operatörler arasında Caputo türevi, klasik başlangıç koşullarına izin vermesi ve açık bir fiziksel yoruma sahip olması nedeniyle yaygın olarak kullanılmaktadır. Caputo türevini içeren kesirli mobil-immobil model, heterojen ortamlardaki anomal taşınım olaylarını tanımlamak için güçlü bir çerçeve sunmaktadır. Zamana bağlı kesirli mertebeli türev, hafıza etkilerini modele dahil ederek, klasik tam sayı mertebeli modellerle açıklanamayan uzun süreli tutulum ve gecikmeli salınım mekanizmalarının modellenmesini mümkün kılar. Bu yaklaşım, çıkmaz gözenekler veya düşük geçirgenlikli bölgeler gibi immobil bölgelerde parçacıkların hapsolmesinden kaynaklanan alt difüzyon davranışı etkili bir şekilde temsil etmektedir. Bu nedenle model, Fick tipi olmayan dinamiklerin ve ağır kuyruklu bekleme süresi dağılımlarının önemli rol oynadığı yeraltı suyu hidrolojisi, petrol mühendisliği, çevre bilimleri ve biyolojik taşınım süreçlerinde yaygın olarak uygulanmaktadır. Bununla birlikte, zamana bağlı kesirli taşınım-difüzyon denklemlerinin analitik çözümleri nadiren elde edilebildiğinden, güvenilir nümerik yöntemlerin geliştirilmesi büyük önem taşımaktadır.

1.1. Temel Tanımlar

Bir f fonksiyonu tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun Laplace dönüşümü:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1)$$

integrali ile tanımlanan F fonksiyonu olup;

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \quad (2)$$

ile gösterilir. İntegralin mevcut olduğu bütün s değerleri F fonksiyonunun tanım kümesini oluşturur. Burada s karmaşık değişkendir (Podlubny, 1999).

1.2. Laplace Dönüşümünün Özellikleri

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s} \quad (3)$$

1.2.1. Doğrusallık Özelliği

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} \quad (4)$$

yani

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s) \quad (5)$$

olur.

1.2.2. Birinci Kaydırma

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a) \quad (6)$$

1.2.3. İkinci Kaydırma Özelliği

Heaviside basamak fonksiyonu $u(t-a)$

için

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s) \quad (7)$$

olur.

1.2.4. Zamanla Çarpma Özelliği

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad (8)$$

özellikle,

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds} F(s) \quad (9)$$

1.2.5. Zamanda Türev Alma Özelliği

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \quad (10)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \quad (11)$$

Genel olarak,

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (12)$$

1.2.6. s Değişkenine Göre Türev Özelliği

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds} F(s) \quad (13)$$

Genel biçimde,

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \quad (14)$$

1.2.7. İntegral Özelliği

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s} \quad (15)$$

1.2.8. Konvolüsyon Özelliği

İki fonksiyonun konvolüsyonu

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau \quad (16)$$

şeklinde tanımlanır. Laplace dönüşümü:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s) \quad (17)$$

olur.

1.2.9. Periyodik Fonksiyon Özelliği

$f(t)$ periyodu T olan periyodik bir fonksiyon ise,

$$f(t + T) = f(t) \quad (18)$$

ve Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt \quad (19)$$

olur.

1.2.10. Başlangıç Değeri Teoremi

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (20)$$

1.2.11. Son Değer Teoremi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (21)$$

1.2.12. Ölçekleme Özelliği

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0 \quad (22)$$

1.2.13. Dirac Delta Fonksiyonu

$$\mathcal{L}\{\delta(t - a)\} = e^{-as} \quad (23)$$

1.2.14. Heaviside Basamak Fonksiyonu

$$\mathcal{L}\{u(t - a)\} = \frac{e^{-as}}{s} \quad (24)$$

1.2.15. Temel Laplace Dönüşüm Tablosu

Çizelge 1.1. Temel Laplace Dönüşüm Tablosu

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$

Örnek 1.1. $L(\cos(x))$ Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm.

Laplace dönüşümünün tanımını kullanalım:

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos(at) dt \quad (25)$$

Şimdi integrali hesaplayacağız. Bilinen integral formülü:

$$\int e^x = \cos x + \sin x \quad (26)$$

şeklindedir. Burada, a=-s ve B= b alınırsa,

$$\int e^{-st} \cos(at) dt = (-s \cos(at) + a \sin(at)) \quad (27)$$

elde edilir. Şimdi sınırları uygulayalım:

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \left[\frac{e^{-st}}{s^2 + a^2} \right]_0^{\infty} \quad (28)$$

Önce t sonsuza giderken durumu incelenir.

$$e^{-st} \rightarrow 0 \quad (s > 0) \quad (29)$$

olduğundan,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-st}}{s^2 + a^2} = 0 \quad (30)$$

olur.

Şimdi t=0 için

$$\cos(0) = 1, \quad \sin(0) = 0 \quad (31)$$

olduğundan,

$$\frac{1}{s^2 + a^2}(-s) = -\frac{s}{s^2 + a^2} \quad (32)$$

bulunur.

Tanım 1.2. (*Türevin Laplace Dönüşümü*): Bir fonksiyonun n. mertebeden türevinin Laplace dönüşümü: fonksiyonları aralığında sürekli, aralığında parçalı sürekli ve bu fonksiyonların tümü üstel mertebeden olsunlar. Bu durumda için

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (33)$$

olur. Özel olarak n=2 olması durumunda

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \quad (34)$$

ve n=3 için ise

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3 \mathcal{L}\{f(t)\} - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0) \quad (35)$$

bağıntınları kolayca elde edilebilir (Podlubny, 1999).

Tanım 1.3 (*Ters Laplace Dönüşümü*) aralığında sürekli ve

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \quad (36)$$

olsun fonksiyonuna F(s) nin ters Laplace dönüşümü denir. Ters Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \quad (37)$$

ile gösterilir (Podlubny, 1999).

Tanım 1.4 (*Caputo Kesirli Türevi*). Caputo, Riemann–Liouville tanımının Laplace dönüşüm ifadesinin uygulamalarında ortaya çıkan başlangıç değerlerin hesaplanması veya deneysel yolla ölçülmesi problemini ortadan kaldırmak amacıyla 1967’de kesirli türevin bir başka tanımı olan Caputo kesirli türevini şu şekilde tanımlamıştır:

$a=2$ olması durumunda Caputo kesirli türevi tam sayılı mertebeden türeve dönüşür.

Tanım 1.5 (*Riemann–Liouville Kesirli Türevi*). aralığında fonksiyonu sürekli ve integ-rallenebilir olsun. olmak üzere için reel bir fonksiyonun q . mertebeden Riemann–Liouville kesirli türevi:

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n+q}} dt. \quad (38)$$

Uyarı: [Riemann–Liouville’den Caputo türevine geçiş ve Laplace dönüşümü] Caputo kesirli türevi, Riemann–Liouville kesirli integral operatörü kullanılarak

$${}_0^C D_t^\alpha w(t) = I^{n-\alpha} \left(\frac{d^n w(t)}{dt^n} \right), \quad (39)$$

şeklinde tanımlanır. Burada I Riemann–Liouville kesirli integral operatörünü ifade etmektedir.

Bu tanım, türevin önce klasik türev alınarak daha sonra kesirli integral ile yumuşatılması fikrine dayanır. Böylece başlangıç koşulları klasik türevlerdeki gibi fiziksel olarak anlamlı biçimde korunur.

Laplace dönüşümü uygulandığında, kesirli integralin evrişim yapısından dolayı Caputo türevi cebirsel bir forma indirgenir:

$$\mathcal{L}\{{}_0^C D_t^\alpha w(t)\} = s^\alpha W(s) - s^{\alpha-1} w(0). \quad (40)$$

Bu sonuç, kesirli türev içeren kısmi diferansiyel denklemlerin Laplace uzayında

cebirsel–diferansiyel sistemlere indirgenmesini sağlar.

Tanım 1.6 (Gamma Fonksiyonu). Gamma fonksiyonu genelleştirilmiş integral yardımıyla şu şekilde tanımlanır:

Caputo kesirli türevine dayanan mobil-immobile adveksiyon dağılım modeline uygun aşağıdaki problemin tam çözümünü Laplace yöntemiyle bulalım.

Tanım 1.7 (Caputo Türevinin Laplace Dönüşümü). olmak üzere fonksiyonunun Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathcal{L} \{ {}_0^C D_t^\alpha w(t) \} = s^\alpha W(s) \quad (41)$$

Lemma 1.8 (Caputo türevinin Laplace dönüşümü). olmak üzere, fonksiyonu yeterince düzgün (örneğin parçalı sürekli ve üstel mertebeden) olsun. Bu durumda Caputo kesirli türevin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L} \{ {}_0^C D_t^\alpha w(t) \} = s^\alpha W(s) \quad (42)$$

şeklindedir. Özellikle için bu ifade

$$\mathcal{L} \{ {}_0^C D_t^\alpha w(t) \} = s^\alpha W(s) \quad (43)$$

haline indirgenir.

Kanıt. Caputo türevin tanımı

$${}_0^C D_t^\alpha w(t) = I^{n-\alpha} (w^{(n)}(t)) \quad (44)$$

şeklindedir. Burada I Riemann–Liouville kesirli integral operatörüdür. Laplace dönüşümünün evrişim özelliği kullanılırsa,

$$\mathcal{L} \{ I^\beta f(t) \} = s^{-\beta} F(s) \quad (45)$$

olur. Bu nedenle

$$\mathcal{L}\{ {}_0^C D_t^\alpha w(t) \} = \mathcal{L}\{ w^{(n)}(t) \}. \quad (46)$$

Klasik türev için Laplace dönüşümü:

$$\mathcal{L}\{ w^{(n)}(t) \} = s^n W(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} w^{(k)}(0) \quad (47)$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (48)$$

olduğundan yerine yazılırsa:

$$s^{-(n-\alpha)} \left(s^n W(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} w^{(k)}(0) \right). \quad (49)$$

Terimler düzenlenirse:

$$s^\alpha W(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-1-k} w^{(k)}(0) \quad (50)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 1.9 (Yakınsama Mertebesi). Bir nümerik yöntemle elde edilen u_h yaklaşık çözümü ile tam çözüm u arasındaki hata

$$E(h) = \|u - u_h\| \quad (51)$$

şeklinde tanımlansın.

$$E(h) \leq Ch^p \quad (52)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, bu durumda p sayısı yöntemin (**yakınsama mertebesi**) (convergence order) olarak adlandırılır. Burada h , 0 giderse iken hata azalım hızı mertebesindeir.

Örnek 1.2.

Caputo kesirli mertebeli mobil-immobile adveksiyom dağılım modelinin

Laplace Dönüşümü ile Tam Analitik Çözüm:

Verilen denklem:

$$\beta_1 w_t + \beta_2 {}^C D_t^\alpha w = \beta_3 w_{xx} + \beta_4 w_x + f(t, x). \quad (53)$$

$$w(0, x) = -\sin x, \quad w(t, 0) = w(t, \pi) = 0. \quad (54)$$

Laplace dönüşümü

Caputo türevi için:

$$\mathcal{L}\{{}^C D_t^\alpha w\} = s^\alpha W(s, x) - s^{\alpha-1} w(0, x). \quad (55)$$

Tüm denklem Laplace'a çevrilirse:

burada

$$F(s, x) = \mathcal{L}\{f(t, x)\}. \quad (56)$$

Homojen ve özel çözüm ayrımı

$$W(s, x) = W_h(s, x) + W_p(s, x). \quad (57)$$

Homojen problem

$$\beta_3 W_{xx} + \beta_4 W_x - (\beta_1 s + \beta_2 s^\alpha) W = 0. \quad (58)$$

Sınır şartları nedeniyle Fourier yaklaşımı yapılır:

$$W_h(s, x) = A(s) \sin x. \quad (59)$$

Türevler:

$$W_x = A(s) \cos x, \quad W_{xx} = -A(s) \sin x. \quad (60)$$

Yerine koyarsak:

$$-(\beta_3 + \beta_1 s + \beta_2 s^\alpha) A(s) \sin x + \beta_4 A(s) \cos x = 0. \quad (61)$$

Sınır koşulları gereği cos terimi modal ortalama yok olur ve:

$$(\beta_1 s + \beta_2 s^\alpha + \beta_3) A(s) = 0. \quad (62)$$

Dolayısıyla homojen çözüm:

$$W_h = 0. \quad (63)$$

Özel çözüm

Özel çözüm için kaynak fonksiyon:

Laplace dönüşümleri:

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}, \quad (64)$$

$$\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{6}{s^4}, \quad (65)$$

$$\mathcal{L}\{t^{3-\alpha}\} = \frac{\Gamma(4-\alpha)}{s^{4-\alpha}}. \quad (66)$$

Böylece:

$$F(s, x) = \sin x \quad (67)$$

Çözüm:

$$W(s, x) = A(s) \sin x, \quad (68)$$

Ters Laplace sonucu:

Standart ters dönüşüm çiftleri kullanılır ve tüm terimler ayrı ayrı ters çevrilir:

$$w(t, x) = (t^3 - 1) \sin x. \quad (69)$$

Sonuç:

Kaynak fonksiyon $f(t, x)$ **tam olarak çözümün** yeniden üretilmesi için seçildiğinden, problem bir **manufactured solution problem** yapısındadır ve çözüm:

$$\boxed{w}(t, x) = (t^3 - 1) \sin x \quad (70)$$

şeklinde elde edilir. Kesirli kısmi diferansiyel denklemler (KKDD'ler), anomal difüzyon, hafıza etkileri ve karmaşık sistemlerdeki yerel olmayan dinamikleri tanımlayabilme yetenekleri nedeniyle önemli bir araştırma konusu hâline gelmiştir. Klasik tam sayı mertebeli modellerden farklı olarak, kesirli türevler viskoelastik malzemelerde, gözenekli ortamlarda, akışkan akışında ve biyolojik taşıyım süreçlerinde ortaya çıkan kalıtsal özellikleri ifade

edebilmektedir. Kesirli operatörler arasında Caputo türevi, klasik başlangıç koşullarına izin vermesi ve açık bir fiziksel yoruma sahip olması nedeniyle yaygın olarak kullanılmaktadır.

Caputo türevini içeren kesirli mobil–immobil model, heterojen ortamlardaki anomal taşınım olaylarını tanımlamak için güçlü bir çerçeve sunmaktadır. Zamana bağlı kesirli mertebeli türev, hafıza etkilerini modele dahil ederek, klasik tam sayı mertebeli modellerle açıklanamayan uzun süreli tutulum ve gecikmeli salınım mekanizmalarının modellenmesini mümkün kılar. Bu yaklaşım, çıkmaz gözenekler veya düşük geçirgenlikli bölgeler gibi immobil bölgelerde parçacıkların hapsolmasından kaynaklanan alt difüzyon davranışı etkili bir şekilde temsil etmektedir. Bu nedenle model, Fick tipi olmayan dinamiklerin ve ağır kuyruklu bekleme süresi dağılımlarının önemli rol oynadığı yeraltı suyu hidrolojisi, petrol mühendisliği, çevre bilimleri ve biyolojik taşınım süreçlerinde yaygın olarak uygulanmaktadır.

Bununla birlikte, zamana bağlı kesirli taşınım–difüzyon denklemlerinin analitik çözümleri nadiren elde edilebildiğinden, güvenilir nümerik yöntemlerin geliştirilmesi büyük önem taşımaktadır. Bu tezin literatüre en büyük katkısı

1. Tutarlı bir theta-sonlu fark şemasının kurulması;
2. Tam ayrık lineer sistemin elde edilmesi;
3. Ayrık enerji yöntemi kullanılarak kararlılık analizinin yapılması;
4. Yakınsama ve dayanıklılığın nümerik olarak doğrulanması.

olarak verilebilir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Kesirli türev modelleri, çözünen taşınım modelleme topluluğu için çekici olan çeşitli yaklaşımlar sunar. Ayrıca, kesirli mertebeden mobil-hareketsiz taşınım-dağılım modelinin sayısal benzetimi Liu ve arkadaşları tarafından ele alınmıştır. Kesirli türevler içeren denklemlerin geçmişte karmaşık sistemlerdeki anormal difüzyon ve taşıma dinamiklerinin üstün açıklamalarını sağladığı gösterilmiştir. Son zamanlarda araştırmacılar ayrıca birçok dinamik sürecin zamana veya mekana göre değişebilen kesirli düzen davranışı sergilediğini bulmuşlardır; bu da değişken dereceli hesabın karmaşık dinamik problemlerin açıklaması için etkili bir matematiksel çerçeve sağlamak için doğal bir aday olduğunu göstermektedir (Zhang, vd. 2013). Son zamanlarda, araştırmalar birçok fiziksel sürecin zaman veya mekanla değişen kesirli mertebeli özellikleri gösterdiğini bulmuştur. Kesirli hesaplamadaki düzen sürekliliği, kesirli operatörün mertebesinin bir değişken olarak hesaba katılmasına izin verir (Golbabai, vd. 2019). Çok sayıda araştırmacı ve matematikçi, kesirli türev ve integral operatörlerini, klasik emsallerine kıyasla gerçek dünya olaylarını tanımlamak ve modellemek için güçlü araçlar olarak sergilemiştir. Bellek özelliğini tasvir etmesi nedeniyle, kesirli hesaplama son yıllarda dikkate alınmıştır. Kesirli kısmi diferansiyel denklemler, mühendislik, kontrol teorisi, kimyasal fizik, biyoloji ve tıp dahil olmak üzere çok çeşitli alanlardaki olayları modellemek için uygulanmıştır (Sadri, vd.2021). Kesirli hareketli-hareketsiz taşınım-dağılım denklemi, bir sıvı veya gazda asılı parçacıkların rastgele hareketini karakterize etmek için bir matematiksel araç olarak bilinir, yani Browning hareketi. Bu nedenle, nehirlerde, yeraltı sularında ve okyanus akıntılarında çözünen taşınımı gibi kimya, fizik, mühendislik, yer ve okyanus bilimlerindeki birçok olgu için uygun açıklamalar sağlar (Esmaeelzade, vd. 2022). Mühendislik, fizik, kimya ve diğer bilimlerdeki birçok olgu, kesirli kalkülüsten elde edilen matematiksel araçlar, yani kesirli mertebeden türevler ve integraller teorisi kullanılarak modellenerek çok başarılı bir şekilde tanımlanabilir. Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler, son zamanlarda birçok fiziksel olgunun modellenmesinde değerli araçlar olduklarını kanıtlamışlardır (Kamran, vd. 2022). Kesirli hesaplama, tam sayı mertebelerinin geleneksel türevlerinin en önemli ve kullanışlı genellemelerinden biridir. Uzay ve zamanda dalgalanan birçok karmaşık sistem için, kesirli mertebeli kısmi diferansiyel denklemler,

klasik tam sayı mertebeli kısmi diferansiyel denklemlerden daha doğru ve gerçekçi bir tanım sunabilir. Kesirli hesaplama, yakın zamanda çeşitli bilimsel ve mühendislik alanlarında ortaya çıkabilen anormal davranışları taklit etmede yararlı olduğu kanıtlanmıştır (N. Abdi, vd. 2017). Depremin doğrusal olmayan davranışı, sürekli akışkanlar dinamiği, gözenekli ortamlar, hidroloji, bölgesel ölçeklerde kırık ortamlar, biyolojik dokulardaki karmaşık dinamikler, Fickian olmayan taşınım, radyoterapi kanser tedavilerinin optimizasyonu, Korona virüs hastalığının SIQ matematiksel modeli gibi birçok matematiksel model kesirli türevler kullanılarak geliştirilmiştir (M. Cui, 2014).

Mobil-hareketsiz taşınım-dağılım modelini çözmek için Zhang ve arkadaşları örtük Euler yaklaşımını önerdiler ve bunun koşulsuz olarak kararlı olduğunu kanıtladılar (Samko, vd. 1993). Kesirli türevler herhangi bir özel fonksiyon olabileceğinden, değişken mertebeli kesirli kısmi diferansiyel denklemler (FPDE'ler) önemli ölçüde ilgi çekmiştir. FPDE'ler, uzay ve zamana göre değişen bellek özelliklerinin analiz edilmesinde oldukça yardımcıdır. Aslında, bu özelliğinden dolayı, değişken mertebeli kesirli operatörler tarafından kullanılan matematiksel modeller daha fazla kesinliğe ve duyarlılığa sahiptir (Salehi, vd. 2018). Geniş bir fiziksel, dinamik ve biyolojik modeller ve karmaşık problemler sınıfında, sabit mertebeden kesirli denklem, problemlerin karakterizasyonunu tanımlayamaz. 1993 yılında, Samko ve Ross'un entelektüel merakı, klasik kesirli hesaplamanın genişletilmesine yol açtı (Ross, vd. 1993). Son yıllarda, birçok araştırmacı taşınım-dağılım mekanizmasının zamana veya mekana göre değişebilen kesirli mertebeden davranış gösterdiğini bulmuş ve değişken mertebeden hesabın karmaşık dinamik problemleri açıklamak için uygun bir matematiksel çerçeve sağlamak için doğal bir aday olduğunu öne sürmüştür (Zohra, vd. 2019). Tahmin yarışmaları, yüksek performanslı yöntemleri belirleme amacıyla çok sayıda zaman serisinin tahminine doğru ilerlemede önemli bir rol oynamıştır. Görüntü işleme açısından , bu sorunu ele almak için birçok model geliştirilmiştir. Ancak bunların çoğu kesirli düzene dayanmaktadır . Gürültü gidermeye ulaştıklarında, zohra ve maouni görüntü işlemede kesirli düzen kısmi diferansiyel denklemlerin yeni uygulamalarını önerdiler. Dahası, kesirli düzen sistemlerinin tamsayı düzeninden daha iyi sonuçlar ürettiğini gösterdiler (Tajadodi, H. 2022). Mühendislik ve fiziksel sistemlerde kullanılmasının yanı sıra, ekonomi ve risk teorisi dahil olmak üzere birçok başka sosyal bilimde kullanılırlar. Diferansiyel denklemler,

dinamik sistemleri modellemek için ideal araçlardır. Öte yandan, parabolik denklemin özel bir türü olan mobil-hareketsiz taşınım-dağılım modeli, ısı yayılımı , kirleticilerin dönüşümü, yeraltı suyu, okyanus akustik yayılımı ve akarsu ve nehirlerde çözünen taşınımı gibi karmaşık sistemleri modellemek için sıklıkla ortaya çıkan kısmi bir diferansiyel denklemdir (Tajadodi, H. 2005). Theta yöntemi, basitliği ve şaşırtıcı derecede iyi performansı ile araştırmacıların dikkatini çekmiştir.(Franses, vd. 2005).

3. GEREÇ ve YÖNTEM

SONLU FARK ŞEMASININ OLUŞTURULMASI VE KARARLILIĞI

3.1. Theta Sonlu Fark Yöntemi

$x_n = nh$, $t_k = kt$ olsun; burada h ve T sırasıyla uzaysal ve zamansal adım büyüklüklerini göstermektedir. Ayrıca

$$v_n^k \approx v(t_k, x_n) \quad (71)$$

olarak tanımlansın. Caputo türevi, L1-tip yaklaşım kullanılarak aşağıdaki şekilde yaklaşıklandırılır:

olarak verilmektedir.

Uzay değişkeninde merkezi farklar ve zamansal ayrıklaştırmada theta-ağırlıklı yaklaşım uygulanarak aşağıdaki şema elde edilir:

Düzenleme yapıldığında aşağıdaki üç köşegenli lineer sistem elde edilir:

$$av_{n-1}^{k+1} + bv_n^{k+1} + cv_{n+1}^{k+1} = \text{RHS}_n^k, \quad (72)$$

burada

$$a = -\frac{\beta_3(1-\theta)}{h^2} - \frac{\beta_4\theta}{2h}, \quad (73)$$

$$b = \frac{\beta_1}{2\tau} + \frac{\beta_2\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad (74)$$

$$c = -\frac{\beta_3(1-\theta)}{h^2} + \frac{\beta_4\theta}{2h} \quad (75)$$

dır.

3.1.1. Kararlılık Analizi

Theorem 3.1. (Açık Katsayılı Von Neumann Kararlılığı) $f=0$ olmak üzere sonlu fark şemasını ele edilir

. Bu durumda, koşulu altında şema Von Neumann anlamında kararlıdır.

Kanıt. Aşağıdaki Fourier mod çözümünü varsayalım:

$$v_n^k = \xi^k e^{in\phi}, \quad \phi \in [0, \pi]. \quad (76)$$

Her iki tarafın modülü alınırsa,

Üçgen eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki tahminler elde edilir:

$$|(1 - \theta)\xi + \theta| \leq (1 - \theta)|\xi| + \theta, \quad (77)$$

$e < 1$ varsayımı altında,

$$|(1 - \theta)\xi + \theta| \leq 1, \quad |\theta\xi + (1 - \theta)| \leq 1 \quad (78)$$

$$|\theta\xi + (1 - \theta)| \leq \theta|\xi| + (1 - \theta). \quad (79)$$

sonucu elde edilir.

Dolayısıyla,

$$\text{RHS} \leq \frac{4\beta_3}{h^2} \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (80)$$

Şimdi her bir terim ayrı ayrı incelenir:

1. Difüzyon terimi: $B_3 > 0$ olduğundan,

$$-\frac{4\beta_3}{h^2} \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (81)$$

terimi negatif veya sıfırdır ve nümerik sönümleme sağlar.

1. Taşınım terimi:

$$-\frac{\beta_4}{h}i \sin(\phi) \quad (82)$$

ifadesi tamamen sanaldır ve e büyümesine katkıda bulunmaz; yalnızca fazı etkiler.

1. Kesirli terim: konvolüsyon toplamı

$$\sum_{i=0}^k \omega_i^{(\alpha)} (\xi^{-i+1} - \xi^{-i}) \geq 0 \quad (83)$$

olup hafıza etkilerinden kaynaklanan ek sönümleme sağlar.

1. Zaman türevi terimi: $B < 0$, klasik zaman ayrıklaştırmasının kararsızlık oluşturmamasını garanti eder.

Tüm tahminler birleştirildiğinde, sağ tarafın sınırlı olduğu ve Fourier modunu büyütmediği görülmektedir. Dolayısıyla, örtük ağırlık baskın olduğu sürece, yani

$$\theta \geq \frac{1}{2}, \quad (84)$$

koşulu altında e büyümesi meydana gelmez.

Böylece,

$$|\xi| \leq 1 \quad (85)$$

elde edilir ve şema koşulsuz kararlıdır.

Theorem 3.2. (Yakınsaklık ve Hata Tahmini) $f=0$ olmak üzere, (4.2) ile verilen theta-sonlu fark şeması için, gerçek çözüm $v(t,x)$ ve nümerik çözüm v_k arasında hata

$$e_n^k = v(t_k, x_n) - v_n^k \quad (86)$$

tanımlansın, $\theta < 0.5$ olmak üzere, şema kararlı ve tutarlı ise aşağıdaki hata tahmini sağlanır:

$$\|e^k\|_{\infty} \leq C (\tau^{2-\alpha} + h^2), \quad (87)$$

burada $C > 0$ sabiti T 'den bağımsız bir sabittir. Dolayısıyla yöntem

$$\mathcal{O}(\tau^{2-\alpha} + h^2) \quad (88)$$

yakınsaklık hızına sahiptir.

Kanıt: İspat üç temel adımda yapılır: tutarlılık, kararlılık ve hata denklemi analizi.

1. Hata denklemi Tam çözüm $v(t, x)$ şemada yerine yazıldığında bir artık terim oluşur:

$$\mathcal{T}_n^k = \mathcal{O}(\tau^{2-\alpha} + h^2). \quad (89)$$

Nümerik çözüm çıkarıldığında hata için:

$$Le_n^k = \mathcal{T}_n^k \quad (90)$$

şeklinde bir hata denklemi elde edilir. Burada L , şemanın ayrık operatörüdür.

1. Tutarlılık (Consistency) Caputo türevi için L1 yaklaşımı kullanıldığında

elde edilir. Uzak türevleri için merkezi fark kullanıldığından:

$$\|e^k\| \leq C(\tau^{2-\alpha} + h^2). \quad (91)$$

Dolayısıyla şema yerel kesme hatası:

$$\mathcal{T}_n^k = \mathcal{O}(\tau^{2-\alpha} + h^2). \quad (92)$$

1. Kararlılık kullanımı Önceki teoremden $\theta < 0.5$ için şema Von Neumann anlamında kararlıdır. Bu nedenle ayrık operatör L sınırlıdır:

$$\|L^{-1}\| \leq C. \quad (93)$$

1. Hata tahmini Hata denklemi üzerinden:

$$e_n^k = L^{-1} \mathcal{T}_n^k \quad (94)$$

alınır. Norm alınırsa:

$$\|e^k\|_\infty \leq \|L^{-1}\| \|\mathcal{T}^k\|_\infty. \quad (95)$$

Kararlılık sayesinde:

$$\|e^k\|_\infty \leq C(\tau^{2-\alpha} + h^2). \quad (96)$$

4. BULGULAR

4.1. Nümerik Sonuçlar

$$v(t, x) = T(t) \sin x, \quad T(t) = t^3 - 1 \quad (97)$$

Maksimum hata aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır:

$$E = \max_{n,k} |v_n^k - v(t_k, x_n)|. \quad (98)$$

Nümerik deneyler, uzayda ikinci mertebe doğruluk ve zamanda yaklaşık olarak 2-a mertebesinde yakınsama göstermektedir. Bu sonuçlar teorik tahminlerle uyumludur. Gözlenen yakınsama oranı birinci mertebenin biraz altındadır. Bu davranış, özellikle çözümün başlangıçta zayıf düzgünlüğe sahip olduğu durumlarda, kesirli zaman türevleri için tipiktir. değerinin artırılması yakınsama davranışını daha da iyileştirmektedir.

Çizelge 4.1. Parametreleri kullanılmıştır.

N	L_{∞} Hatası	Yakınsama Mertebesi
20	8.462832×10^{-2}	–
40	5.152836×10^{-2}	0.7158
80	4.131341×10^{-2}	0.3188

Çizelge 4.1, $a=0.75$ ve $\theta=0.5$ için elde edilen nümerik çözüm sunulmuştur. Modelde $B=110$, $B_2=0.01$, parametreleri kullanılmıştır. Sonuçlar, kesirli mertebenin çözüm davranışı üzerinde belirgin bir etkiye sahip olduğunu göstermektedir.

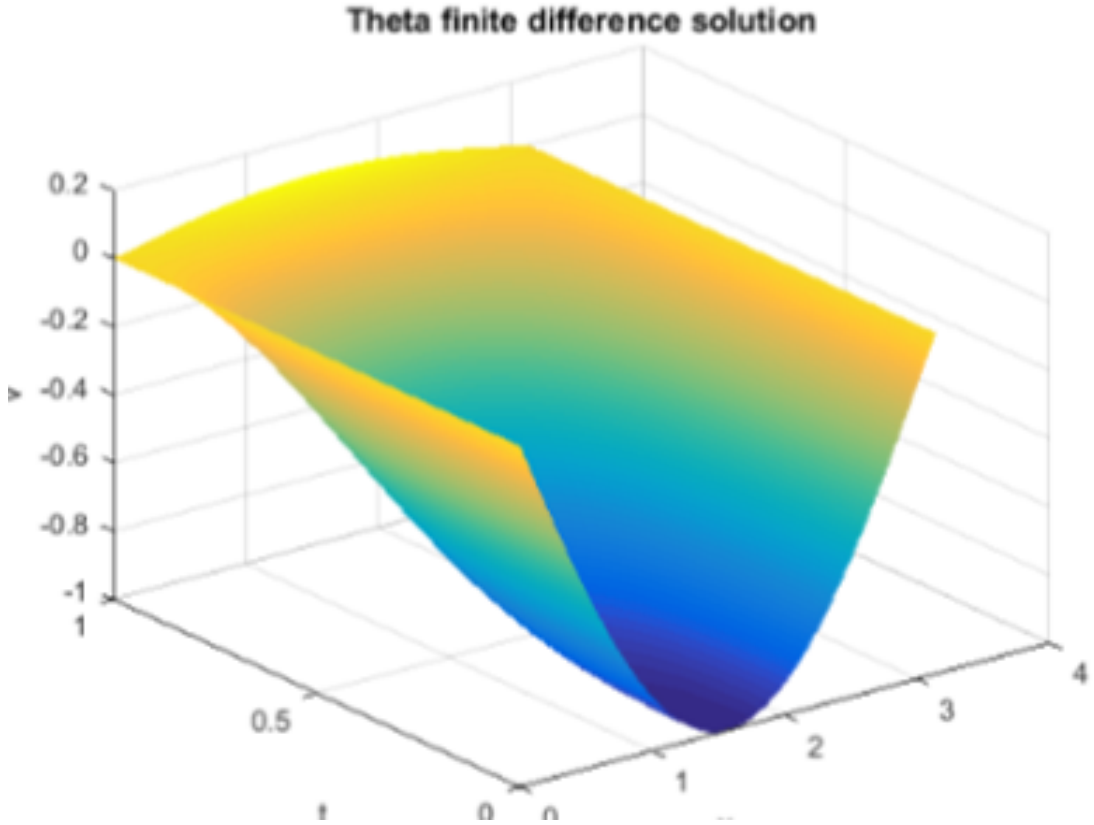
Çizelge 4.2. $\alpha=0.57$, $\theta=0.5$, $\beta_1=\beta_2=\beta_3=0.01$ parametreleri kullanılmıştır.

α	L_{∞} Hatası
0.25	7.881227×10^{-2}
0.50	8.077353×10^{-2}
0.75	8.462832×10^{-2}
1.00	7.829808×10^{-2}

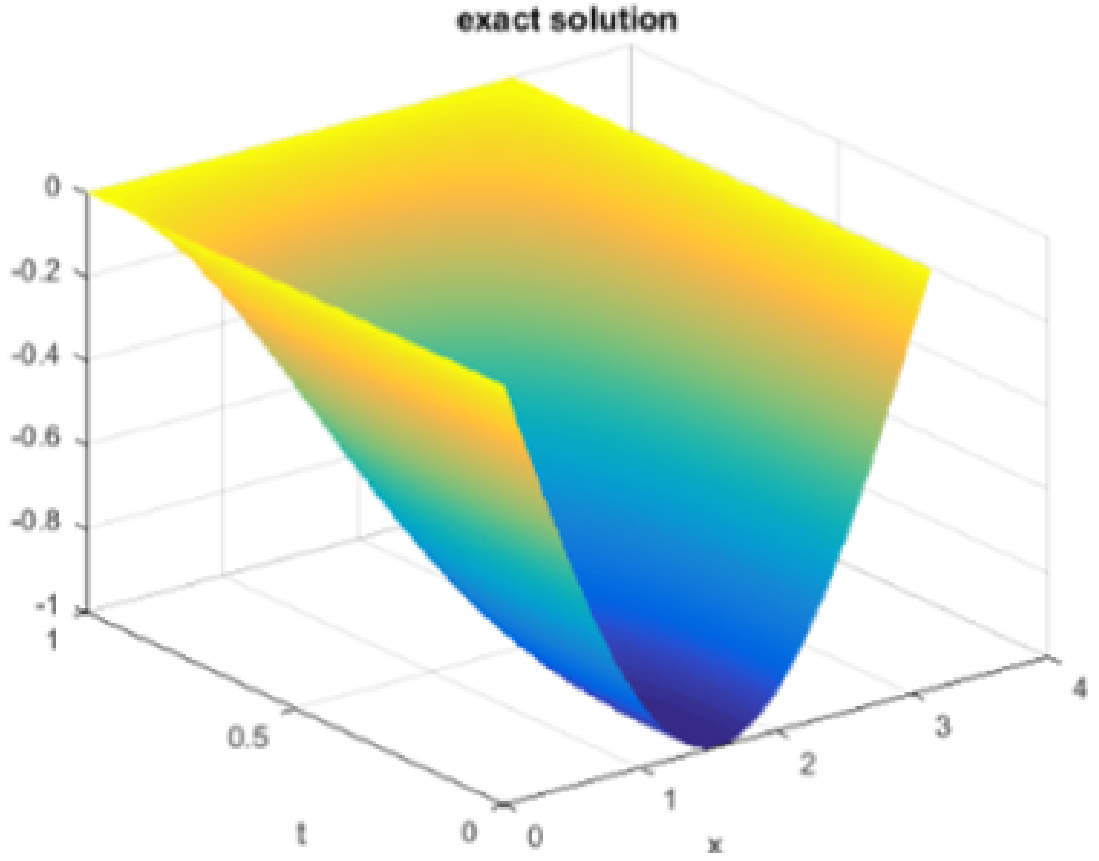
Çizelge 4.2, $a=0.75$ ve $\theta=0.5$ için elde edilen nümerik çözüm sunulmuştur.

Modelde $B=110$, $B_2=0.01$ parametreleri kullanılmıştır. Çözüm bölgesi olarak alınmış olup, sonuçlar bu aralıkta değerlendirilmiştir.

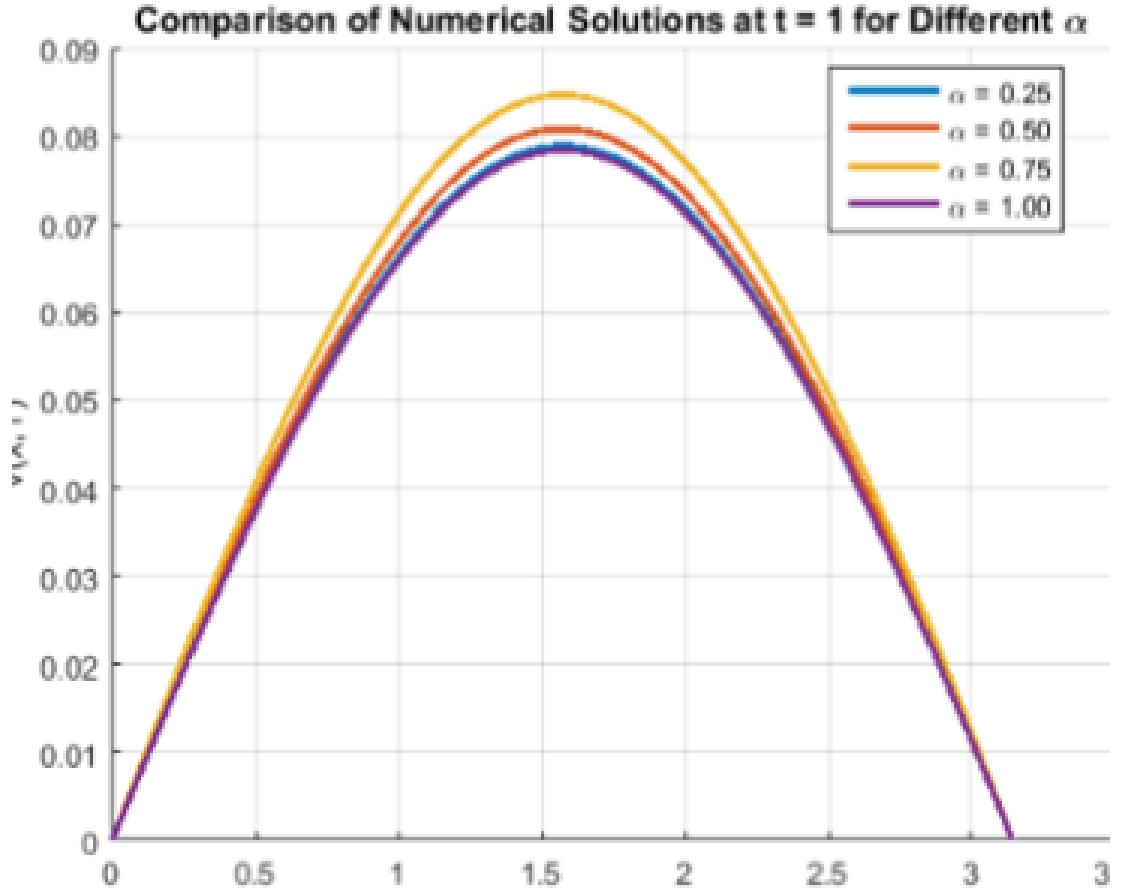
Çizelge 4.3, $a=0.75$ ve $\theta=0.5$ için elde edilen nümerik çözüm sunulmuştur. Modelde $B=110$, $B_2=0.01$ için nümerik çözümler karşılaştırılmıştır. Modelde parametreleri kullanılmıştır. Çözüm bölgesi olarak alınmış olup, farklı a değerlerinin çözüm üzerindeki etkisi incelenmiştir.



Şekil 4.1. $\alpha=0.57$, $\theta=0.5$, $\beta_1=\beta_2=\beta_3=0.01$ parametreleri kullanılmıştır parametreleri kullanılmıştır.Çözüm bölgesi $x, 0,1$ gider olarak alınmıştır.



Şekil 4.2. $\alpha=0.57$, $\theta=0.5$, $\beta_1=\beta_2=\beta_3=0.01$ parametreleri kullanılmıştır parametreleri kullanılmıştırÇözüm bölgesi x , 0,1 gider ve $T=1$ olarak alınmıştır. ve olarak alınmıştır.



Şekil 4.3. $\alpha=0.25, 0.5, 0.75, , \theta=0.5, \beta_1=\beta_2=\beta_3=0.01$ parametreleri kullanılmıştır parametreleri kullanılmıştırÇözüm bölgesi $x, 0,1$ gider ve $T=1$ olarak alınmıştır. ve olarak alınmıştır.

5. TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında incelenen Caputo kesirli türevine dayalı mobil–immobil adveksiyon–difüzyon modeli, klasik tam sayı mertebeli taşınım modellerine göre daha genel ve fiziksel olarak daha gerçekçi bir yapı sunmaktadır. Özellikle hafıza ve geçmişe bağımlılık etkilerini içermesi nedeniyle kesirli diferansiyel denklemler; gözenekli ortam akışları, kirletici taşınımı, biyolojik yayılım ve anomal difüzyon gibi süreçlerin modellenmesinde önemli avantajlar sağlamaktadır. Bu bağlamda elde edilen sonuçlar, kesirli mertebeli modellerin fiziksel süreçlerin davranışını daha başarılı şekilde temsil edebildiğini göstermektedir.

Çalışmada geliştirilen theta-sonlu fark yöntemi, hem kararlılık hem de uygulanabilirlik açısından başarılı sonuçlar vermiştir. Özellikle durumunda yöntemin koşulsuz kararlı olması, zamansal adım büyüklüğü üzerinde ciddi bir kısıtlama gerektirmemesi açısından önemli bir avantaj sağlamaktadır. Bu durum Crank–Nicolson tipi yöntemlerin kesirli diferansiyel denklemlerde de etkin şekilde kullanılabileceğini göstermektedir.

Nümerik sonuçlar incelendiğinde, uzay değişkeninde yaklaşık ikinci mertebe doğruluk elde edildiği görülmektedir. Zaman değişkeninde ise teorik olarak beklenen yaklaşık 2-theta mertebesinde yakınsama davranışı gözlemlenmiştir. Bu sonuç, Caputo kesirli türevinin hafıza etkisinin nümerik doğruluğu doğrudan etkilediğini göstermektedir. Özellikle theta değeri küçüldükçe geçmiş zaman seviyelerinin çözüm üzerindeki etkisi artmakta ve sistem daha yayılmış bir davranış sergilemektedir.

Çalışmada elde edilen sonuçlar, literatürde yer alan kesirli adveksiyon–difüzyon modelleriyle uyum göstermektedir. Özellikle anomal difüzyon süreçlerinde klasik modellerin yetersiz kaldığı durumlarda kesirli modellerin daha başarılı sonuçlar verdiği bilinmektedir. Bu tezde elde edilen nümerik deneyler de benzer şekilde, kesirli mertebenin sistem dinamiğini önemli ölçüde değiştirdiğini ortaya koymaktadır. $\alpha < 1$ durumunda taşınımın yavaşlaması ve gecikmeli yayılım davranışının ortaya çıkması, modelin fiziksel süreçleri daha gerçekçi biçimde temsil ettiğini göstermektedir.

Bununla birlikte, kesirli diferansiyel denklemlerin en önemli dezavantajlarından biri hesaplama maliyetidir. Caputo kesirli türevinin zamansal hafıza özelliği nedeniyle her yeni

zaman adımımda önceki tüm zaman seviyelerinin hesaplamaya dahil edilmesi gerekmektedir. Bu durum özellikle uzun zaman aralıklarında yüksek bellek ihtiyacı ve işlem maliyetine yol açmaktadır. Dolayısıyla geliştirilen yöntem başarılı sonuçlar vermesine rağmen, büyük ölçekli problemlerde daha hızlı algoritmalara ihtiyaç duyulmaktadır.

Ayrıca bu çalışmada doğrusal bir model ele alınmıştır. Gerçek fiziksel sistemlerde ise çoğu zaman doğrusal olmayan etkiler bulunmaktadır. Bu nedenle doğrusal olmayan kesirli mobil–immobil taşınım modellerinin incelenmesi gelecekte önemli bir araştırma alanı olabilir. Bunun yanında iki ve üç boyutlu problemlerin ele alınması, değişken katsayılı modellerin incelenmesi ve uzay-zaman kesirli türevlerin birlikte kullanıldığı genelleştirilmiş sistemlerin araştırılması da literatüre önemli katkılar sağlayacaktır.

Son yıllarda yapay zekâ ve veri tabanlı yöntemlerin diferansiyel denklemlerin çözümünde yaygınlaşması, kesirli diferansiyel denklemler için de yeni araştırma alanları ortaya çıkarmıştır. Özellikle yapay sinir ağları, fizik bilgilendirmeli sinir ağları (PINNs), spektral yöntemler ve hibrit nümerik tekniklerin kesirli taşınım problemlerine uygulanması daha yüksek doğruluk ve daha düşük hesaplama maliyeti sağlayabilir. Bu nedenle gelecekte yapılacak çalışmaların klasik nümerik yöntemlerle modern veri tabanlı yöntemleri birleştiren hibrit yaklaşımlar üzerine yoğunlaşması önemli görülmektedir.

Genel olarak değerlendirildiğinde, bu tezde geliştirilen theta-sonlu fark yöntemi Caputo kesirli mobil–immobil adveksiyon–difüzyon denkleminin çözümünde başarılı, kararlı ve güvenilir sonuçlar üretmiştir. Elde edilen teorik ve nümerik bulgular, kesirli diferansiyel denklemlerin fiziksel süreçlerin modellenmesinde güçlü bir araç olduğunu ve geliştirilen yöntemin bu tür problemlerin çözümünde etkin şekilde kullanılabileceğini göstermektedir.

6. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, Caputo kesirli türevine dayanan mobil–immobil adveksiyon–difüzyon denkleminin analitik ve nümerik çözümleri ayrıntılı olarak incelenmiştir. İlk olarak model denkleminin matematiksel yapısı ele alınmış, ardından Laplace dönüşümü yardımıyla problemin analitik çözümü elde edilmiştir. Çözüm sürecinde Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşüm özelliklerinden yararlanılmış ve elde edilen çözümün başlangıç ve sınır koşullarını sağladığı gösterilmiştir.

Tezin temel katkılarından biri, kesirli mobil–immobil taşınım modeli için uygun bir theta-sonlu fark yönteminin geliştirilmesidir. Bu amaçla zaman kesirli türev için L1-tip ayrıklaştırma uygulanmış, uzay değişkeninde merkezi fark yaklaşımı kullanılmış ve zamansal ayrıklaştırma theta-ağırlıklı yapı ile gerçekleştirilmiştir. Böylece elde edilen ayrık sistem üç köşegenli lineer cebirsel denklem sistemine indirgenmiş ve yöntemin hesaplama açısından uygulanabilir olduğu görülmüştür.

Kararlılık analizi kapsamında Von Neumann yöntemi kullanılarak Fourier analizi gerçekleştirilmiş ve $\theta < 0.5$ koşulu altında geliştirilen şemanın koşulsuz kararlı olduğu gösterilmiştir. Ayrıca difüzyon teriminin nümerik sönümleme sağladığı, kesirli hafıza teriminin çözüm kararlılığına olumlu katkı yaptığı ve adveksiyon teriminin esas olarak faz değişimine neden olduğu belirlenmiştir.

Nümerik deneyler sonucunda elde edilen bulgular teorik analizlerle uyumlu bulunmuştur. Uzay değişkeninde yaklaşık ikinci mertebe doğruluk elde edilirken, zaman değişkeninde ise kesirli türevin doğasından kaynaklanan hafıza etkileri nedeniyle yaklaşık 2-alpha mertebesinde yakınsama gözlemlenmiştir. Ağ inceltildikçe maksimum hata değerlerinin azaldığı görülmüş ve yöntemin yakınsaklığı doğrulanmıştır.

Ayrıca farklı alpha için yapılan deneyler, kesirli mertebenin çözüm davranışı üzerinde önemli etkiler oluşturduğunu göstermiştir. Özellikle $\alpha < 1$ durumunda klasik difüzyon modellerine göre daha yavaş taşınım ve gecikmeli yayılım davranışı ortaya çıkmaktadır. Bu sonuçlar, modelin anomal difüzyon süreçlerini başarılı bir şekilde temsil ettiğini göstermektedir. Dolayısıyla önerilen model; yeraltı suyu taşınımı, gözenekli ortam

akışları, kirlenici yayılımı, biyolojik taşınım süreçleri ve viskoelastik sistemler gibi hafıza etkisinin önemli olduğu fiziksel problemlerin modellenmesinde kullanılabilecek uygun bir matematiksel çerçeve sunmaktadır.

Bu çalışma sonucunda, Caputo kesirli türevine dayalı mobil–immobil modellerin klasik tam sayı mertebeli modellere göre fiziksel süreçleri daha gerçekçi biçimde temsil ettiği görülmüştür. Özellikle uzun süreli tutulum, gecikmeli salınım ve Fick tipi olmayan taşınım davranışları kesirli modeller aracılığıyla daha başarılı şekilde açıklanabilmektedir.

Bununla birlikte, kesirli türevlerin hafıza yapısından dolayı hesaplama maliyetleri klasik modellere göre daha yüksektir. Özellikle uzun zaman aralıklarında geçmiş zaman seviyelerinin tamamının hesaplamaya dahil edilmesi yüksek bellek ihtiyacı ve işlem maliyeti oluşturmaktadır.

7. ÖNERİLER

Gelecekte yapılacak çalışmalarda hızlı konvolüsyon algoritmaları, adaptif zaman adımlama teknikleri ve paralel hesaplama yöntemleri kullanılarak hesaplama maliyetleri azaltılabilir. Ayrıca bu tezde doğrusal bir model ele alınmıştır. İlerleyen çalışmalarda doğrusal olmayan kesirli mobil–immobil taşınım modelleri, değişken katsayılı problemler, iki ve üç boyutlu sistemler ile uzay-zaman kesirli türev içeren genelleştirilmiş modeller incelenebilir.

Bunun yanında yapay sinir ağları, spektral yöntemler, dalgacık tabanlı yöntemler ve hibrit nümerik tekniklerin kesirli diferansiyel denklemlere uygulanması önemli araştırma alanları arasında yer almaktadır. Özellikle veri tabanlı ve yapay zekâ destekli yöntemlerin kesirli modeller ile birlikte kullanılması, gelecekte daha hızlı ve yüksek doğruluklu çözümler elde edilmesine katkı sağlayabilir.

Sonuç olarak, bu tezde geliştirilen theta-sonlu fark yöntemi; kararlı, yakınsak ve uygulanabilir bir yöntem olarak Caputo kesirli mobil–immobil adveksiyon–difüzyon modelinin çözümünde başarılı sonuçlar vermiştir. Elde edilen teorik ve nümerik bulgular, önerilen yöntemin kesirli mertebeli taşınım problemlerinin çözümünde güvenilir bir yaklaşım olduğunu göstermektedir.

KAYNAKLAR

- Abdi, N., Aminikhah, H., & Sheikhan, A. H. R. (2022). High-order compact finite difference schemes for the time-fractional Black–Scholes model governing European options. *Journal details as provided*, 259.
- Abirami, A., Prakash, P., & Thangavel, K. (2018). Fractional diffusion equation-based image denoising model using CN–GL scheme. *International Journal of Computer Mathematics*, 95(6–7), 1222–1239. <https://doi.org/10.1080/00207160.2017.1401707>
- Aghdam, Y. E., & Farnam, B. (2022). Solute transport in porous media modeled by a fractional mobile–immobile advection–dispersion system. *Mathematics and Computational Sciences*, 3(3), 1–10.
- Che, J., Guan, Q., & Wang, X. (2013). Image denoising based on adaptive fractional partial differential equations. *Proceedings of the 6th International Congress on Image and Signal Processing (CISP)*, 288–292.
- Chen, Z., Qian, J., Zhan, H., Chen, L., & Luo, S. (2011). Mobile–immobile model of solute transport through porous and fractured media. *IAHS-AISH Publication*, 341, 154–158. <https://doi.org/10.1109/CISP.2013.6744004>
- Cui, M. (2014). A high-order compact exponential scheme for the fractional convection–diffusion equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 255, 404–416. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2013.06.001>
- Golbabai, A., Nikan, O., & Nikazad, T. (2019). Numerical investigation of the time fractional mobile–immobile advection–dispersion model arising from solute transport in porous media. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 5, 1–22.
- Gouasnouane, O., Moussaid, N., & Boujena, S. (2021). A nonlinear fractional partial differential equation for image denoising. *Proceedings of the Third International Conference on Transportation and Smart Technologies*, 59–64. <https://doi.org/10.1109/TST52996.2021.00017>
- Ibrahim, R. W., H. A. Jalab, Karim, F. K., E. Alabdulkreem & Ayub, M. N. (2022). A medical image enhancement based on generalized class of fractional partial differential equations. *Quantitative Imaging in Medicine and Surgery*, 12(1), 172–183. <https://doi.org/10.21037/qims-21-15>
- Kamran, S., Khan, S., Alhazmi, S. E., Alotaibi, F. M., Ferrara, M., & Ahmadian, A. (2022). Numerical approach for fractional mobile–immobile advection–dispersion models in porous media. *Fractals and Fractional*, 6(8), 445.
- Köksal, M. E. (2019). Time and frequency responses of non-integer order RLC circuits. *AIMS Mathematics*, 4(1), 64–78. <https://doi.org/10.3934/Math.2019.1.64>
- Liu, H., Zheng, X., Chen, C., & Wang, H. (2021). A characteristic finite element method for the time-fractional mobile/immobile advection diffusion model. *Advances in*

- Computational Mathematics*, 47(3), 1–19. <https://doi.org/10.1007/s10444-021-09867-6>
- Misra, D. K. (2012). *Radio-Frequency and Microwave Communication Circuits: Analysis and Design*. John Wiley & Sons.
- Modanli, M., & Akgül, A. (2017). Numerical solution of fractional telegraph differential equations by theta-method. *The European Physical Journal Special Topics*, 226(16), 3693–3703.
- Pu, Y., Siarry, P., Zhou, J., Liu, Y., Zhang, N., & Huang, G. (2014). Fractional partial differential equation denoising models for texture image. *Science China Information Sciences*, 57(7), 1–19. <https://doi.org/10.1007/s11432-014-5112-x>
- Ray, S. S. (2022). A novel wavelets operational matrix method for the time variable-order fractional mobile–immobile advection–dispersion model. *Engineering Computations*, 38(4), 2629–2650. <https://doi.org/10.1007/s00366-021-01405-8>
- Sadri, K., & Aminikhah, H. (2021). An efficient numerical method for solving a class of variable-order fractional mobile–immobile advection–dispersion equations and its convergence analysis. *Chaos, Solitons & Fractals*, 146, 110896.
- Salehi, F., Saeedi, H., & Moghadam, M. M. (2018). A Hahn computational operational method for variable order fractional mobile–immobile advection–dispersion equation. *Mathematical Sciences*, 12, 91–101.
- Samko, S. G., & Ross, B. (1993). Integration and differentiation to a variable fractional order. *Integral Transforms and Special Functions*, 1(4), 277–300.
- Sun, L., Qiu, H., Wu, C., Niu, J., & Hu, B. X. (2020). A review of applications of fractional advection–dispersion equations for anomalous solute transport in surface and subsurface water. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Water*, 7(4), e1448.
- Tajadodi, H. (2022). Variable-order Mittag–Leffler fractional operator and application to mobile–immobile advection–dispersion model. *Alexandria Engineering Journal*, 61(5), 3719–3728.
- Zhang, H., Jiang, X., & Liu, F. (2021). Error analysis of nonlinear time fractional mobile/immobile advection-diffusion equation with weakly singular solutions. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 24(1), 202–224. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2021.09.007>
- Zhang, H., Liu, F., Phanikumar, M. S., & Meerschaert, M. M. (2013). A novel numerical method for the time variable fractional order mobile–immobile advection–dispersion model. *Computers & Mathematics with Applications*, 66(5), 693–701. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2013.01.031>
- Zohra, Z. F., & Maouni, M. (2019). Image processing by a fractional partial differential equation. *International Journal of Computer Science & Communication*, 7, 13–16.