T.C.
Harran Üniversitesi
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİLMİŞ MAKSİMUM ÇARPIM OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

ALA ALAHMAD ALDHEFEERY

MATEMATİK

Şanlıurfa
2024

T.C.
Harran Üniversitesi
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİLMİŞ MAKSİMUM ÇARPIM OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

ALA ALAHMAD ALDHEFEERY

MATEMATİK
Tez Danışmanı: SEVİLAY KIRCI SERENBAY

Şanlıurfa
2024

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KESİLMİŞ MAKSİMUM ÇARPIM OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Ala ALAHMAD ALDHEFEERY

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Sevilay KIRCI SERENBAY
Yıl: 2024, sayfa: 37

Bu çalışmanın amacı maksimum çarpım tipi kesilmiş doğrusal olmayan Bleimann-Butzer-Hahn operatörünü modifiye ederek yeni bir operatör elde etmektir. Bu operatörün yaklaşım özelliklerini ve derecesini hesaplamaktır.

ANAHTAR KELİMELER: Lineer operatörler, Lineer olmayan operatörler, Maksimum çarpım tipi operatörler, Bleimann-Butzer-Hahn operatörler.

ABSTRACT

MSc Thesis

APPROXIMATION PROPERTIES OF TRUNCATED MAXIMUM PRODUCT OPERATORS

Ala ALAHMAD ALDHEFEERY

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Sevilay KIRCI SERENBAY
Year: 2024, page: 37

The aim of this study is to obtain a new operator by modifying the maximum product type truncated nonlinear Bleimann-Butzer-Hahn operator. This is to calculate the approximation properties and degree of the operator.

KEYWORDS: Linear operators, Non-linear operators, Maksimum-product type operators, Bleimann-Butzer-Hahn operators.

TEŞEKKÜR

İlk olarak, bu tezi yazarken her aşamada bilgi birikimi, tavsiyeleri, deneyimleri ve sabrıyla yanımda olan ve bana rehberlik eden kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Sevilay KIRCI SERENBAY'a teşekkür ederim.

Çalışmamın ve hayatımın her aşamasında bana her zaman destek olan annem Ravda HACBEDRABN ve babam Muhammed Emin HACBEDRAN'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Bu çalışmayı, (BİDEB) 2210-Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı ile destekleyen TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Son ve en özel teşekkürümü motivasyonuyla beni destekleyen sevgili eşim Saadeddin ALAHMAD ALDHEFEERY'e sunarım.

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

B_m	Bernstein operatörü
$g_m(t) \rightrightarrows g(t)$	Bir $g_m(t)$ fonksiyon dizisinin $g(t)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$C[b,c]$	Bir $[b,c]$ aralığında sürekli olan fonksiyonların kümesi
U_m	Bleimann-Butzer-Hahn operatörü
C_m	Chlodowsky operatörü
V_m	Çekirdek operatör
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
(g_m)	Fonksiyon dizisi
K_m	Kantorovich operatörü
$C_m^{(Z)}$	Kesilmiş maksimum çarpım tipi Bernstein-Chlodowsky operatörü
$B_m^{(Z)}$	Kesilmiş maksimum çarpım tipi Bernstein operatörü
$H_m^{(Z)}$	Kesilmiş maksimum çarpım tipi Bleimann-Butzer-Hahn operatörü
$R_m^{(Z)}$	Kesilmiş maksimum çarpım tipi genelleştirilmiş Bleimann-Butzer-Hahn operatörü
$A_m^{(Z)}$	Kesilmiş maksimum çarpım tipi modifiye Bleimann-Butzer-Hahn operatörü
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$R(L)$	L operatörün değerler kümesi
$D(L)$	L operatörün tanım kümesi
$\bigvee$	Maksimum sembolü
$\Vert . \Vert$	Norm
L_m	Operatör dizisi
P_m	Polinomlar dizisi
(b_m), (c_m)	Pozitif reel sayıların birer dizisi
$\mathbb{R}_0^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
T	Reel sayıların sınırlı veya sınırsız bir alt aralığı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
S_m	Szasz-Mirakyan operatörü
$\omega_1(g,\delta)_T$	T aralığı üzerinde g fonksiyonun süreklilik modülü
$CB_+(T)$	T den $\mathbb{R}^+$ ya sürekli ve sınırlı fonksiyon uzayı
$\sum$	Toplam sembolü

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi 19. yüzyılda ortaya çıkmıştır ve bu yüzyıldan günümüze kadar dünyadaki birçok matematikçi tarafından araştırılan matematiksel analizin önemli araştırma alanlarından biridir. Sadece matematikte değil, temel bilimler ve mühendislik bilimleri başta olmak üzere, diğer alanlardaki birçok bilimsel probleme ışık tutması, yaklaşım teorisinin günden güne öneminin artmasına neden olmuştur.

Örnek olarak yaklaşım teorisi; mühendislikte ve fizikte veri gösterimi, termografik görüntüleme ve sinyal işleme gibi birçok farklı alanda kullanılmaktadır. Yaklaşım teorisinin temel amacı, ele alınan herhangi bir fonksiyonun daha iyi özelliklere sahip başka fonksiyonlar yardımıyla ifade edilmesidir.

Korovkin tipli yaklaşım teorisinde herhangi bir sürekli fonksiyona, lineer ve pozitif bir operatör dizileri yardımıyla düzgün yakınsaması incelenir ve bu fonksiyona yaklaşım hızı da süreklilik modülü ile hesaplanır (Korovkin, 1953).

Bütün yaklaşım operatörleri lineer olmadığından son yıllarda doğrusal operatör dizilerinde toplama işlemi yerine maksimum alma işlemi kullanılarak maksimum-çarpım tipi yaklaşım operatörleri tanımlanıp yaklaşım hızı incelenmiştir.

Bu tezde lineer olmayan pozitif bazı operatörlerin yaklaşımı verilmektedir.

Tezin ilk bölümü giriş bölümüdür.

İkinci bölümde ise lineer pozitif ve lineer olmayan yaklaşım operatörleri için gerekli tanım, lemma ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise birkaç kesilmiş maksimum çarpım tipi operatörlerin tanımı ve yaklaşım hızı verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise kesilmiş maksimum çarpım tipi modifiye Bleimann-Butzer-Hahn operatörü tanımlayıp yardımcı lemmalar ve süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı hesaplanmıştır.

Beşinci bölüm sonuç ve öneriler bölümüdür.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

1885 yılında alman matematikçi K.Weierstrass, $[b,c]$ kompakt aralığında düzgün sürekli her fonksiyona $[b,c]$ aralığında düzgün olarak yakınsayan bir $P_m(t)$ polinomlar dizisinin varlığını ispatlamıştır. Açık olarak ifade edilirse

$g \in C\,[b,c]$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere, her $\epsilon > 0$ sayısı ve her $t \in [b,c]$ için öyle bir $P_m(t)$ polinomu vardır ki

$$|g(t) - p_m(t)| < \epsilon \tag{2.1}$$

sağlanır (Weierstrass, 1885).

Daha sonra bazı matematikçiler yukarıda tanımlı polinomlar dizisi üzerinde çalışmalar gerçekleştirmiştir.

1905 yılında E.Borel, sürekli fonksiyonların polinomlarla yaklaşımı incelerken polinomu $\sum\limits_{v=0}^{m} P_{m,v}(t) g(\frac{v}{m})$ formunda alıp (2.1) deki eşitsizliği ispatlamıştır.

1912 yılında da matematikçi S. N. Bernstein, Borel'in düşüncesinden yola çıkarak $P_{m,v}(t)$ fonksiyonu $P_{m,v}(t) = \binom{m}{v} t^v (1-t)^{m-v}$ olarak almış ve $g \in C\,[0,1]$ olmak üzere,

$$B_m(g)(t) = \sum_{v=0}^{m} P_{m,v}(t) g(\frac{v}{m})$$

şeklinde bir polinom dizisi tanımlamıştır. Bernstein bu polinom dizisini kullanarak keyfi $\epsilon > 0$ için $t \in [0,1]$ ve $m \geq m_0$ için

$$|B_m(g)(t) - g(t)| < \epsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermiştir (Bernstein, 1912).

1930 yılında da Kantorovich, $[0,1]$ aralığında integrallenebilir g fonksiyonları için

$$K_m(g,t) = (m+1) \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} t^v (1-t)^{m-v} \int\limits_{\frac{v}{m+1}}^{\frac{v+1}{m+1}} g(x)dx$$

şeklinde tanımlı K_m operatörlerini tanımlamış ve bu operatörler günümüzde Kantorovich operatörler olarak adlandırılmıştır (Kantorovich, 1930).

1937 yılında Chlodowsky,

$$C_m(g,t)=\sum_{v=0}^{m}\binom{m}{v}(\frac{t}{c_m})^v(1-\frac{t}{c_m})^{m-v}g(\frac{v}{m}c_m),\ 0\le g\le c_m$$

şeklindeki operatörü tanımlamış ve bu operatörün yakınsaklık özelliklerini incelemiştir (Chlodowsky, 1937).

Yukarıdaki denklemde $\{c_m\}$ dizisi; $\lim_{m\to\infty} c_m = \infty$ ve $\lim_{m\to\infty} \frac{c_m}{m} = 0$ koşulunu sağlayan bir pozitif reel sayıların artan dizisidir.

$C_m(g,t)$ operatörlerine literatürde Bernstein-Chlodowsky polinomları adı verilir.

Szasz-Mirakyan operatörleri, Berstein polinomlarının 1950' de Otto Szasz ve 1941' de G.M. Mirakyan tarafından tanıtılan sonsuz aralıklara genellemesidir. Burada

$$S_m(g,t)=e^{-mt}\sum_{v=0}^{\infty}\frac{(mv)^v}{v!}g(\frac{v}{m}),\ g\in[0,\infty)\subset\mathbb{R}\text{ ve }m\in\mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Szasz, 1950).

1980 yılında da $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. $0\le t<\infty$ ve $m\in\mathbb{N}$ olmak üzere lineer (doğrusal) Bleimann-Butzer-Hahn operatörleri

$$U_m(g,t)=(1+t)^{-m}\sum_{v=0}^{m}\binom{m}{v}t^v g(\frac{v}{m+1-v})$$

şeklinde, sınırsız $[0,\infty)$ aralığı üzerinde sonlu toplam kullanılarak tanımlanmıştır (Bleimann ve ark., 1980).

Bütün yaklaşım operatörleri lineer olmak zorunda mıdır? bu soru düşünüldüğünde; bu problem Shepard operatörleri için incelenmiş ve lineer operatörlerin yanında lineer olmayan operatörlerinde kullanılabileceği görülmüştür (Bede ve ark., 2006).

Bede ve ark. (2016)'da yayınladıkları kitapta, maksimum çarpım tipi operatörler içeren yaklaşım alanındaki gelişmelerin geniş bir incelenmesini çeşitli operatörler üzerinde ele almışlardır.

Kitap, maksimum çarpım tipindeki operatörlerin bazı özel durumlarda klasik yaklaşımlarla elde edilenlerden daha iyi yaklaşımlar elde edilmesini vurgulamaktadır.

Bu operatörlerden birkaçının tanımı aşağıdaki gibidir.

$g : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ ve $P_{m,v}(t) = \binom{m}{v} t^v (1-t)^{m-v}$olmak üzere kesilmiş maksimum çarpım tipi Bernstein operatörleri,

$$B_m^{(Z)}(g)(t) = \frac{\bigvee_{v=0}^{m} P_{m,v}(t) g(\frac{v}{m})}{\bigvee_{r=0}^{m} P_{m,r}(t)}$$

şeklinde tanımlanır. Bu operatörler lineer olmayan pozitif operatörlerdir (Bede ve ark., 2016).

$g : [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $[0,\infty)$ da sınırlı olsun

$$H_m^{(Z)}(g)(t) = \frac{\bigvee_{v=0}^{m} s_{m,v}(t) g(\frac{v}{m+1-v})}{\bigvee_{r=0}^{m} s_{m,r}(t)}$$

şeklinde tanımlanan lineer olmayan operatöre kesilmiş maksimum çarpım tipi Bleimann-Butzer-Hahn operatörü denir. Burada

$$s_{m,v}(t) = \binom{m}{v} t^v$$

dır (Bede ve ark., 2016).

Ülkemizde de Maksimum-Çarpım tipi operatörler hakkında çeşitli çalışmalar yapılmıştır.

Sarı ve Duman (2015)' de Maksimum-Çarpım tipi operatörlerin yaklaşım özellikleri üzeine çalışmalarda bulundular.

Güngör ve İspir (2018)' de maksimum çarpımın tipi genelleştirilmiş Szasz operatörleri ve maksimum çarpım tipi genelleştirilmiş Bleimann-Butzer-Hahn operatörlerini tanıtıp özelliklerini incelemişler ve yaklaşım hatası için bir üst sınır tahmini veren çalışmalar da bulundular.

Eren ve Gönül Bilgin (2022), simetrik aralıkta tanımlı Bernstein tipli bazı operatörlerle yaklaşımı incelemişler.

Kırcı Serenbay ve Baruğ (2023)' de maksimum çarpım tipi modifiye Favard-Szasz-Mirakyan operatörlerinin özelliklerini ve yaklaşım derecesi için bir üst sınır tahmini üzerinde çalışmaları olmuştur.

Kırcı Serenbay ve Yeşilnacar Binmar (2023)'de iki değişkenli olan maksimum çarpım tipi Bernstein-Stancu operatörleri üzerinde çalışmaları olmuştur.

2.1. Temel Kavramlar

Bu kısımda araştırma süresince ihtiyaç duyulan tanımlamalar ve hesaplamalar için kullanılacak yöntem ve kuramlar belirtilmiştir.

Tanım 2.1 $Y \neq \varnothing$, F de $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$'nin bir cismi olsun

$+ : Y \times Y \rightarrow Y$

$. : F \times Y \rightarrow Y$

aşağıdaki özellikleri sağladığında, F cismi Y kümesi üstünde bir lineer uzay (vektör uzayı) oluşturur denir.

$\forall b, c, e \in Y$ ve $\forall z, m \in F$ için

1. $b + c = c + b$,

2. $(b + c) + e = b + (c + e)$,

3. $b + \gamma = b + \gamma = b$ olacak şekilde $\gamma \in Y$ vardır,

4. $\forall b \in Y$ için $b + (-b) = (-b) + b = \gamma$ olacak şekilde bir $-b \in Y$ vardır,

5. $1b = b$,

6. $z(b + c) = zb + zc$,

7. $(z + m)b = zb + zb$,

8. $z(mb) = (zm)b$

(Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 2.2 Y reel değerli ve vektör uzayı üzerinde tanımlı bir küme olsun.

$\forall\ t, y \in Y$ ve α bir skaler olmak üzere

1. $\|t\|$ negatif olmayan ve reel değerli

2. $\|t\| = 0$ için gerek ve yeter şart $t = 0$ olmasıdır

3. $\|\alpha t\| \leq |\alpha|\ \|t\|$

4. $\|t+y\| \leq \|t\| + \|y\|$

özellikleri sağlanırsa $\|.\|$ ifadesine bir norm denir.

Üzerinde tanımlanan norm olan Y vektör uzayına bir normlu uzay denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.3 $[b,c]$ aralığı üstünde sürekli ve tanımlı bütün reel değerli fonksiyonların bir araya gelmesiyle oluşturduğu kümeye $C\,[b,c]$ fonksiyon uzayı denir. Bu uzaydaki norm $g \in C\,[b,c]$ olmak üzere

$$\|g(t)\|_{C[b,c]} = \max_{b \leq t \leq c} |g(t)|$$

biçiminde tanımlanır. Gerçekten

1. $\forall f \in C\,[b,c]$ için $g + f \in C\,[b,c]$

2. $\forall g, f \in C\,[b,c]$ için $g + f = f + g$

3. $\forall g, f, w \in C\,[b,c]$ için $g + (f + w) = (g + f) + w$

4. $\forall g \in C\,[b,c]$ için $\exists \theta$ vardır ki $g + \theta = \theta + g = g$

5. $\forall g \in C\,[b,c]$ için $\exists v \in C\,[b,c]$ vardır ki $g + v = v + g = \theta$

6. $\forall g \in C\,[b,c]$ için ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için $\forall \alpha g \in C\,[b,c]$

7. $\forall g \in C\,[b,c]$ için ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için $(\alpha\beta)g = \alpha(\beta g)$

8. $\forall g \in C\,[b,c]$ için $1g = g$

9. $\forall g \in C\,[b,c]$ için ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için $(\alpha + \beta)g = \alpha g + \beta g$

10. $\forall g, f \in C\,[b,c]$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için $\alpha(g + f) = \alpha g + \alpha f$

11. $\forall g \in C\,[b,c]$ için $\|g\| \geq 0$

12. $\forall g \in C\,[b,c]$ için $\|g\| = 0 \Leftrightarrow g = 0$

13. $\forall g \in C\,[b,c]$ için ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\|\lambda g\| = |\lambda|\, \|g\|$

14. $\forall g, f \in C\,[b,c]$ için $\|g + f\| \leq \|g\| + \|f\|$

koşulları sağlandığından $C\,[b,c]$ lineer normlu uzaydır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 2.4 Kapalı aralıkta sürekli fonksiyonların en büyük ve en küçük değerlerine ait Weierstrass teoremine göre $C\,[b,c]$ uzayında norm;

$$\|g\|_{C[b,c]} = \max_{b\leq t\leq c} |g(t)|$$

ile gösterilir. Bu norma göre $\{g_m(t)\}$ dizisi bir fonksiyona düzgün yakınsar.

Bu durumda $\{g_m(t)\}$ dizisinin $C\,[b,c]$ normunda bir $f(t)$ fonksiyonuna yaklaşması için gerek ve yeter koşul $[b,c]$ aralığındaki tüm noktaları için

$$|g_m(t) - f(t)| < Z\varepsilon_m$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Burada ε_m sıfıra yakınsayan bir dizi, Z ise pozitif bir sabittir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 2.5 Bir (g_m) fonksiyonlar dizisinin g fonksiyonuna $C\,[b,c]$ normunda yakınsamanın düzgün olması $\forall t \in [b,c]$ için

$$\lim_{m\to\infty} \|g_m(t) - g(t)\|_{C[b,c]} = 0$$

olmasıdır. Daha açık ifade etmek gerekirse;

$$\lim_{m\to\infty} \max_{b\leq t\leq c} |g_m(t) - g(t)| = 0$$

eşitliğinin sağlanması demektir.

Düzgün yakınsama $g_m(t) \rightrightarrows g(t)$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 2.6 Y ve X uzayları iki fonksiyon uzayı olmak üzere seçilsin.

Eğer Y uzayından alınmış rasgele g fonksiyonunu X uzayında bir f fonksiyonu ile eşleştiren bir L kuralı varsa o takdirde Y uzayında bir operatör tanımlanmıştır denir ve bu durumda

$$L(g;t) = f(t)$$

gösterimi kullanılır.

L operatörünün tanım bölgesi Y uzayıdır ve $Y = D(L)$ ile gösterilir. Bu durumda şunu söylemek mümkündür; $L(g;t) = f(t)$, X uzayının elemanlarından biri olur ve bu şekildeki f fonksiyonlarının oluşturduğu kümeye L operatörünün değerler kümesi denir.

Bu küme $R(L)$ ile gösterilir. Görülüyor ki $R(L) \subset X$ dir. Lineer operatörün tanımı Y uzayının lineer bir uzay olduğu gösterildikten sonra verilebilir. $g(t)$ ve $f(t)$, Y uzayından seçilmiş rasgele iki fonksiyon, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ seçilen keyfi sayılar olmak üzere L operatörü;

$$L(\alpha g + \beta f; t) = \alpha L(g;t) + \beta L(f;t)$$

koşulunu gerçekliyor ise o takdirde L operatörü lineer operatör olarak adlandırılır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 2.7 L bir operatör ve g bir fonksiyon olmak üzere Y uzayından alınan $\forall g \geq 0$ fonksiyonu için $L(g;t) \geq 0$ oluyorsa L operatörü pozitif operatördür denir.

Hem lineerlik hem de pozitiflik koşulunu gerçekleyen operatöre lineer pozitif operatör denir (Gadzhiev, 1976).

Lemma 2.8 Y, X vektör uzayları, $L : Y \to X$ lineer pozitif operatör olsun. O halde, L operatörü monoton artandır. Yani $g, f \in Y$ için

$$g \leq f \Rightarrow L(g) \leq L(f)$$

ifadesi gerçeklenir (Gadzhiev, 1976).

Lemma 2.9 Y, X vektör uzayları, $L : Y \to X$ lineer pozitif operatör ve $g \in Y$ olmak üzere o halde

$$|L(g)| \leq L(|g|)$$

eşitsizliği gerçeklenir (Gadzhiev, 1976).

Tanım 2.10 $m \in \mathbb{N}$ olsun. $g_m(t)$'e bir fonksiyon dizisi denir ve gösterimi (g_m) şeklindedir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 2.11 $m \in \mathbb{N}$ olsun. $L_m(g;t)$ ya bir operatör dizisi denir ve gösterimi (L_m) şeklindedir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 2.12 $\mathbb{R}_0^+$ üzerinde $\bigvee$ (maksimum) ve .(çarpım) işlemleri göz önünde bulundurulduğu zaman $(\mathbb{R}_0^+, \bigvee, .)$ bir yarı halka yapısına sahiptir ve bu yapıya bir maksimum çarpım cebiri denir (Bede ve ark., 2016).

Tanım 2.13 (Kesilmiş ve kesilmemiş maksimum çarpım tipi operatör dizisi)

$T \subseteq \mathbb{R}$ sınırlı veya sınırsız bir aralık ve

$CB_+(T) = \{g : T \to \mathbb{R}^+, g, T\ üzerinde\ sınırlı\ ve\ sürekli\}$ olsun.

$m \in \mathbb{N}$, $g \in CB_+(T)$, $V_m(., t_i) \in CB_+(T)$ ve $t_i \in T$ olmak üzere

$L_m : CB_+(T) \to CB_+(T)$,

$$L_m(g)(t) = \bigvee_{i=0}^{m} V_m(t, t_i)\, g(t_i)$$
$$L_m(g)(t) = \bigvee_{i=0}^{\infty} V_m(t, t_i)\, g(t_i)$$

şeklinde tanımlanan operatörlere sırasıyla kesilmiş maksimum çarpım tipi operatör dizisi ve kesilmemiş maksimum çarpım tipi operatör dizisi denir. Bu tipteki operatörler doğrusal olmayan pozitif operatörlerdir. Ayrıca $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ ve $g, f : T \to \mathbb{R}^+$ için

$$L_m(\alpha g \vee \beta f)(t) = \alpha L_m(g)(t) \vee \beta L_m(f)(t)$$

ve $\forall \lambda \geq 0$ için $L_m(\lambda g)(t) = \lambda L_m(g)(t)$ (pozitif homojenlik) özelliklerini sağlar (Bede ve ark., 2016).

2.2. Yardımcı Teoremler

Operatörlerin yaklaşım oranını bulma konusunda aşağıda verilmiş olan lemmalar yol gösterici olacaktır.

Lemma 2.14 $T \subseteq \mathbb{R}$ sınırlı veya sınırsız bir aralık ve $g, f \in CB_+(T)$ olsun.

$L_m : CB_+(T) \to CB_+(T)$ lineer olmayan operatör dizisi için

(1) $g(t) \leq f(t)$ ise $\forall m \in \mathbb{N}$ için $L_m(g)(t) \leq L_m(f)(t)$ (monotonluk)

(2) $L_m(g + f)(t) \leq L_m(g)(t) + L_m(f)(t)$ (alt lineerlik) özelliklerini sağlasın. Bu durumda $\forall g, f \in CB_+(T)$ ve $t \in T$ için

$$|L_m(g)(t) - L_m(f)(t)| \leq L_m(|g-f|)(t)$$

dır (Bede ve ark., 2016).

Lemma 2.15 $L_m : CB_+(T) \to CB_+(T)$ pozitf, monoton, alt lineer bir operatör dizisi olsun ve $t \in T$ ve $g \in CB_+(T)$,

$$|L_m(g)(t) - g(t)| \leq \left[\frac{1}{\delta} L_m(\varphi_t)(t) + L_m(e_0)(t)\right] \omega_1(g,\delta)_T + g(t)\,|L_m(e_0)(t) - 1|$$

dır.

Burada $\delta > 0$, $\forall x \in T$ ve $t \in T$ için $e_0(x) = 1$, $(\varphi_t)(x) = |x-t|$ ve

$$\omega_1(g,\delta)_T = \sup\{|g(t) - g(y)|\,;\, t, y \in T,\ |t-y| \leq \delta\}$$

bilinen süreklilik modülüdür (Bede ve ark., 2016).

Sonuç 2.16 $\forall m \in \mathbb{N}$, $t \in T$, $L_m(e_0) = e_0$ olmak üzere Lemma 2.15 koşulları sağlanırsa,

$$|L_m(g)(t) - g(t)| \leq \left[1 + \frac{1}{\delta} L_m(\varphi_t)(t)\right] \omega_1(g,\delta)_T$$

olur. Süreklilik modülü,

$$\omega_1(g,\delta)_T = \sup\{|g(t) - g(y)|\,;\, t, y \in T,\ |t-y| \leq \delta\}$$

dir (Bede ve ark., 2016).

3. GEREÇ ve YÖNTEM

Yaklaşımlar teorisi ve fonksiyonel analizde yer alan lineer pozitif operatörlerle yaklaşım alanı son yetmiş yıl içerisinde meydana çıkmıştır. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass 1885 yılında sonlu bir aralık üzerinde sürekli her fonksiyona yine aynı aralık üzerinde yakınsayan bir polinom dizisinin var olduğunu ifade eden teoremi ispatlamıştır. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass'ın bu girişiminden yola çıkan Bernstein 1912 yılında varlığı ispat edilen bu polinomu $[0,1]$ aralığı için ispatlamıştır.

Bu bölümde bazı lineer pozitif operatörler ve maksimum çarpım tipi operatörler ile ilgili tanım, lemma ve teoremler verilmiştir.

Tanım 3.1 (Klasik Bernstein operatörleri)

$g : [0,1] \to \mathbb{R}$ verilsin. Benstein operatörü, $P_{m,v}(t) = \binom{m}{v} t^v (1-t)^{m-v}$ ve $0 \leq v \leq m$ olmak üzere $m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} B_m(g)(t) &= \sum_{v=0}^{m} P_{m,v}(t) g(\frac{v}{m}) \\ &= \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} t^v (1-t)^{m-v} g(\frac{v}{m}) \ , \ t \in [0,1] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. B_m, $C[0,1]$ uzayı üzerinde pozitif lineer bir operatördür (Lorentz, 1953).

Teorem 3.2 $[0,1]$ aralığında süreksiz olmayan bir g fonksiyon alınsın. Tanım 3.1' de tanımlanan Bernstein operatörleri için $[0,1]$ aralığında g fonksiyonuna düzgün yakınsaktır (Lorentz, 1953).

Teorem 3.3 (Klasik Bernstein operatörlerin yaklaşım hızı)

$[0,1]$ üzerinde sınırlı herhangi bir g fonksiyonu için

$$\|g - B_m(g)\| \leq \frac{3}{2} \omega_1 \left(g; \frac{1}{\sqrt{m}} \right)_{[0,1]}$$

dır.

Burada $\omega_1(g,\delta)_{[0,1]} = \sup \{ |g(t) - g(y)| \, ; t, y \in [0,1] \, , \ |t - y| \leq \delta \}$ bilinen süreklilik mödülüdür (Lorentz, 1953).

Tanım 3.4 (Maksimum çarpım tipi Bernstein operatörleri)

$g:[0,1]\to\mathbb{R}^{+}$ ve $P_{m,v}(t)=\binom{m}{v}t^{v}(1-t)^{m-v}$olmak üzere kesilmiş maksimum çarpım tipi Bernstein operatörleri,

$$B_m^{(Z)}(g)(t)=\frac{\bigvee\limits_{v=0}^{m}P_{m,v}(t)g(\frac{v}{m})}{\bigvee\limits_{r=0}^{m}P_{m,r}(t)}$$

şeklinde tanımlanır. Bu operatörler lineer olmayan pozitif operatörlerdir (Bede ve Gal, 2010).

Tanım 3.5 $v,r\in\{0,1,2,...,m\}$ ve $t\in\left[\frac{r}{m+1},\frac{r+1}{m+1}\right]$ için $Z_{v,m,r}(t)=\frac{P_{m,v}(t)\left|\frac{v}{m}-t\right|}{P_{m,r}(t)}$, $z_{v,m,r}(t)=\frac{P_{m,v}(t)}{P_{m,r}(t)}$ dır.

Burada:

$$\begin{aligned} v &\geq r+1 \text{ için } Z_{v,m,r}(t)=\frac{P_{m,v}(t)(\frac{v}{m}-t)}{P_{m,r}(t)} \\ v &\leq r-1 \text{ için } Z_{v,m,r}(t)=\frac{P_{m,v}(t)(t-\frac{v}{m})}{P_{m,r}(t)} \\ v &\geq r+2 \text{ için } \overline{Z}_{v,m,r}(t)=\frac{P_{m,v}(t)(\frac{v}{m+1}-t)}{P_{m,r}(t)} \\ v &\leq r-2 \text{ için } \underline{Z}_{v,m,r}(t)=\frac{P_{m,v}(t)(t-\frac{v}{m+1})}{P_{m,r}(t)} \end{aligned}$$

dır (Bede ve Gal, 2010).

Lemma 3.6 $v,r\in\{0,1,2,...,m\}$ ve $t\in\left[\frac{r}{m+1},\frac{r+1}{m+1}\right]$ için

$$z_{v,m,r}(t)\leq 1$$

dır (Bede ve Gal, 2010).

Lemma 3.7 $\bigvee\limits_{v=0}^{m}P_{m,v}(t)=P_{m,r}(t),\ t\in\left[\frac{r}{m+1},\frac{r+1}{m+1}\right],\ r\in\{0,1,2,...,m\}$

Burada $P_{m,v}(t)=\binom{m}{v}t^{v}(1-t)$ dır (Bede ve Gal, 2010).

Lemma 3.8 $t\in\left[\frac{r}{m+1},\frac{r+1}{m+1}\right]$ olsun.

(1) $v\in\{r+2,r+3,...,m-1\}$ olmak üzere. Eğer $v-\sqrt{v+1}\geq r$ ise

$$\overline{Z}_{v,m,r}(t)\geq\overline{Z}_{v+1,m,r}(t)$$

(2) $v \in \{1, 2, ..., r-2\}$ olmak üzere. Eğer $v + \sqrt{v} \leq r$ ise

$$\underline{Z}_{v,m,r}(t) \geq \underline{Z}_{v-1,m,r}(t)$$

dır (Bede ve Gal, 2010).

Teorem 3.9 (Kesilmiş maksimum çarpım tipi Bernstein operatörlerin yaklaşım hızı)

Eğer $g : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ sürekli bir foksiyon olmak üzere

$$\left|B_m^{(Z)}(g)(t) - g(t)\right| \leq 12\omega_1 \left(g; \frac{1}{\sqrt{m+1}}\right)_{[0,1]}, \forall m \in \mathbb{N} \text{ ve } t \in [0,1]$$

dır. Burada $\omega_1 (g; \delta)_{[0,1]} = \sup \{|g(t) - g(y)| \,; t, y \in [0, 1] \,,\ |t - y| \leq \delta\}$ bilinen süreklilik modülüdür (Bede ve Gal, 2010).

Tanım 3.10 (Klasik Bernstein-Chlodowsky operatörleri)

Chlodowsky (1937) tarafından sınırsız bir aralık üzerinde Bernstein polinomları genelleştirilmiştir.

$g : [0, c_m] \to \mathbb{R}_+$ sürekli bir fonksiyon olsun $0 \leq t \leq c_m$ ve (c_m) dizisi için $\lim\limits_{m\to\infty} (c_m) = \infty$ ve $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{c_m}{\sqrt{m}} = 0$ olacak şekilde pozitif reel sayıların bir dizisi olmak üzere,

$$C_m(g)(t) = \sum_{v=0}^{m} \binom{m}{v} (\frac{t}{c_m})^v (1 - \frac{t}{c_m})^{m-v} g(\frac{v.c_m}{m})$$

şeklinde tanımlanan polinomlara Bernstein-Chlodowsky polinomları adı verilir (Güngör ve İspir, 2018).

Tanım 3.11 (Kesilmiş maksimum çarpım tipi Bernstein-Chlodowsky operatörleri)

$g : [0, c_m] \to \mathbb{R}_+$ sürekli bir fonksiyon olsun, $0 \leq t \leq c_m$ ve (c_m) dizisi için $\lim\limits_{m\to\infty} (c_m) = \infty$ ve $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{c_m}{\sqrt{m}} = 0$ olacak şekilde pozitif reel sayıların bir dizisi olmak üzere kesilmiş maksimum çarpım tipi Bernstein-Chlodowsky operatörleri,

$$C_m^{(Z)}(g)(t) = \frac{\bigvee\limits_{v=0}^{m} h_{m,v}(t) g(\frac{v.c_m}{m})}{\bigvee\limits_{r=0}^{m} h_{m,r}(t)}$$

biçiminde tanımlanır.

Burada $h_{m,v}(t)=\binom{m}{v}(\frac{t}{c_m})^v(1-\frac{t}{c_m})^{m-v}$dır (Güngör ve İspir, 2018).

Tanım 3.12 Her bir $v,r\in\{0,1,2,...,m\}$ ve $t\in\left[\frac{r.c_m}{m+1},\frac{(r+1).c_m}{m+1}\right]$ için

$$\begin{aligned} Z_{v,m,r}(t) &= \frac{h_{m,v}(t)\left|\frac{v.c_m}{m}-t\right|}{h_{m,r}(t)} \\ z_{v,m,r}(t) &= \frac{h_{m,v}(t)}{h_{m,r}(t)} \end{aligned}$$

olsun.

(1) Eğer $v\geq r+1$ ise

$$Z_{v,m,r}(t)=\frac{h_{m,v}(t)(\frac{v.c_m}{m}-t)}{h_{m,r}(t)}$$

(2) Eğer $v\leq r-1$ ise

$$Z_{v,m,r}(t)=\frac{h_{m,v}(t)(t-\frac{v.c_m}{m})}{h_{m,r}(t)}$$

(3) Eğer $v\geq r+2$ ise

$$\overline{Z}_{v,m,r}=\frac{h_{m,v}(t)(\frac{v.c_m}{m+1}-t)}{h_{m,r}(t)}$$

(4) Eğer $v\leq r-2$ ise

$$\underline{Z}_{v,m,r}=\frac{h_{m,v}(t)(t-\frac{v.c_m}{m+1})}{h_{m,r}(t)}$$

dır (Güngör ve İspir, 2018).

Lemma 3.13 $\forall v,r\in\{0,1,2,...,m\}$ ve $t\in\left[\frac{r.c_m}{m+1},\frac{(r+1).c_m}{m+1}\right]$ için

$$z_{v,m,r}(t)\leq 1$$

dır (Güngör ve İspir, 2018).

Lemma 3.14 $h_{m,v}(t)=\binom{m}{v}(\frac{t}{c_m})^v(1-\frac{t}{c_m})^{m-v}$ olmak üzere

Her $t\in\left[\frac{r.c_m}{m+1},\frac{(r+1).c_m}{m+1}\right]$ ve $r\in\{0,1,2,...,m\}$ için

$$\bigvee_{v=0}^{m}h_{m,v}(t)=h_{m,r}(t)$$

dır (Güngör ve İspir, 2018).

Teorem 3.15 (Kesilmiş maksimum çarpım tipi Bernstein-Chlodowsky operatörlerin yaklaşım hızı)

$g : [0, c_m] \to \mathbb{R}_+$ sürekli bir fonksiyon olsun ve $C_m^{(Z)}(g)$ maksimum çarpım tipi Bernstein-Chlodowsky operatörleri olmak üzere

$$\left|C_m^{(Z)}(g)(t) - g(t)\right| \leq 12\omega_1 \left(g; \frac{c_m}{\sqrt{m+1}}\right)_{[0,c_m]}, \forall m \in \mathbb{N} \text{ ve } t \in [0, c_m]$$

dır (Güngör ve İspir, 2018).

Tanım 3.16 (Bleimann-Butzer-Hahn operatörleri)

1980 yılında Bleimann, Butzer ve Hahn, $[0, \infty)$ aralığında tanımlı, reel değerli herhangi bir g fonksiyonu için

$$U_m(g)(t) = \frac{1}{(1+t)^m} \sum_{v=0}^{m} g(\frac{v}{m-v+1}) s_{m,v}(t), \, m \in \mathbb{N}, \, t \in [0, \infty)$$

şeklindeki lineer pozitif U_m operatörlerini tanımlanmışlardır.

Burada $s_{m,v}(t) = \binom{m}{v} t^v$ dır (Bleimann ve ark., 1980).

Tanım 3.17 (Kesilmiş maksimum çarpım tipi Bleimann-Butzer-Hahn operatörleri)

$g : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $[0, \infty)$ da sınırlı olsun

$$H_m^{(Z)}(g)(t) = \frac{\bigvee_{v=0}^{m} s_{m,v}(t) g(\frac{v}{m+1-v})}{\bigvee_{r=0}^{m} s_{m,r}(t)}$$

şeklinde tanımlanan lineer olmayan operatöre kesilmiş maksimum çarpım tipi Bleimann-Butzer-Hahn operatörü denir.

Burada $s_{m,v}(t) = \binom{m}{v} t^v$ dır (Bede ve ark., 2010).

Tanım 3.18 $\forall v \in \{0, 1, 2, ..., m\}$ ve $\forall r \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$ ve

$t \in \left[\frac{r}{m-r+1}, \frac{r+1}{m-r}\right]$ için veya $r = m$ ve $t \in [m, \infty)$ için

$Z_{v,m,r}(t) = \frac{s_{m,v}(t)\left|\frac{v}{m+1-v} - t\right|}{s_{m,r}(t)}$, $z_{v,m,r}(t) = \frac{s_{m,v}(t)}{s_{m,r}(t)}$ olsun

(1) Eğer $v \geq r + 1$ ise

$$Z_{v,m,r}(t) = \frac{s_{m,v}(t)(\frac{v}{m+1-v} - t)}{s_{m,r}(t)}$$

(2) Eğer $v \leq r$ ise

$$Z_{v,m,r}(t) = \frac{s_{m,v}(t)(t - \frac{v}{m+1-v})}{s_{m,r}(t)}$$

dır (Bede ve ark., 2010).

Lemma 3.19 $\forall v \in \{0, 1, 2, ..., m\}$ ve $\forall r \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$ ve

$t \in \left[\frac{r}{m-r+1}, \frac{r+1}{m-r}\right]$ için veya $r = m$ ve $t \in [m, \infty)$ için

$$z_{v,m,r}(t) \leq 1$$

dır (Bede ve ark., 2010).

Lemma 3.20 $s_{m,v}(t) = \binom{m}{v}.t^v$ olmak üzere

$$\bigvee_{v=0}^{m} s_{m,v}(t) = \begin{cases} s_{m,r}(t), & t \in \left[\frac{r}{m-r+1}, \frac{r+1}{m-r}\right], r \in \{0, 1, 2, ..., m-1\} \\ s_{m,m}(t), & t \in [m, \infty) \end{cases}$$

dır (Bede ve ark., 2010).

Teorem 3.21 (Kesilmiş maksimum çarpım tipi Bleimann-Butzer-Hahn operatörlerin yaklaşım hızı)

$g : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ sürekli bir fonksiyon olsun.

$$\forall m + 1 \geq \max\{1 + 2t, 16t(1 + t)\}$$

için

$$\left|H_m^{(Z)}(g)(t) - g(t)\right| \leq 5\omega_1(g, \frac{(1+t)^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}}{\sqrt{m+1}})_{[0,\infty)}, \forall m \in \mathbb{N}, t \in [0, \infty)$$

dır (Bede ve ark., 2010).

Bu çalışmalardan ilham alarak Güngör ve İspir, (2018) tarafından maksimum çarpım tipi genelleştirilmiş Bleimann-Butzer-hahn operatörleri;

$g : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu sürekli olsun. $0 \leq t < \infty$ ve (c_m) dizisi de $\lim_{m\to\infty} c_m = \infty$ ve $\lim_{m\to\infty} \frac{(c_m)^{3/2}}{(m)^{1/2}} = 0$ olacak şekilde pozitif reel sayıların bir dizisi olmak üzere,

$$R_m^{(Z)}(g)(t) = \frac{\bigvee_{v=0}^{m} s_{m,v}(t) g(\frac{vc_m}{m+1-v})}{\bigvee_{r=0}^{m} s_{m,r}(t)}$$

biçiminde tanımlamış. Burada $s_{m,v}(t) = \binom{m}{v}(\frac{t}{c_m})^v$ dır.

Bu operatörün özelliklerini incelemiş ve yaklaşım derecesini de şu şekilde bulmuştur:

$g : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ düzgün sürekli bir fonksiyon ve $R_m^{(Z)}(g)(t)$ de maksimum-çarpım tipi genelleştirilmiş Bleimann-Butzer-Hahn operatörü olmak üzere

$$\forall m + 1 \geq \max\{1 + 2t, 16t(t+1)\}$$

için

$$\left|R_m^{(Z)}(g)(t) - g(t)\right| \leq \omega_1(g, \frac{(c_m + t)^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}}{\sqrt{m+1}})_{[0,\infty)}, \forall m \in \mathbb{N}, t \in [0, \infty)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\omega_1(g, \delta)_{[0,\infty)} = \sup\{|g(t) - g(y)|\,; t, y \in [0, \infty)\,,\ |t - y| \leq \delta\}$$

süreklilik modülüdür (Güngör ve İspir, 2018).

4. BULGULAR

Bu bölümde maksimum çarpım tipi Bleimann-Butzer-Hahn operatörlerinin bir modifiyesi tanımlayıp gerekli tanımlar ve yardımcı lemmalar verilerek yaklaşım dereceleri hesaplanacaktır.

Tanım 4.1 $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ sürekli sınırlı bir fonksiyon olsun. $0 \leq t < \infty$ ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$A_m^{(Z)}(g)(t) = \frac{\bigvee_{v=0}^{m} S_{m,v}(t) g(\frac{(c_m)v}{(b_m)(m+1-v)})}{\bigvee_{v=0}^{m} S_{m,v}(t)}$$

şeklinde tanımlanan $A_m^{(Z)}$ lineer olmayan operatöre maksimum-çarpım tipi modifiye Bleimann-Butzer-Hahn operatörü denir.

Burada $S_{m,v}(t) = \binom{m}{v}(\frac{(b_m)t}{(c_m)})^v$ şeklinde tanımlanır ve (b_m) ve (c_m) pozitif reel sayıların birer dizisidir. Ayrıca

$\lim\limits_{m\to\infty} \frac{(\frac{(c_m)}{(b_m)})^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m+1}} = 0$ ve $v > 0$ olmak üzere $\left|\frac{(b_m)}{(c_m)}\right| = O(v)$ dır (Alahmad Aldhefeery ve Kırcı Serenbay, 2023).

Lemma 4.2 Keyfi sürekli sınırlı bir $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu için, maksimum-çarpım tipi modifiye Bleimann-Butzer-Hahn $A_m^{(Z)}(g)(t)$ operatörü, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde pozitif, sınırlı ve süreklidir. Ayrıca

$$A_m^{(Z)}(g)(0) - (g)(0) = 0$$

eşitliği sağlanır.

İspat.

g pozitif olup $A_m^{(Z)}(g)$ da pozitif olur.

g'nin tanımından g sınırlı olup $g(t) \leq v_1$ olacak şekilde $v_1 \geq 0$ sayısı vardır.

$t \in [0,\infty)$ olup $A_m^{(Z)}(g)(t) \leq v_2$ olacak şekilde $v_2 \geq 0$ sayısı vardır. Yani $A_m^{(Z)}$ sınırlıdır.

$[0,\infty)$ 'de sürekliliği:

Pay kısmı $\bigvee\limits_{v=0}^{m}\binom{m}{v}(\frac{(b_m)t}{(c_m)})^v g(\frac{(c_m)v}{(b_m)(m+1-v)})$ sonlu sayıda sürekli fonksiyonların maksimumu olduğu için ve $\bigvee\limits_{v=0}^{m}\binom{m}{v}(\frac{(b_m)t}{(c_m)})^v > 0$ olduğundan $A_m^{(Z)}(g)(t)$, $[0,\infty)$'de süreklidir.

$$A_m^{(Z)}(g)(0) = \frac{\bigvee\limits_{v=0}^{m}\binom{m}{v}(\frac{(b_m).0}{(c_m)})^v g(\frac{(c_m)v}{(b_m)(m+1-v)})}{\bigvee\limits_{v=0}^{m}\binom{m}{v}(\frac{(b_m).0}{(c_m)})^v}$$

$v \neq 0$ ise payda kısmı 0 olur. $v = 0$ ise

$$A_m^{(Z)}(g)(t) = \frac{\binom{m}{0}(\frac{(b_m)t}{(c_m)})^0 g(\frac{(c_m).0}{(b_m)(m+1)})}{\binom{m}{0}(\frac{(b_m)t}{(c_m)})^0} = g(0)$$

dır.

$$\Rightarrow A_m^{(Z)}(g)(0) = g(0) \Rightarrow A_m^{(Z)}(g)(0) - g(0) = 0$$

elde edilir (Alahmad Aldhefeery ve Kırcı Serenbay, 2023).

Tanım 4.3 $\forall v \in \{0,1,2,...,m\}$ ve $r \in \{0,1,2,...,m-1\}$ ve

$t \in \left[\frac{(c_m)r}{(b_m)(m-r+1)}, \frac{(c_m)(r+1)}{(b_m)(m-r)}\right]$ veya $r = m$ ve $t \in \left[\frac{(c_m)m}{(b_m)}, \infty\right)$ için

$$Z_{v,m,r}(t) = \frac{S_{m,v}(t)\left|\frac{v(c_m)}{(b_m)(m-v+1)} - t\right|}{S_{m,r}(t)} \text{ ve } z_{v,m,r}(t) = \frac{S_{m,v}(t)}{S_{m,r}(t)}$$

dır. Burada $S_{m,v}(t) = \binom{m}{v}(\frac{(b_m).t}{(c_m)})^v$ dır.

i) Eğer $v \geq r+1$ ise

$$Z_{v,m,r}(t) = \frac{S_{m,v}(t)\left(\frac{v(c_m)}{(b_m)(m-v+1)} - t\right)}{S_{m,r}(t)}$$

ii) Eğer $v \leq r$ ise

$$Z_{v,m,r}(t) = \frac{S_{m,v}(t)\left(t - \frac{v(c_m)}{(b_m)(m-v+1)}\right)}{S_{m,r}(t)}$$

dır (Alahmad Aldhefeery ve Kırcı Serenbay, 2023).

Lemma 4.4 Her $v \in \{0,1,2,...,m\}$ ve $r \in \{0,1,2,...,m-1\}$ ve

$t \in \left[\frac{(c_m)r}{(b_m)(m-r+1)}, \frac{(c_m)(r+1)}{(b_m)(m-r)}\right]$ veya $r = m$ ve $t \in \left[\frac{(c_m)m}{(b_m)}, \infty\right)$ için

$$z_{v,m,r}(t) \leq 1$$

dir.

İspat.

1. Durum: $v \geq r$ olsun

$$\begin{aligned}\frac{z_{v,m,r}(t)}{z_{v+1,m,r}(t)} &= \frac{\binom{m}{v}(\frac{(b_m)t}{(c_m)})^{v}}{\binom{m}{v+1}(\frac{(b_m)t}{(c_m)})^{v+1}}\\ &= \frac{\frac{m!}{v!(m-v)!}}{\frac{m!}{(v+1)!(m-v-1)!}}.\frac{1}{\frac{(b_m)t}{(c_m)}}\\ &= \frac{v+1}{m-v}.\frac{1}{\frac{(b_m)t}{(c_m)}}\end{aligned}$$

dır.

$f(t) = \frac{1}{t}$ fonksiyonu artmayan bir fonksiyon ve $t \leq \frac{(c_m)(r+1)}{(b_m)(m-r)}$ olup $\frac{1}{t} \geq \frac{(b_m)(m-r)}{(c_m)(r+1)}$ dır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\frac{z_{v,m,r}(t)}{z_{v+1,m,r}(t)} &\geq \frac{v+1}{m-v}.\frac{1}{\frac{(b_m)}{(c_m)}}.\frac{(b_m)(m-r)}{(c_m)(r+1)}\\ &= \frac{v+1}{r+1}.\frac{m-r}{m-v} \geq 1\end{aligned}$$

dır.

$v \geq r$ olup $v \in \{r, r+1, ..., m\}$ için $z_{v,m,r}(t) \geq z_{v+1,m,r}(t)$ dır.

$$\Rightarrow 1 = z_{r,m,r}(t) \geq z_{r+1,m,r}(t) \geq ... \geq z_{m,m,r}(t) \tag{4.1}$$

2. Durum: $v \leq r$ olsun

$$\begin{aligned}\frac{z_{v,m,r}(t)}{z_{v-1,m,r}(t)} &= \frac{\binom{m}{v}(\frac{(b_m)t}{(c_m)})^{v}}{\binom{m}{v-1}(\frac{(b_m)t}{(c_m)})^{v-1}}\\ &= \frac{\frac{m!}{v!(m-v)!}}{\frac{m!}{(v-1)!(m-v+1)!}}.\frac{(b_m)t}{(c_m)}\\ &= \frac{m-v+1}{v}.\frac{(b_m)t}{(c_m)}\end{aligned}$$

dır.

$t \geq \frac{(c_m)r}{(b_m)(m-r+1)}$ olup

$$\begin{aligned}\frac{z_{v,m,r}(t)}{z_{v-1,m,r}(t)} &\geq \frac{m-v+1}{v}.\frac{(b_m)}{(c_m)}.\frac{(c_m)r}{(b_m)(m-r+1)}\\ &= \frac{r}{v}.\frac{m+1-v}{m+1-r} \geq 1\end{aligned}$$

olur.

$v \leq r$ olup $v \in \{0, 1, ..., r\}$ için $z_{v,m,r}(t) \geq z_{v-1,m,r}(t)$ dır.

$$\Rightarrow 1 = z_{r,m,r}(t) \geq z_{r-1,m,r}(t) \geq ... \geq z_{0,m,r}(t) \tag{4.2}$$

(4.1) ve (4.2) den $\forall v \in \{0, 1, ..., r, ..., m\}$ için

$$z_{v,m,r}(t) \leq 1$$

dir (Alahmad Aldhefeery ve Kırcı Serenbay, 2023).

Lemma 4.5 $S_{m,v}(t) = \binom{m}{v}(\frac{(b_m)t}{(c_m)})^v$ olmak üzere

$$\bigvee_{v=0}^{m} S_{m,v}(t) = \begin{cases} S_{m,r}(t), & t \in \left[\frac{(c_m)r}{(b_m)(m-r+1)}, \frac{(c_m)(r+1)}{(b_m)(m-r)}\right], r \in \{0, 1, 2, ..., m-1\} \\ S_{m,m}(t), & t \in \left[\frac{(c_m)m}{(b_m)}, \infty\right) \end{cases}$$

sağlanır.

İspat.

$$0 \leq S_{m,v+1}(t) \leq S_{m,v}(t) \tag{4.3}$$

olsun.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad 0 \leq \binom{m}{v+1}(\frac{(b_m)t}{(c_m)})^{v+1} \leq \binom{m}{v}(\frac{(b_m)t}{(c_m)})^v \\ &\Rightarrow \quad 0 \leq \frac{m!}{(v+1)!(m-v-1)!}.(\frac{(b_m)t}{(c_m)}) \leq \frac{m!}{v!(m-v)!} \\ &\Rightarrow \quad 0 \leq (\frac{(b_m)t}{(c_m)}) \leq \frac{v+1}{m-v} \\ &\Rightarrow \quad t \in \left[0, \frac{(c_m)(v+1)}{(b_m)(m-v)}\right] \end{aligned} \tag{4.4}$$

(4.3) ve (4.4) de v yerine sırasıyla $v = \{0, 1, 2, ..., m-1\}$ yazılırsa

$v = 0$ için

$$S_{m,1}(t) \leq S_{m,0}(t), t \in \left[0, \frac{(c_m)}{(b_m)m}\right]$$

$v = 1$ için

$$S_{m,2}(t) \leq S_{m,1}(t), t \in \left[0, \frac{2(c_m)}{(m-1)(b_m)}\right] \supset \left[\frac{(c_m)}{(b_m)m}, \frac{2(c_m)}{(m-1)(b_m)}\right]$$

böyle devam edilirse

$v = m-1$ ise

$$S_{m,m}(t) \leq S_{m,m-1}(t), t \in \left[0, \frac{(c_m)m}{(b_m)}\right] \supset \left[\frac{(m-1)(c_m)}{2(b_m)}, \frac{(c_m)m}{(b_m)}\right]$$

$$\Rightarrow \bigvee_{v=0}^{m} S_{m,v}(t) = S_{m,r}(t), r \in \{0,1,2,...,m-1\} \text{ ise } t \in \left[\frac{(c_m)r}{(b_m)(m-r+1)}, \frac{(c_m)(r+1)}{(b_m)(m-r)}\right]$$

dır. Şimdi tersini ispatlayalım.

$t \in \left[\frac{(c_m)r}{(b_m)(m-r+1)}, \frac{(c_m)(r+1)}{(b_m)(m-r)}\right]$ olsun. $r \in \{0,1,2,...,m-1\}$ yazalım.

$r = 0$ ise

$$\begin{aligned} t &\in \left[0, \frac{(c_m)}{(b_m)m}\right] \Rightarrow 0 \leq \frac{(b_m)mt}{(c_m)} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \binom{m}{1}\left(\frac{(b_m)t}{(c_m)}\right)^1 \leq \binom{m}{0}\left(\frac{(b_m)t}{(c_m)}\right)^0 \\ &\Rightarrow S_{m,1}(t) \leq S_{m,0}(t) \end{aligned}$$

dır.

$r = 1$ ise

$$\begin{aligned} t &\in \left[\frac{(c_m)}{(b_m)m}, \frac{2(c_m)}{(m-1)(b_m)}\right] \Rightarrow t \leq \frac{2(c_m)}{(m-1)(b_m)} \Rightarrow t \leq \frac{(c_m)\binom{m}{1}}{(b_m)\binom{m}{2}} \\ &\Rightarrow \left(\frac{(b_m)t}{(c_m)}\right)^2\binom{m}{2} \leq \left(\frac{(b_m)t}{(c_m)}\right)^1\binom{m}{1} \\ &\Rightarrow S_{m,2}(t) \leq S_{m,1}(t) \end{aligned}$$

dır. Böyle devam edilirse

$r = m-1$ ise

$$\begin{aligned} t &\in \left[\frac{(c_m)(m-1)}{2(b_m)}, \frac{(c_m)m}{(b_m)}\right] \Rightarrow t \leq \frac{(c_m)m}{(b_m)} \Rightarrow t \leq \frac{(c_m)\binom{m}{m-1}}{(b_m)\binom{m}{m}} \\ &\Rightarrow \left(\frac{(b_m)t}{(c_m)}\right)^m\binom{m}{m} \leq \left(\frac{(b_m)t}{(c_m)}\right)^{m-1}\binom{m}{m-1} \\ &\Rightarrow S_{m,m}(t) \leq S_{m,m-1}(t) \end{aligned}$$

dır.

Tüm durumlardan

$$t \in \left[\frac{(c_m)r}{(b_m)(m-r+1)}, \frac{(c_m)(r+1)}{(b_m)(m-r)}\right], r \in \{0,1,2,...,m-1\}$$

ise $\bigvee_{v=0}^{m} S_{m,v}(t) = S_{m,r}(t)$

elde edilir.

Lemma 4.6 $r \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$ ve $t \in \left[\frac{(c_m)r}{(b_m)(m-r+1)}, \frac{(c_m)(r+1)}{(b_m)(m-r)}\right]$ olsun.

i) Eğer $v \in \{r+1, ..., m-1\}$ ve $v - \sqrt{v+1} \geq r$ ise

$$Z_{v,m,r}(t) \geq Z_{v+1,m,r}(t)$$

ii) Eğer $v \in \{1, 2, ..., r\}$ ve $v + \sqrt{v} \leq r$ ise

$$Z_{v,m,r}(t) \geq Z_{v-1,m,r}(t)$$

dır.

İspat.

i) $v \in \{r+1, ..., m-1\}$ ve $v - \sqrt{v+1} \geq r$ olsun.

$$\begin{aligned}
\frac{Z_{v,m,r}(t)}{Z_{v+1,m,r}(t)} &= \frac{\binom{m}{v}\left(\frac{(b_m)t}{(c_m)}\right)^v \left(\frac{v(c_m)}{(b_m)(m-v+1)} - t\right)}{\binom{m}{v+1}\left(\frac{(b_m)t}{(c_m)}\right)^{v+1} \left(\frac{(v+1)(c_m)}{(b_m)(m-v)} - t\right)} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{(b_m)t}{(c_m)}\right)} \cdot \frac{\frac{m!}{v!(m-v)!}}{\frac{m!}{(v+1)!(m-v-1)!}} \cdot \frac{\left(\frac{v(c_m)}{(b_m)(m-v+1)} - t\right)}{\left(\frac{(v+1)(c_m)}{(b_m)(m-v)} - t\right)} \\
&= \frac{1}{\frac{(b_m)}{(c_m)}} \cdot \frac{v+1}{m-v} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{\left(\frac{v(c_m)}{(b_m)(m-v+1)} - t\right)}{\left(\frac{(v+1)(c_m)}{(b_m)(m-v)} - t\right)}
\end{aligned}$$

$f(t) = \frac{1}{t} \cdot \frac{\left(\frac{v(c_m)}{(b_m)(m-v+1)} - t\right)}{\left(\frac{(v+1)(c_m)}{(b_m)(m-v)} - t\right)}$ fonksiyonu artmayandır.

Dolayısıyla $f(t) \geq f\left(\frac{(c_m)(r+1)}{(b_m)(m-r)}\right)$ dır.

$$\Rightarrow \frac{Z_{v,m,r}(t)}{Z_{v+1,m,r}(t)} \geq \frac{1}{\frac{(b_m)}{(c_m)}} \cdot \frac{v+1}{m-v} \cdot \frac{1}{\frac{(c_m)(r+1)}{(b_m)(m-r)}} \cdot \frac{\left(\frac{v(c_m)}{(b_m)(m-v+1)} - \frac{(c_m)(r+1)}{(b_m)(m-r)}\right)}{\left(\frac{(v+1)(c_m)}{(b_m)(m-v)} - \frac{(c_m)(r+1)}{(b_m)(m-r)}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{Z_{v,m,r}(t)}{Z_{v+1,m,r}(t)} \geq \frac{v+1}{r+1} \cdot \frac{\left(\frac{m-r}{m-v+1}\right)(v) - (r+1)}{(v+1) - \left(\frac{m-v}{m-r}\right)(r+1)}$$

$h(m) = \frac{\left(\frac{m-r}{m-v+1}\right)(v) - (r+1)}{(v+1) - \left(\frac{m-v}{m-r}\right)(r+1)}$ fonksiyonu artmayandır.

Dolayısıyla herhangi bir m için $h(m) \geq \lim_{m\to\infty} h(m)$ dır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\frac{Z_{v,m,r}(t)}{Z_{v+1,m,r}(t)} &\geq \frac{v+1}{r+1} \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{\left(\frac{m-r}{m-v+1}\right)(v) - (r+1)}{(v+1) - \left(\frac{m-v}{m-r}\right)(r+1)} \\
&= \frac{v+1}{r+1} \cdot \frac{v-r-1}{v-r}
\end{aligned}$$

dır.

O halde $v-\sqrt{v+1}\geq r$ koşulundan $(v+1)(v-r-1)\geq(v-r)(r+1)$ elde edilir.

$$\Rightarrow \frac{Z_{v,m,r}(t)}{Z_{v+1,m,r}(t)}\geq 1$$

dır.

ii) $v\in\{1,2,...,r\}$ ve $v+\sqrt{v}\leq r$ olsun.

$$\begin{aligned}\frac{Z_{v,m,r}(t)}{Z_{v-1,m,r}(t)} &= \frac{\binom{m}{v}(\frac{(b_m)t}{(c_m)})^{v}\left(t-\frac{v(c_m)}{(b_m)(m-v+1)}\right)}{\binom{m}{v-1}(\frac{(b_m)t}{(c_m)})^{v-1}\left(t-\frac{(v-1)(c_m)}{(b_m)(m-v+2)}\right)}\\ &= (\frac{(b_m)t}{(c_m)}).\frac{\frac{m!}{v!(m-v)!}}{\frac{m!}{(v-1)!(m-v+1)!}}.\frac{\left(t-\frac{v(c_m)}{(b_m)(m-v+1)}\right)}{\left(t-\frac{(v-1)(c_m)}{(b_m)(m-v+2)}\right)}\\ &= \frac{(b_m)}{(c_m)}.\frac{m-v+1}{v}.t.\frac{\left(t-\frac{v(c_m)}{(b_m)(m-v+1)}\right)}{\left(t-\frac{(v-1)(c_m)}{(b_m)(m-v+2)}\right)}\end{aligned}$$

$f_1(t)=t.\frac{\left(t-\frac{v(c_m)}{(b_m)(m-v+1)}\right)}{\left(t-\frac{(v-1)(c_m)}{(b_m)(m-v+2)}\right)}$ fonksiyonu azalmayandır.

Dolayısıyla $f_1(t)\geq f_1(\frac{(c_m)r}{(b_m)(m-r+1)})$ dır.

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad \frac{Z_{v,m,r}(t)}{Z_{v-1,m,r}(t)} &\geq \frac{(b_m)}{(c_m)}.\frac{m-v+1}{v}.\frac{(c_m)r}{(b_m)(m-r+1)}.\frac{\left(\frac{(c_m)r}{(b_m)(m-r+1)}-\frac{v(c_m)}{(b_m)(m-v+1)}\right)}{\left(\frac{(c_m)r}{(b_m)(m-r+1)}-\frac{(v-1)(c_m)}{(b_m)(m-v+2)}\right)}\\ \Rightarrow\quad \frac{Z_{v,m,r}(t)}{Z_{v-1,m,r}(t)} &\geq \frac{r}{v}.\frac{(\frac{m-v+1}{m-r+1})(r)-v}{r-(\frac{m-r+1}{m-v+2})(v-1)}\end{aligned}$$

$h_1(m)=\frac{(\frac{m-v+1}{m-r+1})(r)-v}{r-(\frac{m-r+1}{m-v+2})(v-1)}$ fonksiyonu artmayandır.

Dolayısıyla herhangi bir m için $h_1(m)\geq\lim\limits_{m\to\infty}h_1(m)$ dır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\frac{Z_{v,m,r}(t)}{Z_{v-1,m,r}(t)} &\geq \frac{r}{v}.\lim_{m\to\infty}\frac{(\frac{m-v+1}{m-r+1})(r)-v}{r-(\frac{m-r+1}{m-v+2})(v-1)}\\ &= \frac{r}{v}.\frac{r-v}{r-v+1}\end{aligned}$$

olur.

O halde $v+\sqrt{v}\leq r$ koşulundan $(r)(r-v)\geq(v)(r-v+1)$ elde edilir.

$$\Rightarrow \frac{Z_{v,m,r}(t)}{Z_{v-1,m,r}(t)}\geq 1$$

dır.

5. TARTIŞMA

Teorem 5.1 (Kesilmiş maksimum çarpım tipi modifiye Bleimann-Butzer-Hahn operatörün yaklaşım hızı)

$g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ düzgün sürekli bir fonksiyon ve $A_m^{(Z)}(g)(t)$ Tanım 4.1'de tanımlanan maksimum-çarpım tipi modifiye Bleimann-Butzer-Hahn operatörü olmak üzere $\forall m + 1 \geq \max \left\{16t(t + \frac{(c_m)}{(b_m)}), 4t + 4\right\}$ için

$$\left|A_m^{(Z)}(g)(t) - g(t)\right| \leq 5\omega_1(g, \frac{(\frac{(c_m)}{(b_m)} + t)^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}}{\sqrt{m+1}})_{[0,\infty)}, \forall m \in \mathbb{N}, t \in [0, \infty)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\omega_1(g, \delta)_{[0,\infty)} = \sup \left\{|g(t) - g(y)|\,; t, y \in [0, \infty)\,,\ |t - y| \leq \delta\right\}$$

süreklilik modülüdür.

İspat.

Maksimum-çarpım tipi modifiye Bleimann-Butzer-Hahn operatörü Lemma 2.15 ve sonuç 2.16'i sağladığından, $\varphi_t(x) = |t - x|$ olmak üzere

$$\left|A_m^{(Z)}(g)(t) - g(t)\right| \leq (1 + \frac{1}{\delta}A_m^{(Z)}(\varphi_t)(t))\omega_1(g, \delta)_{[0,\infty)} \tag{5.1}$$

dır.

O halde

$$E_m(t) = A_m^{(Z)}(\varphi_t)(t) = \frac{\bigvee_{v=0}^{m} S_{m,v}(t)\left|\frac{v(c_m)}{(b_m)(m-v+1)} - t\right|}{\bigvee_{v=0}^{m} S_{m,v}(t)}$$

teriminin hesaplanması yeterli olacaktır.

$t \in \left[\frac{(c_m)r}{(b_m)(m-r+1)}, \frac{(c_m)(r+1)}{(b_m)(m-r)}\right]$ ve keyfi $r \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$ sabit olsun.

Lemma 4.5'den $\bigvee_{v=0}^{m} S_{m,v}(t) = S_{m,r}(t)$ dır dolayısıyla

$$E_m(t) = \frac{\bigvee_{v=0}^{m} S_{m,v}(t)\left|\frac{v(c_m)}{(b_m)(m-v+1)} - t\right|}{S_{m,r}(t)} = \bigvee_{v=0}^{m} \{Z_{v,m,r}(t)\}$$

dır.

$r=0$ için yani $t\in\left[0,\frac{(c_m)}{(b_m)m}\right]$ ise

$$\begin{aligned}E_m(t) &= \frac{\bigvee\limits_{v=0}^{m} S_{m,v}(t)\left|\frac{v(c_m)}{(b_m)(m-v+1)}-t\right|}{\binom{m}{0}(\frac{(b_m)t}{(c_m)})^0}\\ &= \bigvee_{v=0}^{m}\binom{m}{v}(\frac{(b_m)t}{(c_m)})^v\left|\frac{v(c_m)}{(b_m)(m-v+1)}-t\right|\end{aligned}$$

olur.

$v=0$ ise

$$E_m(t)=\binom{m}{0}(\frac{(b_m)t}{(c_m)})^0\,|0-t|=|t|=t\le\sqrt{t}\sqrt{t}\le\sqrt{t}\sqrt{\frac{(c_m)}{(b_m)m}}$$

bulunur.

$v\geq 1$ için

$$\begin{aligned}Z_{v,m,0}(t) &= \binom{m}{v}(\frac{(b_m)t}{(c_m)})^v(\frac{v(c_m)}{(b_m)(m-v+1)}-t)\\ &\le \binom{m}{v}(\frac{(b_m)t}{(c_m)})^v\frac{v(c_m)}{(b_m)(m-v+1)}\\ &= \frac{m!}{v!(m-v)!}t^v.\frac{v}{m-v+1}.(\frac{(b_m)}{(c_m)})^{v-1}\\ &= \binom{m}{v-1}(\frac{(b_m)t}{(c_m)})^{v-1}(t)\\ &\le (1+\frac{(b_m)t}{(c_m)})^m(t)\le et\\ &= e\sqrt{t}\sqrt{t}\le e\sqrt{\frac{(c_m)t}{(b_m)m}}\end{aligned}$$

dır $\Rightarrow r=0$ için $\forall v\geq 0$ için

$$E_m(t)\le e\sqrt{\frac{(c_m)t}{(b_m)m}}$$

dır.

Şimdi $r\in\{1,2,...,m-1\}$ olarak göz önüne alınabilir.

Sabit bir $r\in\{1,2,...,m-1\}$ için $Z_{v,m,r}(t)$ için bir üst sınır tahmini bulunmalıdır.

$t \in \left[\frac{(c_m)r}{(b_m)(m-r+1)}, \frac{(c_m)(r+1)}{(b_m)(m-r)}\right]$ ve $v \in \{0, 1, ..., m\}$ olsun

İki durum söz konusudur: $v \geq r+1$ ve $v \leq r$ dır.

1. Durum: $v \geq r+1$ olsun.

Alt durum (a): $v - \sqrt{v+1} \leq r$ olsun.

$$\begin{aligned} Z_{v,m,r}(t) &= z_{v,m,r}(t)(\frac{(c_m)v}{(b_m)(m-v+1)} - t) \\ &\leq 1(\frac{(c_m)v}{(b_m)(m-v+1)} - \frac{(c_m)r}{(b_m)(m-r+1)}) \\ &= \frac{(c_m)}{(b_m)}.\frac{(m+1)(v-r)}{(m-v+1)(m-r+1)} \end{aligned}$$

verilen koşuldan $v - \sqrt{v+1} \leq r$ olup

$$Z_{v,m,r}(t) \leq \frac{(c_m)}{(b_m)}.\frac{(m+1)(v-(v-\sqrt{v+1}))}{(m-r-\sqrt{v+1}+1)(m-r+1)}$$

dır.

$\frac{(c_m)r}{(b_m)(m-r+1)} \leq t$ olup $\frac{(c_m)(m+1)}{(b_m)(m-r+1)} \leq (t + \frac{(c_m)}{(b_m)})$ yazılabilirdir.

$$\Rightarrow Z_{v,m,r}(t) \leq (t + \frac{(c_m)}{(b_m)}).\frac{\sqrt{v+1}}{m-r-\sqrt{v+1}+1}$$

elde edilir. Ayrıca bu alt durumda $v+1 \leq 4r$ dir. Olmayana ergi yöntemiyle $v+1 > 4r$ olsun. $\Rightarrow \sqrt{v+1} > 2\sqrt{r}$ dir.

Buradan $4r - 1 - 2\sqrt{r} < v - \sqrt{v+1} \leq r$ yani $3r - 1 < 2\sqrt{r}$ dir. Bu eşitsizlik ise $r \geq 1$ için sağlanmaz, çelişki elde edilir. $\Rightarrow v+1 \leq 4r$ dır.

Ayrıca $\frac{(c_m)r}{(b_m)(m-r+1)} \leq t$ olduğundan

$$r \leq \frac{(m+1)t}{\frac{(c_m)}{(b_m)} + t} \;\Rightarrow\; \sqrt{r} \leq \frac{\sqrt{(m+1)t}}{\sqrt{\frac{(c_m)}{(b_m)} + t}}$$

dır.

ve $m+1>r+2\sqrt{r}$ için

$$\begin{aligned}
Z_{v,m,r}(t) &\leq (t+\frac{(c_m)}{(b_m)}).\frac{2\sqrt{r}}{(m-r+1)-2\sqrt{r}} \\
&\leq 2(t+\frac{(c_m)}{(b_m)}).\frac{\frac{\sqrt{(m+1)t}}{\sqrt{\frac{(c_m)}{(b_m)}+t}}}{(m-r+1)-2\frac{\sqrt{(m+1)t}}{\sqrt{\frac{(c_m)}{(b_m)}+t}}} \\
&= 2(t+\frac{(c_m)}{(b_m)})^{\frac{3}{2}}.\frac{\sqrt{(m+1)}\sqrt{t}}{(t+\frac{(c_m)}{(b_m)})(m-r+1)-2\sqrt{(m+1)}.\sqrt{t}.\sqrt{\frac{(c_m)}{(b_m)}+t}} \\
&\leq 2(t+\frac{(c_m)}{(b_m)})^{\frac{3}{2}}.\frac{\sqrt{(m+1)}\sqrt{t}}{(m+1)-2\sqrt{(m+1)}.\sqrt{t}.\sqrt{\frac{(c_m)}{(b_m)}+t}}
\end{aligned}$$

dır. Buradan $m+1\geq 16t(t+\frac{(c_m)}{(b_m)})$ için

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{(m+1)}}{(m+1)-2\sqrt{(m+1)}.\sqrt{t}.\sqrt{\frac{(c_m)}{(b_m)}+t}} &\leq \frac{1}{\sqrt{(m+1)}-2\sqrt{t}.\sqrt{\frac{(c_m)}{(b_m)}+t}} \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{(m+1)}}
\end{aligned}$$

dır. Bu koşul aynı zamanda $m+1\geq r+2\sqrt{r}$ olmasını garantiler.

Sonuç olarak $m+1\geq 16t(t+\frac{(c_m)}{(b_m)})$ için

$$Z_{v,m,r}(t)\leq 4(t+\frac{(c_m)}{(b_m)})^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}.\frac{1}{\sqrt{(m+1)}}$$

elde edilir.

Alt durum (b): $v-\sqrt{v+1}>r$ olsun.

$f(t)=t-\sqrt{t+1}$ azalmayan bir fonksiyon olup $\Rightarrow \overline{v}-\sqrt{\overline{v}+1}\leq r$ olacak şekilde bir $\overline{v}\in\{0,1,...,m\}$ maksimum değeri vardır.

Bu durumda $v_1=\overline{v}+1$ için $v_1-\sqrt{v_1+1}>r$ dır.

$$\begin{aligned}
Z_{\overline{v}+1,m,r}(t) &= z_{\overline{v}+1,m,r}(t)(\frac{(c_m)(\overline{v}+1)}{(b_m)(m-\overline{v})}-t) \\
&\leq (\frac{(c_m)(\overline{v}+1)}{(b_m)(m-\overline{v})}-t)
\end{aligned}$$

Burada f fonksiyonu azalmayan ve $f(r) < r$ olduğundan $v_1 \geq r+1$ olmasını gerektiğinden

$$Z_{\overline{v}+1,m,r}(t) \leq 4(t+\frac{(c_m)}{(b_m)})^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}.\frac{1}{\sqrt{(m+1)}}$$

dır. Ayrıca bir önceki duruma benzer olarak $v_1 \leq 4r$ dır.

Ayrıca Lemma 4.6,i)'den

$$Z_{\overline{v}+1,m,r}(t) \geq Z_{\overline{v}+2,m,r}(t) \geq ... \geq Z_{m,m,r}(t)$$

Böylece $v \in \{\overline{v}+1, \overline{v}+2, ..., m\}$ için

$$Z_{v,m,r}(t) \leq 4(t+\frac{(c_m)}{(b_m)})^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}.\frac{1}{\sqrt{(m+1)}}$$

olur.

2. Durum: $v \leq r$ olsun.

Alt durum (a): $v+\sqrt{v} > r$ olmak üzere $v \neq r$ için

$$\begin{aligned} Z_{v,m,r}(t) &= z_{v,m,r}(t)(t-\frac{(c_m)v}{(b_m)(m-v+1)}) \\ &\leq 1.(\frac{(c_m)(r+1)}{(b_m)(m-r)} - \frac{(c_m)v}{(b_m)(m-v+1)}) \\ &= \frac{(c_m)}{(b_m)}.\frac{(m+1)(r-v)+(m+1)}{(m-r)(m-v+1)} \\ &\leq \frac{(c_m)}{(b_m)}.\frac{(m+1)(r-v)+(m+1)(r-v)}{(m-r)(m-v+1)} \\ &= \frac{(c_m)}{(b_m)}.\frac{2(m+1)(r-v)}{(m-r)(m-v+1)} \end{aligned}$$

Verilen koşul $v+\sqrt{v} > r$ ve $v \leq r$ den $r-v < \sqrt{v} < \sqrt{r}$ dır.

$$\Rightarrow Z_{v,m,r}(t) \leq \frac{(c_m)}{(b_m)}.\frac{2(m+1)\sqrt{r}}{(m-r)(m-r+1)}$$

$r \leq \frac{(m+1)t}{\frac{(c_m)}{(b_m)}+t}$ eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
Z_{v,m,r}(t) &\leq \frac{2(c_m)}{(b_m)}.\frac{(m+1)\sqrt{\frac{(m+1)t}{\frac{(c_m)}{(b_m)}+t}}}{(m-\frac{(m+1)t}{\frac{(c_m)}{(b_m)}+t})(m+1-\frac{(m+1)t}{\frac{(c_m)}{(b_m)}+t})} \\
&= \frac{2(c_m)}{(b_m)}.\frac{\sqrt{(m+1)}\sqrt{t}(\frac{(c_m)}{(b_m)}+t)^{\frac{-1}{2}}(m+1).(\frac{(c_m)}{(b_m)}+t)^2}{((\frac{(c_m)}{(b_m)}+t)m-(m+1)t)((m+1)(\frac{(c_m)}{(b_m)}+t)-(m+1)t)} \\
&= \frac{2\sqrt{(m+1)}\sqrt{t}(\frac{(c_m)}{(b_m)}+t)^{\frac{3}{2}}}{(\frac{(c_m)}{(b_m)}m-t)} \\
&\leq \frac{2\sqrt{(m+1)}\sqrt{t}(\frac{(c_m)}{(b_m)}+t)^{\frac{3}{2}}}{(m-t)}
\end{aligned}$$

olur.

$m \geq 1+2t$ için $\frac{\sqrt{m+1}}{m-t} \leq \frac{2}{\sqrt{m+1}}$ dir. Böylece $m+1 \geq 2t+2$ için

$$Z_{v,m,r}(t) \leq 4(t+\frac{(c_m)}{(b_m)})^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}.\frac{1}{\sqrt{(m+1)}}$$

olur.

Şimdi $v=r$ alınarak

$$\begin{aligned}
Z_{v,m,r}(t) &= Z_{r,m,r}(t) = z_{r,m,r}(t)(t-\frac{(c_m)r}{(b_m)(m-r+1)}) \\
&\leq 1.(\frac{(c_m)(r+1)}{(b_m)(m-r)}-\frac{(c_m)r}{(b_m)(m-r+1)}) \\
&= \frac{(c_m)}{(b_m)}.\frac{(m+1)}{(m-r)(m-r+1)} \\
&\leq \frac{2(c_m)}{(b_m)}.\frac{(m+1)\sqrt{r}}{(m-r)(m-r+1)}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece bu durum $v<r$ durumuna dönüşür.

Alt durum (b): $v+\sqrt{v} \leq r$ olsun.

$f(t)=t+\sqrt{t}$ fonksiyonu azalmayan olup $\widetilde{v}=\{0,1,...,m\}$ olmak üzere

$\widetilde{v}+\sqrt{\widetilde{v}} > r$ olacak şekilde minimum değer vardır.

Bu durumda $v_2=\widetilde{v}-1$ için $v_2+\sqrt{v_2} \leq r$ olup

$r \leq \frac{(m+1)t}{\frac{(c_m)}{(b_m)}+t}$ eşitsizliğini ve $\widetilde{v} \neq r$ olmasını göz önüne alarak 2.Durum alt durum (a)'ya benzer olarak

$$\begin{aligned}
Z_{\widetilde{v}-1,m,r}(t) &= z_{\widetilde{v}-1,m,r}(t)(t - \frac{(c_m)(\widetilde{v}-1)}{(b_m)(m-\widetilde{v}+2)}) \\
&\leq 1.(\frac{(c_m)(r+1)}{(b_m)(m-r)} - \frac{(c_m)(\widetilde{v}-1)}{(b_m)(m-\widetilde{v}+2)}) \\
&= \frac{(c_m)}{(b_m)}.\frac{(m+1)(r-\widetilde{v})+2(m+1)}{(m-\widetilde{v}+2)(m-r)} \\
&\leq \frac{(c_m)}{(b_m)}.\frac{(m+1)(r-\widetilde{v})+2(m+1)(r-\widetilde{v})}{(m-\widetilde{v}+2)(m-r)} \\
&= \frac{(c_m)}{(b_m)}.\frac{3(m+1)(r-\widetilde{v})}{(m-\widetilde{v}+2)(m-r)}
\end{aligned}$$

dır.

$\widetilde{v} \leq r$ olup ve verilen koşul $r - \widetilde{v} < \sqrt{\widetilde{v}}$ den $\sqrt{\widetilde{v}} \leq \sqrt{r}$ olup

$$Z_{\widetilde{v}-1,m,r}(t) \leq \frac{(c_m)}{(b_m)}.\frac{3(m+1)\sqrt{r}}{(m-r+2)(m-r)}$$

$r \leq \frac{(m+1)t}{\frac{(c_m)}{(b_m)}+t}$ den

$$\begin{aligned}
Z_{\widetilde{v}-1,m,r}(t) &\leq \frac{(c_m)}{(b_m)}.\frac{3(m+1)\sqrt{\frac{(m+1)t}{\frac{(c_m)}{(b_m)}+t}}}{(m-\frac{(m+1)t}{\frac{(c_m)}{(b_m)}+t}+2)(m-\frac{(m+1)t}{\frac{(c_m)}{(b_m)}+t})} \\
&\leq \frac{(c_m)}{(b_m)}.\frac{3(m+1)\sqrt{\frac{(m+1)t}{\frac{(c_m)}{(b_m)}+t}}}{(m-\frac{(m+1)t}{\frac{(c_m)}{(b_m)}+t}+1)(m-\frac{(m+1)t}{\frac{(c_m)}{(b_m)}+t})} \\
&= \frac{3\sqrt{(m+1)}\sqrt{t}(\frac{(c_m)}{(b_m)}+t)^{\frac{3}{2}}}{(\frac{(c_m)}{(b_m)}m-t)} \\
&\leq \frac{3\sqrt{(m+1)}\sqrt{t}(\frac{(c_m)}{(b_m)}+t)^{\frac{3}{2}}}{m-t}
\end{aligned}$$

Eğer $m \geq 4t+3$ ise $\frac{\sqrt{m+1}}{m-t} \leq \frac{4}{3}.\frac{1}{\sqrt{m+1}}$ olup

$$Z_{\widetilde{v}-1,m,r}(t) \leq 4(t+\frac{(c_m)}{(b_m)})^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}.\frac{1}{\sqrt{(m+1)}}$$

dır.

Şimdi $\widetilde{v}=r$ olsun.

$$\begin{aligned}
Z_{\widetilde{v}-1,m,r}(t) &= Z_{r-1,m,r}(t)=z_{r-1,m,r}(t)(t-\frac{(c_m)(r-1)}{(b_m)(m-r+2)}) \\
&\leq 1.(\frac{(c_m)(r+1)}{(b_m)(m-r)}-\frac{(c_m)(r-1)}{(b_m)(m-r+2)})=\frac{(c_m)}{(b_m)}.\frac{2(m+1)}{(m-r)(m-r+2)} \\
&\leq \frac{2(c_m)}{(b_m)}.\frac{(m+1)\sqrt{r}}{(m-r)(m-r+2)}\leq\frac{3(c_m)}{(b_m)}.\frac{(m+1)\sqrt{r}}{(m-r)(m-r+2)}
\end{aligned}$$

dır.

Bu da daha önceki 2.Durum alt durum (b)'ye benzer olarak

$$Z_{\widetilde{v}-1,m,r}(t)\leq 4(t+\frac{(c_m)}{(b_m)})^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}.\frac{1}{\sqrt{(m+1)}}$$

elde edilir (yani $\widetilde{v}<r-1$ durumuna dönüşür).

Lemma 4.6,ii)'den

$$Z_{\widetilde{v}-1,m,r}(t)\geq Z_{\widetilde{v}-2,m,r}(t)\geq ...\geq Z_{0,m,r}(t)$$

olup buradan $v\in\{0,1,...,r\}$ için

$$Z_{v,m,r}(t)\leq 4(t+\frac{(c_m)}{(b_m)})^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}.\frac{1}{\sqrt{(m+1)}}$$

yazılabilir. Tüm bu sonuçları göz önüne alınarak

$m+1\geq\max\left\{16t(t+\frac{(c_m)}{(b_m)}),4t+4\right\}$ için

$$Z_{v,m,r}(t)\leq 4(t+\frac{(c_m)}{(b_m)})^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}.\frac{1}{\sqrt{(m+1)}}$$

elde edilir ki buradan

$$E_m(t)\leq 4(t+\frac{(c_m)}{(b_m)})^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}.\frac{1}{\sqrt{(m+1)}}$$

olur ve (5.1)'de $\delta=(t+\frac{(c_m)}{(b_m)})^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}.\frac{1}{\sqrt{(m+1)}}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\left|A_m^{(Z)}(g)(t)-g(t)\right| &\leq (1+\frac{4(t+\frac{(c_m)}{(b_m)})^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}.\frac{1}{\sqrt{(m+1)}}}{(t+\frac{(c_m)}{(b_m)})^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}.\frac{1}{\sqrt{(m+1)}}})\omega_1(g,(t+\frac{(c_m)}{(b_m)})^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}.\frac{1}{\sqrt{(m+1)}})_{[0,\infty)} \\
&= 5\omega_1(g,\frac{(t+\frac{(c_m)}{(b_m)})^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}}{\sqrt{(m+1)}})_{[0,\infty)}
\end{aligned}$$

dır.

6. SONUÇLAR

Bu tezde maksimum çarpım tipi Bleimann-Butzer-Hahn operatörün bir modifiyesi olan,

$g : [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ sürekli sınırlı bir fonksiyon olsun. $0 \leq t < \infty$ ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$A_m^{(Z)}(g)(t) = \frac{\bigvee_{v=0}^{m} S_{m,v}(t) g(\frac{(c_m)v}{(b_m)(m+1-v)})}{\bigvee_{v=0}^{m} S_{m,v}(t)}$$

şeklinde $A_m^{(Z)}$ lineer olmayan operatör tanımlandı.

Burada $S_{m,v}(t) = \binom{m}{v}(\frac{(b_m)t}{(c_m)})^v$ şeklinde tanımlanır ve (b_m) ve (c_m) pozitif reel sayıların birer dizisidir ayrıca

$\lim\limits_{m\to\infty} \frac{(\frac{(c_m)}{(b_m)})^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m+1}} = 0$ ve $v > 0$ olmak üzere $\left|\frac{(b_m)}{(c_m)}\right| = O(v)$ dır.

Bu operatörün yaklaşım hızı;

$g : [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu düzgün sürekli olsun ve

$$\forall m + 1 \geq \max\left\{16t(t + \frac{(c_m)}{(b_m)}), 4t + 4\right\}$$

için

$$\left|A_m^{(Z)}(g)(t) - g(t)\right| \leq 5\omega_1(g, \frac{(\frac{(c_m)}{(b_m)} + t)^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}}{\sqrt{m+1}})_{[0,\infty)}, \forall m \in \mathbb{N}, t \in [0,\infty)$$

şeklindedir. Burada

$$\omega_1(g,\delta)_{[0,\infty)} = \sup\left\{|g(t) - g(y)|\,; t, y \in [0,\infty)\,,\ |t - y| \leq \delta\right\}$$

süreklilik modülüdür.

7. ÖNERİLER

Bu çalışmada maksimum çarpım tipi Bleimann-Butzer-Hahn operatörleri bir modifiyesi tanımlayıp bu operatörün süreklilik modülü kullanarak yaklaşım hızı hesaplanmıştır. Yaklaşım teorisinin günümüzde biyomedikal, sağlık, fizik ve mühendislik gibi birçok alanda uygulamaları mevcut olup, bu alanda yeni çalışmalara devam edilmektedir. Özellikle çok değişkenli istatistik, sayısal analiz v.b alanlarda kullanılır ve geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

ALAHMAD ALDHEFEERY, A. ve KIRCI SERENBAY, S., 2023. Approxmation of Generalized Bleimann-Butzer-Hahn Operator of Maximum-Product Type. 10. Uluslararası Uygulamalı Bilimler Kongresi, 22-24 Aralık, Cilt 2, İzmir, s.2365-2370.

BEDE, B., NOBUHARA, H. FODOR, J. and HİROTA, K., 2006. Max-Product Shepard Approximation Operators. Journal of Advenced Computational Intelligence and Intelligent İnformatics,10(4): 494-497.

BEDE, B. and GAL, S. G., 2010. Approximation by Nonlinear Bernstein and Favard-Szasz-Mirakyan Operators of Max-Product Kind. Journal of Concrete and Applicable Mathematics, 8(2): 193-207.

BEDE, B., GAL, S. G. and COROIANU, L., 2010. Approximation and Shape Preserving Properties of The Nonlinear Bleimann-Butzer-Hahn Operators of Max-Product Kind. Commentationes Mathematicae Universitatis. Carolinae, 51(3): 397-415.

BEDE, B., GAL, S. G. and COROIANU, L., 2016. Approximation by Max-Product Type Operators. Springer, Berlin, no 2 ,17-19.

BERNSTEIN, S. N., 1912-1913. Demostration du theoreme de Weierstrass fondee sur le calcul de probabilites. Comm. Soc. Math. Kharkow, 13(2): 1-2.

BLEİMANN, G., BUTZER, P. L. and HAHN, L., 1980. A Bernstein-Type Operator Approximating Continuous Functions on The Semi-Axis. Indagationes Mathematicae, 42: 255-262.

CHLODOWSKY, I., 1937. Sur le developpment des fonction definies dans un interval infini en series de polynomes de M. S. Bernstein. Compositio Math., 4: 380-393.

EREN, M. ve GÖNÜL BİLGİN, N., 2022. Simetrik Aralıkta Tanımlı Bernstein Tipli Bazı Operatörlerle Yaklaşım. Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Zonguldak, 129s.

GADZHIEV, A. D. 1976. Theorems of the type of P.P. Korovkin' s theorems. In Russian, Math. Z. 20(5): 781-786 traslated in Math. Notes, 20(5-6): 995-998.

GÜNGÖR, Ş. Y. ve İSPİR. N., 2018. Lineer Olmayan Bernstein Tip Maksimum-Çarpım Operatörleri İle Yaklaşım. Gazi üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara, 76s.

HACISALİHOĞLU, H., ve HACIYEV, A., 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları no:31, Ankara, 1-94.

KANTOROVICH, L. V., 1930. Sur certains d'eveloppements suivants les polynomes de la forme de S. Bernstein. I, II, C. R. Acad. URSS, 563-568, 595-600.

KIRCI SERENBAY, S. ve BARUĞ, F., 2023. Lineer Olmayan Maksimum-Çarpım Tipindeki Operatörlerin Yaklaşım Özellikleri. Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Şanlıurfa, 31s.

KIRCI SERENBAY, S. ve YEŞİLNACAR BİNMAR, A. K., 2023. Maksimum Çarpım Tipi İki Değişkenli Operatörlerin Yaklaşım Özellikleri. Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Şanlıurfa, 37s.

KREYSZIG, E., 1978. Introductory Functional Analysis With Applications, John wiley and sons, : Canada.

KOROVKIN, P. P., 1953. Convergence of Linear Positive Operators in the Spaces of Continuous Functions (Russian), Doklady Akad. Nauk. SSSR (N.S.), 90, 961-964.

LORENTZ, G. G., 1953. Bernstein Polynomials. University Of Toronto Press, Toronto.

SARI, E. ve DUMAN, O., 2015. Maksimum-Çarpım Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri. TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Ankara, 39s.

SZASZ, O., 1950. Generalization of Bernstein's polynomials to the infinite interval. Journal of Research of the National Bureau of Standards, 45, 239-245.

WEİERSTRASS, K., 1885. Über Die analytische darstellbarkeit sogenonnter willkrlicher functionan einer reellen vernderlichen. Sitzung sberichte der Kriglich Previschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 633-639/ 789-805.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Ala ALAHMAD ALDHEFEERY

EĞİTİM

Derece		**Adı**	**Bitirme Yılı**
Üniversite	:	Harran Üniversitesi, Şanlıurfa	2022
Yüksek Lisans	:	Harran Üniversitesi, Şanlıurfa	2024

UZMANLIK ALANI

Matematik

YABANCI DİLLER

Arapça