T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SİMETRİK ARALIK ÜZERİNDE BERNSTEİN POLİNOMLARININ BİR MODİFİKASYONU

Zehra BİLGEN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2023

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET ....
ABSTRACT i
TEŞEKKÜR ii
ŞEKİLLER DİZİNİ iii
ÇİZELGELER DİZİNİ iv
1. GİRİŞ 1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 4
3. MATERYAL ve YÖNTEM 8
    3.1. Temel Kavramlar 8
        3.1.1. Tek Değişkenli Bernstein Operatörleri 14
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA 18
    4.1. Operatörünün Momentleri 26
    4.2. $Z\neg$ Operatörü İçin Voronovskaja Tip Asimtotik Yaklaşım. 29
    4.3. Grafik ve Nümerik Değerler Taplosu 32
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER 35
KAYNAKLAR 36

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SİMETRİK ARALIK ÜZERİNDE BERNSTEİN POLİNOMLARININ BİR MODİFİKASYONU

Zehra BİLGEN

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Aydın İZGİ
Yıl: 2023, sayfa: 38

Bu çalışmada simetrik aralık üzerinde Bernstein polinomlarının bir modifikasyonunun yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızı incelemiştir. Bernstein polinomlarının simetrik aralık üzerindeki modifikasyonu

$$Z_{\daleth}(h,\Psi)=\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)\sum_{j=0}^{\daleth}\binom{\daleth}{j}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)^{j}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}-\Psi\right)^{\daleth-j}h\left(\left(2\frac{j}{\daleth}-1\right)\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Operatörün merkezi momentleri ve süreklilik mödülü yardımıyla yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızı incelenmiştir. Ayrıca $Z_{\daleth}(h,\Psi)$ operatörünün lipschitz sınıfındaki yaklaşımı incelenmiştir. Son olarak operatörün belirli fonksiyonlara yaklaşımı, grafikler ve hata paylarını içeren nümerik değer tabloları yardımıyla gösterilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Bernstein polinomları, lineer pozitif operatörler, süreklilik modülü, lipschitz koşulu, korovkin teoremi

ABSTRACT

MSc Thesis

A MODIFICATION OF BERNSTEIN POLYNOMALS ON SYMMETRIC RANGE

Zehra BİLGEN

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Aydın İZGİ
Year: 2023, page: 38

This work examines the approximation properties and rate of convergence of a modification of Bernstein polynomials on a symmetric interval. The modification of Bernstein polynomials on a symmetric interval is defined as

$$Z_{\daleth}\left(h,\Psi\right)=\left(\frac{\daleth+1}{2\left(\daleth+2\right)}\right)\sum_{j=0}^{\daleth}\binom{\daleth}{j}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)^{j}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}-\Psi\right)^{\daleth-j}h\left(\left(2\frac{j}{\daleth}-1\right)\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right).$$

The approximation properties and rate of convergence of the operator have been studied using its central moments and continuity modulus. Additionally, the approximation of the $Z_{\daleth}(h,\Psi)$ operator in the Lipschitz class has been examined. Finally, the approximation of the operator to certain functions has been demonstrated using numerical value tables that include graphs and error margins.

KEYWORDS: Bernstein polynomials, linear positive operators, modulus of continuity, lipschitz condition, korovkin theorem

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın belirlemesi ve yürütülmesi sırasındae maddi-manevi desteğini esirgemeyen kıymetli deneyim ve bilgilerini her zaman benimle paylaşan değerli danışmanım sayın Prof. Dr. Aydın İZGİ'ye teşekkürü bir borç bilirim.

Latex programını geliştirmemde her aşamada desteğini hep yanımda hissettiğim ve proğramı bana öğreten Prof. Dr. Haydar ALICI'ya çok teşekkür ederim.

Tezimin her aşamasında derdimi çeken ve desteğini esirgemeyen Dr. Harun ÇİÇEK'e teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca destekleriyle hayatımın her anında yanımda olan maddi -manevi her şeyimi üstlenen : BİLGEN aileme, Annem Nadile , Babam Mehmet , Ağabeylerim: Fesih , Semih,İdris,Üzeyir ,Suat ,Kenan ,Yakup ,İshak , ablalarım: Cemile, Sadiye , Remziye' ye çok çok teşekkür ederim.

Yüksek Lisans Proğramına başvuru yapmama vesile olan ve bitimine kadar stresime ortak olan yol arkdaşım Hasan ÇAY'a çokça teşekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 4.1. $Z\neg(h;\Psi)$ operatörünün $h(\Psi) = ln(3 - sin(2\Psi\pi)$ fonksiyonuna yaklaşımı. 32
Şekil 4.2. $Z\neg(h;\Psi)$ operatörünün $h(\Psi) = \Psi^3$ fonksiyonuna yaklaşımı. 33
Şekil 4.3. $Z\neg(h;\Psi)$ operatörünün $h(\Psi) = (\Psi^3)sin(2\Psi\pi)$ fonksiyonuna yaklaşımı. 33

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

Çizelge 4.1. $\Psi = 0.3$ noktasınde $\daleth$ nin farklı değerleri için $Z_{\daleth}(h;\Psi)$ operatörlerinin nümerik hata payları. 34
Çizelge 4.2. $\daleth = 100$ değeri için farklı Ψ noktalarında $Z_{\daleth}(h;\Psi)$ operatörlerinin nümerik hata payları. . 34

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi ; 19 yüzyılın sonlarına doğru ortaya çıkan matematiğin dinamik bir alanı olarak bilinmektedir. Yaklaşımlar teorisi, fonksiyonlar teorisinin en yaygın uygulama alanı olan bölümlerden bir tanesi olarak nitelendirilebilir. Yaklaşımlar teorisinin asıl hedefi; fonksiyon uzaylarındaki elemanları bilinen normda uzayın bir alt uzayının veya farklı bir uzayın elemanlarından elde edilmiş dizilerin limitleri biçiminde ifade edilmesidir. Bu ifadede, üzerinde çalıştığımız uzaydan aldığımız çalışması güç olan bir fonksiyona aynı uzaydan aldığımız iyi niteliklere sahip olan polinom dizileriyle yaklaşmaktır. Bahsettiğimiz iyi nitelikli fonksiyonlara ; cebirsel polinomlar, trigonometrik polinomları ve sonsuz mertebeden diferensiyellenebilen fonksiyonları örnek olarak belirtebiliriz. Ancak genel itibariyle fonksiyonlara yaklaşmak için en kolay yapılar lineer pozitif operatörlerdir.Yaklaşım teorisinde son altmış yıldır lineer pozitif operatörlerinin önemli bir yeri vardır ve bu alanda çok çalışma yapılmıştır ve yapılmaktadır.Bu operatörlerin monoton operatör olmasının sebebi pozitif fonksiyonları pozitif fonksiyonlara dönüştürdüklerinden dolayıdır. Bu yüzden pozitif operatörler önemli eşitsizlikler ispatlamaya yardımcı olur .

1885 yılında Alman matematikçi Karl Theoder W.Weierstrass ,kompakt bir aralıkta sürekli her bir fonksiyona aynı aralıkta yaklaşan bir polinom dizisinin var olduğunu ispatlamıştır.

1912 yılında Bernstein, Weierstrass'ın sözünü ettiği polinomlara örnek olması açısından binom açılımını kullanarak bir polinom dizisi tanımlanmıştır.

$\Psi \in [0,1]$ olmak üzere fonksiyona yaklaşan polinomun kendi adıyla anılan Bernstein polinomu olduğunu ispatlamıştır. Bu polinom;

$$B_{\daleth}(h,\Psi)=\sum_{J=0}^{\daleth}\binom{\daleth}{j}\Psi^{j}(1-\Psi)^{\daleth-j}h\left(\frac{j}{\daleth}\right)$$

şeklindedir. Burada $h \in C[0,1]$, $\Psi \in [0,1]$, $\daleth \in \mathbb{N}$ dır (Bernstein (1912);Lorentz.1953).

Bernsteinın bu çalışmasından sonra;1952 de Bohman ve 1953'te Korovkin pozitif operatörlerin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsama ile alakalı önemli bir teoremi ispatlamışlardır. Lineer pozitif operatörlerinin yaklaşımı ile ilgili olan Bohman ve Korovkin teoremi aşağıda verilmiştir.

$(Z_\daleth)$ lineer pozitif operatörler dizisi olsun. h kompakt $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli ve bütün reel eksende sınırlı bir fonksiyon olmak üzere $\daleth \longrightarrow \infty$ için $(Z_\daleth)$ operatörü ile aşağıda verilen üç şart sağlandığı taktirde $(Z_\daleth)$ operatörleri altında h fonsiyonun görüntüsü h fonksiyona düzgün yakınsar.

$$Z_\daleth(1; \Psi) \quad \rightrightarrows 1 \tag{1.1}$$

$$Z_\daleth(t; \Psi) \quad \rightrightarrows \Psi \tag{1.2}$$

$$Z_\daleth(t^2; \Psi) \quad \rightrightarrows \Psi^2 \tag{1.3}$$

Burada " $\rightrightarrows$ " düzgün yakınsaklığı ifade etmektedir.

Yukarıda belirtiğimiz Korovkin şartları Weierstrass'ın söylemiş olduğu ifadeyi kolaylaştırarak ispatladığından ve Bernsteinda, Weierstrass'ın bahsettiği polinomu belirttiğinden dolayı lineer pozitif operatördeki çalışmalar hız kazanmıştır.

1930 yılında Bernstein polinomları $C[0, 1]$ uzayında tanımlanan , integrallenebilir fonksiyonlar yakınsaklığını elde etmek amacıyla modifiye edilmiştir ve bu modifikasyon ilk defa Kantorovich tarafından tanımlanmıştır.

Voronovskaya 1932 yılında, $Z_\daleth(h)$'ların h fonksiyonunun $[0, 1]$ kompakt aralığında bir Ψ noktasında h fonksiyonun Taylor seri açılımı yardımıyla h fonksiyonunun türevleri cinsinden yazıla bildiğini göstermiştir.

Szasz 1950 yılında operatörün tanımlı olduğu aralığı değiştirerek ;normalde sonlu aralık bulunan Bernstein operatörünü sonsuz aralığa genişletilerek yeniden modifiye etmiştir. Ve yaklaşım özellikleri incelemiştir.

Geçmişten günümüze yaklaşımlar teorisinin ortaya çıkış sebebini, lineer pozitif operatörlerin tanımını, gelişiminin araştırılıp günümüzde bu alanla ilgili yapılan bazı çalışmaların literatür taramalarının anlatıldığı bölüm, tezin giriş bölümünde yazılmaktadır.

Tezin ikinci bölümünde tez çalışmamızı yaparken yararlandığımız önceki çalışmalardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde tez için gerekli olan bazı temel teoremlere , tanımlara ve materyallerden bahsedilmiştir. Tezin dördüncü bölümü tamamen orjinal olup aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Tanımlanan operatörlerin; lineer pozitifliği, moment ve merkezi momentleri hesaplanması, Korovkin teoremin şartlarının sağladığı, $\left[-\frac{\gimel+2}{\gimel+1}, \frac{\gimel+2}{\gimel+1}\right]$ simetri aralığı üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösterilmiş ve süreklilik modülü vasıtasıyla yaklaşım hızı elde edilmiştir. Tanımlanan operatörleri için Voronovskaya-tipi teorem ispatlanmıştır. Lipschitz sınıfında olan h fonksiyonlar için operatörün yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Maple proğramı yardımıyla farklı sürekli fonksiyonlar için grafik çizimleri ve nümerik değerler elde edilmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

1885 yılında Alman matematikçi Karl- Weiertrass tanımlayıp ispatladığı sonucu şu şekildedir; her eleman, herhangi bir topolojik uzayın içerisinde yoğun olan bir alt uzayın noktalarından oluşan diziye yakınsar demiştir. $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli ve sınırlı fonksiyonlar için tanımlı olan

$$W_{\daleth}(h,\Psi)=\sqrt{\frac{\daleth}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e\frac{-\daleth(t-\Psi)^2}{2}h(t)dt \tag{2.1}$$

bu fonksiyon dizisi söz konusu fonksiyon h'a $\mathbb{R}$'nin kapalı ve sınırlı alt uzayları üzerinde yakınsak olduğunu kanıtlamıştır. Yani bu yaklaşım teoresinin temel teoremi olarakta adlandırılıp böylece, kompankt $[a,b]$ bölgesinde reel değerli sürekli her h fonksiyonu için keyfi bir $\epsilon>0$ cebirsel sayısı ve $\forall v\in[a,b]$ için;

$$|P_{\daleth}(\Psi)-h(\Psi)|<\epsilon$$

eşitliği sağlanır. Böylece sonlu $[a,b]$ aralığında sürekli her h fonksiyonuna düzgün yakınsayan en az bir polinomun varlığını ilk kez Weiertrass 1885'te tanımlayıp ispat etmiştir. Bu teoremin ispatı diğer matematikçiler tarafından karmaşık ve uzun bulunmuştur. 1912 yılında Weiertrass'ın ispatını kolaylaştıran veya farklı bir metotla öne süren Rus matemetikçisi S.N.Bernstein , bu polinomu $v\in[0,1]$ için;

$$B_{\daleth}(h,\Psi)=\sum_{j=o}^{\daleth}h\left(\frac{j}{\daleth}\right)\binom{\daleth}{j}\Psi^{j}(1-\Psi)^{\daleth-j} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlamıştır. Bernstei'nın yukarıda tanımladığı polinom dizisi $[0,1]$ aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonlara yaklaşılabileceğini ispat etmiştir.

Bernstein'ın 1912 yılındaki çalışmalarından sonra 1952'de Bohman ve 1953'te Korovkin fonksiyon uzaylar üzerinde tanımlı lineer pozitif operatörlerin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsamasıyla ilgili ve Bernstein 'ın ispatından daha kolay olan bazı önemli tanım ve teoremler sunmuşlardır. Genel itibariyle bu tanım ve teoremler Korovkin şartları denilir. Korovkin şartları ise şu şekildedir;

$$Z_\neg(1;\Psi) \quad \rightrightarrows 1 \tag{2.3}$$

$$Z_\neg(t;\Psi) \quad \rightrightarrows \Psi \tag{2.4}$$

$$Z_\neg(t^2;\Psi) \quad \rightrightarrows \Psi^2 \tag{2.5}$$

şeklinde ifade edilir.

Bu şartlar sayesinde fonksiyon uzayları üzerinde tanımlı lineer pozitif operatörlerin sürekli fonksiyonlara yaklaşımı çok daha kolay bir şekilde ispat edilmektedir.

Korovkin şartlarından sonra lineer pozitif operatörlerde yaklaşım çalışmaları hız kazanmıştır ve birçok bilim insanı tarafından çalışılmıştır.

Daha sonraki yıllarda Bernstein polinomları üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Bernstein polinomlarının; fonksiyonlar teorisi, geometri, sayısal analiz, fizik bilimleri gibi bir çok uygulama alanları vardır.

Aydın İZGİ danışmanlığında 2012 yılında bitirdiği Yüksek Lisans tez çalışmasında Ayşegül Çilo, $[-1, 1]$ aralığında Bernstein operatörlerini

$$A_n(h;\Psi) = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(1+x)^j(1-x)^{n-j}h\left(\frac{2j}{n}-1\right)$$

şeklinde tanımlanmış ve bu öperatörlerin yaklaşımını incelemiştir.(Çilo, 2012)

Bu çalışmalar ışığında, Harun ÇİÇEK ve Aydın İZGİ Bernstein polinomlarının yeni bir modifikasyonunu tanıtmışlardır;

$\alpha, \beta, x, y, u, s, p \leq 0$ ve $x \leq y, \alpha + \beta = 1, p \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$A_= \left(\frac{n+y}{n+x}^{n+p}\right)\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}x^k\left(\frac{n+y}{n+x}-x\right)^{n+p-k} h\left[\frac{n+y}{n+x}\left(\beta\frac{k}{n}+\alpha\frac{k+u}{n+p+s}\right)\right]$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Burada $A_n := (h;\alpha,\beta,x,y,u,s,p;x)$ ve $x \in \left[0,\frac{n+y}{n+x}\right]$, $h \in C[0,1]$. $x \leq y$ ’dır. Tanımlanan operatörde;

1. $\beta = 1$, $\alpha = p = 0$ ve $x = y$ klasik Bernstein polinomlarını verir

2. $\alpha = 1$, $\beta = p = 0$ ve $x = y$ Bernstein-Stancu polinomlarını verir,

3. $\beta = 1$,$\alpha = 0$ ve $x = y$ Bernstein-Schurer polinomlarını verir

4. $\beta = 1$ ve $\alpha = p = 0$, Bernstein-Izgi polinomlarını verir,

5. $\beta = 1, \alpha = p = x = 0$ ve $y = 1$, Bernstein-Deo polinomlarını verir.

şeklinde olur. Bu operatör bilinen birçok Bernstein genellemesini içerdiği için yaklaşımıda diğer operatörlere göre daha iyi sonuçlar verir. (ÇİÇEK ve ark. 2022)

1930 L.V.Kantorovich $[0, 1]$ kapalı aralığı üzerinde integrallenebilir h fonksiyonları için

$$K_{\daleth}(h, \Psi) = (\daleth + 1) \sum_{j=0}^{\daleth} \binom{\daleth}{j} \Psi^j (1 - \Psi)^{\daleth - j} \int_{\frac{j}{\daleth+1}}^{\frac{j+1}{\daleth+1}} h(t)dt \tag{2.6}$$

pozitif lineer operatörünü tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelenmiştir. $K_{\daleth}$ operatörlerine Kantorovich operatörleri olarak adlandırılmıştır.

1932 yılında Voronovskaya $Z_{\daleth}(h)$'ların h fonksiyonunun $[0, 1]$ kompakt aralığında sınırlı ve sabit bir v noktasında h fonksiyonun Taylor seri açılımı yardımıyla h fonksiyonunun türevleri cinsinden yazılabildiğini göstermiştir.

$$\lim_{\daleth \to \infty} \daleth [Z_{\daleth (h;\Psi) - f(\Psi)}] = \Psi \frac{(1 - \Psi)}{2} h''(\Psi) \tag{2.7}$$

Lipschitz sınıfı sürekli fonksiyonların bir alt uzayı olan, Bernstein polinomları için

$$|Z_{\daleth}(h; \Psi) - f(\Psi)| < \epsilon$$

eşitsizliğinden en iyi eşitsizlikler elde edilmiştir. 1953'de Lorentz $h \in Lip\alpha,\ 0 < \alpha \leqslant 1$ olmak üzere $[0, 1]$ kapalı aralığının her bir Ψ noktasında

$$|Z_{\daleth}(h; \Psi) - h(\Psi)| \leqslant M \left(\Psi \frac{(1 - \Psi)}{\daleth} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \tag{2.8}$$

eşitsizliğini polinomlara asimptotik yaklaşımını ifade edilmiştir.

Bernstein polinomları için $\omega(h; \delta)$ ile h fonksiyonunun süreklilik modülü T.Popoviciu(1935) tarafından ifade edilmek üzere

$$|h(\Psi) - Z_{\daleth}(h; \Psi)| \leqslant C\omega \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \right) \tag{2.9}$$

gösterilmiştir.

1937 yılında Chlodowsky , Bernstein operatörlerinin sınırlarını sonsuz aralığa taşımış

$$C_{\daleth}(h;\Psi)=\sum_{j=0}^{\daleth}\binom{\daleth}{j}\left(\frac{\Psi}{b\daleth}\right)^{j}\left(1-\frac{\Psi}{b\daleth}\right)^{\daleth-j}h\left(\frac{j}{\daleth}b\daleth\right),\daleth\in\mathbb{N} \tag{2.10}$$

Bernstein-Chlodowsky operatörleri adı verilen $C_{\daleth}$ operatörleri olarak adlandırılmıştır. Burada $(b\daleth)$ reel terimli ve $0\leqslant\Psi\leqslant b\daleth$ monoton artan ve pozitif sayı dizisidir.

$\lim_{\daleth\to\infty}b\daleth=\infty, lim_{\daleth\to\infty}\frac{b\daleth}{\daleth}=0$
koşullarını sağlar.

Bu çalışmalar ışığında tezimizde simetrik aralıkta Bernstein polinomlarının bir modifikasyonunu tanıttık ve bu operatörün yaklaşımını ve yaklaşım özelliklerini inceleyeceğiz. Yeni tanımladığımız opertaörümüz;

$$Z_{\daleth}\left(h,\Psi\right)=\left(\frac{\daleth+1}{2\left(\daleth+2\right)}\right)^{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)h\left(\left(2\frac{j}{\daleth}-1\right)\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)$$

burada

$$\theta_{\daleth,j}=\binom{\daleth}{j}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)^{j}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}-\Psi\right)^{\daleth-j}$$

ve

$$\Psi\in\left[-\frac{\daleth+2}{\daleth+1},\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right]$$

şeklindedir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde tezimizde kullanacağımız yaklaşım teorisinde önemli bir çalışama alana olan tek değişkenli fonksiyonlar için bazı tanım ve teoremler tanıtılacaktır.

Tanım 3.1. $V \subset \mathbb{R}$ kümesi boştan farklı $u \in V$ ve $h : V \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\Psi \in V$,$\forall\epsilon > 0$ için $|\Psi - u| < \delta$ ise $|h(\Psi) - f(u)|< \epsilon$ olmak üzere $\delta = \delta(\epsilon)$ sayısı varsa, h fonksiyonuna u noktasında süreklidir denir (Balci,1997).

Tanım 3.2. $V \subset \mathbb{R}$ kümesi boştan farklı , $h : V \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\Psi_1, \Psi_2 \in V$ olsun. $\epsilon > 0$ için $|\Psi_1 - \Psi_2| < \delta$ ise $|h(\Psi_1) - h(\Psi_2)| < \epsilon$ olacak şekilde $\Psi_1, \Psi_2 \in V$ nokları için en az bir $\epsilon' na$ bağlı bir δ sayısı var ise ,h fonksiyonu V üzerinde düzgün süreklidir denir (Balci,1997).

Tanım 3.3. $V \subset \mathbb{R}$ ve $V \neq \varnothing$ olmak üzere $h : V \to \mathbb{R}$ olsun . $\forall \in V$ iken $|h(\Psi)| \leq H$,$H > 0$ şeklinde bir $H \in \mathbb{R}$ değeri varsa h fonksiyonuna V kümesinde sınırlıdır denir (Musayev ve ark.2006).

Tanım 3.4. $(c, s) \neq \mathbb{R}$ ve $h : (c, s) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\Psi, t \in (c, s)$ olmak üzere

$$\lim_{t \to \Psi} \frac{h(t) - f(\Psi)}{t - \Psi} = H(\Psi)$$

sonlu limiti mevcutsa, $H(\Psi)$değerine h fonksiyonunun Ψ noktasındaki türevi denir. $h'(\Psi)$ veya $Dh(\Psi)$ şeklinde gösterilir. O halde h fonksiyonu Ψ noktasında türevlidir veya türevlenebilirdir denir (Musayev ve ark,2006).

Tanım 3.5. V,U vektör uzayların elemanları fonksiyonlar olan normlu uzaylar olur. V'den alınan h fonksiyonunu karşılık getirilen kurala ”operatör” denir (Haciyev ve Hacisalihoğlu,1995).

Tanım 3.6. V ve U iki fonksiyon uzayı olmak üzere $H : V \to U$ şeklinde tanımlanmış operatör olsun.m ve n fonksiyonları V uzayından alınan herhangi iki fonksiyon ve θ_1 ve θ_2 sayıları da keyfi iki reel olmak üzere

$$H(\theta_1 m + \theta_2 n; \Psi) = \theta_1 H(m; \Psi) + \theta_2 H(n; \Psi) \tag{3.1}$$

koşulunu sağladığı taktirde yukarıdaki ifadeye lineer operatör denir (Haciyev ve Hacisalihoglu,1995) .

Tanım 3.7. V^+ ve U^+ ile V ve U uzayında alınan pozitif fonksiyonlar uzayı olsun. Yani

$$\begin{aligned} V^+ &= \{m \in V : m(\Psi) \geq 0\} \\ U^+ &= \{n \in U : n(\Psi) \geq 0\} \end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlanan uzaylar ise $H : V \rightarrow U$ doğrusal operatörler için, $H(V^+) \subset H(U^+)$ koşulunu sağlayan H'ye lineer pozitif operatör adı verilir (Haciyev ve Hacisalihoğlu,1995).

Uyarı 3.8. *Lineer ve pozitif operatörler negatif fonksiyonları negatif fonksiyonlara dönüştürür (Hacısalihoglu ve Hacıyev 1995).*

Teorem 3.9. *H lineer pozitif operatör ve $H : V \rightarrow U$ operatörü monoton artandır. Yani;*

$$h(\Psi) \leq l(\Psi) \Rightarrow H(h;\Psi) \leq H(l;\Psi)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. H lineer pozitif operatör olduğundan dolayı,$H(V^+) \subset U^+$ sağlanır. Yani $h(\Psi) \geq 0$ olduğundan $H(h;\Psi) \geq 0$ olur. O halde her $\Psi \in V$ için

$$h(\Psi) \leq l(\Psi)$$

kabul görüldüğü gibi $l(\Psi) - h(\Psi) \geq 0$ gösterilir. F operatörü pozitif olduğundan;

$$H(h(\Psi) - l(\Psi);\Psi) \geq 0$$

olur. H operatörü lineer olduğundan;

$$H(h(\Psi);\Psi) - H(l(\Psi);\Psi) \geq 0 \Rightarrow H(h(\Psi);\Psi) \leq H(l(\Psi);\Psi)$$

elde edilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995). □

Teorem 3.10. *$H : V \rightarrow U$ lineer pozitif olmak üzere $|H(h)| \leq H(|h|)$ eşitsizliği sağlanır.*

İspat. Herhangi bir h fonsksiyon için;

$$-|h| \leq h \leq |h|$$

olur. H operatörün lineer ve monoton artan olduğundan dolayı

$$H(-|h|) \leq H(h) \leq H|(h)| \tag{3.2}$$

şeklinde yazabiliriz. H lineerliğinden dolayı

$$H(-|h|) = -H(|h|)$$

dir . Bulduğumuz sonuçu (3.2)'de yerine yazılarak;

$-H(|h|) \leq H(h) \leq H(|h|) \Rightarrow |H(h)| \leq H(|h|)$ olacak şekilde ispat tamamlanır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995). □

Tanım 3.11. $V \subset \mathbb{R}$ ve V üzerinde tanımlı tüm reel değerli fonksiyonların kümesi $H(\Psi)$ olsun. $h : \mathbb{N} \to H(\Psi)$ şeklinde tanımlı h fonksiyonuna " fonksiyon dizisi"adı verilir. Terimler $h_1, h_2, h_3...$ ile gösterilir ve (h_n) şeklinde yazılır (Acar, 2013).

Tanım 3.12. $\kappa = \{F : V \to U : F$ lineer pozitif operatör $\}$, $H : \mathbb{N} \to \kappa$, şeklinde tanımlı fonksiyona lineer pozitif dizisi adı verilir. ve $(F_n) = (F_1, F_2, F_3, ...)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.13. $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ için $C[a, b]$ uzayı,$[a, b]$ sonlu aralık üzerinde tanımlı olsun . $C[a, b]$'de tanımlı norm;

$$||h|| = \max_{\Psi \in [a,b]} |h(\Psi)|$$

şeklide yazılır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 3.14. Herbir $\Psi \in [a, b]$ ve $H_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonların bir dizisi alalım. Eğer $\epsilon > 0$ için öyle bir n_0 var ise $\forall n > n_0$ için $|h_n(\Psi) - h(\Psi)| < \epsilon$ olacak şekilde n_0 varsa h_n dizisi h fonksiyonuna noktasal yakınsaktır denir (Shevchuk,1992).

Tanım 3.15. Her $\Psi \in [a, b]$ ve h_n dizisi h fonksiyonuna düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow$ her $\epsilon > 0$ için en az bir n_0 vardır ki her $n > n_0$ için $|h_n(\Psi) - h(\Psi) < \epsilon$ 'dur ve $h_n \rightrightarrows h$ ile gösterilir (Shevchuk,1992).

Tanım 3.16. $\Psi_1, \Psi_2 \in V$ ve h, $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı fonksiyon olsun. Herhangi bir $\delta > 0$ iken

$$\daleth(\delta) := \sup\{|h(\Psi_1) - h(\Psi_2)| : |\Psi_1 - \Psi_2| \leq \delta$$

, şeklinde tanımlanan fonksiyona, h fonksiyonunun süreklilik modülü denir (Shevchuk,1992).

Teorem 3.17. *h $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sürekli bir fonksiyon ise o halde h fonksiyonunun sürekli modülü olan $\omega(\delta)$,*

$$1)\quad \lim_{\delta \to o} \omega(\delta) = 0 \tag{3.3}$$

$$2)\quad 0 < \delta_1 < \delta_2 ise \omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_2) \tag{3.4}$$

$$3)\quad \omega(\delta_1 + \delta_2) = \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2) \tag{3.5}$$

$$4)\quad \omega(n\delta) \leq n\omega(\delta), n \in \mathbb{Z}^+ \tag{3.6}$$

$$5)\quad |h(t) - h(\Psi)| \leq \omega(h; |t - \Psi|) \tag{3.7}$$

$$6)\quad \omega(h; |t - \Psi|) \leq \left(1 + \frac{|t - \Psi|}{\delta}\right) \omega(h; \delta) \tag{3.8}$$

özelliklerini sağlar (Altomare ve Campiti,1994).

Tanım 3.18. Kabul edelim ki,$1 < a < \infty$ve a ,b ve $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ şartını sağlasın. O halde her $(\alpha_j) \in l_a$, her $(\beta_j) \in l_b$ dizileri için;

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j \beta_j| \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j|^a\right)^{\frac{1}{a}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\beta_j|^b\right)^{\frac{1}{b}} \tag{3.9}$$

bu eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir.

Hölder eşitsizliğinden $p = q = 2$ seçilirse

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j \beta_j| \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\beta_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.10}$$

eşitsizliği ihtiva edilir. Bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz eşitsizliği denir (Musayev ve ark,2006).

Teorem 3.19. *Bütün reel eksen üzerinde ve $h \in C[a, b]$*

$$|h(\Psi)| \leq M_h \tag{3.11}$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. Eğer $[a,b]$ kapalı aralık üzerinde $L_\neg$ lineer pozitif operatör dizisi $\neg \to \infty$ iken,

$$1)\quad L_\neg(1;\Psi) \rightrightarrows 1$$
$$2)\quad L_\neg(t;\Psi) \rightrightarrows \Psi$$
$$3)\quad L_\neg(t^2;\Psi) \rightrightarrows \Psi^2$$

koşullarını sağlıyorsa $L_\neg$ operatör dizisi $[a,b]$ üzerinde düzgün süreklidir yada $L_\neg h \rightrightarrows h(\Psi)$'dir. Yani;

$$\lim_{\neg\to\infty} \max_{a\le\Psi\le b} |L_\neg(h;\Psi) - h(\Psi)| = 0 \tag{3.12}$$

İspat. Varsayalım ki $h \in C[a,b]$ olsun. Süreklifonksiyonların tanımından her pozitif ϵ sayısına karşılık öyle δ sayısı vardır ki, $|t-\Psi| < \delta$ için

$$|h(t) - h(\Psi)| < \epsilon \tag{3.13}$$

sağlanır.(3.11)'den $|h(t)-h(\Psi)| < |h(t)|+|h(\Psi)| \le 2M_h$ şeklinde yazılır. Diğer yanda $|t-\Psi| \ge \delta$ iken $\frac{|t-\Psi|}{\delta} \ge 1$'den $\frac{(t-\Psi)^2}{\delta^2} \ge 1$ olur.Bu durumda,

$$|h(t) - h(\Psi)| \le 2M_h \le 2M_h \frac{(t-\Psi)^2}{\delta^2} \tag{3.14}$$

eşitsizliği sağlanır. O halde her $t \in \mathbb{R}$ ve her $\Psi \in [a,b]$ için (3.13) ve (3.14)' deki eşitsizliklerden

$$|h(t) - h(\Psi)| < \epsilon + 2M_h \frac{(t-\Psi)^2}{\delta^2} \tag{3.15}$$

olur. $1), 2), 3)$ koşularını sağlayan $L_\neg$ lineer pozitif operatör dizisinin

$$\lim_{\neg\to\infty} \max_{a\le\Psi\le b} |L_\neg(h;\Psi) - h(\Psi)| = 0$$

eşitliğinin var olduğunu göstermek gerekmektedir. Lineerlik özelliğinden

$$\begin{aligned}
|L_\neg(h(t);\Psi) - h(\Psi)| &= |L_\neg(h(t);\Psi) - h(\Psi) + L_\neg(h(\Psi);\Psi) - L_\neg(h(\Psi);\Psi)| \\
&= |L_\neg(h(t);\Psi) - h(\Psi) + L_\neg(h(\Psi);\Psi) - L_\neg(h(\Psi);\Psi) - h(\Psi)| \\
&= |L_\neg(h(t) - h(\Psi);\Psi) + h(\Psi)(L_\neg(1;\Psi) - 1)|
\end{aligned}$$

dır.Yukardaki eşitsizlikle üçgen eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$|L_\neg(h(t);\Psi) - h(\Psi)| \le |L_\neg(h(t) - h(\Psi);\Psi)| + |h(\Psi)||(L_\neg(1;\Psi) - 1)| \tag{3.16}$$

elde edilir. Lineer pozitif operatörlerinin özelliğinden, her $X \in \mathbb{R}$ için $x \leq |x|$ özelliğini kullanarak

$$|L_\neg(h(t) - h(\Psi)); \Psi| \leq |L_\neg(|h(t) - h(\Psi)|; \Psi)$$

şeklinde yazılabilir.(3.11)'i göz önüne alarak (3.16) eşitsizliği aşağıdaki ifadeye dönüşür.

$$|L_\neg(h(t); \Psi) - h(\Psi)| \leq |L_\neg(|h(t) - h(\Psi)|; \Psi) + (M_h(1; \Psi) - 1)$$

$L_\neg$ monoton artanlığından (3.16)'dan

$$|L_\neg(h(t); \Psi) - h(\Psi)| \leq L_\neg(\epsilon + 2M_h \frac{(t-\Psi)^2}{\delta^2}; \Psi) + M_h|(L_\neg(1; \Psi) - 1)| \quad (3.17)$$

şeklinde yazılır.Diğer taraftan $L_\neg$'in lineer pozitifliğini göz önüne alarak;

$$\begin{aligned}
L_\neg \quad & (\epsilon + 2M_h \frac{(t-\Psi)^2}{\delta^2}; \Psi) = L_\neg(\epsilon; \Psi) + L_\neg(\frac{(t-\Psi)^2}{\delta^2}; \Psi) \\
= \quad & \epsilon L_\neg(1; \Psi) + \frac{2M_h}{\delta^2} L_\neg(t^2 - 2\Psi t + \Psi^2; \Psi) \\
= \quad & \epsilon L_\neg(1; \Psi) + \frac{2M_h}{\delta^2}[L_\neg(t^2; \Psi) - \Psi^2 - \Psi^2 + 2\Psi^2 - 2\Psi L_\neg(t; \Psi) + \Psi^2 L_\neg(1; \Psi)] \\
= \quad & \epsilon L_\neg(1; \Psi) + \frac{2M_h}{\delta^2}[L_\neg(t^2; \Psi) - \Psi^2 + 2\Psi^2 - 2\Psi^2 L_\neg(t; \Psi) + \Psi^2 L_\neg(1; \Psi) - \Psi^2] \\
= \quad & \epsilon L_\neg(1; \Psi) + \frac{2M_h}{\delta^2}[(L_\neg(t^2; \Psi) - \Psi^2) + 2\Psi(\Psi - L_\neg(t; \Psi)) + \Psi^2(L_\neg(1; \Psi) - 1)]
\end{aligned}$$

yazılır. Son ifadenin (3.17)'de yerine kullanılmasıyla

$$\epsilon L_\neg(1; \Psi) + + \frac{2M_h}{\delta^2}[(L_\neg(t^2); \Psi) - \Psi^2) + 2\Psi(\Psi - L_\neg(t; \Psi)) + \Psi^2(L_\neg(1; \Psi) - 1)] \quad (3.18)$$

dir. $1), 2), 3)$ kaşulları (3.18) ifadesinden yararlanılırsa;

$\forall \in \epsilon^*$ ise

$$|L_\neg(h(t); \Psi) - h(\Psi)| \leq \epsilon^*$$

eşitliği sağlanmış olur. Öyleki

$\lim_{\neg \to \infty} ||L_\neg h - h||_{C[a,b]} = 0$ olur ve böylece ispat tamamlanır (Korovkin,1953). □

Tanım 3.20. P_m , m- inci mertebeden bir polinom ve $m \geq 1$, x,y de $\Psi = 0$ noktasında m-inci mertebeden türevlenebilen fonksiyon olsun;

$$\lim_{\Psi \to \infty} y(\Psi) = 0$$

olmak üzere;

$$x(\Psi) = P_m(\Psi) + \Psi^m y(\Psi)$$

ifadesi yazılabiliyorsa P_m polinomuna $\Psi = 0$ noktasında y fonksiyonu tarafından üretilen Taylor polinomu denir (Musayev ve ark.,2006).

Tanım 3.21. x , b noktasını içine alan bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun.

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{(j)}(b)}{j!}(\Psi - b)^j$$

serisine b noktasında x fonksiyonunda üretilen Taylor serisi denir (Musayev ve ark.,2006).

3.1.1. Tek Değişkenli Bernstein Operatörleri

Tanım 3.22. $\forall\daleth \in \mathbb{N}$ olmak üzere ve $\Psi \in C[0,1]$, $h \in C[0,1]$ tek değişkenli Bernstein polinomu;

$$B_\daleth(h,\Psi) = \sum_{j=0}^{\daleth} h\left(\frac{j}{\daleth}\right)\binom{\daleth}{j}\Psi^j(1-\Psi)^{\daleth-j} \tag{3.19}$$

şeklinde ifade edilir (Bernstein, 1912). Bu operatörün lineer ve pozitif olduğunugösterelim. $\daleth \in \mathbb{R}$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,$h, f \in C[0,1]$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
B_\daleth(\alpha h + \beta f;\Psi) &= \sum_{j=0}^{\daleth}(\alpha h + \beta f)\left(\frac{j}{\daleth}\right)\binom{\daleth}{j}\Psi^j(1-\Psi)^{\daleth-j} \\
&= \alpha\sum_{j=0}^{\daleth} h\left(\frac{j}{\daleth}\right)\binom{\daleth}{j}v^j(1-\Psi)^{\daleth-j} \\
&+ \beta\sum_{j=0}^{\daleth} f\left(\frac{j}{\daleth}\right)\binom{\daleth}{j}\Psi^j(1-\Psi)^{\daleth-j} \\
&= \alpha B_\daleth(h;\Psi) + \beta B_\daleth(f;\Psi)
\end{aligned}$$

lineer olduğunu gösterir. $\daleth \in \mathbb{R}$ $\forall\Psi \in [0,1]$ ve her $j = 0,1,...,n$ ise $\Psi^j(1-\Psi)^{\daleth-j} \leq 0$ oldoğundan $h \leq 0$ için $B_\daleth(h;\Psi) \leq 0$ iken $\daleth \in \mathbb{N}$ dolayı operatör pozitiftir.

Sonuç 3.23. *Yukarıda tanımlanan Bernstein öperatörü için;*

$$
\begin{aligned}
B_{\daleth}(1;\Psi) &= 1 \\
B_{\daleth}(t;\Psi) &= \Psi \\
B_{\daleth}(t^2;\Psi) &= \Psi^2 + \frac{\Psi(1-\Psi)}{\daleth}
\end{aligned}
$$

İspat. $h(t) = 1$ için

$$
\begin{aligned}
B_{\daleth}(1;\Psi) &= \sum_{j=0}^{\daleth} \binom{\daleth}{j} \Psi^j (1-\Psi)^{\daleth-j} \\
&= (1-\Psi+\Psi)^{\daleth} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

olduğu aşikardır. $h(t) = t$ için

$$
\begin{aligned}
B_{\daleth}(t;\Psi) &= \sum_{j=0}^{\daleth} \frac{j}{\daleth} \binom{\daleth}{j} \Psi^j (1-\Psi)^{\daleth-j} \\
&= \Psi \sum_{j=1}^{\daleth} \binom{\daleth-1}{j-1} \Psi^{j-1} (1-\Psi)^{\daleth-j}
\end{aligned}
$$

j yerine $j+1$ dönüşümü uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
B_{\daleth}(t;\Psi) &= \Psi \sum_{j=o}^{\daleth-1} \binom{\daleth-1}{j} \Psi^{j-1} (1-\Psi)^{\daleth-1-j} \\
&= \Psi
\end{aligned}
$$

elde edilir.

son olarak $h(t^2;\Psi)=t^2$ için

$$
\begin{aligned}
B_{\daleth}(t^2;\Psi) &= \sum_{j=0}^{\daleth}\binom{\daleth}{j}\Psi^j(1-\Psi)^{\daleth-j}\frac{j^2}{\daleth^2}\\
&= \Psi\sum_{j=1}^{\daleth-1}\binom{\daleth-1}{j-1}\Psi^{j-1}(1-\Psi)^{\daleth-j}\frac{j}{\daleth}\\
&= \Psi\sum_{j=1}^{\daleth-1}\binom{\daleth-1}{j-1}\Psi^{j-1}(1-\Psi)^{\daleth-j}\frac{(j-1)+1}{\daleth}\\
&= \Psi\sum_{j=1}^{\daleth}\frac{j-1}{\daleth}\Psi^{j-1}\binom{\daleth-1}{j-1}(1-\Psi)^{\daleth-j}\\
&+ \frac{1}{\daleth}\Psi\sum_{j=1}^{\daleth}\Psi^{j-1}\binom{\daleth-1}{j-1}(1-\Psi)^{\daleth-j}\\
&= \frac{\daleth-1}{\daleth}\Psi\sum_{j=2}^{\daleth}\Psi^{j-2}\binom{\daleth-2}{j-2}(1-\Psi)^{\daleth-j}\\
&+ \frac{1}{\daleth}\Psi\sum_{j=1}^{\daleth}\Psi^{j-1}\binom{\daleth-1}{j-1}(1-\Psi)^{\daleth-j}
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. Son eşitsizlikte sol tarafta j yerine $j+2$, sağ tarafta ise j yerine $j+1$ yazılırsa;

$$
\begin{aligned}
B_{\daleth}(t^2;\Psi) &= \frac{\daleth-1}{\daleth}\Psi^2\sum_{j=0}^{\daleth-2}\binom{\daleth-2}{j}\Psi^j(1-\Psi)^{\daleth-2-j}\\
&+ \frac{\Psi}{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth-1}\binom{\daleth-1}{j}\Psi^j(1-\Psi)^{\daleth-1-j}\\
&= \frac{\daleth-1}{\daleth}\Psi^2(1-\Psi+\Psi)^{\daleth-2}+\frac{\Psi}{\daleth}(1-\Psi+\Psi)^{\daleth-1}\\
&= \frac{\daleth-1}{\daleth}\Psi^2+\frac{\Psi}{\daleth}\\
&= \Psi^2+\frac{\Psi(1-\Psi)}{\daleth}
\end{aligned}
$$

eşitliği sağlanır. Korovkin koşullarının sağlayıp sağlanmadığını gösterelim. □

Teorem 3.24. *$C[0,1]$'nin elemanı olan her h için ve her $\daleth\in\mathbb{N}$ olmak üzere;*

$$\lim_{\daleth\to\infty}||B_{\daleth}(h;\Psi)-h(\Psi)||_{C[0,1]}=0$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Sonuç (3.23)'de ispatladığımız ifadeleri kullanarak

$$\begin{aligned}
\lim_{\daleth\to\infty}||B_\daleth(1;\Psi)-1||_{C[0,1]} &= 0\\
\lim_{\daleth\to\infty}||B_\daleth(t;\Psi)-\Psi||_{C[0,1]} &= 0\\
\lim_{\daleth\to\infty}||B_\daleth(t^2;\Psi)-\Psi^2||_{C[0,1]} &= \lim_{\daleth\to\infty}||\Psi^2+\frac{\Psi(1-\Psi)}{\daleth}-\Psi^2||_{C[0,1]}\\
&= \lim_{\daleth\to\infty}\max_{0\le\Psi\le1}||\frac{\Psi(1-\Psi)}{\daleth}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Böylece Korovkin teoremi sayesinde $\forall h\in C[0,1]$ için

$$\lim_{\daleth\to\infty}||B_\daleth(h;\Psi)-h(\Psi)||_{C[0,1]}=0$$

olup ispat biter. □

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde $Z_{\daleth}\left(h,\Psi\right)$ operatörü tanımlanmış,bu operatörün linner pozitif olduğunu ve Korovkin teoremi şartlarını sağladığı göstermiştir. Daha sonra $Z_{\daleth}\left(h,\Psi\right)$ operatörü için merkezi momentleri, lipschitz koşulu,yaklaşım hızı ve asimptotik yaklaşımı hesablanmıştır.

$$Z_{\daleth}\left(h,\Psi\right)=\left(\frac{\daleth+1}{2\left(\daleth+2\right)}\right)^{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)h\left(\left(2\frac{j}{\daleth}-1\right)\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right) \tag{4.1}$$

burada

$$\theta_{\daleth,j}=\binom{\daleth}{j}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)^{j}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}-\Psi\right)^{\daleth-j}$$

ve

$$\Psi\in\left[-\frac{\daleth+2}{\daleth+1},\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right]$$

şeklindedir.

Tanım 4.1. Varsayalım $\Psi\in[-1,1]$ ve $h\in C[-1,1]$ olsun.

$$Z_{\daleth}\left(h,\Psi\right)=\left(\frac{\daleth+1}{2\left(\daleth+2\right)}\right)^{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)h\left(\left(2\frac{j}{\daleth}-1\right)\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)$$

şeklinde tanımlı linner pozitif operatöre $Z_{\daleth}\left(h,\Psi\right)$ operatörü denir.

Öncelikle $Z_{\daleth}\left(h,\Psi\right)$ operatörünün linner ve pozitif bir operatör olduğunu gösterelim

Lineerlik:

$\forall h,g\in Z_{\daleth}\left(h,\Psi\right)$ ve $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, için ,

$$Z_{\daleth}\left((\alpha h(t)+\beta g(t));\Psi\right)=\left(\frac{\daleth+1}{2\left(\daleth+2\right)}\right)^{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)$$

$$\left[\alpha h\left(\left(2\frac{j}{\daleth}-1\right)\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)+\beta g\left(\left(2\frac{j}{\daleth}-1\right)\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)\right]$$

$$=\left(\frac{\daleth+1}{2\left(\daleth+2\right)}\right)^{\daleth}\sum_{j=0}\theta_{\daleth,j}(\Psi)(\alpha h)\left(\left(2\frac{j}{\daleth}-1\right)\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)$$

$$+\left(\frac{\daleth+1}{2\left(\daleth+2\right)}\right)^{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)(\beta g)\left(\left(2\frac{j}{\daleth}-1\right)\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)$$

$$=\left(\frac{\daleth+1}{2\left(\daleth+2\right)}\right)^{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)(\alpha h)\left(\left(2\frac{j}{\daleth}-1\right)\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)$$

$$+\left(\frac{\daleth+1}{2\left(\daleth+2\right)}\right)^{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)(\beta g)\left(\left(2\frac{j}{\daleth}-1\right)\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)$$

$$=\alpha\left(\frac{\daleth+1}{2\left(\daleth+2\right)}\right)^{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)h\left(\left(2\frac{j}{\daleth}-1\right)\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)$$

$$+\beta\left(\frac{\daleth+1}{2\left(\daleth+2\right)}\right)^{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)g\left(\left(2\frac{j}{\daleth}-1\right)\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)$$

$$=\alpha Z_{\daleth}\left(h(t);\Psi\right)+\beta Z_{\daleth}\left(g(t);\Psi\right)$$

olduğundan $Z_{\daleth}\left(h;\Psi\right)$ lineer bir operatördür.

Pozitiflik:

$\forall\daleth, j\in N$ ve $\forall\Psi\in\left[-\frac{\daleth+2}{\daleth+1},\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right]$ için $h(\Psi)\geq 0$

$$Z_{\daleth}\left(h,\Psi\right)=\left(\frac{\daleth+1}{2\left(\daleth+2\right)}\right)^{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)h\left(\left(2\frac{j}{\daleth}-1\right)\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)\geq 0$$

olduğunda $h(\Psi)\geq 0$ ise$Z_{\daleth}\left(h,\Psi\right)\geq 0$ olur.

Buradan çıkarılan sonuç $Z_{\daleth}\left(h,\Psi\right)$ lineer pozitif bir operatördür.

Teorem 4.2. *Şimdide $Z_{\daleth}\left(h,\Psi\right)$ Korovkin şartılarının hesaplamaları incelenecektir.*

$$i_1)Z_{\daleth}\left(1;\Psi\right)=1 \tag{4.2}$$

$$i_2)Z_{\daleth}\left(t;\Psi\right)=\Psi \tag{4.3}$$

$$i_3)Z_{\daleth}\left(t^2;\Psi\right)=\Psi^2+\frac{(1-\Psi^2)}{\daleth} \tag{4.4}$$

$$i_4)Z_{\daleth}\left(t^3;\Psi\right)=\Psi^3+\frac{(3\daleth-2)\Psi}{\daleth^2}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}-\Psi\right)\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right) \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} i_5)Z_\daleth\left(t^4;\Psi\right) &= \Psi^4-\left(\frac{6\daleth^2-11\daleth+6}{\daleth^3}\right)\Psi^4 \\ &+ \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)\left(\frac{-48\daleth^2+88\daleth-48}{\daleth^3}\right)\Psi^3 \\ &+ \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\left(\frac{-138\daleth^2+256\daleth-71}{\daleth^3}\right)\Psi^2 \\ &+ \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3\left(\frac{-168\daleth^2+296\daleth-160}{\daleth^3}\right)\Psi \\ &+ \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^4\left(\frac{-45\daleth^2+123\daleth-50}{\daleth^3}\right) \end{aligned} \tag{4.6}$$

İspat.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi+\frac{\daleth+2}{\daleth+1}-\Psi\right)^\daleth &= \sum_{j=0}^{\daleth}\binom{\daleth}{j}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)^j\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}-\Psi\right)^{\daleth-j} \\ \left(\frac{2(\daleth+2)}{\daleth+1}\right)^\daleth &= \sum_{j=0}^{\daleth}\binom{\daleth}{j}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)^j\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}-\Psi\right)^{\daleth-j} \end{aligned}$$

olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} i_1)Z_\daleth(1;\Psi) &= \left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^\daleth\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)h\left(\left(2\frac{j}{\daleth}-1\right)\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right) \\ &= \left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^\daleth\cdot\left(\frac{2(\daleth+2)}{\daleth+1}\right)^\daleth \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} i_2)Z_\daleth(t;\Psi) &= \left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^\daleth\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)h\left(\left(2\frac{j}{\daleth}-1\right)\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right) \\ (4.1) dendolay & \\ &= \left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^\daleth 2\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)\frac{j}{\daleth} \\ &- \left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^\daleth\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\sum_{j=1}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)-\frac{\daleth+2}{\daleth+1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-1}\sum_{j=1}^{\daleth}\theta_{\daleth-1,j-1}(\Psi)-\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\\
&= \left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-1}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth-1,j-}(\Psi)-\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\\
&= \frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi-\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\\
&= \Psi\\
i_3)Z_{\daleth}\left(t^2;\Psi\right) &= \left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)h\left(\left(2\frac{j}{\daleth}-1\right)\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\\
&= \left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)\left(\frac{4j^2}{\daleth^2}-\frac{4j}{\daleth}+1\right)\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\\
&= \left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)\left(\frac{4j^2}{\daleth^2}\right)\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\\
&- \left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)\left(\frac{4j}{\daleth}\right)\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\\
&+ \left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\\
&= \frac{4}{2^{\daleth}}\left(\frac{\daleth+1}{\daleth+2}\right)^{\daleth-2}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)\frac{j(j-1)+j}{\daleth^2}\\
&+ \frac{4}{2^{\daleth}}\left(\frac{\daleth+1}{\daleth+2}\right)^{\daleth-2}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)\frac{j}{\daleth}\\
&- \frac{4}{2^{\daleth}}\left(\frac{\daleth+1}{\daleth+2}\right)^{\daleth-2}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)+\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\\
&= \frac{1}{2^{\daleth-2}}\left(\frac{\daleth+1}{\daleth+2}\right)^{\daleth-2}\frac{\daleth-1}{\daleth}\sum_{j=2}^{\daleth}\theta_{\daleth-2,j-2}(\Psi)\\
&+ \frac{1}{2^{\daleth-2}}\left(\frac{\daleth+1}{\daleth+2}\right)^{\daleth-2}\frac{1}{\daleth}\sum_{j=1}^{\daleth}\theta_{\daleth-1,j-1}(\Psi)\\
&- \frac{1}{2^{\daleth-2}}\left(\frac{\daleth+1}{\daleth+2}\right)^{\daleth-2}\sum_{j=1}^{\daleth}\theta_{\daleth-1,j-1}(\Psi)+\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\\
&= \frac{1}{2^{\daleth-2}}\left(\frac{\daleth+1}{\daleth+2}\right)^{\daleth-2}\frac{\daleth-1}{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth-2,j}(\Psi)\\
&+ \frac{1}{2^{\daleth-2}}\left(\frac{\daleth+1}{\daleth+2}\right)^{\daleth-2}\frac{1}{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth-1,j}(\Psi)\\
&- \frac{1}{2^{\daleth-2}}\left(\frac{\daleth+1}{\daleth+2}\right)^{\daleth-2}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth-1,j}(\Psi)+\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\daleth-1}{\daleth}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)^2+\frac{2}{\daleth}\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)\\
&- 2\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)+\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\\
&= \Psi^2+\frac{1-\Psi^2}{\daleth}\\
i_4) Z_\daleth\left(t^3;\Psi\right) &= \left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^\daleth \sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)h\left(\left(2\frac{j}{\daleth}-1\right)\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3\\
&= \left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^\daleth \sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)\left(\frac{8j^3}{\daleth^3}-\frac{12j^2}{\daleth^2}+\frac{6j}{\daleth}-1\right)\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3
\end{aligned}
$$

Yukardaki eşitlikte

$$
A=\frac{8j^3}{\daleth^3},\quad B=\frac{12j^2}{\daleth^2},\quad C=\frac{6j}{\daleth},\quad D=1 \tag{4.7}
$$

olarak ayrı ayrı hesaplanacaktır.

$$
\begin{aligned}
A &= 8\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-3}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)\frac{j(j-1)(j-2)+3j^2-2j}{\daleth^3}\\
&= \left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-3}\frac{(\daleth-1)(\daleth-2)}{\daleth^2}\sum_{j=3}^{\daleth}\theta_{\daleth-3,j-3}(\Psi)\\
&+ \frac{3}{\daleth}\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-3}\left[\frac{\daleth-1}{\daleth}\sum_{j=2}^{\daleth}\theta_{\daleth-2,j-2}(\Psi)+\frac{1}{\daleth}\sum_{j=1}^{\daleth}\theta_{\daleth-1,j-1}(\Psi)\right]\\
&- \frac{2}{\daleth^2}\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-3}\sum_{j=1}^{\daleth}\theta_{\daleth-1,j-1}(\Psi)\\
&= \left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-3}\frac{(\daleth-1)(\daleth-2)}{\daleth^2}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth-3,j-}(\Psi)\\
&+ \frac{3}{\daleth}\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-3}\left[\frac{\daleth-1}{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth-2,j}(\Psi)+\frac{1}{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth-1,j}(\Psi)\right]\\
&- \frac{2}{\daleth^2}\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-3}\sum_{j=1}^{\daleth}\theta_{\daleth-1,j-1}(\Psi)\\
&= \frac{(\daleth-1)(\daleth-2)}{\daleth^2}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)^3+\frac{6}{\daleth}\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\frac{\daleth-1}{\daleth}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)^2\\
&+ \frac{12}{\daleth^2}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)^2-\frac{8}{\daleth^2}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= -3\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-2}\left[\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)\frac{j(j-1)+j}{\daleth^2}\right] \\
&= -3\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-2}\left[\frac{\daleth-1}{\daleth}\sum_{j=2}^{\daleth}\theta_{\daleth-2,j-2}+\frac{1}{\daleth}\sum_{j=1}^{\daleth}\theta_{\daleth-1,j-1}(\Psi)\right] \\
&= -3\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-2}\frac{\daleth-1}{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth-2,j}(\Psi) \\
&- \frac{3}{\daleth}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-2}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth-1,j}(\Psi) \\
&= -\frac{3}{\daleth}\frac{(\daleth-1)(\daleth+2)}{\daleth+1}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)^2-\frac{6}{\daleth}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right) \\
&= 3\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-1}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)-\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi) \\
&= 3\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)-\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3 \\
&= \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3+\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)\left[\frac{3\daleth^2-6\daleth+4}{\daleth^2}\right] \\
&+ \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)^2\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)\left[\frac{-3\daleth^2+9\daleth-6}{\daleth^2}\right] \\
&+ \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)^3\frac{\daleth^2-3\daleth+2}{\daleth^2} \\
&= \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)^3\left[-1+\frac{3\daleth^2-6\daleth+4-3\daleth^2+9\daleth-6+\daleth^2-3\daleth+2}{\daleth^2}\right] \\
&+ \Psi\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\left[\frac{3\daleth^2-6\daleth+4-6\daleth^2+18\daleth-12+3\daleth^2-9\daleth+6}{\daleth^2}\right] \\
&+ v^2\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)\left[\frac{-3\daleth^2+9\daleth-63\daleth^2-9\daleth+6}{\daleth^2}\right]+v^3\left[\frac{\daleth^2-3\daleth+2}{\daleth^2}\right] \\
&= \Psi^3+\frac{3\daleth-2}{\daleth^2}\Psi\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}-\Psi\right)\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right) \\
i_5)Z_{\daleth}\left(t^4;\Psi\right) &= \left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)h\left(\left(2\frac{j}{\daleth}-1\right)\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^4 \\
&= \left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)\left[\frac{16j^4}{\daleth^4}-\frac{32j^3}{\daleth^3}+\frac{24j^2}{\daleth^2}-\frac{8j}{\daleth}+1\right]
\end{aligned}
$$

Burada operatör hesaplaması daha kolay olsun diye parça parça ispatlanmıştır; Parçalma

$$
A=\frac{16j^4}{\daleth^4},\quad B=\frac{-32j^3}{\daleth^3},\quad C=\frac{24j^2}{\daleth^2},\quad D=\frac{-8j}{\daleth},\quad E=1
$$

şeklinde yapılmıştır.

$$
\begin{aligned}
A &= 16\left[\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)\frac{j(j-1)(j-2)(j-3)+6j^3-11j^2+6j}{\daleth^4}\right] \\
&= \left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-4}\frac{(\daleth-1)(\daleth-2)(\daleth-3)}{\daleth^3}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi) \\
&+ \frac{12}{\daleth}\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-3}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)\left[\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)\frac{j(j-1)(j-2)+3j^2-2j}{\daleth^3}\right] \\
&- \frac{44}{\daleth^2}\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-3}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)\left[\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)\frac{j(j-1)+j}{\daleth}\right]+\frac{48}{\daleth^3}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi) \\
&= \left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-4}\frac{(\daleth-1)(\daleth-2)(\daleth-3)}{\daleth^3}\sum_{j=4}^{\daleth}\theta_{\daleth-4,j-4}(\Psi) \\
&+ \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-3}\frac{12}{\daleth}\frac{(\daleth-1)(\daleth-2)}{\daleth^2}\sum_{j=3}^{\daleth}\theta_{\daleth-3,j-3}(\Psi) \\
&+ \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-2}72\frac{\daleth-1}{\daleth^2}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\sum_{j=2}^{\daleth}\theta_{\daleth-2,j-2}(\Psi) \\
&+ \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3\frac{144}{\daleth^2}\sum_{j=1}^{\daleth}\theta_{\daleth-1,j-1}(\Psi) \\
&- \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-1}\frac{16\daleth}{\sum_{j=1}}\theta_{\daleth-1,j-1}(\Psi) \\
&= \left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-4}\frac{(\daleth-1)(\daleth-2)(\daleth-3)}{\daleth^3}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth-4,j}(\Psi) \\
&+ \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-3}\frac{12}{\daleth}\frac{(\daleth-1)(\daleth-2)}{\daleth^2}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth-3,j}(\Psi) \\
&+ \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-2}72\frac{\daleth-1}{\daleth^2}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth-2,j}(\Psi) \\
&+ \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3\frac{144}{\daleth^2}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth-1,j}(\Psi) \\
&- \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-1}\frac{16}{\daleth^3}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth-1,j}(\Psi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= -32)\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^4\left[\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)\frac{j(j-1)(j-2)+3j^2-2j}{\daleth^3}\right] \\
&= -4\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-3}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)\frac{(\daleth-1)(\daleth-2)}{\daleth^2}\sum_{j=3}^{\daleth}\theta_{\daleth-3,j-3}(\Psi) \\
&- \frac{24}{\daleth}\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-2}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\frac{\daleth-1}{\daleth}\sum_{j=2}^{\daleth}\theta_{\daleth-2,j-2}(\Psi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& - \frac{48}{\daleth^2}\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-1}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3\sum_{j=1}^{\daleth}\theta_{\daleth-1,j-1}(\Psi) \\
& + \frac{32}{\daleth^2}\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-1}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3\sum_{j=1}^{\daleth}\theta_{\daleth-1,j-1}(\Psi) \\
&= -4\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-3}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)\frac{(\daleth-1)(\daleth-2)}{\daleth^2}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth-3,j}(\Psi) \\
& - \frac{24}{\daleth}\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-2}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\frac{\daleth-1}{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth-2,j}(\Psi) \\
& - \frac{48}{\daleth^2}\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-1}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth-1,j}(\Psi) \\
& + \frac{32}{\daleth^2}\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-1}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth-1,j}(\Psi) \\
&= +4\frac{(\daleth-1)(\daleth-2)}{\daleth^2}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)^3 - \frac{24}{\daleth}\frac{\daleth-1}{\daleth}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)^2 \\
& - \frac{48}{\daleth^2}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)^2 + \frac{32}{\daleth^2}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C &= 24\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^4\left[\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth,j}(\Psi)\frac{j(j-1)+j}{\daleth^3}\right] \\
&= 6\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^2\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\frac{\daleth-1}{\daleth}\sum_{j=2}^{\daleth}\theta_{\daleth-2,j-2}(\Psi) \\
& + \frac{12}{\daleth}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-1}\sum_{j=1}^{\daleth}\theta_{\daleth-1,j-1}(\Psi) \\
&= 6\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^2\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\frac{\daleth-1}{\daleth}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth-2,j}(\Psi) \\
& + \frac{12}{\daleth}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-1}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth-1,j}(\Psi) \\
&= 6\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\left(\frac{\daleth-1}{\daleth}\right)\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)^2 + \frac{12}{\daleth^2}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D &= -\frac{4}{\daleth^3}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-1}\sum_{j=1}^{\daleth}\theta_{\daleth-1,j-1}(\Psi) + \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^4 \\
&= -\frac{4}{\daleth^3}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3\left(\frac{\daleth+1}{2(\daleth+2)}\right)^{\daleth-1}\sum_{j=0}^{\daleth}\theta_{\daleth-1,j}(\Psi) + \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^4 \\
&= -\frac{4}{\daleth^3}\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right) + \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^4 + \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3 \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)\left[\frac{-4\daleth^3-12\daleth^2+16\daleth+8}{\daleth^3}\right] \\
&+ \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2 \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)^2\left[\frac{6\daleth^3-30\daleth^2+52\daleth-28}{\daleth^3}\right] \\
&+ \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right) \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)^3\left[\frac{-4\daleth^3-24\daleth^2+44\daleth-24}{\daleth^3}\right] \\
&+ \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}+\Psi\right)^4 \frac{\daleth^4-6\daleth^3+11\daleth^2-6\daleth}{\daleth^4} \\
&= \Psi^4 - \frac{6\daleth^2-11\daleth+6}{\daleth^3}\Psi^4 + \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)\left(\frac{-48\daleth^2+88\daleth-48}{\daleth^3}\right)\Psi^3 \\
&+ \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\left(\frac{-138\daleth^2+250\daleth-71}{\daleth^3}\right)\Psi^2 + \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3\left(\frac{-168\daleth^2+296\daleth-160}{\daleth^3}\right)\Psi \\
&+ \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^4\left(\frac{-45\daleth^2+123\daleth-50}{\daleth^3}\right)
\end{aligned}
$$

□

4.1. Operatörünün Momentleri

Teorem 4.3. *$Z_\daleth((t-\Psi)^j;\Psi)$, $j=0,1,2...$ olmak üzere*

$$i_1)\quad Z_\daleth((t-\Psi)^0;\Psi) = 1 \tag{4.8}$$

$$i_2)\quad Z_\daleth((t-\Psi)^1;\Psi) = \Psi-\Psi \tag{4.9}$$

$$i_3)\quad Z_\daleth((t-\Psi)^2;\Psi) = \frac{(1+\Psi)(1-\Psi)}{\daleth} \tag{4.10}$$

$$i_4)\quad Z_\daleth((t-\Psi)^3;\Psi) = \frac{2\Psi(1+\Psi)(1-\Psi)}{\daleth} \tag{4.11}$$

$$
\begin{aligned}
i_5)\quad Z_\daleth((t-\Psi)^4;\Psi) &= -\frac{6\daleth^2-11\daleth+6}{\daleth^3}\Psi^4 + \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)\left(\frac{-48\daleth^2+88\daleth-48}{\daleth^3}\right)\Psi^3 \\
&+ \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\left(\frac{-138\daleth^2+250\daleth-71}{\daleth^3}\right)\Psi^2 + \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3\left(\frac{-168\daleth^2+296\daleth-160}{\daleth^3}\right)v \\
&+ \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^4\left(\frac{-45\daleth^2+123\daleth-50}{\daleth^3}\right)
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

İspat. $Z\daleth(h,\Psi)$ öperatörünü Teorem 4.2 de ispatladığımız yargıları kullanılarak ispatı yapılacaktır.

$$
\begin{aligned}
i_1)\ Z_{\neg}((t-\Psi)^0;\Psi) &= Z_{\neg}(1;\Psi)\\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i_2)\ Z_{\neg}((t-\Psi)^1;\Psi) &= Z_{\neg}(t;\Psi) - Z_{\neg}(1;\Psi)\Psi\\
&= \Psi - \Psi\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i_3)\ Z_{\neg}((t-\Psi)^2;\Psi) &= Z_{\neg}(t^2 - 2\Psi t + \Psi^2;\Psi)\\
&= Z_{\neg}(t^2;\Psi) - 2\Psi Z_{\neg}(t;\Psi) + \Psi^2 Z_{\neg(1;\Psi)}\\
&= \Psi^2 + \frac{(1+\Psi)(1-\Psi)}{\daleth} - 2\Psi^2 + \Psi^2\\
&= \frac{(1+\Psi)(1-\Psi)}{\daleth}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i_4)\ Z_{\neg}((t-\Psi)^3;\Psi) &= Z_{\neg}(t^3 - 3\Psi t^2 + 3\Psi^2 t + \Psi^3;\Psi)\\
&= Z_{\neg}(t^3;\Psi) - 3\Psi Z_{\neg}(t^2;\Psi) + 3\Psi^2\Psi(t;\Psi) - \Psi^3 Z_{\neg}(1;\Psi)\\
&= \Psi^3 + \frac{3\daleth-2}{\daleth^2}\Psi(1-\Psi)(1+\Psi) - 3\Psi^3\\
&- \frac{3\Psi(1-\Psi)(1+\Psi)}{\daleth} + 3\Psi^3 - \Psi^3\\
&= \frac{2\Psi}{\daleth}(1-\Psi)(1+\Psi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i_5)\ Z_{\neg}((t-\Psi)^4;\Psi) &= Z_{\neg}(t^4 - 4t^3\Psi + 6t^2\Psi^2 - 4t\Psi^3 + \Psi^4)\\
&= Z_{\neg}(t^4;\Psi) - 4\Psi Z_{\neg}(t^3;\Psi) + 6\Psi^2 Z_{\neg}(t^2;) - 4\Psi^3 Z_{\neg}(t;\Psi) + \Psi^4 Z_{\neg}(1;\Psi)\\
&= \Psi^4 - \left(\frac{6\daleth^2 - 11\daleth + 6}{\daleth^3}\right)\Psi^4 + \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)\left(\frac{-48\daleth^2 + 88\daleth - 48}{\daleth^3}\right)\Psi^3\\
&+ \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\left(\frac{-138\daleth^2 + 256\daleth - 71}{\daleth^3}\right)\Psi^2\\
&+ \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3\left(\frac{-168\daleth^2 + 296\daleth - 160}{\daleth^3}\right)\Psi\\
&+ \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^4\left(\frac{-45\daleth^2 + 123\daleth - 50}{\daleth^3}\right)\\
&- 4\Psi^4 - \frac{12\daleth - 8}{\daleth^2}\Psi^2(1-\Psi)(1+\Psi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad 6\Psi^4 + \frac{6\Psi^2(1+\Psi)(1-\Psi)}{\daleth} - 4\Psi^4 + \Psi^4 \\
&= \quad -\left(\frac{6\daleth^2 - 11\daleth + 6}{\daleth^3}\right)\Psi^4 \\
&+ \quad \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)\left(\frac{-48\daleth^2 + 88\daleth - 48}{\daleth^3}\right)\Psi^3 \\
&+ \quad \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\left(\frac{-138\daleth^2 + 256\daleth - 71}{\daleth^3}\right)\Psi^2 \\
&+ \quad \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3\left(\frac{-168\daleth^2 + 296\daleth - 160}{\daleth^3}\right)\Psi \\
&+ \quad \left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^4\left(\frac{-45\daleth^2 + 123\daleth - 50}{\daleth^3}\right) \\
&- \quad \frac{12\daleth - 8}{\daleth^2}\Psi^2(1-\Psi)(1+\Psi) + \frac{6\Psi^2(1+\Psi)(1-\Psi)}{\daleth}
\end{aligned}
$$

□

Teorem 4.4. *$h \in C\left[-\frac{\daleth+2}{\daleth+1}, \frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right]$ ve h bütün reel eksenlerde sınırlı olsun o halde ;*

$$[-1,1] \subset \left[-1 - \frac{1}{\daleth+1}, 1 + \frac{1}{\daleth+1}\right]$$

aralığı üzerinde

$$\lim_{\daleth \longrightarrow \infty} \|Z_{\daleth}h - h\|_{C[-1,1]} = 0$$

yani $Z_{\daleth}(h) \rightrightarrows h$

İspat. Teorem (4.2) ,(4.3), (4.4) den

$$
\begin{aligned}
\lim_{\daleth \longrightarrow \infty} ||Z_{\daleth}(1;\Psi) - 1||_{C[-1,1]} &= \lim_{\daleth \longrightarrow \infty} \max_{-1 \le \Psi \le 1} |Z_{\daleth}(1;\Psi) - 1| \\
&= 0 \\
\lim_{\daleth \longrightarrow \infty} ||Z_{\daleth}(t;\Psi) - \Psi||_{C[-1,1]} &= \lim_{\daleth \longrightarrow \infty} \max_{-1 \le \Psi \le 1} |Z_{\daleth}(t;\Psi) - \Psi| \\
&= 0 \\
\lim_{\daleth \longrightarrow \infty} ||Z_{\daleth}(t^2;\Psi) - \Psi^2||_{C[-1,1]} &= \lim_{\daleth \longrightarrow \infty} \max_{-1 \le \Psi \le 1} \left|Z_{\daleth}(t^2;\Psi) - \Psi^2\right| \\
&= \lim_{\daleth \longrightarrow \infty} \max_{-1 \le \Psi \le 1} \left|\frac{1-\Psi^2}{\daleth}\right| \\
&= \lim_{\daleth \longrightarrow \infty} \max_{-1 \le \Psi \le 1} \frac{1-\Psi^2}{\daleth} \\
&= \lim_{\daleth \longrightarrow \infty} \frac{1}{\daleth} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olduğunda

$$\begin{aligned} Z_{\daleth(1;\Psi)} &\rightrightarrows 1 \\ Z_{\daleth(t;\Psi)} &\rightrightarrows \Psi \\ Z_{\daleth(t^2;\Psi)} &\rightrightarrows \Psi^2 \end{aligned}$$

Korovkinin üç şartı sağlandığından dolay ispat biter. □

Teorem 4.5. *$h \in C[-1,1]$, her $t \in [-1,1]$ ve $|f(t)| \leq M$ için*

$$\begin{aligned} |Z_\daleth(h) - h| &= \max_{-1\leq\Psi\leq1} |Z_\daleth(h,t) - f(t)| \\ &\leq 2\omega(f, \frac{1}{\sqrt{\daleth}}) \end{aligned} \tag{4.13}$$

İspat. Teorem 4.3' den ve (Cauchy-Schwartz Eşitsizliğinden dolayı)

$$\begin{aligned} |Z_\daleth h(t) - h(t)| &\leq Z_\daleth\left(1 + \frac{|u-t|}{\delta}; t\right)\omega(h;\delta) \\ &= \left[Z_\daleth(1;t) + \frac{1}{\delta}Z_\daleth(|u-t|;t)\right]\omega(h;\delta) \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{Z_\daleth((u-t)^2;t)}\right)\omega(h;\delta) \\ &= \left(1 + \frac{1}{\delta}\frac{(1+t)(1-t)}{\daleth}\right)\omega(h;\delta) \\ ||Z_\daleth h - h||_{C[-1,1]} &= \max_{-1\leq t\leq1} |Z_\daleth(h;t) - (h)| \\ &\leq \left((1 + \frac{1}{\delta}\right)\max_{-1\leq t\leq1}\left(\frac{(1-t)^2}{\daleth}\right)\omega(h;\delta) \\ &= \left((1 + \frac{1}{\delta}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{\daleth}}\right)\omega(h;\delta) \\ &= 2\omega\left(h; \frac{1}{\sqrt{\daleth}}\right) \end{aligned}$$

Yukarıda $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{\daleth}}$ seçilmiştir. □

4.2. $Z_\daleth$ Operatörü İçin Voronovskaja Tip Asimtotik Yaklaşım.

Yaklaşımlar teorisinin ana sorunlarından birisi lineer pozitif operatörler dizisinin h fonksiyonuna yakınsama hızını belirler. Bundan dolayı $(L_\daleth)_{\daleth\geqslant1}$ lineer pozitif dizisi olmak üzere

$$\lim_{\daleth \longrightarrow \infty} \daleth (L_\daleth(h;\Psi) - h(\Psi))$$

limiti bize yol gösterir. Buradan $(L_\daleth)_{\daleth \geqslant 1}$ operatörlerinin asimtotik durumu hakkında bilgi verir ve Voronovskaja formülü olarak adlandırılır.

Teorem 4.6. *$h \in C^2[-1,1]$ olmak üzere h,h',h" fonksiyonları için her $\varsigma(t;\Psi) \in C^2[-1,1]$ için*

$$\lim_{\daleth \longrightarrow \infty} \daleth [Z_\daleth(h(\Psi);\Psi) - h(\Psi)] = \frac{(1-\Psi^2)}{2} h''(\Psi)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. h, fonksiyonunun Ψ noktasındaki Taylor açılımı;

$$h(t) = h(\Psi) + \frac{1}{1!} h'(\Psi)(t-\Psi) + \frac{1}{2!} h''(\Psi)(t-\Psi)^2 + (t-\Psi)^2 \varsigma(t;\Psi) \tag{4.14}$$

$$(t-\Psi)^2 \varsigma(t;\Psi) = (t-\Psi)^2 \left[\frac{1}{3!} h'''(\Psi)(t-\Psi) + \frac{1}{4!} h^4(\Psi)(t-\Psi)^2 + ... \right] \tag{4.15}$$

şeklindedir. Eşitliğin her tarafına $Z_\daleth$ operatörü uygulandığında

$$\begin{aligned} Z_\daleth(h(\Psi);\Psi) - h(\Psi) &= Z_\daleth(h((t));\Psi) - Z_\daleth(1;\Psi)h(\Psi) \\ &= Z_\daleth((h(\Psi);\Psi) - h(\Psi);\Psi) \\ &= Z_\daleth((t-\Psi);\Psi)h'(\Psi) + \frac{1}{2} Z_\daleth((t-\Psi)^2;\Psi)h''(\Psi) \\ &+ Z_\daleth((t-\Psi)^2 \varsigma(t-\Psi);\Psi) \\ &= \frac{1}{2}\frac{(1-\Psi)^2}{\daleth} h''(\Psi) + Z_\daleth((t-\Psi)^2 \varsigma(t-\Psi);\Psi) \end{aligned}$$

eşitliğin her tarafına $\daleth$ çarpılırsa

$$\daleth(Z_\daleth(h(\Psi) - h(\Psi)) = \frac{1}{2}(1-\Psi)^2 h''(\Psi) + \daleth(Z_\daleth((t-\Psi)^2 \varsigma(t-\Psi);)$$

yazılır.Aynı şekilde eşitliğin her tarafında yer alan ikinci toplama Cauchy-Schwarz eşitliği uygulanırsa

$$\daleth Z_\daleth(|(t-\Psi)^2 \varsigma(t,\Psi)|;\Psi) \leqslant \daleth(Z_\daleth((t-\Psi)^4;\Psi)^{\frac{1}{2}} (Z_\daleth(\varsigma^2(t;\Psi);\Psi))^{\frac{1}{2}}$$

elde edilmiş olur. $\mu(t;\Psi) = \varsigma^2(t;\Psi)$ olarak tanımlanırsa $\mu(t;\Psi) \in C^2[-1,1]$ ve $\mu(\Psi;\Psi) = 0$ olduğu açıktır. Bu yüzden

$$\lim_{\daleth \longrightarrow \infty} (Z_\daleth(\varsigma^2(t,\Psi);\Psi) = \lim_{\daleth \longrightarrow \infty} (Z_\daleth(\mu(\Psi,\Psi);\Psi) = \mu(\Psi,\Psi) = 0 \tag{4.16}$$

ve teorem 4.3'den $\daleth(Z_\neg((t-\Psi)^4;\Psi)^{\frac{1}{2}}$ ifadesi $\daleth \longrightarrow \infty$ iken sonlu olduğundan istenen sonuç elde dilir.

$$\lim_{\daleth \longrightarrow \infty} \daleth(Z_\neg(t;\Psi) - h(\Psi)) = \frac{1-\Psi^2}{2} h''(\Psi)$$

olur. □

Teorem 4.7. *$h \in C\left[-\frac{\daleth+2}{\daleth+1}, \frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right]$ ve h bütün reel eksenlerde sınırlı olsun o halde ;*

$$[-1,1] \subset \left[-1-\frac{1}{\daleth+1}, 1+\frac{1}{\daleth+1}\right]$$

aralığı üzerinde h Lipschitz şartını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere, bu takdirde

$$|Z_\neg(h;\Psi) - h(\Psi)|_{[} - 1, 1] \leqslant M\left(\frac{1}{\daleth}\right)^{\frac{a}{2}} \tag{4.17}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Teorem 4.5'te süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı ve operatörün sınırlılığı ispatlanmış olup bu ispatta kullanılacaktır. $Z_\neg(1;\Psi) = 1$ olduğundan dolayı ve operatörün lineerliğinden

$$\begin{aligned} |Z_\neg(h;\Psi) - h(\Psi)| &= |Z_\neg(h;\Psi) - h(\Psi)Z_\neg(1;\Psi)| \\ &= |Z_\neg(h;\Psi) - Z_\neg(h(\Psi);\Psi)| \\ &\leqslant |Z_\neg(h(t) - h(\Psi);\Psi| \\ &\leqslant Z_\neg(|h(t) - h(\Psi)|;\Psi) \end{aligned}$$

dır. h fonksiyonu Lipschitz şartını sağladığından

$$|h(t) - h(\Psi)| \leqslant M|t-\Psi|^a$$

dır. Bu yüzden

$$|Z_\neg(h;\Psi) - h(\Psi)| \leqslant (Z_\neg M|t-\Psi|^a;\Psi)$$

yazılabilir. Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} &\leqslant MZ_\neg((t-\Psi)^2;\Psi)^{\frac{a}{2}} \\ &\leqslant M\left(\frac{1-\Psi^2}{\daleth}\right)^{\frac{a}{2}} \\ &\leqslant M\left(\frac{1}{\daleth}\right)^{\frac{a}{2}} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılmıştır. Böylece ispat biter. □

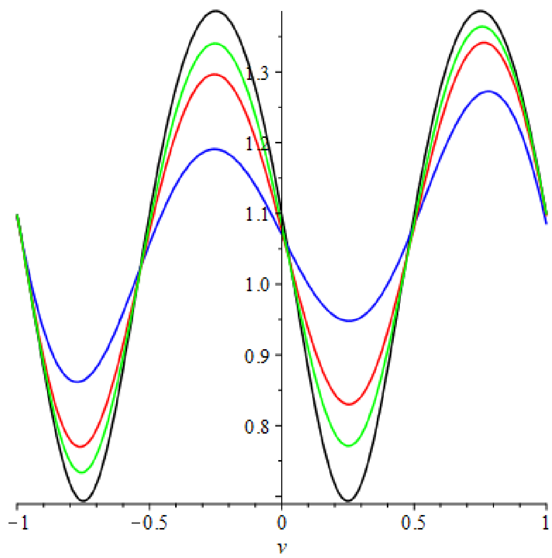
Şimdide farklı $h(\Psi)$ fonksiyonlarıyla $Z_\neg(h;\Psi)$ operatörümüzü kullanarak bazı örnekler verilecektir.

4.3. Grafik ve Nümerik Değerler Taplosu

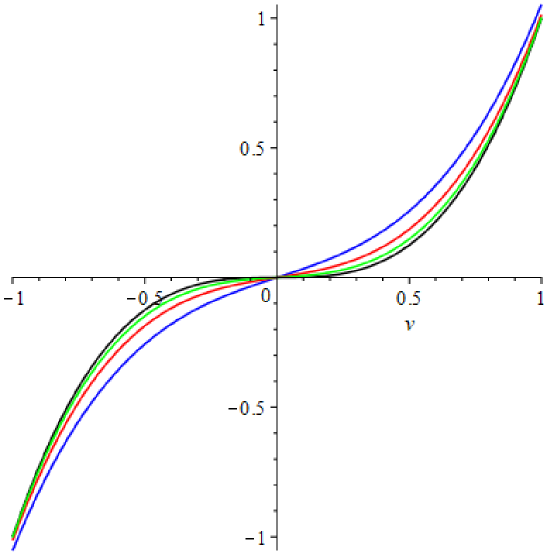
Örnek 4.8. $n = 20$ *(mavi),* $n = 50$ *(kırmızı) ve* $n = 100$ *(yeşil) değerleri için* $Z_\neg(h;\Psi)$ *operatörünün* $h(\Psi) = ln(3 - sin(2\Psi\pi))$ *(siyah) fonksiyonuna yaklaşımı Şekil 4.1.'de verilmiştir.*

Örnek 4.9. $n = 20$ *(mavi),* $n = 50$ *(kırmızı) ve* $n = 100$ *(yeşil) değerleri için* $Z_\neg(h;\Psi)$ *operatörünün* $h(\Psi) = \Psi^3$ *(siyah) fonksiyonuna yaklaşımı Şekil 4.2.'de verilmiştir.*

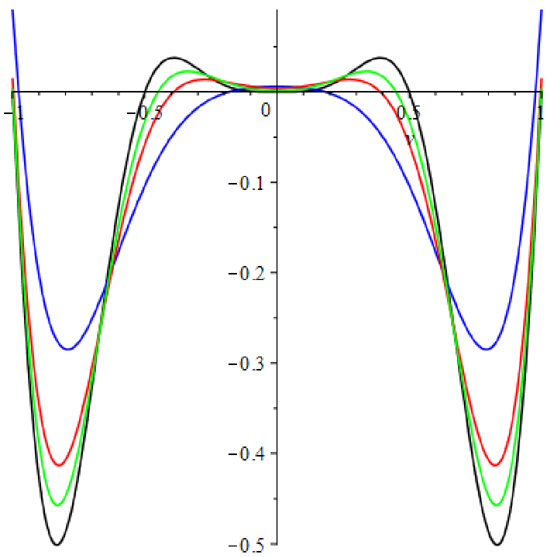
Örnek 4.10. $n = 20$ *(mavi),* $n = 50$ *(kırmızı) ve* $n = 100$ *(yeşil) değerleri için* $Z_\neg(h;\Psi)$ *operatörünün* $h(\Psi) = (\Psi^3)sin(2\Psi\pi))$ *(siyah) fonksiyonuna yaklaşımı Şekil 4.3.'de verilmiştir.*



Şekil 4.1. $Z_\neg(h;\Psi)$ operatörünün $h(\Psi) = ln(3 - sin(2\Psi\pi)$ fonksiyonuna yaklaşımı.



Şekil 4.2. $Z_{\daleth}(h;\Psi)$ operatörünün $h(\Psi)=\Psi^3$ fonksiyonuna yaklaşımı.



Şekil 4.3. $Z_{\daleth}(h;\Psi)$ operatörünün $h(\Psi)=(\Psi^3)sin(2\Psi\pi)$ fonksiyonuna yaklaşımı.

Çizelge 4.1.de $\Psi = 0.3$ değeri için $\daleth$'nin farklı değerlerinde $Z_{\daleth}(h;\Psi)$ operatörümüzün $h(\Psi) = \Psi sin(\Psi(\frac{\pi}{2}))$ fonksiyonuna yaklaşımındaki hata payları gösterilmiştir. Görüldüğü üzere $\daleth$ değerleri arttıkça hata payı azalmaktadır. Buda yaklaşımın sağlıklı olduğunu gösterir.

Çizelge 4.1. $\Psi = 0.3$ noktasınde $\daleth$ nin farklı değerleri için $Z_{\daleth}(h;\Psi)$ operatörlerinin nümerik hata payları.

$\daleth$	$\lvert Z_{\daleth}(h;\Psi) - h(\Psi)\rvert$
$\daleth = 50$	0.0229787896
$\daleth = 100$	0.0113537087
$\daleth = 500$	0.0022474795
$\daleth = 900$	0.0012471258
$\daleth = 990$	0.0011336232

Çizelge 4.2.de $\daleth = 100$ değeri için farklı Ψ noktalarında $Z_{\daleth}(h;\Psi)$ operatörümüzün $h(\Psi)$ fonksiyonuna yaklaşımındaki hata payları gösterilmiştir. Görüldüğü üzere Ψ noktaları değiştikçe hata payı değişmektedir. Bu değişim seçilen $h(\Psi) = \Psi sin(\Psi(\frac{\pi}{2}))$ fonksiyonu değiştikçe değişkenlik gösterecektir. Buda yaklaşımın sağlıklı olduğunu gösterir.

Çizelge 4.2. $\daleth = 100$ değeri için farklı Ψ noktalarında $Z_{\daleth}(h;\Psi)$ operatörlerinin nümerik hata payları.

Ψ	$\lvert Z_{\daleth}(h;\Psi) - h(\Psi)\rvert$
$\Psi = 0.2$	0.01374077635
$\Psi = 0.5$	0.0052120369
$\Psi = 0.7$	0.0002141308
$\Psi = 0.9$	0.0017351360
$\Psi = 1.1$	0.002972345

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada Simetrik aralık üzerinde tanımlanan $Z_{\daleth}(h;\Psi)$ operatörünün, lineer pozitif operatör olduğu ve Korovkin şartlarının sağladığı gösterilmiştir. Daha sonra ;

$$\lim_{\daleth\longrightarrow\infty}\|Z_{\daleth}h-h\|_{C[-1,1]}=0$$

h fonksiyonuna düzgün yakınsadığını gösterilmiş olup merkezi momentleri hesaplanmıştır. Aşağıda şöyle ifade edilmiştir.

$$i_1)\quad Z_{\daleth}((t-\Psi)^0;\Psi)=1 \tag{5.1}$$

$$i_2)\quad Z_{\daleth}((t-\Psi)^1;\Psi)=\Psi-\Psi \tag{5.2}$$

$$i_3)\quad Z_{\daleth}((t-\Psi)^2;\Psi)=\frac{(1+\Psi)(1-\Psi)}{\daleth} \tag{5.3}$$

$$i_4)\quad Z_{\daleth}((t-\Psi)^3;\Psi)=\frac{2\Psi(1+\Psi)(1-\Psi)}{\daleth} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}
i_5)\quad Z_{\daleth}((t-\Psi)^4;\Psi)&=-\frac{6\daleth^2-11\daleth+6}{\daleth^3}\Psi^4+\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)\left(\frac{-48\daleth^2+88\daleth-48}{\daleth^3}\right)\Psi^3\\
&+\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^2\left(\frac{-138\daleth^2+250\daleth-71}{\daleth^3}\right)\Psi^2+\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^3\left(\frac{-168\daleth^2+296\daleth-160}{\daleth^3}\right)\Psi\\
&+\left(\frac{\daleth+2}{\daleth+1}\right)^4\left(\frac{-45\daleth^2+123\daleth-50}{\daleth^3}\right)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Hesaplanan bu merkezi momentler yardımıyla $Z_{\daleth}(h;\Psi)$ operatörünün asimptotik yaklaşımı incelenmiştir:

$$\lim_{\daleth\longrightarrow\infty}\daleth[Z_{\daleth}(h(\Psi);\Psi)-h(\Psi)]=\frac{(1-\Psi^2)}{2}h''(\Psi)$$

Süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı aşağıdaki gibi dile getirilmiştir.

$$\begin{aligned}
|Z_{\daleth}(h)-h| &= \max_{-1\leq\Psi\leq 1}|Z_{\daleth}(h,t)-f(t)|\\
&\leq 2\omega(f,\frac{1}{\sqrt{\daleth}})
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Son olarak olarak $Z_{\daleth}(h;\Psi)$ operatörünün; $h(\Psi)=ln(3-sin(2\Psi\pi)$, $h(\Psi)=\Psi^3$ ve $h(\Psi)=ln(3-sin(2\Psi\pi))$ fonksiyonlarına ait yaklaşımını gösteren grafikleri ve nümerik değerleri hesaplanıp tablo halinde gösterilmiştir.

Öneri olarakta; tanımlanmış olduğumuz operatörler q- analizi, (p,q)- analizi yada farklı uzaylarda çalışılabilir.

KAYNAKLAR

ACAR, T., and A., 2013. Approximation properties of two dimensional Bernstein-Stancu-Chlodowsky operators. Le Matematiche, 68.2:15-31.

ALTOMARE, F., and CAMPİTİ, M., 1994. Korovkin-type Approximation Theory and its Applications.Walter de Gruyter.

BALCI, M. , 1997. Matematik Analiz : cilt 1. Balcı yayınları.

BAYRAKTAR, M., 2006. Fonksiyonel Analiz Ders Kitabı. Gazi Kitabevi , Ankara, 320s.

BASKAKOV, V. A ., 1957. An example of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions.Dokl. Akad. Nauk, 113, 249-251

BERNSTEİN, S., 1912. Demo istration du theoreme de weierstrass fondee sur le calcul des probabilites.Сообщенія Харьковскаго математИческаго обшества, 13(1): 1-2.

BOHMAN, H., 1951. On approximation of continuous and of analytic functions. Arkiv för a Matenatik, 2.: 43-56.

CHLODOWSKY, I., 1937. Sur le developpmentdes fonctions definies dans un interval infini en series de polynomes de M.S. Bersntein.Compositio Math. 4, 380- 393.

ÇİLO, A., 2012.[-1,1] aralığında Bernstin polinomlarının yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızı/In [-1,1] ranges Bernstein polynomials approach properties and approach speed. MSc Thesis, Harran Üniversitesi.

ÇİÇEK, H., ve İZGİ, A., 2021. A New Generalization of Bernstein Polynomials.Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, 13.1: 211-220.

HACISALİHOĞLU, H., ve HACIYEV, A., 1995.Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. AÜFF Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, 100.

İZGİ, A., 2012. Approximation by a class of new type Bernstein polynomials of one and two variables. Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 55–71

KOROVKİN, P. P., 1953. On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. Dokl. Akad. Nauk SSSR, volume 90, pages 961-964.

KANTOROVICH, L.V., 1930. Sur certain developpements suivant les polynomes de la forme de s. Bernstein, I, II, CR Acad. URSS, 563:568.

LORENTZ, G. G., 1953. Bernstein Polynomials. University of Toronto Press, Toronto.

MURSALEEN, M., AHASAN, M. and ANSARI, K.J., 2020. Bivariate Bernstein–Schurer–Stancu type GBS operators in (p, q) (p, q)-analogue. PAdvances in Difference Equations, 2020-1:1–17.

MUSAYEV, B.İ ALP, M., MUSTAFAYEV, N., 2006. Teori ve Çözümlü Problemlerle. Analiz1. Tekağaç Eylül Yayıncılık.

PINKUS, A., 2000. Weierstrass and approximation theory. J. Approx Theory, 107: 1-66

PHILLIPS, G. M., 1996. Bernstein polynomials based on the q-integers. Annals of numerical Math

SCHURER, F., 1962. Linear Positive Operators in Approximation Theory, Math. Techn. Univ. Delf Report, Delft.

SHEVCHUK, I. A., 1992. Approximation by Polynomials and Traces of Functions Continuous on a Segment. Naukova Dymka, Kiev, 324s.

STANCU, D. D., 1963. A method for obtaining polynomials of Bernstein type of two variables. The American Mathematical Monthly, 70(3),260-264.

SZASZ, O., 1950. Genelalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval. J. Research Nat. Bureau of St., 45:239-245.
WEIERSTRASS, K., 1885. Über die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willkürlicher Funktion reler Argumente. Sitzungsberichte der Acad, Berlin, 633-805.
VORONOVSKAJA, E., 1932. Determination de la forme asymptotique d'approximation des funstions par les polynomes de M.Bernstein. CR. Acad. Sci. URSS, 79: 79-85.

99

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Zehra BİLGEN

EĞİTİM

Derece		**Adı**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Diyarbakır Fatih Lisesi	2009
Üniversite	:	Fen Edebiyat Adıyaman Üniversitesi	2016
Yüksek Lisans	:	Harran Üniversitesi, Şanlıurfa	2023

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2016 – 2018	Kavram Dershanesi Diyarbakır	Matematik Öğretmeni
2018 – 2020	Diyarbakır Bil Koleji	Matematik Öğretmeni
2021 – 2022	Şanlıurfa Çamlıca Koleji	Matematik Öğretmeni
2022 –	Şanlıurfa Karaköprü Belediyesi	Memur

UZMANLIK ALANI

Matematik