T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ANTİ-İNVARYANT RİEMANN SUBMERSİYONLARI ÜZERİNE

Filiz MAKSUT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2023

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ANTİ-İNVARYANT RİEMANN SUBMERSİYONLARI ÜZERİNE

Filiz MAKSUT

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Mehmet GÜLBAHAR

Yıl: 2023, Sayfa: 41

Bu tez çalışmasında, anti-invaryant Riemann submersiyonlarının temel özellikleri ifade edilmiştir. 2n-boyutlu bir Hermityen manifoldtan (2n-1)- boyutlu bir Riemann manifolduna tanımlı anti-invaryant Riemann submersiyonların temel özellikleri araştırılarak hemen hemen kompleks J yapısının etkileri bu submersiyonlar üzerinde incelenmiştir. Beş bölümden oluşan bu tezin birinci bölümü giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde öncelikle tezin diğer bölümlerinde kullanılan bazı temel kavramlar, tanımlar ve teoremler ifade edilerek kompleks manifoldlar ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde Riemann submersiyonları ile ilgili genel kavramlar ile submersiyonlar üzerinde Riemann eğrilik tensör alanı ve anti-invaryant submersiyonların bazı temel özellikleri sunulmuştur. Dördüncü bölümde ise kontakt tipli anti-invaryant submersiyonlar tanıtılarak bazı temel eşitliklere yer verilmiştir. Beşinci bölümde ise dördüncü bölümde yapılan çalışmalarla ilgili sonuç ve öneriler verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Riemann submersiyon, Riemann eğrilik invaryantları, Hermityen manifold, Riemann manifold, kompleks yapı

ABSTRACT

MSc Thesis

ON THE ANTI-INVARIANT RIEMANN SUBMERSIONS

Filiz MAKSUT

Harran University
Graduate Scholl of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc.Prof.Dr. Mehmet GÜLBAHAR

Year:2023, Page: 41

In this thesis, the basic properties of anti-invariant Riemann submersions are expressed. The basic properties of anti-invariant Riemannian submersions defined from (2n-1)-dimensional Hermitian manifold to a (2n-1)-dimensional Riemannian manifold were investigated, and the actions of almost complex *J* structure on these submersions were investigated. The first chapter of this thesis, which consists of five chapters, is reserved for the introduction. In the second chapter, some basic concepts, definitions and theorems used in other chapters are presented and some basic information about complex manifolds are given. In the third chapter, firstly, general concepts about Riemannian submersions, Riemann curvature tensor field on submersions and the basic properties anti-invariant Riemannian submersions are presented. In the fourth chapter, contact type anti-invariant Riemann submersions are introduced and some basic equations are given. In the fifth chapter, some conclusions and suggestions are given with the help of relations obtained in the fourth chapter.

KEYWORDS: Riemann submersion, Riemann curvature invariant, Hermitian manifold, Riemann manifold, complex structure

TEŞEKKÜR

Tezin konusunun seçiminde, uygulamasında ve çalışmamda yardımlarını esirgemeyen danışmanım sayın Doç. Dr. Mehmet GÜLBAHAR'a ve Dr. Esra ERKAN'a teşekkür ederim.

Ayrıca bana her koşulda ve her durumda destek olan çok değerli aile bireylerime teşekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

1.GİRİŞ

Riemann yaptığı çalışmalar ile geometriye yeni bir bakış açısı kazandırmakla birlikte Riemann geometrisini geliştirmiş ve Riemann manifoldlarının temelini atmıştır. Diferansiyellenebilir bir manifold üzerinde pozitif tanımlı, simetrik, bi-lineer bir dönüşüm tanımlanabiliyorsa bu tür manifoldlara Riemann manifoldu adı verilir. Riemann manifoldları ve Riemann geometrisi günümüzde geometriciler ve fizikçiler tarafından hâlâ yoğun bir ilgi ile çalışılmaktadır.

O'Neill (1966) ve Gray (1967) in çalışmalarında Riemann submersiyonlar kavramı belirtilmiştir. O'Neill ve Gray in çalışmalarından sonra birçok yazar tarafından da incelenmiştir.

Hermityen manifoldların her bir reel hiperyüzeyi kontakt metrik manifoldtur. Bu nedenle bu tür hiperyüzeylerin geometrisini incelemede kompleks ve kontakt yapıların özellikleri kullanılır. Literatürde bu inceleme birçok yazar tarafından halen çalışılmaktadır.

İmmersiyonlardan farklı olarak Riemann submersiyonları yüksek boyuttan daha küçük boyuta tanımlı dönüşümlerdir. Hemen hemen Hermityen submersiyonlar B. Watson tarafından ilk olarak tanıtılmıştır. 2010 yılında B. Şahin, Hermityen bir manifoldtan bir Riemann manifolda tanımlanan anti-invaryant submersiyonları tanıtmış ve bu submersiyonların temel özelliklerini sunmuştur.

Bu tez çalışmasında Riemann submersiyonları kullanılarak hemen hemen kompleks yapı ile hemen hemen kontakt yapıların içinde bulunduğu bağıntılar kurulması amaçlanmıştır. Bu amaç için özel olarak tanım uzayının $2n$-boyutlu bir Hermityen manifold ve görüntü uzayı $\left(2n-1\right)$- boyutlu bir Riemann manifoldu olacak şekilde tanımlı anti-invaryant Riemann submersiyonların temel özellikleri incelenmiş olup ve bu submersiyonlar üzerinde tanımlı hemen hemen kompleks J yapısının etkileri hesaplanarak bazı sonuçlar elde edilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Kompleks Yapılar

Tanım 2.1 M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde g bilineer formu eğer simetrik ve pozitif tanımlı olma özelliklerini sağlıyorsa (M,g) bir *Riemann manifoldu* olarak isimlendirilir (Şahin, 2012).

Tanım 2.2 ∇, (M,g) üzerinde tanımlı bir lineer konneksiyon olmak üzere $\forall Y_1,Y_2,Y_3 \in \chi(M)$ için

i) $[Y_1,Y_2] = \nabla_{Y_1}Y_2 - \nabla_{Y_2}Y_1$ (sıfır torsiyon)

ii) $Y_1 g[Y_2,Y_3] = g(\nabla_{Y_1}Y_2,Y_3) + g(Y_2,\nabla_{Y_1}Y_3)$ (metrik ile uyumluluk)

özelliklerini sağlıyorsa bu konneksiyona M nin *Levi-Civita konneksiyonu* adı verilir (Şahin, 2012).

Teorem 2.3 (M,g) nin Levi-Civita konneksiyonu tektir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.4 M diferansiyellenebilir bir manifold olmak üzere

$$\begin{aligned} R : \chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M) &\to \chi(M) \\ (Z_1,Z_2,Z_3) &\to R(Z_1,Z_2,Z_3) = R(Z_1,Z_2)Z_3 \end{aligned}$$

öyle ki

$$R(Z_1,Z_2,Z_3) = \nabla_{Z_1}\nabla_{Z_2}Y_3 - \nabla_{Z_2}\nabla_{Z_1}Z_3 - \nabla_{[Z_1,Z_2]}Z_3 \qquad (2.1)$$

ile verilen R tensörüne ∇ *konneksiyonuna göre eğrilik tensörü* adı verilir (Hacısalihoğlu, 1982).

Tanım 2.5 (M,g) üzerinde lineer bağımsız X ve Y vektörlerinin gerdiği düzlem Π olsun.

$$K(\Pi) \equiv K(X,Y) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2} \tag{2.2}$$

eşitliğindeki $K(\Pi)$ sayısına Π düzleminin *kesit eğriliği* denir (Hacısalihoğlu, 1982).

Tanım 2.6 (M,g) bir Riemann manifoldu olmak üzere T_pM de her Π düzlemi ve M manifoldunun her p noktası için $K(\Pi)$ sabit bir c sayısı ise bu durumda M manifolduna *sabit eğrilikli uzay* veya *uzay form* adı verilir ve $M(c)$ ile gösterilir (Do Carmo, 1992).

Burada

i) $c=0$ olması durumunda M manifoldu E^n Öklid uzayı

ii) $c=\frac{1}{r^2}$ olması durumunda M manifoldu $S^n(r)$ küresi

iii) $c=-\frac{1}{r^2}$ olması durumunda M manifoldu $H^n(r)$ hiperbolik uzay

olur.

Teorem 2.7 $M(4c)$ sabit eğrilikli uzay form ve $\forall Z_1,Z_2,Z_3 \in \chi(M)$ için

$$R(Z_1,Z_2)Z_3 = c\{g(Z_2,Z_3)Z_1 - g(Z_1,Z_3)Z_2\} \tag{2.3}$$

eşitliği sağlanır (Şahin, 2012).

Tanım 2.8 $\{e_1,...,e_n\}$ kümesi, $\chi(M)$ üzerinde ortonormal bir çatı alanı olsun. $\forall Z_1,Z_2 \in \chi(M)$ için

$$S(Z_1,Z_2) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,Z_1)Z_2,e_i) \tag{2.4}$$

ile tanımlanan

$$S:\chi(M)\times\chi(M)\to C^{\infty}(M,\mathbb{R})$$

tensör alanına M manifoldunun *Ricci tensörü* adı verilir. X doğrultusundaki Ricci eğriliği $Ric(X)$ olarak ifade edilir ve

$$Ric(X)=\frac{S(X,X)}{g(X,X)} \tag{2.5}$$

ile tanımlanır (Şahin, 2012).

Tanım 2.9 (M,g) bir Riemann manifoldu ve $p\in M$ noktasındaki tanjant uzayı T_pM olsun. T_pM uzayının ortonormal bir bazı $\{e_1,...,e_n\}$ olmak üzere M manifoldunun $p\in M$ noktasındaki skaler eğriliği $\tau(p)$ ile gösterilir ve

$$\tau(p)=\sum_{i=1}^{n}S(e_i,e_i) \tag{2.6}$$

ile tanımlanır (Şahin, 2012).

Tanım 2.10 M reel $2n$ - boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold olmak üzere $J^2=-I$ eşitliğini sağlayan (M,J) ikilisine *hemen hemen kompleks bir manifold* denir (Yano ve Kon, 1984).

Teorem 2.11 Hemen hemen kompleks manifoldların boyutu çifttir (Kabayashi ve Nomizu, 1969).

Teorem 2.12 M kompleks manifoldunda hemen hemen kompleks bir yapı vardır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.13 M bir kompleks manifold ise

$$N(Z_1,Z_2)=-[Z_1,Z_2]+[JZ_1,JZ_2]-J[JZ_1,Z_2]-J[Z_1,JZ_2] \tag{2.7}$$

ile tanımlı N tensör alanına J nin *Nijenhuis tensör alanı* denir (Kobayashi ve Nomizu, 1969).

Teorem 2.14 M kompleks bir manifold ise Nijenhuis tensör alanı sıfırdır (Vandoren, 2009).

Tanım 2.15 Eğer M bir kompleks manifoldu meydana getiren $2n$- boyutlu reel manifold ise hemen hemen J kompleks yapısına *kompleks yapı* denir (Kobayashi ve Nomizu, 1969).

Teorem 2.16 M hemen hemen kompleks manifold olmak üzere J bir kompleks yapıdır $\Leftrightarrow$ $N=0$ dır (Kobayashi ve Nomizu, 1969).

Tanım 2.17 M hemen hemen kompleks bir manifold ve $\forall Y_1, Y_2 \in \chi(M)$ için

$$g(JY_1, JY_2) = g(Y_1, Y_2) \tag{2.8}$$

şartını sağlayan *g* dönüşümüne *M* üzerinde *Hermityen bir metrik* denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.18 (M,J) üzerinde Hermityen bir g metriği mevcut olması durumunda (M,g,J) üçlüsü hemen hemen Hermityen bir manifold olarak adlandırılır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.19 (M,g,J) Hermityen bir manifold olsun. Eğer $\nabla J = 0$ ise (M,g,J) ye bir *Kaehler manifold* adı verilir (Bejancu, 1986).

Örnek: E^4 uzayında $J(y_1, y_2, y_3, y_4) = (-y_2, y_1, -y_4, y_3)$ tanımlansın. Bu durumda Öklid iç çarpım $\langle\ ,\ \rangle$ olmak üzere $(E^4, \langle\ ,\ \rangle, J)$ üçlüsü Hermityen bir manifoldtur. Ayrıca direkt hesaplamalar ile $\nabla J = 0$ olduğu gösterilebilir. Böylece $(E^4, \langle\ ,\ \rangle, J)$ bir Kaehler manifold örneğidir.

Önerme 2.20 (M,g) bir Kaehler manifold olmak üzere $\forall Y_1,Y_2,Y_3 \in \chi(M)$ için aşağıdaki özellikler sağlanır (Yano ve Kon, 1984):

i) R Riemann eğrilik tensörü olmak üzere

$$R(Y_1,Y_2)JY_3 = JR(Y_1,Y_2)Y_3 \text{ ve } R(JY_1,Y_2J)Y_3 = R(Y_1,Y_2)Y_3\,, \quad (2.9)$$

ii) S Ricci tensörü olmak üzere

$$S(JY_1,JY_2) = S(Y_1,Y_2) \text{ ve } S(Y_1,Y_2) = \frac{1}{2}\left(izJR(Y_1,JY_2)\right). \quad (2.10)$$

Tanım 2.21 M hemen hemen kompleks bir manifold, $p \in M$ için T_pM nin bir düzlemi Π olsun. Eğer Π düzlemi J altında inyaryant ise Π ye *holomorfik bir düzlem kesiti* denir (Okubu, 1987).

Tanım 2.22 M bir Kaehler manifoldu, M üzerinde hemen hemen kompleks bir yapı J olsun. Π holomorfik düzleminde tanımlı kesit eğriliğine *holomorfik kesit eğriliği* denir. $\Pi = span\{Y,JY\}$ ve Y birim vektör olmak üzere

$$K(\Pi) = R(Y_1,JY_1,Y_1,JY_1) = g\left(R(Y_1,JY_1),Y_1\right) \quad (2.13)$$

ile verilir. Eğer M nin her p noktasındaki düzlem kesitleri için $K(\Pi)$ değeri sabit oluyorsa M manifolduna bir *kompleks uzay form* denir (Okubu, 1987).

Teoram 2.23 M bir Kaehler manifold olsun. Bu durumda M nin bir kompleks uzay form olması için gerek ve yeter şart $\forall Y_1,Y_2,Y_3 \in \chi(M)$ ve $c \in \mathbb{R}$ için

$$R(Y_1,Y_2)Y_3 = \frac{1}{4}c\begin{pmatrix} g(Y_1,Y_3)Y_1 - g(Y_1,Y_3)Y_2 + g(JY_1,Y_3)JY_2 \\ -g(JY_2,Y_3)JY_1 + 2g(JY_1,Y_2)JY_3 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

olmasıdır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.24 M manifoldu $(2n+1)-$ boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold olmak üzere

$$\varphi:\chi(M)\to\chi(M)$$

lineer dönüşümü, $\xi\in\chi(M)$ ve

$$\eta:\chi(M)\to C^{\infty}(M,R)$$

1-formu verilsin. Herhangi bir $X\in\chi(M)$ için

$$\eta(\xi)=1 \qquad (2.15)$$

ve

$$\varphi^{2}(X)=-X+\eta(X)\xi \qquad (2.16)$$

koşulları mevcut ise (φ,ξ,η) üçlüsüne *hemen hemen kontakt bir yapı* ve (M,φ,ξ,η) dörtlüsüne ise *hemen hemen kontakt bir manifold* adı verilir (Blair, 1976).

Teorem 2.25 (M,φ,ξ,η) yapısı üzerinde aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Yano ve Kon, 1976):

i) $\varphi\xi=0$, (2.17)

ii) $\eta(\varphi X)=0$, (2.18)

iii) $rank\varphi=2n$. (2.19)

Tanım 2.26 M hemen hemen kontakt bir manifold olmak üzere

$$\eta(Y_1)=g(Y_1,\xi)$$

$$g(\varphi Y_1,\varphi Y_2)=g(Y_1,Y_2)-\eta(Y_1)\eta(Y_2) \qquad (2.20)$$

sağlanıyorsa (M,g,φ,ξ,η) beşlisine *hemen hemen kontakt bir metrik manifold* olarak adlandırılır (Yano ve Kon, 1976).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Riemann Submersiyonları

Tanım 3.1 $\pi:(M,g)\rightarrow(B,g')$ bir dönüşüm. (M,g) ve (B,g') nin boyutları sırası ile m ve n dir. Eğer π örten, diferansiyellenebilir olacak şekilde

$$rank\pi_* = boyB = n$$

ise π ye bir *submersiyon* denir. Burada π_* , π nin diferansiyelidir (Falcitelli, 2004).

Örnek 3.2 $\pi:\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi(x_1,x_2,...,x_m)=x_1$ ile tanımlanan π dönüşümü için π_* dönüşümüne karşılık gelen matris $[1\ 0\ 0...0]_{1\times m}$ olduğundan $\forall V \in T_P\mathbb{R}^m$ için

$\pi_*(v)=\pi_*(v_1,v_2,...,v_m)=v_1$ ve $rank\pi_*=1$ dir. Böylece π bir submersiyondur (Gundmundson, 2006).

Örnek 3.3 $\pi:\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\pi(z_1,z_2,z_3,z_4)=(z_1+z_2,z_3+z_4)$ dönüşümü tanımlansın. π_* dönüşümüne karşılık gelen matris $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 4}$ ve $rank\pi_* = 2 = boy\mathbb{R}^2$ olup π bir submersiyondur.

Tanım 3.4 $\pi: M \rightarrow B$ bir submersiyon olmak üzere $rank\pi_* = boyB < boyM$ dır. $y\in B$ için $\pi_y = \pi^{-1}(y)$ deki lif, M nin $(m-n)$- boyutlu bir altmanifoldu olur. $\pi^{-1}(y)$ ye π nin *lifleri* denir (Yano, 1984).

Örnek 3.5 Örnek 3.3 de verilen $\pi:\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\pi(z_1,z_2,z_3,z_4)=(z_1+z_2,z_3+z_4)$ submersiyonunu göz önüne alalım. $z=(1,1)\in\mathbb{R}^2$ seçilirse $\pi(z_1,z_2,z_3,z_4) = (1,1)$ eşitliğinde $z_1+z_2=1$ ve $z_3+z_4=1$ elde edilir. Böylece π_x lifi

$$\pi_x = \{(z_1,z_2,z_3,z_4)\in\mathbb{R}^4 : z_1+z_2=1,\ z_3+z_4=1\}\subset\mathbb{R}^4$$

düzlemini verir. π_x açıkça $\mathbb{R}^4$ ün bir altmanifoldudur.

Tanım 3.6 $\pi:(M,g)\rightarrow(B,g')$ bir submersiyon, p noktasında

$$V_p = çek\pi_{*p}$$

distribüsyonuna *dikey distribüsyon*,

$$H_p = (V_p)^{\perp}$$

distribüsyona ise *yatay distribüsyon* denir (Baird, 2003).

Örnek 3.7 $\pi:\mathbb{R}^5\rightarrow\mathbb{R}^3$, $\pi(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5)=(z_1-z_2,z_3,z_4-2z_5)$ tanımlansın π_* dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

olup $rank\pi_* = 3 = boy\mathbb{R}^3$ dır. Böylece π bir submersiyondur.

Bu submersiyonun yatay distribüsyonu

$$H = span\{Z_1=(1,-1,0,0,0),\ Z_2=(0,0,1,0,0),\ Z_3\,(0,0,0,1,-2)\}$$

ve dikey distribüsyonu

$$V = span\{v_1=(1,1,0,0,0)\ \ v_2=(0,0,0,2,1)\}$$

olup $\mathbb{R}^5 = V\oplus H$ dır.

Teorem 3.8 $\pi(q)=y$ ve $q\in M$ için $\forall V_q$ distribüsyonu, $\pi^{-1}(y)$ altmanifoldunun tanjant uzayı ile çakışır (Falcitelli, 2004).

Teorem 3.8 in bir sonucu olarak, $q\in M$ için

$$T_qM = V_q\oplus H_q = V_q\oplus V_q^{\perp}$$

eşitliği sağlanr.

Tanım 3.9 Eğer $\pi:(M,g)\rightarrow(B,g')$ diferansiyellenebilir dönüşümü verilsin:

1. π maksimal ranka sahiptir.
2. $\forall q\in M$ için π_{*q} ifadesi $Y_q\in\Gamma(H_q)$ yatay vektörlerinin uzunluğunu korur.

koşullarına sahip ise π dönüşümüne *Riemann submersiyonu* adı verilir:

Tanımdaki birinci şart dönüşümün bir submersiyon olduğunu garanti etmektedir. İkinci şart ise π_* türev dönüşümünün H_q distribüsyonu üzerinde bir lineer izometri olduğunu ifade etmektedir. Diğer bir deyişle

$$g_p(u,v) = g'_{\pi(q)}(\pi_{*q}u, \pi_{*q}v) \ , \quad u,v \in H_q \ , \ \ q \in M \tag{3.1}$$

dir (Falcitelli, 2004).

Örnek 3.10 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ olmak üzere

$$\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \ , \quad \pi(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1 \cos\alpha + z_3 \sin\alpha \ , \ z_2 \sin\alpha + z_4 \cos\alpha)$$

dönüşümü verilsin. Burada $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ ile $\mathbb{R}^4$ uzayının bir koordinat sistemi gösterilmektedir. Direkt bir hesaplama ile

$$\pi_* = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu durumda $rank\pi_* = boy(\mathbb{R}^2) = 2$ dir. O halde π bir submersiyondur. Ayrıca

$$V^{\perp} = H = span\left\{ Z_3 = \cos\alpha \frac{\partial}{\partial z_1} + \sin\alpha \frac{\partial}{\partial z_3} \ , \ Z_4 = \sin\alpha \frac{\partial}{\partial z_2} + \cos\alpha \frac{\partial}{\partial z_4} \right\}$$

ve

$$V = çek\pi_* = span\left\{ Z_1 = \sin\alpha \frac{\partial}{\partial z_1} - \cos\alpha \frac{\partial}{\partial z_3} \ , \ Z_2 = \cos\alpha \frac{\partial}{\partial z_2} - \sin\alpha \frac{\partial}{\partial z_4} \right\}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\pi_*(Z_3) = \frac{\partial}{\partial z_1} \ , \ \pi_*(Z_4) = \frac{\partial}{\partial z_2}$$

dir.

g ve g', $\mathbb{R}^4$ ve $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart iç çarpımlar olup

$$g(Z_3, Z_3) = g'(\pi_*(Z_3) \ , \ \pi_*(Z_3)) = 1 \ , \ g(Z_4, Z_4) = g'(\pi_*(Z_4) \ , \ \pi_*(Z_4)) = 1$$

olur. Elde edilen hesaplamalar ile π dönüşümünün bir Riemann submersiyonu olduğu görülür.

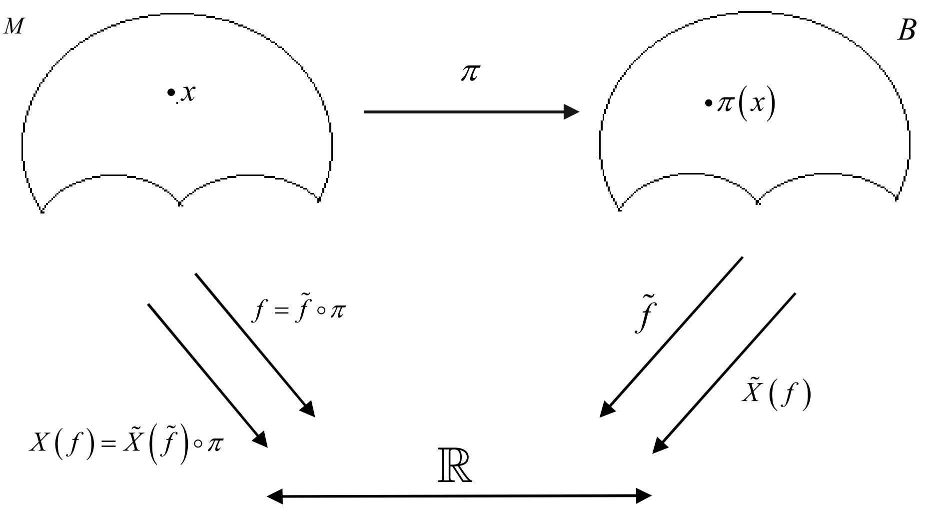
Örnek 3.11 (M,g) ve (B,g') birer Riemann manifold, bunların çarpımı olan Riemann manifoldu $(M\times B\ ,\ g_{M\times B})$ olsun. Bu durumda

$$\pi_1:(M\times B\ ,\ g_{M\times B})\to(M,g),$$
$$\pi_2:(M\times B\ ,\ g_{M\times B})\to(B,g')$$

dönüşümlerini göz önüne alalım. Açıkça görülür ki π_1 ve π_2 birer Riemann submersiyondur (Falcitelli, 2004).

Tanım 3.12 X , yatay distribüsyon üzerinde yatıyorsa *yatay vektör alanı*, dikey distribüsyon üzerinde yatıyorsa *dikey vektör alanı* olarak isimlendirilir. $\chi^h(M)$ yatay vektör alanlarının kümesi, $\chi^v(M)$ ise dikey vektör alanlarının kümesini temsil eder (Falcitelli, 2004).

Tanım 3.13 Eğer $\tilde{f}\in C^\infty(B)$ için $X\left(\pi\left(\tilde{f}\right)\right)=\pi\left(\tilde{X}\left(\tilde{f}\right)\right)$ olacak şekilde $\tilde{X}\in\chi(B)$ vektör alanı var ise $X\in\chi(B)$ vektör alanına *izdüşürülebilirdir* denir. Bu vektör alanlarının uzayı $\chi^c(M)$ ile temsil edilir.



Şekil 1.1. İzdüşürülebilir vektör alanı

$E \in \chi(M)$ için E nin dikey ve yatay kısımları vE ve hE ile temsil edilir. Eğer *E, B* deki E' ile π bağlı ise yani $\pi_*(E) = E'$ oluyorsa buna *temel vektör alanı* adı verilir. Bu uzay

$$\chi^b(M) = \chi^c(M) \cap \chi^h(M)$$

ile temsil edilir. Temel vektör alanlarının uzayı ile $\chi(B)$, π altında birbirine izomorfiktir. Temel vektör alanları yatay distribüsyonu yerel olarak geren vektör alanlarıdır (Beri, 2016).

Lemma 3.14 (M,g) ve (B,g'), ∇ ve ∇' *Levi-Civita* konneksiyonları ile verilmiş Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M,g) \to (B,g')$$

Riemann submersiyon olsun. M üzerindeki Z_1 ve Z_2 temel vektör alanlarına π - bağlı olan vektör alanları Z_1' ve Z_2' olmak üzere

i. $g(Z_1,Z_2) = g'\left(Z_1',Z_2'\right) \circ \pi$ eşitliği sağlanır.

ii. $h[Z_1,Z_2]$ temel vektör alanı $\left[Z_1',Z_2'\right]$ π bağlıdır.

iii. $h\left(\nabla_{Z_1} Z_2\right)$, $\nabla'_{Z_1'} Z_1'$ ne π - bağlıdır.

iv. $W \in \chi^v(M)$ olmak üzere $[Z_1,W]$ dikey vektör alanıdır (Falcitelli, 2004).

İspat: i. $q \in M$, $Z_1, Z_2 \in \chi^b(M)$ için

$$g_q(Z_1,Z_2) = g'_{\pi(q)}\left(\pi_{*q}(Z_1)\ ,\ \pi_{*q}(Z_2)\right)$$

dir. Buradan

$$g_p(Z_1,Z_2) = g'\left(Z_1',Z_2'\right) \circ \pi$$

elde edilir.

ii. $Z_1, Z_2 \in \chi^b(M)$ için

$$\pi_*\left(\left[Z_1,Z_2\right]\right)=\pi_*h\left(\left[Z_1,Z_2\right]\right)+\pi_*v\left(\left[Z_1,Z_2\right]\right)$$

yazılabileceğinden

$$\pi_*h\left(\left[Z_1,Z_2\right]\right)=\left[\pi_*Z_1\ ,\ \pi_*Z_2\right]$$

veya

$$\pi_*h\left(\left[Z_1,Z_2\right]\right)=\left[Z_1',Z_2'\right]\circ\pi$$

bulunur. Yani $h\left[Z_1,Z_2\right]$ temel vektör alanı $\left[Z_1',Z_2'\right]$ vektör alanına π - bağlıdır.

iii. π bir izometri olduğundan

$$Z_1\left(g\left(Z_2,Z_3\right)\right)=Z_1\left(g'\left(Z_2'Z_3'\right)\right)\circ\pi$$

ve $\left[Z_1,Z_2\right]$ ile $\left[Z_1',Z_2'\right]$ π -bağlı olduğundan Koszul özdeşliğinden Z_1,Z_2,Z_3

temel vektör alanları Z_1', Z_2', Z_3' vektör alanlarının yatay liftleri olmak üzere

$$\begin{aligned}2g\left(\nabla_{Z_1}Z_2,Z_3\right)&=Z_1'\left(g'\left(Z_2',Z_3'\right)\right)+Z_1'\left(g'\left(Z_1',Z_3'\right)\right)-Z_3'\left(g'\left(Z_1',Z_1'\right)\right)\\&+g'\left(\left[Z_1',Z_3'\right],Z_3'\right)+g'\left(\left[Z_3',Z_1'\right],Z'\right)-g'\left(\left[Z_2',Z_3\right],Z_1'\right)\end{aligned}$$

dir. Bu eşitlikte sağdaki ifade B manifoldunun ∇' olan *Levi-Civita* konneksiyonu için Koszul özdeşliğidir. Buradan

$$g\left(\nabla_{Z_1}Z_2,Z_3\right)=g'\left(\nabla'_{Z_1'}Z_2',Z_3'\right)$$

elde edilir.

iv. $\forall\ W\in\chi^v\left(M\right)$ ve $Z_1\in\chi^b\left(M\right)$ için X temel vektör alanı Z_1' vektör alanına π - bağlı olmak üzere (ii) den

$$\pi_*\left[Z_1,W\right]=\left[\pi_*Z_1,\pi_*W\right]=0$$

elde edilir. Bu ise $\left[Z_1,W\right]\in\Gamma\left(V\right)$ demektir.

Sonuç 3.15 Lemma 3.14 ün (iv) şıkkından dikey distribüsyonun integrellanebilir olduğu görülür (Şahin, 2012).

Tanım 3.16 $\pi:(M,g)\to(B,g')$ bir Riemann submersiyonu olsun. ∇, (M,g) manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere, $(1,2)$ mertebeli T temel tensör alanı

$$T(E,F)=T_EF=h\nabla_{vE}vF+v\nabla_{vE}hF\ ,\ E,F\in\chi(M) \qquad (3.2)$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 3.16 dan aşağıdaki özellikler kolayca görülmektedir:

- $E\in\chi(M)$ için T_E lineer operatördür.
- Dikey tensör alanı T ile gösterilir. $E\in\chi(M)$ için $T_E=T_{vE}$ dir (Şahin, 2012).

Diğer O'Neill tensör alanı aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

Tanım 3.17 A temel tensör alanı $(1,2)$ mertebeli olmak üzere

$$A(E,F)=A_EF=v\nabla_{hE}hF+h\nabla_{hE}vF\ ,\ E,F\in\chi(M) \qquad (3.3)$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 3.17 den A temel tensör alanı için de aşağıdaki özellikler görülmektedir:

- $E\in\chi(M)$ olmak üzere A_E lineer operatördür.
- A yatay tensör alanını ifade eder. $E\in\chi(M)$ için $A_E=A_{hE}$ dir (Şahin, 2012).

Lemma 3.18 $\pi:(M,g)\to(B,g')$ bir Riemann submersiyonu olmak üzere. Herhangi bir $E,F,G\in\chi(M)$ için

$$g(T_EF,G)=-g(T_EG,F) \qquad (3.4)$$

$$g(A_EF,G)=-g(A_EG,F) \qquad (3.5)$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece A_E ve T_E tensör alanları g metriğine göre anti-simetriktir (Şahin, 2012).

İspat. (3.2) den

$$g(T_EG,F)=g(h\nabla_{vE}vG,hF)+g(v\nabla_{vE}hG,vF)$$

dir. Burada v ve h birer projeksiyon olduğu göz önüne alınırsa

$$g\left(T_E G, F\right) = g\left(\nabla_{vE} vG, hF\right) + g\left(\nabla_{vE} hG, vF\right)$$

eşitliği sağlanır. ∇ Levi-Civita konneksiyonu olmasından dolayı

$$\begin{aligned} g\left(T_E G, F\right) &= vEg\left(vG, hF\right) - g\left(vG, \nabla_{vE} hF\right) \\ &+ vEg\left(hG, vF\right) - g\left(hG, \nabla_{vE} vF\right) \end{aligned}$$

elde edilir. $g\left(vG, hF\right) = 0$ olduğundan

$$g\left(T_E G, F\right) = -g\left(vG, \nabla_{vE} hF\right) - g\left(hG, \nabla_{vE} vF\right)$$

olur. Bu ise

$$g\left(T_E G, F\right) = -\left(g\left(vG,\ v\nabla_{vE} hF\right) + g\left(hG,\ h\nabla_{vE} vF\right)\right)$$

demektir. (3.2) eşitliği sağ tarafa uygulanırsa

$$g\left(T_E G, F\right) = -g\left(G, T_E F\right)$$

elde edilir. Bu (3.4) eşitliğidir. (3.5) eşitliği benzer şekilde gösterilir.

Sonuç 3.19 $q \in M$ ve $u \in T_q M$ için T_u ve A_u anti-simetriktir. Bu tensörler $q \in M$ noktasında yatay ve dikey alt uzaylarının rollerini değiştirirler (Şahin, 2012).

Önerme 3.20 π herhangi bir Riemann submersiyon olsun.

i. $U, W \in \chi^v\left(M\right)$ için

$$T_U W = T_W U \tag{3.6}$$

ii. $Z_1, Z_2 \in \chi^h\left(M\right)$ için

$$A_{Z_1} Z_2 = -A_{Z_2} Z_1 \tag{3.7}$$

iii. v dikey distribüsyon üzerine olan projeksiyon olmak üzere

$$A_{Z_1} Z_2 = \frac{1}{2} v\left[Z_1, Z_2\right] \tag{3.8}$$

dır (Şahin, 2012).

İspat. **i.** $U, W \in \chi^v\left(M\right)$ için (3.2) den

$$T_U W = h\nabla_U W$$

dir. Bu ifade U ve V vektör alanlarının rolleri değiştirilir ve gerekli işlem yapılırsa

$$T_U W - T_W U = h\left(\nabla_U W - \nabla_W U\right)$$

elde edilir. Buradan

$$T_U W - T_W U = h\left[U, W\right]$$

olur. Dikey distribüsyon integrallenebilirdir bu sebeple $\left[U, W\right] \in \chi^v\left(M\right)$ olup $h\left[U, W\right] = 0$ dır. Böylece

$$T_U W - T_W U = 0$$

eşitliği bulunur.

ii. Z_1 temel vektör alanı ve $W \in \chi^v\left(M\right)$ için, W birim vektör olsun. ∇ metrik konneksiyon olması sebebiyle

$$W\left(g\left(Z_1, Z_1\right)\right) = g\left(\nabla_W Z_1, Z_1\right) + g\left(Z_1, \nabla_W Z_1\right)$$

dır. Daha sonra ∇ konneksiyonunun torsiyonsuz olma özelliği kullanılırsa

$$W\left(g\left(Z_1, Z_1\right)\right) = 2g\left(Z_1, \nabla_{Z_1} W - \left[Z_1, W\right]\right)$$

olur. Lemma 3.14 ün (iv) şıkkından

$$W\left(g\left(Z_1, Z_1\right)\right) = 2g\left(\nabla_{Z_1} W, Z_1\right)$$

dır. Burada tekrar ∇ konneksiyonunun metrik konneksiyon olma özelliği kullanılırsa

$$W\left(g\left(Z_1, Z_1\right)\right) = -2g\left(\nabla_{Z_1} Z_1, W\right)$$

elde edilir. Böylece (3.3) den yararlanılarak

$$W\left(g\left(Z_1, Z_1\right)\right) = -2g\left(A_{Z_1} Z_1, W\right)$$

olur. Her lif üzerinde $g\left(Z_1, Z_1\right)$ sabit ve $A_{Z_1} Z_1$ vektör alanının dikey vektör alanı olduğu göz önüne alınırsa

$$A_{Z_1} Z_1 = 0$$

elde edilir. Z_1 keyfi olduğundan

$$A_{Z_1 + Z_2} Z_1 + Z_2 = 0$$

elde edilir. A lineerdir bu sebeple

$$
\begin{aligned}
A_{Z_1+Z_2}Z_1+Z_2 &= A_{Z_1}Z_1+A_{Z_1}Z_2+A_{Z_2}Z_1+A_{Z_2}Z_2\\
&= A_{Z_1}Z_2+A_{Z_2}Z_1\\
&= 0
\end{aligned}
$$

olur. Buradan (ii) elde edilir.

iii. $Z_1, Z_2 \in \chi^h(M)$ olup Lie braketin açılımından

$$v[Z_1, Z_2] = v(\nabla_{Z_1}Z_2 - \nabla_{Z_2}Z_1)$$

dır. Burada (3.3) kullanılırsa bu durumda (3.7) den (3.8) elde edilir.

Lemma 3.21 $Z_1, Z_2 \in \chi^h(M)$ ve $V, W \in \chi^v(M)$ için

$$\nabla_V W = T_V W + \hat{\nabla}_V W \tag{3.9}$$

$$\nabla_V Z_1 = h\nabla_V Z_1 + T_V Z_1 \tag{3.10}$$

$$\nabla_{Z_1} V = A_{Z_1} V + v\nabla_{Z_1} V \tag{3.11}$$

$$\nabla_{Z_1} Z_2 = h\nabla_{Z_1} Z_2 + A_{Z_1} Z_2 \tag{3.12}$$

eşitlikleri sağlanır ve $\hat{\nabla}_V W = v\nabla_V W$ dır. Burada V dikey distribüsyonu integrallenebilir olduğundan bu distribüsyona bir maksimal integral manifoldu karşılık gelir. Bu manifoldun Levi-Civita konneksiyonu $\hat{\nabla}$ alınırsa

$$\hat{\nabla}_V W = v\nabla_V W$$

yazılabilir. Eğer Z temel vektör alanı ise $[Z_1, V]$ de dikey vektör alanıdır. Bu durumda

$$h\nabla_V Z_1 = h\nabla_{Z_1} V = A_{Z_1} V$$

dır (Şahin, 2012).

İspat. (3.2) den

$$
\begin{aligned}
T_V W &= h\nabla_{vV} vW + v\nabla_{vV} hW\\
&= h\nabla_V W
\end{aligned}
$$

ve

$$\nabla_V W = h\nabla_V W + v\nabla_V W$$

olduğundan (3.9) eşitliği

$$\nabla_V W = T_V W + \hat{\nabla}_V W$$

elde edilir. (3.2) den

$$T_V Z_1 = h\nabla_{vV} vZ_1 + v\nabla_{vV} hZ_1$$
$$= v\nabla_V Z_1$$

ve

$$\nabla_V Z_1 = v\nabla_V Z_1 + h\nabla_V Z_1$$

eşitliğinden

$$\nabla_V Z_1 = h\nabla_V Z_1 + T_V Z_1$$

olup. Diğer taraftan (3.3) den

$$A_{Z_1} V = v\nabla_{hZ_1} hV + h\nabla_{hZ_1} vV$$
$$= h\nabla_{Z_1} V$$

bulunur. Temel manifoldun ayrışımı göz önüne alınırsa

$$\nabla_{Z_1} V = h\nabla_{Z_1} V + v\nabla_{Z_1} V$$

olur. Buradan (3.11) elde edilir. Tekrar $A(E,F) = A_E F = v\nabla_{hE} hF + h\nabla_{hE} vF$ kullanılarak

$$A_{Z_1} Z_2 = v\nabla_{hZ_1} hZ_2 + h\nabla_{hZ_1} vZ_2$$
$$= v\nabla_{Z_1} Z_2$$

dır. Burada

$$\nabla_{Z_1} Z_2 = h\nabla_{Z_1} Z_2 + v\nabla_{Z_1} Z_2$$

olduğundan (3.12) elde edilir.

Teorem 3.22 $\pi : (M,g) \to (B,g')$ bir Riemann submersiyonu ve (M,g) üzerindeki yatay distribüsyon H olsun. Bu durumda H yatay distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $A = 0$ olmasıdır (Şahin, 2012).

İspat: Herhangi bir $X, Y \in \chi^h(M)$ için

$$A_X Y = v\nabla_X Y$$

dir. Buradan

$$A_X Y - A_Y X = v[X,Y]$$

elde edilir. Burada A tensörü yatay distribüsyon üzerinde anti-simetrik olduğundan $A_X Y = -A_Y X$ kullanılırsa

$$2A_X Y = v[X,Y]$$

elde edilir. Buradan $A_X Y = 0$ ise H integrallenebilirdir. Tersine H integrallenebilirse $A_X Y = 0$ olur. Buradan $U \in \chi^v(M)$ için

$$g(A_X Y, U) = -g(A_X U, Y) = 0$$

elde edilir. Bu ise $A_X U = 0$ dır. Böylelikle A_X, M de sıfırdır ve $E \in \chi(M)$ için

$$A_E = A_{hE}$$

den

$$A_U = 0$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 3.23 Örnek 3.3 de verilen $\pi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_3 + x_4)$ Riemann submersiyon örneğini göz önüne alalım. Burada

$$\pi_* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olup $H = span\{X_1 = (1,1,0,0),\ X_2 = (0,0,1,1)\}$ ve

$V = \{U_1 = (1,-1,0,0),\ U_2 = (0,0,1,-1)\}$ olur. Burada

$X = cosx_1 X_1 + sinx_1 X_2 = (\cos x_1, \cos x_1, \sin x_1, \sin x_1) \in \Gamma(H)$

$Y = \sin x_2 X_1 + \cos x_2 X_2 = (\sin x_2, \sin x_2, \cos x_2, \cos x_2) \in \Gamma(H)$

alınsın. Bu durumda

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= (X[y_1], X[y_2], X[y_3], X[y_4]) \\ &= (\cos x_2 \cos x_1,\ \cos x_2 \cos x_1,\ -\sin x_2 \sin x_1\ -\sin x_2 \sin x_1) \\ &= \cos x_2 \cos x_1 X_1 - \sin x_2 \sin x_1 X_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\nabla_X Y \in \Gamma(H)$ olur. Lemma 3.21 de (3.12) eşitliği göz önüne alınırsa

$$h\nabla_X Y = \cos x_2 \cos x_1 X - \sin x_2 \sin x_1 X_2$$

ve

$$A_X Y = 0$$

olduğu görülür.

Bu örneğe benzer örnekler verilebilir.

3.2. Submersiyonlar Üzerinde Riemann Eğrilik Tensör Alanı

Tanım 3.24 $U,V,W \in \chi^v(M)$ olmak üzere (3.9) eşitliğinden

$R(U,V)W = \nabla_U T_V W + \nabla_U \hat{\nabla}_V W - \nabla_V T_U W - \nabla_V \hat{\nabla}_U W - T_{[U,V]} W - \hat{\nabla}_{[U,V]} W$ olur.

(3.9) ve (3.12) kullanılırsa

$$R(U,V)W = h\nabla_U T_V W + T_U T_V W + T_U \hat{\nabla}_V W + \hat{\nabla}_U \hat{\nabla}_V W - h\nabla_V T_U W - T_V T_U W$$
$$- T_V \hat{\nabla}_U W - \hat{\nabla}_V \hat{\nabla}_U W - T_{[U,V]} W - \hat{\nabla}_{[U,V]} W \qquad (3.13)$$

elde edilir. (3.13) ifadesinin sağ ve sol tarafı da $F \in \chi^v(M)$ ile iç çarpımı alınırsa

$$g\left(R(U,V)W,F\right) = g\left(\hat{\nabla}_U \hat{\nabla}_V W - \hat{\nabla}_V \hat{\nabla}_U W - \hat{\nabla}_{[U,V]} W, F\right) + g\left(T_U T_V W, F\right) - g\left(T_V T_U W, F\right)$$

olur. Böylece T tensör alanı g metriğine anti-simetrik olduğundan

$$g\left(R(U,V)W,F\right) = g\left(\hat{R}(U,V)W,F\right) - g\left(T_U F, T_V W\right) + g\left(T_V F, T_U F\right) \qquad (3.14)$$

elde edilir. (3.13) denkleminin her iki tarafı $Z \in \chi^h(M)$ ile skaler çarpılırsa

$$g\left(R(U,V)W,Z\right) = g\left(h\nabla_U T_V W, Z\right) + g\left(T_U \hat{\nabla}_V W, Z\right) - g\left(h\nabla_V T_U W, Z\right) - g\left(T_V \hat{\nabla}_U W, Z\right)$$
$$- g\left(\nabla_{[U,V]} W, Z\right)$$

olur. Diğer taraftan $g\left(T_V \hat{\nabla}_U W, Z\right) = g\left(T_U \nabla_V W - T_V T_U W, Z\right) = g\left(T_V \nabla_U W, Z\right)$

ve $h\nabla_{[U,V]} W = T_{\nabla_U V} W - T_{\nabla_V U} W$ olduğundan

$$g\left(R(U,V)W,Z\right) = g\left(\nabla_U T_V W - T_{\nabla_U V} W - T_V \nabla_U W, Z\right) - g\left(\nabla_V T_U W - T_{\nabla_V U} W - T_U \nabla_V W, Z\right)$$

olarak elde edilir. Bu ifadenin sağ tarafı T tensör alanının kovaryant türevidir (Şahin, 2012).

Böylece

$$g\left(R(U,V)W,Z\right) = g\left(\left(\nabla_U T\right)_V W, Z\right) - g\left(\left(\nabla_V T\right)_U W, Z\right) \qquad (3.15)$$

olur. (3.14) ve (3.15) denklemleri submersiyonlarda Gauss ve Codazzi denklemleri olarak isimlendirilir.

(M,g) ve (B,g') Riemann manifoldları ve (M,g) manifoldunun yatay distribüsyonu H olsun. R' ile B manifoldunun eğrilik tensör alanını gösterelim. Bu durumda $p \in M$ için $R'_{\pi(p)}\left(\pi_*(p)X_p\,,\,\pi_*(p)Y_p\,,\,\pi_*(p)Z_p\right)$ vektörünün yatay gönderileni $R_p^*\left(X_p,Y_p\right)Z_p$ olsun. Diğer taraftan net bir ifadeyle $Z_1,Z_2,Z_3 \in \chi^h(M)$ için

$$\pi_*\left(R^*\left(Z_1,Z_2\right)Z_3\right)=R'\left(\pi_*Z_1,\pi_*Z_2\right)\pi_*Z_3$$

şeklinde ifade edilir. Ve $Z_1,Z_2,Z_3 \in \chi^h(M)$ için

$$R^*\left(Z_1,Z_2,Z_3,H\right)=g\left(R^*\left(Z_1,Z_2,Z_3\right),H\right)=R'\left(\pi_*Z_1,\pi_*Z_2,\pi_*Z_3,\pi_*H\right)\circ\pi \qquad (3.16)$$

eşitliği elde edilir.

$\pi:(M,g)\to(B,g')$ bir Riemann submersiyon, M ve B manifoldlarının Riemann eğrilik tensörleri sırasıyla R ve R' olsun. Böylelikle $Z_1,Z_2,Z_3 \in \chi^h(M)$ ve $U,W \in \chi^v(M)$ için temel vektör alanlarını Z_1, Z_2, Z_3 ifadelerini kabul edebiliriz. $[Z_1,Z_2]$, $[Z_2,Z_3]$, $[Z_3,Z_1]$ braketlerini de dikey olacak şekilde ifade edebiliriz. Diğer taraftan $h\nabla_{Z_1}Z_2$ vektör alanı ile $\nabla'_{Z_1'}Z_2'$ vektör alanı π bağlı olduğundan $\nabla'_{Z_1'}Z_2'$ vektör alanının yatay gönderilenini $\nabla^*_{Z_1}Z_2$ ile gösterelim. Bu durumda (3.9) ve (3.10) denklemlerinden

$$R\left(Z_1,Z_2\right)Z_3=\nabla_{Z_1}\left(\nabla^*_{Z_2}Z_3+A_{Z_2}Z_3\right)-\nabla_{Z_2}\left(\nabla^*_{Z_1}Z_3+A_{Z_1}Z_1\right)-h\nabla_{[Z_1,Z_2]}Z_3-T_{[Z_1,Z_2]}Z_3$$

olur. (3.9) ve (3.12) kullanılırsa

$$\begin{aligned}R\left(Z_1,Z_2\right)Z_3=&\nabla^*_{Z_1}\nabla^*_{Z_2}Z_3+A_{Z_1}\nabla^*_{Z_2}Z_3+A_{Z_1}A_{Z_2}Z_3+v\nabla_{Z_1}A_{Z_2}Z_3-\nabla^*_{Z_2}\nabla^*_{Z_1}Z_3-A_{Z_2}\nabla^*_{Z_1}Z_3\\&-A_{Z_2}A_{Z_1}Z_3-v\nabla_{Z_2}A_{Z_1}Z_3-2A_ZA_{Z_1}Z_3-2T_{A_{Z_1}Z_2}Z_3\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}R\left(Z_1,Z_2\right)Z_3=&R^*\left(Z_1,Z_2\right)Z_3+A_{Z_1}A_{Z_2}Z_3-A_{Z_2}A_{Z_1}Z_3-2A_{Z_3}A_{Z_1}Z_2-2T_{A_{Z_1}Z_2}Z_3\\&+v\nabla_{Z_1}A_{Z_2}Z_3-v\nabla_{Z_2}A_{Z_1}Z_3+A_{Z_1}\nabla^*_{Z_2}Z_3-A_{Z_2}\nabla^*_{Z_1}Z_3\end{aligned} \qquad (3.17)$$

dir. Ve $h\left[Z_1,Z_2\right]=0$ dır. Bu sebep ile $\pi_*\left[Z_1,Z_2\right]=0$ olur. Daha sonra (3.17) ifadesinin her iki tarafı $H \in \Gamma(\mathrm{H})$ ile iç çarpımı alınırsa

$$\begin{aligned}g\left(R\left(Z_1,Z_2\right)Z_3,H\right)=&g\left(R^*\left(Z_1,Z_2\right)Z_3,H\right)+g\left(A_{Z_1}A_{Z_2}Z_3,H\right)-g\left(A_{Z_2}A_{Z_1}Z_3,H\right)\\&-2g\left(A_{Z_3}A_{Z_1}Z_2,H\right)\end{aligned}$$

olur. *A* tensör alanı *g* metriğine göre simetrik olduğundan

$$g\left(R\left(Z_1,Z_2\right)Z_3,H\right)=g\left(R^*\left(Z_1,Z_2\right)Z_3,H\right)+2g\left(A_{Z_3}H,A_{Z_1}Z_2\right)+g\left(A_{Z_2}H,A_{Z_1}Z_3\right)$$
$$-g\left(A_{Z_1}H,A_{Z_2}Z_3\right) \qquad (3.18)$$

elde edilir. (3.17) denkleminin her iki yanı $K\in\Gamma\left(V\right)$ ile iç çarpımı alınırsa

$$g\left(R\left(Z_1,Z_2\right)Z_3,K\right)=-2g\left(T_{A_{Z_1}Z_2}Z_3,K\right)+g\left(v\nabla_{Z_1}A_{Z_2}Z_3,K\right)-g\left(\nabla_{Z_2}A_{Z_1}Z_3,K\right)$$
$$+g\left(A_{Z_1}\nabla^*_{Z_2}Z_3,K\right)-g\left(A_{Z_2}\nabla^*_{Z_1}Z_3,K\right)$$

olur. T tensör alanı g metriğine göre anti-simetrik ve dikey distribüsyon üzerinde simetrik olduğundan

$$g\left(R\left(Z_1,Z_2\right)Z_3,K\right)=2g\left(T_KZ_3,A_{Z_1}Y\right)+g\left(\nabla_{Z_1}A_{Z_2}Z_3,K\right)-g\left(\nabla_{Z_2}A_{Z_1}Z_3,K\right)$$
$$+g\left(A_{Z_1}\nabla^*_{Z_2}Z_3,K\right)-g\left(A_{Z_2}\nabla^*_{Z_1}Z_3,K\right)$$

bulunur. Diğer taraftan $\left(\nabla_{Z_1}A\right)_{Z_2}Z_3=\nabla_{Z_1}A_{Z_2}Z_3-A_{\nabla_{Z_1}Z_2}Z_3-A_{Z_2}\nabla_{Z_1}Z_3$ olduğundan

$$g\left(\left(\nabla_{Z_1}A\right)_{Z_2}Z_3,K\right)-g\left(\left(\nabla_{Z_2}A\right)_{Z_1}Z_3,K\right)=g\left(\nabla_{Z_1}A_{Z_2}Z_3,K\right)-g\left(A_{Z_2}\nabla_{Z_1}Z_3,K\right)$$
$$-g\left(\nabla_{Z_2}A_{Z_1}Z_3,K\right)+g\left(A_{Z_1}\nabla_{Z_2}Z_3,K\right) \qquad (3.19)$$

dir. (3.19) kullanılırsa

$$g\left(R\left(Z_1,Z_2\right)Z_3,\,K\right)=-2g\left(T_KZ_3,\,A_{Z_1}Z_2\right)+g\left(\left(\nabla_{Z_1}A\right)_{Z_2}Z_3,\,K\right)-g\left(\left(\nabla_{Z_2}A\right)_{Z_1}Z_3,\,K\right)$$

olur. Ayrıca $\left(\nabla_{Z_1}T\right)_{Z_2}=-T_{A_{Z_1}Z_2}$ den

$$g\left(\left(\nabla_{Z_1}A\right)_{Z_2}Z_3,\,K\right)-g\left(\left(\nabla_{Z_2}A\right)_{Z_1}Z_3,\,K\right)=-g\left(\left(\nabla_{Z_3}A\right)_{Z_1}Z_2,\,K\right)$$
$$+g\left(A_{Z_1}Z_2,\,T_KZ_3\right)$$
$$+g\left(A_{Z_3}Z_1,\,T_KZ_2\right) \qquad (3.20)$$
$$+g\left(A_{Z_2}Z_3,\,T_KZ_1\right)$$

bulunur. (3.20) yukarıdaki denklemde yerine yazılır ve A tensör alanının yatay distribüsyon üzerinde alterne olduğu kullanılırsa

$$g\left(R\left(Z_1,Z_2\right)Z_3,\,K\right)=-g\left(\left(\nabla_{Z_3}A\right)_{Z_1}Z_2,\,K\right)-g\left(T_KZ_3,\,A_{Z_1}Z_2\right)-g\left(A_{Z_1}Z_3,\,T_KZ_2\right)$$
$$+g\left(A_{Z_2}Z_3,\,T_KZ_1\right) \qquad (3.21)$$

elde edilir. (3.18) ve (3.20) denklemlerine benzer olarak

$$g\left(R\left(Z_1,Z_2\right)K\,,\,W\right)=g\left(\left(\nabla_K A\right)_{Z_1} Z_2\,,\,W\right)-g\left(\left(\nabla_W A\right)_{Z_1} Z_2\,,\,K\right)+g\left(A_{Z_1}K\,,\,A_{Z_2}W\right)$$
$$-g\left(A_{Z_1}W\,,\,A_{Z_2}K\right)-g\left(T_K Z_1\,,\,T_W Z_2\right)+g\left(T_W Z_1\,,\,T_K Z_2\right) \qquad (3.22)$$
$$g\left(R\left(Z_1,K\right)Z_2\,,\,W\right)=-g\left(\left(\nabla_W T\right)_K W\,,\,Z_2\right)+g\left(\left(\nabla_K A\right)_{Z_1} Z_2\,,\,W\right)$$
$$-g\left(T_K Z_1\,,\,T_W Z_2\right)+g\left(A_{Z_1}K\,,\,A_{Z_2}W\right) \qquad (3.23)$$

olur (Şahin, 2012).

Teorem 3.25 M, B manifoldlarının ve lifin eğrilikleri sırası ile S, S', $\hat{S}$ olsun. Ortonormal Z_1 ve Z_2 yatay vektörleri ve dikey vektörler olan U, V için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

i. $S\left(U,V\right)=\hat{S}\left(U,V\right)+\left\|T_U V\right\|^2-g\left(T_U V,T_V V\right),$

ii. $S\left(Z_1,Z_2\right)=S'\left(Z_1',Z_2'\right)\circ\pi-3\left\|A_{Z_1}Z_2\right\|^2,$

iii. $S\left(Z_1,V\right)=g\left(\left(\nabla_{Z_1}T\right)_V V,Z_1\right)+\left\|T_V Z_1\right\|^2+\left\|A_{Z_1}V\right\|^2$ (Şahin, 2012).

3.3.Anti-İnvaryant Riemann Submersiyonları

Tanım 3.26 (M, g_M, J) *m*- kompleks boyutlu hemen hemen Hermityen bir manifold ve (N, g_N) bir Riemann manifold olsun. $\pi : M \to N$ Riemann submersiyon olacak şekilde $JV \subset H$ ise π ye bir *anti-invaryant submersiyon* adı verilir (Şahin, 2010). H yatay distribüsyonu

$$H = JV \oplus \mu$$

olacak şekilde yazılabilir. Burada μ , JV nin tamamlayan distribüsyonudur.

Lemma 3.27 μ , H üzerinde invaryant distribüsyondur (Şahin, 2010).

İspat: Kabul edelim ki $boyV = s$, $boyH = n$ ve $n > s$ olsun. $\{v_1,...,v_s\}$, V distribüsyonunun bir ortonormal bazı ve $\{Z_1,...,Z_n\}$ H distribüsyonun ortonormal bir bazı olsun. π anti-invaryant bir submersiyon olduğundan $Jv_1 \in H,...,Jv_S \in H$ dır. Ayrıca (M, g_M, J) Hermityen bir manifold olduğundan $\{Jv_1,...,Jv_s\}$ kümesi H da ortonormal bir kümedir. Böylece $Jv_1 = Z_1,...,Jv_s = Z_s$ seçilebilir. Bu durumda

$JV = span\{Jv_1,...,Jv_s\}$ ve $\mu = span\{Z_{s+1},...,Z_k\}$ olur.

$Z_l \in \mu$, $l \in \{k+1,...,n\}$ olmak üzere $JZ_l = \sum_{i=1}^{s} a_s v_s + \sum_{k=1}^{n} b_k Z_k$ yazılabilir. $J^2 = -I$ eşitliğinden $-Z_l = \sum_{i=1}^{s} a_s Jv_s + \sum_{k=1}^{n} b_k JZ_k$ olup $-Z_l \in H$ olduğundan

$a_1 = a_2 =$,..., $a_s = 0$ olur. Böylece $JZ_l = \sum_{k=1}^{n} b_k Z_k$ bulunur. Burada $\forall i \in \{1,...,s\}$ için

$$\begin{aligned} g_M(JZ_l, Z_i) &= g_M(JZ_l, Jv_i) \\ &= g_M(Z_l, v_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $JZ_l \perp JV$ dir. Böylece $JZ_l \in M$ olur. Bu ise μ distribüsyonunun invaryant olduğunu gösterir.

Lemma 3.28 π bir anti-invaryant Riemann submersiyon olmak üzere

$$TN = \pi_*\left(JV\right) \oplus \pi_*\left(\mu\right) \tag{3.24}$$

dir (Şahin, 2010).

İspat: Kabul edelim ki $H = span\{Jv_1,...,Jv_s\ ,\ Z_{s+1},...,Z_n\}$, $V = span\{v_1,...,v_s\}$ ve $\mu = span\{Z_{s+1},...,Z_n\}$ olsun. $\forall Z \in H$ için

$$Z = \sum_{i=1}^{s} a_i Jv_i + \sum_{i=s+1}^{n} b_i Z_i$$

$a_i\ b_i \in \mathbb{R}$ yazılabilir. Buradan

$$JZ = -\sum_{i=1}^{s} a_i v_i + \sum_{i=s+1}^{n} b_i JZ_i$$

olduğundan $\forall Z \in H$ yatay vektörü

$$JZ = BZ + CZ \tag{3.25}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $BZ \in V$ ve $CZ \in \mu$ olur. Rimann submersiyon tanımından $\pi_* H = TN$ olup

$$g_N(\pi_* JV, \pi_* CV) = 0$$

olur. Burada $Jv \in JV$ dir. Son eşitlikten $\pi_* JV \perp \pi_* J\mu$ ve $\pi_* JV \cap \pi_* \mu = \{0\}$ olduğundan

$$TN = \pi_*\left(JV\right) \oplus \pi_*\left(\mu\right)$$

olduğu görülür.

Örnek 3.29 $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $\pi\left(z_1, z_2, z_3, z_4\right) = \left(\dfrac{z_1 + z_4}{\sqrt{2}}, \dfrac{z_2 + z_3}{\sqrt{2}}\right)$ ile tanımlı olsun. Bu durumda Jakobiyen matrisi

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

olup

$$H = span\left\{ Z_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \; Z_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \right\} \quad \text{ve}$$

$$V = span\left\{ v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \; v_2 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \right\} \quad \text{dır.}$$

J hemen hemen kompleks yapısı, $J : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $J(z_1, z_2, z_3, z_4) = (-z_2, z_1, -z_4, z_3)$ olsun. Bu durumda $Jv_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) = Z_2$ ve $Jv_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = Z_1$ olduğundan π bir anti-invaryant submersiyon olur

(Şahin, 2010).

Örnek 3.30 $\pi : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$, $\pi(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = (z_1, z_2, z_3 + z_4, z_5 + z_6)$ dönüşümü verilsin. Bu durumda π nin Jakobiyeni

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Böylece

$$H = span\begin{Bmatrix} Z_1 = (1,0,0,0,0,0) \; , Z_2 = (0,1,0,0,0,0), \\ Z_3 = (0,0,1,1,0,0) \; , Z_4 = (0,0,0,0,1,1) \end{Bmatrix}$$

ve

$$V = span\{ v_1 = (0,0,-1,1,0,0) \; , v_2 = (0,0,0,0,1,-1) \}$$

yazılabilir. $\mathbb{R}^6$ üzerinde J hemen hemen kompleks yapısı $J(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = (-z_2, z_1, -z_4, z_3, -z_6, z_5)$ ile tanımlanırsa $Jv_1 = -Z_3$ ve $Jv_2 = Z_4$ olur. Böylece $\nabla J = 0$ ve $\mu = span\{z_1, z_2\}$ olup π bir anti-invaryant submersiyondur.

Lemma 3.31 (M, g_M, J) bir Kaehler manifold ve (N, g_N) bir Riemann manifold olsun. Bu durumda $Z_1, Z_2 \in H$ ve $v \in V$ olmak üzere

$$g_M(CZ_2, JV) = 0 \tag{3.26}$$

ve

$$g_M\left(\nabla_{Z_1}CZ_2, Jv\right) = -g_M\left(CZ_2, JA_{Z_1}v\right) \qquad (3.27)$$

eşitlikleri sağlanır (Şahin, 2010).

İspat: (M, g_M, J) bir Hermityen manifold olduğundan ve (3.25) eşitliğinden $g_M(CZ_2, Jv) = g_M(JZ_2 - BZ_2, Jv)$ elde edilir. $BZ_2 \in V$ ve $Jv \in H$ olduğundan son eşitlik

$$\begin{aligned} g_M(CZ_2, Jv) &= g_M(JZ_2, -Jv) \\ &= g_M(Z_2, v) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece (3.26) eşitliği ispatlanır. (M, g_M, J) bir Kaehler manifoldu olduğundan $\nabla J = 0$ olup (3.26) eşitliğinden

$$Z_1 g_M(CZ_2, Jv) = g_M\left(\nabla_{Z_1}CZ_2, Jv\right) + g\left(CZ_2, \nabla_{Z_1}Jv\right)$$

elde edilir. $\nabla_{Z_1}Jv = J\nabla_{Z_1}v$ olduğundan

$$g_M\left(\nabla_{Z_1}CZ_2, Jv\right) = -g\left(CZ_2, J\nabla_{Z_1}v\right)$$

(3.11) den $g_M\left(\nabla_{Z_1}CZ_2, Jv\right) = -g\left(CZ_2, JA_{Z_1}v\right) - g_M\left(CZ_2, Jv\nabla_{Z_1}v\right)$ olur.

$Jv\nabla_{Z_1}v \in JV$ ve $CY \in \mu$ olduğundan $g_M\left(CY, Jv\nabla_X v\right) = 0$ olup (3.27) eşitliği elde edilir.

Teorem 3.32 π bir anti-invaryant Riemann submersiyonu olsun. Böylelikle aşağıdaki ifadelerin her biri birbirine denktir:

a) H integrallanebilirdir.

b) $g_N\left((\nabla\pi_*)(Z_2, BZ_1), \pi_* JV\right) = g_N\left((\nabla\pi_*)(Z_1, BZ_2), \pi_* JV\right) + g_M\left(CZ_2, JA_{Z_1}V\right)$

$$-g_M\left(CZ_1, JA_{Z_2}V\right).$$

c) $g_M\left(A_{Z_1}BZ_2 - A_{Z_2}BZ_1, Jv\right) = g_M\left(CZ_2, JA_{Z_1}v\right) - g_M\left(CZ_1, JA_{Z_2}v\right)$ (Şahin, 2010).

İspat: $Z_2 \in H$, $v \in V$ için $Jv \in H$ ve $JZ_2 \in (V+\mu)$ olduğunu biliyoruz. M bir Hermityen manifold olduğuna göre

$$\begin{aligned} g_M\left(\left[Z_1,Z_2\right],v\right) &= g_M\left(\nabla_{Z_1}Z_2,v\right)-g_M\left(\nabla_{Z_2}Z_1,v\right) \\ &= g_M\left(J\nabla_{Z_1}Z_2,Jv\right)-g_M\left(J\nabla_{Z_2}Z_1,Jv\right) \end{aligned}$$

M Kaehler manifold olduğundan

$$g_M\left(\left[Z_1,Z_2\right],v\right) = g_M\left(\nabla_{Z_1}JZ_2,Jv\right)-g_M\left(\nabla_{Z_2}JZ_1,Jv\right)$$

yazılabilir. $JZ_1 = BZ_1 + CZ_1$, $BZ_1 \in V$ ve $CZ_1 \in \mu$ olduğundan

$$\begin{aligned} g_M\left(\left[Z_1,Z_2\right],v\right) &= g_M\left(\nabla_{Z_1}(BZ_2+CZ_2),Jv\right)-g_M\left(\nabla_{Z_2}BZ_1+CZ_1,Jv\right) \\ &= g_M\left(\nabla_{Z_1}BZ_2,Jv\right)+g_M\left(\nabla_{Z_1}CZ_2,Jv\right) \\ &\quad - g_M\left(\nabla_{Z_2}BZ_1,Jv\right)-g_M\left(\nabla_{Z_2}CZ_1,Jv\right) \end{aligned}$$

olur. π bir Riemann submersiyon olması sebebiyle

$$\begin{aligned} g_M\left(\left[Z_1,Z_2\right],v\right) &= g_M\left(\pi_*\nabla_{Z_1}BZ_2,\pi_*Jv\right)+g_M\left(\nabla_{Z_1}CZ_2,Jv\right) \\ &\quad - g_M\left(\pi_*\nabla_{Z_2}BZ_1,\pi_*Jv\right)-g_M\left(\nabla_{Z_2}CZ_1,Jv\right) \end{aligned}$$

ve Lemma 3.31 den

$$\begin{aligned} g_M\left(\left[Z_1,Z_2\right],v\right) &= g_M\left(\pi_*\nabla_{Z_1}BZ_2,\pi_*Jv\right)-g_M\left(CZ_2,JA_{Z_1}v\right) \\ &\quad - g_M\left(\pi_*\nabla_{Z_2}BZ_1,\pi_*Jv\right)+g_M\left(CZ_1,JA_{Z_2}v\right) \end{aligned}$$

π_* dönüşümünün Pullback konneksiyonu yardımıyla son eşitlik

$$\begin{aligned} g_M\left(\left[Z_1,Z_2\right],v\right) &= g_M\left(\nabla\pi_*(Z_1,BZ_2),\pi_*Jv\right)+g_M\left(\nabla\pi_*(Z_2,BZ_1),\pi_*Jv\right) \\ &\quad - g_M\left(CZ_2,JA_{Z_1}v\right)+g_M\left(CZ_1,JA_{Z_2}v\right) \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. H integrallenebilir ise $g_M\left(\left[Z_1,Z_2\right],v\right)=0$ olup (b) de verilen eşitlik elde edilir. Benzer şekilde (b) eşitliği sağlanırsa $g_M\left(\left[Z_1,Z_2\right],v\right)=0$ olup $\left[Z_1,Z_2\right] \in H$ olur. Bu ise H ın integrallenebilir olduğunu gösterir. Böylece $(a) \Leftrightarrow (b)$ ispatlanmış olur.

Pullback dönüşümü tanımından

$$\begin{aligned}\nabla\pi_*\left(Z_2,BZ_1\right)-\nabla\pi_*\left(Z_1,BZ_2\right)&=\nabla^{\pi}_{Z_2}\pi_*\left(BZ_1\right)-\pi_*\left(\nabla_{Z_2}BZ_1\right)\\&\quad-\nabla^{\pi}_{Z_1}\pi_*\left(BZ_2\right)+\pi_*\left(\nabla_{Z_1}BZ_2\right)\\&=\nabla^{\pi}_{Z_2}\pi_*\left(BZ_1\right)-\pi_*\left(A_{Z_2}BZ_1\right)\\&\quad-\nabla^{F}_{Z_1}\pi_*\left(BZ_2\right)+\pi_*\left(A_{Z_1}BZ_2\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikten

$$\begin{aligned}g_M\left(\nabla\pi_*\left(Z_2,BZ_1\right),Jv\right)-g_M\left(\nabla\pi_*\left(Z_1,BZ_2\right),Jv\right)&=g_M\left(\nabla^{\pi}_{Z_2}\pi_*\left(BZ_1\right),Jv\right)\\&\quad-g_M\left(\pi_*\left(A_{Z_2}BZ_1\right),Jv\right)\\&\quad-g_M\left(\nabla^{\pi}_{Z_1}\pi_*\left(BZ_2\right),Jv\right)\\&\quad+g_M\left(\pi_*\left(A_{Z_1}BZ_2\right),Jv\right)\end{aligned}$$

yazılabilir. $g_M\left(\nabla^{\pi}_{Z_2}F_*BZ_1,Jv\right)=g_M\left(\nabla^{\pi}_{Z_1}\pi_*BZ_2,Jv\right)=0$ olduğundan

$$g_M\left(\nabla\pi_*\left(Z_2,BZ_1\right),Jv\right)-g_M\left(\nabla\pi_*\left(Z_1,BZ_2\right),Jv\right)=g_M\left(\pi_*\left(A_{Z_2}BZ_1\right),Jv\right)+g_M\left(\pi_*\left(A_{Z_1}BZ_2\right),Jv\right)$$

elde edilir. (b) eşitliği sağlanırsa bu durumda

$$g_M\left(CZ_2,JA_{Z_1}v\right)-g_M\left(CZ_1,JA_{Z_2}v\right)=-g_M\left(\pi_*\left(A_{Z_2}BZ_1\right),Jv\right)+g_M\left(\pi_*\left(A_{Z_1}BZ_2\right),Jv\right)$$

olur. Böylece (c) eşitliği sağlanır. (c) eşitliği sağlanıyorsa (b) eşitliğinin sağlandığı gösterilir. O halde $(b)\Leftrightarrow(c)$ dir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1.Kontakt Tipli Anti-İnvaryant Riemann Submersiyonları

Tanım 4.1 $\pi:(M,g)\to(B,g')$ bir anti-invaryant Riemann submersiyon olsun. Eğer $boyV=1$ ise π ye bir *kontakt tipli anti-invaryant Riemann submersiyon* adı verilir.

$\pi:(M,g)\to(B,g')$ kontakt tipli anti-invaryant Riemann submersiyon olsun. Kabul edelim ki; $V=span\{w\}$ öyle ki w birim vektör olsun. Bu durumda

$$Jw=-\xi \tag{4.1}$$

olacak şekilde $\xi\in\Gamma(\mathrm{H})$ ve vardır. $\forall X\in\chi(M)$ için

$$JX=\varphi X+\eta(X)w \tag{4.2}$$

yazılabilir. Burada $\varphi X\in\chi(H)$ ve η ise 1-formdur.

Önerme 4.2 $\pi:(M,g)\to(B,g')$ bir kontakt tipli anti-invaryant Riemann submersiyon olsun. $\forall X,Y\in\chi(H)$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

i) $\varphi^2X=-X+\eta(X)\xi$. (4.3)

ii) $\eta(X)=g(X,\xi)$. (4.4)

iii) $\varphi\xi=0$ ve $\varphi\xi=\eta\circ\varphi$. (4.5)

iv) $g(\varphi X,Y)=-g(X,\varphi Y)$. (4.6)

v) $g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)$. (4.7)

İspat: (4.1) ve (4.2) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}J^2X&=J(\varphi X)+\eta(X)w\\&=J\varphi X+\eta(X)Jw\\&=\varphi^2X+\eta(\varphi X)w-\eta(X)\xi\end{aligned} \tag{4.8}$$

elde edilir. (M,g,J) bir Hermityen manifold olduğundan $J^2X=-X$ olup bu eşitlik (4.8) de yerine yazılırsa

$$-X = \varphi^2 X + \eta(\varphi X) w - \eta(X)\xi \tag{4.9}$$

bulunur. $X \in \chi(H)$ olduğundan (4.9) eşitliğinin dikey ve yatay kısımları karşılaştırılırsa (4.3) ve $\eta(\varphi X) = 0$ elde edilir.

Ayrıca (4.1) eşitliğinden

$$J\xi = w \tag{4.10}$$

yazılabilir. Bu eşitliğe (4.2) uygulanırsa

$$J\xi = \varphi\xi + \eta(\xi) w = \varphi \tag{4.11}$$

(4.11) de dikey ve yatay kısımlar karşılaştırılırsa $\varphi\xi = 0$ ve $\eta(\xi) = 1$ elde edilir.

Böylece $\eta(\varphi X) = 0$ ve $\varphi\xi = 0$ olduğundan (4.5) ispatlanır. (4.2) eşitliğinden her iki tarafı ile w iç çarpımı alınırsa w bir birim vektör olduğundan

$$g(JX, v) = \eta(X) \tag{4.12}$$

yazılır. Bu eşitlikten

$$g(X, Jw) = g(X, \xi) = -\eta(X)$$

elde edilir. Böylece (4.4) ispatlanır.

(M, g, J) Hermityen manifold olduğundan

$$g(JX, Y) = -g(X, JY) \tag{4.13}$$

eşitliği sağlanır. Burada $\forall X, Y \in \chi(H)$ olduğu göz önüne alınrsa (4.2) eşitliğinden (4.6) ispatlanır.

(M, g, J) bir Hermityen manifold olduğundan $\forall X, Y \in \chi(H)$ için

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \tag{4.14}$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlikte (4.2) kullanılırsa (4.7) eşitliği sağlanır.

Önerme 4.2 nin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.3 $\pi : (M, g, J) \to (B, g')$ bir kontak tipli anti-invaryant Riemann submersiyon olmak üzere submersiyonun yatay uzay H üzerinde (φ, η, ξ) kontakt yapısı tanımlıdır.

Teorem 4.4 π bir kontakt tipli anti-invaryant Riemann submersiyon olmak üzere π nin yatay distribüsyonu H integrallenebilir olsun. Bu durumda H nin integrallenebilir manifoldu $\bar{M}$ ise $\bar{M}$ hemen hemen kontakt bir Riemann manifoldudur.

Önerme 4.5 $\pi:(M,g,J)\to(B,g')$ bir kontakt tipli anti-invaryant submersiyon olmak üzere aşağıdaki bağıntılar sağlanır:

i) $\eta(\nabla_X\xi)=0$. (4.15)

ii) $\eta(h\nabla_X\xi)=0$. (4.16)

İspat: ∇ , (M,g,J) hemen hemen Hermityen manifoldu üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olduğundan $\forall X\in\chi(M)$ için

$$Xg(\xi,\xi)=2g(\nabla_X\xi,\xi)=0$$

eşitliği sağlanır. Bu ise (4.15) eşitliğinin doğruluğunu gösterir. (3.12) ve (4.15) eşitliklerinden (4.16) eşitliği rahatlıkla elde edilebilir.

Önerme 4.6 (M,g,J) bir Kaehler manifold ve $\pi:(M,g,J)\to(B,g')$ bir kontakt tipli anti-invaryant Riemann submersiyon olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

i) $\varphi\nabla_X\xi=\nabla_X w=A_X w$. (4.17)

ii) $v\nabla_X w=0$. (4.18)

İspat: (M,g,J) bir Kaehler manifold olduğundan

$$\nabla_X w=\nabla_X J\xi=J\nabla_X\xi \tag{4.19}$$

yazılabilir. (4.2) eşitliğinden $J\nabla_X\xi=\varphi\nabla_X\xi+\eta(\nabla_X\xi)w$ elde edilir. Önerme 4.5 den $\eta\nabla_X\xi=0$ olup $\nabla_X w=\varphi\nabla_X\xi$ elde edilir. (3.11) eşitliğinden $A_X w+v\nabla_X w=\varphi\nabla_X\xi$ bulunur. Son eşitliğin dikey ve yatay kısımları göz önüne alındığında (4.17) ve (4.18) eşitlikleri elde edilir.

Önerme 4.7 (M,g,J) bir Kaehler manifold olsun. $\pi:(M,g,J)\to(B,g')$ bir kontakt tipli anti-invaryant Riemann submersiyon olmak üzere $\forall X_1,X_2\in\chi^h(M)$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

i) $h\nabla_{X_1}\varphi X_2=\varphi\nabla_{X_1}X_2-\eta(X_2)A_{X_1}w.$ (4.20)

ii) $A_{X_1}\varphi X_2=-g\left(X_2,\nabla_{X_2}\xi\right)w.$ (4.21)

İspat: (4.2) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\nabla_{X_1}\varphi X_2=J\nabla_{X_1}X_2-\nabla_{X_1}\left(\eta(X_2)w\right) \quad (4.22)$$

elde edilir (3.12) ve (4.2) eşitliğinden

$$\nabla_{X_1}\varphi X_2=h\nabla_{X_1}\varphi X_2+A_{X_1}\varphi X_2 \quad (4.23)$$

$$J\nabla_{X_1}X_2=\varphi\nabla_{X_1}X_2+\eta\left(\nabla_{X_1}X_2\right)w \quad (4.24)$$

yazılabilir. Ayrıca (3.11) ve (4.18) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\nabla_{X_1}\left(\eta(X_2)w\right)&=\nabla_{X_1}\left[g(X_2,\xi)w\right]\\&=g\left(\nabla_{X_1}X_2,\xi\right)w+g\left(X_2,\nabla_{X_1}\xi\right)w+\eta(X_2)\nabla_{X_1}w\\&=\eta\left(\nabla_{X_1}X_2\right)w+g\left(X_2,\nabla_{X_1}\xi\right)w+\eta(X_2)\nabla_{X_1}w\\&=\eta\left(\nabla_{X_1}X_2\right)w+g\left(X_2,\nabla_{X_1}\xi\right)w+\eta(X_2)A_{X_1}w \quad (4.25)\end{aligned}$$

bulunur. (4.22) denkleminde (4.23), (4.24) ve (4.25) yerine yazılırsa

$$h\nabla_{X_1}\varphi X_2+A_{X_1}\varphi X_2=\varphi\nabla_{X_1}X_2-g\left(X_2,\nabla_{X_1}\xi\right)w-\eta(X_2)A_{X_2}w \quad (4.26)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin yatay ve dikey kısımları birbirine eşitlenirse (4.20) ve (4.21) eşitliklerinin ispatı tamamlanır.

Teorem 4.8 (M,g,J) bir Kaehler manifold ve $\pi:(M,g.J)\to(B,g')$ bir kontakt tipli anti-invaryant Riemann submersiyon olmak üzere $\forall X_1,X_2\in\chi^h(M)$ için

$$A_{X_1}\varphi X_2=0 \quad \text{ve} \quad \left(\nabla_{X_1}\varphi\right)X_2=-\eta(X_2)A_{X_1}w \quad (4.27)$$

dır.

İspat: $\forall X_1, X_2 \in \chi^h(M)$ için $\nabla_{X_1}\varphi X_2 = (\nabla_{X_1}\varphi)X_2 + \varphi\nabla_{X_1}X_2$ (4.28)

eşitliği yazılır ve bu eşitlikte (4.20) kullanılırsa

$$v\nabla_{X_1}\varphi X_2 = (\nabla_{X_1}\varphi)X_2 + \eta(X_2)A_{X_1}w \qquad (4.29)$$

elde edilir. Bu denklemin yatay ve dikey kısımları birbirine eşitlenerek (3.12) eşitliğinden $\varphi\nabla_{X_1}\varphi X_2 = A_{X_1}\varphi X_2$ olup $A_{X_1}\varphi X_2 = 0$ dır. Böylece ispat biter.

Teorem 4.8 in bir sonucu olarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.9 (M, g, J) bir Kaehler manifold ve $\pi:(M,g,J)\to(B,g')$ bir kontakt tipli anti-invaryant Riemann submersiyon. H distrübüsyonu üzerinde $A=0$ olması için gerek ve yeter koşul φ tensörünün ∇ ya göre paralel olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki H üzerinde $A=0$ olsun. Bu durumda $\forall X_1 \in \chi^h(M)$ için $A_{X_1}w=0$ olur. Teorem 4.8 $\forall X_1, X_2 \in \chi^h(M)$ için $(\nabla_{X_1}\varphi)X_2 = -\eta(X_2)A_{X_1}w$ eşitliğinden $\nabla_{X_1}\varphi = 0$ olduğu görülür. Bu ise φ tensörünün ∇ ya göre paralel olduğunu gösterir.

$(\Leftarrow:)$ Kabul edelim ki φ tensörü ∇ ya göre paralel olsun. Bu durumda Teorem 4.8 den $\forall X_1, X_2 \in \chi^h(M)$ için

$$\eta(X_2) = A_{X_1}w = 0$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik $\forall X_2 \in \chi^h(M)$ için sağlandığından $X_2 = \xi$ seçilmesi durumunda yine sağlanır. Böylece $A_{X_1}w=0$ olup bu durumun H üzerinde $A=0$ olduğunu gösterir.

Önerme 4.10 (M, g, J) bir Kaehler manifold ve $\pi:(M,g,J)\to(B,g')$ bir kontakt tipli anti-invaryant Riemann submersiyon olsun. Böylelikle aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

i) $T_w w = \varphi h\nabla_w\xi + JT_w\xi$ (4.30)

ii) $\hat{\nabla}_w w = \eta(h\nabla_w\xi)w$. (4.31)

İspat: (3.9) ve (4.1) eşitliklerinden

$$\nabla_w w = \nabla_w J\xi = T_w w + \hat{\nabla}_w w \tag{4.32}$$

yazılabilir. Ayrıca (M, g, J) bir Kaehler manifold olduğundan (3.10) eşitliği kullanılırsa

$$\nabla_w w = J\nabla_w \xi + JT_w \xi \tag{4.33}$$

bulunur. (4.2) ve (4.33) eşitliklerinden

$$\nabla_w w = \varphi h \nabla_w \xi + \eta\left(h\nabla_w \xi\right) w + JT_w \xi \tag{4.34}$$

elde edilir. (4.32) ve (4.34) eşitliklerinin yatay ve dikey kısımları birbirine eşitlenirse (4.30) ve (4.31) in ispatı tamamlanır.

Tanım 4.11 ∇, (M, g) üzerinde bir afin konneksiyon olmak üzere. (M, g) üzerindeki birim X vektör alanı

$$\nabla_X X = 0$$

koşulunu sağlıyorsa bu vektör alanına bir ∇ konneksiyonuna göre bir *geodezik vektör alanı* denir. Eğer ∇ bir Levi-Civita konneksiyonu ve

$$\alpha : I \to M$$

diferansiyellenebilir bir eğri olmak üzere

$$\alpha'(t) = X$$

olup X *bir geodezik vektör alanıdır*. $\Leftrightarrow$ α, M üzerinde bir geodezik eğridir.

Teorem 4.12 (M, g, J) bir Kaehler manifold ve $\pi : (M, g, J) \to (B, g')$ bir kontakt tipli anti-invaryant Riemann submersiyon olmak üzere w nın $\hat{\nabla}$ konneksiyonuna göre bir geodezik vektör alanı olması için gerek ve yeter koşul

$$\eta\left(h\nabla_w \xi\right) = 0$$

olmasıdır.

İspat: Tanım 4.11 ve (4.31) eşitliğinden teoremin ispatı açıktır.

Tanım 4.13 (M,g,φ,η,ξ) beşlisi hemen hemen kontakt Riemann manifold olsun. $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X \xi = -\varphi X \tag{4.35}$$

eşitliği sağlanıyorsa (φ,η,ξ) hemen hemen kontakt yapısına bir *K-kontakt yapı,* $\forall X_1, X_2 \in \chi(M)$ için de

$$\left(\nabla_{X_1}\varphi\right)X_2 = g\left(X_1,X_2\right)\xi - \eta\left(X_2\right)X_1 \tag{4.36}$$

eşitliği sağlanıyorsa (φ,η,ξ) *K*-kontakt yapısına bir *Sasakian yapı* adı verilir.
Ve $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X \xi = 0 \tag{4.37}$$

ise (φ,η,ξ) üçlüsüne *kosimplektik* yapı adı verilir (Blair, 2010).

Teorem 4.14 $\pi:(M,g.J)\to(B,g')$ bir kontakt tipli anti-invaryant Riemann submersiyon olmak üzere H distribüsyonunda (φ,η,ξ) hemen hemen kontakt yapısı bir *K*-kontakt yapı olması için $\Leftrightarrow$ $\forall X \in \chi^h(M)$ için

$$A_X w = X \tag{4.38}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (4.15) ve (4.17) eşitlikleri kullanılırsa

$$\nabla_X \xi = \varphi A_X w \tag{4.39}$$

elde edilir. (φ,η,ξ) bir *K*-kontakt yapı olduğundan

$$-\varphi X = -\varphi A_X w$$

bulunur. Bu ise (4.38) eşitliğinin doğruluğunu gösterir.

Tersine $\forall X \in \chi^h(M)$ için

$$A_X w = X$$

ise (4.17) eşitliğinden $\varphi \nabla_X \xi = X$ bulunur.

$$\eta\left(\nabla_X \xi\right)=0$$

olduğu dikkate alındığında

$$\nabla_X \xi=-\varphi X$$

sağlanır. Bu ise (φ,η,ξ) bir *K*-kontakt yapı olduğunu gösterir.

Teorem 4.15 $\pi:(M,g,J)\rightarrow(B,g')$ bir kontakt tipli anti-invaryant Riemann submersiyon olmak üzere *H* distribüsyonu üzerindeki (φ,η,ξ) hemen hemen kontakt yapısının bir kosimplektik yapı olması için $\Leftrightarrow$ $\forall X\in\chi^h(M)$ için

$$A_X w=X$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat: (4.39) eşitliğinden teoremin ispatı açıktır.

Teorem 4.16 $\pi:(M,g,J)\rightarrow(B,g')$ bir kontakt tipli anti-invaryant Riemann submersiyon olmak üzere *H* distribüsyonu üzerindeki (φ,η,ξ) Sasakian yapısı mevcut değildir.

İspat: Kabul edelim ki (φ,η,ξ) *H* üzerinde Sasakian bir yapı olsun. (4.27) ve (4.36) eşitliklerinden

$$g\left(X_1,X_2\right)\xi-\eta\left(X_2\right)X_1=-\eta\left(X_2\right)A_{X_1}w \qquad (4.40)$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse

$$A_{X_1}w=X_1-\frac{1}{\eta\left(X_2\right)}g\left(X_1,X_2\right)\xi \qquad (4.41)$$

bulunur. Bu eşitlik $\forall X_1,X_2\in\chi^h(M)$ için sağlandığından özel olarak X_1 ve X_2 ortogonal ise $A_{X_1}w=X_1$ bulunur. Bu eşitlik (4.27) de yerine yazılırsa

$$\left(\nabla_{X_1}\varphi\right)X_2=-\eta\left(X_2\right)X_1 \qquad (4.42)$$

elde edilir. $\nabla_{X_1}\varphi = 0$ eşitliği özel olarak $X_1 = X_2$ seçiminde de elde edilebilir. H üzerinde (φ,η,ξ) nin Sasakian bir yapı olması nedeniyle $\nabla_{X_1}\varphi = 0$ olması çelişir.

Örnek: $(\mathbb{R}^4, J)$, $J(x_1,x_2,x_3,x_4) = (-x_3,-x_4,x_1,x_2)$ hemen hemen kompleks yapısıyla verilsin. $(\mathbb{R}^4, J)$ bir Kaehler manifoldtur. Burada $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, $\mathbb{R}^4$ üzerinde lokal bir koordinat sistemidir.

$\pi : (\mathbb{R}^4, J) \to \mathbb{R}^3$ dönüşümü

$$\pi(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_1+x_3}{\sqrt{2}}, \frac{x_2+x_3}{\sqrt{2}}\right)$$

tanımlansın. Bu durumda

$$H = span\{X_1 = \partial x_1, X_2 = \partial x_2, X_3 = \partial x_3\}$$

ve

$$V = span\{w = \partial x_4\}$$

olup π bir Riemann submersiyondur. Burada $\{\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3, \partial x_4\}$ $\mathbb{R}^4$ ün standart bazı olarak verilmiştir. Direkt bir hesaplama ile

$$JX_1 = X_3,\ JX_2 = w,\ JX_3 = -X_1,\ Jw = -X_2$$

ve

$$\eta(X_1) = \eta(X_3)\ ,\ \eta(X_2) = 1$$

bulunur. Böylece (φ,η,ξ) nın H distribüsyonu üzerindeki hemen hemen kontakt bir yapı olduğu elde edilir.

5.SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Dikey distribüsyonu 1 boyutlu olan anti-invaryant Riemann submersiyonları üzerinde kompleks ve kontakt yapılar yardımıyla elde edilmiş temel bağıntılar sunulmuştur. Bu tür submersiyonlar kontakt tipli anti-invaryant submersiyonlar olarak isimlendirilmiştir. Kontakt tipli anti-invaryant submersiyonların K-kontakt, kosimplektik ve Sasakian yapıya sahip olma durumları ile ilgili çeşitli sonuçlar verilmiştir.

Bu tez çalışması ile elde edilen sonuçlar ile yarı-Riemann manifoldlar üzerinde tanımlı kontakt tipli anti-invaryant submersiyonlar, total geodezik liflere sahip kontakt tipli anti-invaryant Riemann submersiyonlar tanıtılabilir ve diferansiyel geometrisi incelenebilir.

KAYNAKLAR

BAIRD, P. and WOOD, J. C., 2003. Harmonic morphisms betweeen Riemannian Manifolds. Clarendon Press, Oxford, 40-45.

BERİ, A., 2016. Hemen Hemen Değme Manifoldlardan Riemann Manifoldlar Üzerine Riemann Submersiyonlar. Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Bursa, 15s.

BLAİR, D. E. Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds, Birkhauser, Boston, 2010.

FALCITELLI, M.,IANUS, S. and PASTORE, A. M., Riemannian submersions and related topics, World Scientific Company, 2004.

GUNDMUNDSON, S., An Introduction to Riemannian Geometry, Lecture Notes, University of Lund, Mathematics, Faculty of Science, 2006.

ŞAHİN, B., 2012. Manifoldların Diferensiyel Geometrisi. Nobel Yayınevi, Ankara, 178-208.

YANO, K. ve KON, M., 1984. Structures on Manifolds, World Scientific Publishing Company Pte. Ltd., 520s.