T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SZÁSZ-DURRMEYER OPERATÖRLERİNİN BİR GENELLEŞTİRMESİ

Mehmet Ayhan

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2021

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SZÁSZ-DURRMEYER OPERATÖRLERİNİN BİR GENELLEŞTİRMESİ

Mehmet Ayhan

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Aydın İZGİ
Yıl: 2021, sayfa:40

Bu tez çalışması beş kısımdan meydane gelmektedir. Benzersiz kısımlar tezin dördüncü ve beşinci kısımlarıdır. Giriş kısmı bu çalışmanın ilk kısmıdır. Bu kısımda lineer pozitif operatörler ile ilgili bazı esas tanım, teorem ve özelliklere yer verilmiştir. Lineer pozitif operatörlerin yakınsaklık koşulları açıklanmış ve tezde kullanılacak olan bazı operatörlerden söz edilmiştir. İkinci kısımda ise evvelki çalışmalardan bahsedilmiştir. Bu çalışmada $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi;£\right)$ operatörünün yaklaşım özellikleri irdelenmiştir. Lineer pozitif operatörler dizisinin tarifi yapılarak, has özellikleri tanıtılmıştır. buna ek olarak Korovkin teoremi ispatıyla birlikte verilmiştir. Lineer pozitif operatörleri ile ilgili yapılan evvelki bazı çalışmalara yer verilmiştir. Korovkin teoremi yardımıyla $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi;£\right)$ operatörünün yaklaşım özelliklerine dair çalışmalar gerçekleştirilmiştir. $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi;£\right)$ operatörünün sürekli ψ fonkiyonuna düzgün yakınsadığı kanıtlanmış. $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi;£\right)$ operatörü için Voronowskaja teoremi tipinde bir teorem de kanıtlanmıştır.$\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi;£\right)$ operatörünün merkezcil momentleri hesaplanmıştır. Süreklilik modulü yardımıyla $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi;£\right)$ operatörünün yaklaşım hızı irdelenmiştir. Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyonlar kullanılarak $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi;£\right)$ operatörü için bir teorem sunulmuş ve kanıtlanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Lineer pozitif operatörler, Szasz operatörleri, Szasz-Durrmeyer operatörleri,Yaklaşım hızı, Asimptotik yaklaşım

ABSTRACT

MSc Thesis

A GENERALİZATİON OF SZÁSZ-DURRMEYER OPERATORS

Mehmet Ayhan

Harran University
Gradate School of Natral and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Aydın İZGİ
Year: 2021, page:40

This thesis consists of five chapters. The original parts are the fourth and fifth parts of the thesis. Introduction is the first part of this study. In this section, some basic definitions, theorems and properties of linear positive operators are given. given. The convergence conditions of linear positive operators are explained and some operators to be used in the thesis are mentioned. In the second part, previous studies are mentioned. In this study, the approximation properties of the $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi;\pounds\right)$ operator are investigated. The order of linear positive operators is defined and their properties are introduced. It is also given with proof of Korovkin's theorem. Some previous studies on linear positive operators are given. With the help of Korovkin's theorem, studies have been made on the approximation properties of the $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi;\pounds\right)$ operator. It has been proven that the $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi;\pounds\right)$ operator converges smoothly to the continuous ψ function. A theorem of the type Voronowskaja theorem for the $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi;\pounds\right)$ operator is also proved. Centripetal moments of operator $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi;\pounds\right)$ were calculated. With the help of the continuity module, the approach speed of the $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi;\pounds\right)$ operator is examined. A theorem for the $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi;\pounds\right)$ operator is presented and proved using functions satisfying the Lipschitz condition.

KEYWORDS: Linear positive operators, Szasz operators, Szasz-Durrmeyer operators, Rate of approximation, Asimptotic approximation.

TEŞEKKÜR

Yaptığım çalışmaların her aşamasında sabırla beni yönlendiren, mesai kavramına takılmadan 7/24 desteklerini esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Aydın İZGİ'ye teşekkür ederim. Çalışmalarım boyunca bana her koşulda yardımcı olan, bilgi ve birikimlerinden yararlanma imkânı sağlayan sayın hocam Prof. Dr. Sevilay KIRCA SERENBAY'a teşekkür ederim. Tez çalışması boyunca fikir ve yönlendirmeleriyle yardımlarını esirgemeyen Harun ÇİÇEK hocama teşekkür ederim. Yüksek lisansa başlama sürecinde desteğini ve iyi dileklerini esirgemeyen değerli arkadaşlarım Talha TAŞDEMIR , Ahmet Mesut SEVIM ve Esra YILDIRIM 'a canıgönülden teşekkür ederim. Son olarak destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan çok değerli aile bireylerime de teşekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

ÇİZELGELER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
α	Alfa
$B_{\ddot{u}}(\Psi;£)$	Bernstein Opreatörü
β	Beta
$\|\|\|_{C[\ddot{o},\mathfrak{A}]}$	$C[\ddot{o},\mathfrak{A}]$ uzayında, $\|\psi\|_{C[\ddot{o},\mathfrak{A}]} = \max\limits_{\ddot{o}\leq £\leq \mathfrak{A}} \|\psi(£)\|$ şeklinde tanımlı norm.
δ	Delta
$\Gamma(\ddot{u}+1)$	Gamma fonksiyonu
ι	iota
O	Landau sembolü
λ	Lambda
$Lip_M(\alpha)$	Lipschitz sınıfından fonksiyonlar
$\xi_{\ddot{u}}(\psi;£) \rightrightarrows \psi$	L_η operatörünün ψ fonksiyonuna düzgün yakınsaması.
$SD_{\ddot{u}}(\Psi;£)$	Szász-Durrmeyer operatörleri.
$\mathfrak{M}_{\ddot{u}}(\Psi;£)$	Szász-Durrmeyer Operatörlerinin Bir Genelleştirmesi (Tanımlamış olduğumuz operatör)
$S_{\ddot{u}}(\psi;£)$	Szász Opreatörü
$N_{\iota,\ddot{u}}$	Λ_ι Operatörünün merkezi momentleri.
$\omega(\psi;£)$	ψ fonksiyonunun süreklilik modülü
ξ	xi

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde, yeterince iyi özelliklere sahip olmayan fonksiyonlara, kulanışlı özelliklere sahip daha komplike olmayan fonksiyonlarla yaklaşım problemleri incelenmektedir. çoğu zaman, yaklaşan fonksiyonlar, üzerinde çalışılan esas fonksiyon uzayının belirli bir alt uzayı olarak tercih edilir. Bu alt uzaydaki fonksiyonlar temel uzaydaki fonksiyonlara göre komplike olmayan özelliklere ve daha çok elemanter özelliğe sahiptir (türevlenebilme, integrallenebilme vb.)

Yaklaşım teorisinde, ekseriyetle trigonometrik polinomlar, cebirsel polinomlar veya rasyonel fonksiyonlar, yaklaşan fonksiyonlar olarak alınır. Burada hedeflediğimiz ana unsur, verilen fonksiyona alt uzaydan en iyi yaklaşan elemanın varlığı ve bu fonksiyona en iyi yaklaşan eleman arasındaki hatanın minimize edilmesi problemidir. Fonksiyonun diferansiyel özelliklerine göre bunun en iyi yaklaşım sayıları dizisinin sıfıra gitme hızının incelendiği teoremlere yaklaşım teorisinin düz teoremleri, yaklaşım sayıları dizisinin sıfıra gitme hızına göre onların diferansiyel özelliklerinin incelendiği teoremlere yaklaşım teorisinin ters teoremleri denir.

1.1. Temel Kavramlar

Bu kısımda, çalışmamızda istifade edeceğimiz bazı tanımlar ve teoremler ispatlarıyla beraber sunulacaktır.Burada sunulacak olan tanım ve teoremler genel olması hasebiyle bazılarında kaynak belirtilmemiştir.

Tanım 1.1 *F ve K vektör uzayları olmak üzere $\Lambda : F \to K$ şeklinde tanımlanan dönüşümlere operatör denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).*

Tanım 1.2 *(Operatörün lineerliği) Λ operatörünün F uzayındaki her ψ fonksiyonuna K uzayında karşılık getirdiği fonksiyonun £ noktasında aldığı değer $\Lambda(\psi; £)$ ile ifade edilir. F ve K, R üzerinde vektör uzayları olarak alınırsa her $f, g \in F$ ve $ö, \mathfrak{A} \in R$ için*

$$\Lambda\left(öf + \mathfrak{A}g; £\right) = ö\Lambda\left(f; £\right) + \mathfrak{A}\Lambda\left(g; £\right)$$

Yukardaki eşitliği gerçekleyen $\Lambda(\psi; £)$ operatörüne lineer operatör denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 1.3 *(Operatörün pozitifliği) Her* $(\psi(\chi) \geq 0$ *için* $\Lambda(\psi;\chi) \geq 0$ *ise,* Λ *operatörüne pozitif operatör denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).*

Tanım 1.4 *Bir operatör hem lineerlik hem de pozitiflik şartlarını sağlıyorsa, bu operatöre lineer pozitif operatör denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).*

Tanım 1.5 $\zeta \subset \mathbb{R}$ *ve* ζ *üzerinde tanımlı bütün fonksiyonların kümesi* $\Theta(\zeta)$ *biçiminde olsun.* $d : \mathbb{N} \to \Theta(\zeta)$ *şeklinde tanımlı* d *fonksiyonuna bir fonksiyon dizisi denir. Fonksiyon dizisi* (f_n)*, terimleri ise* $f_1,\ f_2,\ f_3$ *, ... şeklinde gösterilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).*

Tanım 1.6 $l = \{\Lambda : C[a,b] \to C[a,b] : \Lambda \text{ liner pozitif operatör}\}$, $\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ *olsun* $\Lambda_n : \mathbb{N} \to l$ *şeklinde tanımlı* Λ_n *fonksiyonuna lineer pozitif operatör dizisi adı verilir ve* (Λ_n) *ile gösterilir.*$\Lambda(\mathbb{N}) = (\Lambda_1,\ \Lambda_2,\ \Lambda_3,\ ...)$ *şeklindedir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).*

Tanım 1.7 $A \subset \mathbb{R}$, $\psi : A \to \mathbb{R}$ *fonksiyon ve* $ö \in A$ *alarak seçilirse* $\forall\varepsilon > 0$ *iin* $|£ - ö| < \delta$ *olduğunda* $|\psi(£) - \psi(ö)| < \varepsilon$ *olacak şekilde* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *sayısı mevcutsa* ψ *fonksiyonu* $ö$ *noktasında süreklidir denir. (Balcı, 2012).*

Tanım 1.8 $\Omega \subset \mathbb{R}, \psi : \Omega \to \mathbb{N}$ *bir fonksiyon olmak üzere, bu taktirde her* $\varepsilon > 0$ *sayısı ve* $\forall ö_1, ö_2 \in \Omega$ *noktaları için* $|ö_1 - ö_2| < \delta$ *olduğunda* $|\psi(ö_1) - \psi(ö_2)| < \varepsilon$ *olacak şekilde yalnızca* ε *'na bağlı* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *sayısının varlığı söz konusu ise* ψ *fonksiyonu* Ω *kümesi üzerinde düzgün süreklidir denir(Musayev ve Alp, 2000).*

Tanım 1.9 $\psi, [ö, \mathfrak{A}]$ *aralığında tanımlı bir fonksiyon ve* $\iota_0 \in (ö, \mathfrak{A})$ *olsun.*

$$\lim_{£ \to \iota_0} \frac{\psi(£) - \psi(\iota_0)}{£ - \iota_0}$$

limiti var ve sonlu ise ψ *fonksiyonu* ι_0 *noktasında türevlenebilirdir denir. Bu değer*

$$\lim_{£ \to \iota_0} \frac{\psi(£) - \psi(\iota_0)}{£ - \iota_0} = \psi'(\iota_0)$$

dir(Thomas,Finney, 1984).

Tanım 1.10 *ψ fonksiyonu ö noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olarak kabul edelim.*

$$\sum_{\theta=0}^{ü} \frac{\psi^{\theta}(ö)}{\theta!}(£-ö)^{\theta}$$

serisine ö noktasındaψ fonksiyonu tarafından türetilen Taylor serisi denir (Musayev ve Arkadaşları, 2007).

Teorem 1.11 (Ortalama Değer Teoremi) *$\psi : [ö, \mathfrak{A}] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[ö, \mathfrak{A}]$ üzerinde sürekli ve $(ö, \mathfrak{A})$'üzerinde türevlenebilir olduğunu varsayalım. Bu takdirde,*

$$\frac{\psi(\mathfrak{A})-\psi(ö)}{(\mathfrak{A}-ö)}=\psi'(\lambda)$$

olacak şekilde $\exists\lambda \in [ö, \mathfrak{A}]$ noktası vardır.

Teorem 1.12 (Minkowski Eşitsizliği)

$\iota > 1$için $ö_1, ö_2, ...ö_ü > 0$ ve $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, ...\mathfrak{A}_ü > 0$ olsun. Bu taktirde

$$\left(\sum_{\theta=1}^{ü}(ö_\theta+\mathfrak{A}_\theta)^{\iota}\right)^{\frac{1}{\iota}} \leq \left(\sum_{\theta=1}^{ü}(ö_\theta)^{\iota}\right)^{\frac{1}{\iota}}+\left(\sum_{\theta=1}^{ü}(\mathfrak{A}_\theta)^{\iota}\right)^{\frac{1}{\iota}}$$

sağlar.

Teorem 1.13 (Hölder Eşitsizliği) *$\mu > 0$ ve $\nu > 0$ reel sayıları*

$$\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}=1$$

şartını sağlasın, $ö_1, ö_2, ...ö_ü > 0$ ve $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, ...\mathfrak{A}_ü > 0$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{\theta=1}^{ü}|ö_\theta \cdot \mathfrak{A}_\theta| \leq \left(\sum_{\theta=1}^{ü}|ö_\theta|^{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}} \cdot \left(\sum_{\theta=1}^{ü}|\mathfrak{A}_\theta|^{\nu}\right)^{\frac{1}{\nu}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Özel olarak Hölder eşitsizliğinde $\mu = \nu = 2$ alınırsa Cauchy-Schwarz Eşitsizliği elde edilir (Lorentz, 1953).

Lemma 1.14 *Λ bir lineer pozitif operatör olmak üzere monotondur. Yani,$f_1 \leq f_2$ ise $\Lambda(f_1; .) \leq \Lambda(f_2; .)$ eşitsizliğini sağlar.*

İspat. *$f_1 \leq f_2$ olduğunu kabul edeersek. Bu durumda $f_2 - f_1 \geq 0$ olup Λ operatörünün pozitiflik özelliği kulanılarak $\Lambda(f_2 - f_1; \chi) \geq 0$ olduğü görülür. Λ operatörü lineer olduğundan $\Lambda(f_2; \chi) - \Lambda(f_1; \chi) \geq 0$ olarak bulunur ve ispat tamamlanmış olur (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).* □

Lemma 1.15 *Λ lineer pozitif operatörü için $|\Lambda(\psi;£)| \leq \Lambda(|\psi|;£)$ eşitsizliği sağlanır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).*

1.1.1. Düzgün yakınsaklak

Tanım 1.16 *$[ö,\mathfrak{A}]$ kapalı ve sonlu aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonlar uzayını $C[ö,\mathfrak{A}]$ile gösterelim. $C[ö,\mathfrak{A}]$;*

i) *$(\psi_1+\psi_2)(£) = \psi_1(£) + \psi_2(£)$ ve*

ii) *$\hbar \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(\hbar\psi)(£) = \hbar\psi(£)$*

işlemleri ile bir lineer uzaydır. Bu lineer uzay üzerinde bir normdur ve bu norm $\|\psi\|_{C[ö,\mathfrak{A}]} = \sup\limits_{ö\leq £\leq \mathfrak{A}} |\psi(£)|$ biçiminde tanımlanır (Musayev ve Alp, 2000).

Teorem 1.17 *Bir $(\psi_ü)$ fonksiyonlar dizisinin ψ fonksiyonuna $C[ö,\mathfrak{A}]$ normunda düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart, $\forall £ \in [ö,\mathfrak{A}]$ için*

$$\lim_{ü\to\infty} \|\psi_ü - \psi\|_{C[ö,\mathfrak{A}]} = \lim_{ü\to\infty} \max_{£\in[ö,\mathfrak{A}]} |\psi_ü(£) - \psi(£)| = 0$$

olmasıdır. Düzgün yakınsama $\psi_ü \rightrightarrows \psi$ şeklinde sembolize edilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 1.18 *$\xi : \Omega \to \Upsilon$ lineer operatör olsun. Eğer $\forall\psi \in \Omega$ için $\|\xi(\psi)\|_\Upsilon \leq c\|\xi(\psi)\|_\Omega$ eşitsizliğini sağlayan bir $c > 0$ sayısı mevcutsa, ξ operatörüne sınırlı operatör denir. Bu c sabitlerinin en küçüğüne ξ operatörünün normu denir ve $\|\xi\|_{\Omega\to\Upsilon}$ ya da $\|\xi\|$ biçiminde gösterilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).*

Teorem 1.19 *$\xi_ü(\psi;£)$ lineer pozitif operatör dizisi olsun. Tüm reel eksende sınırlı ve sonlu bir $[ö,\mathfrak{A}]$aralığında sürekli herhangi bir ψfonksiyonu için eğer $[ö,\mathfrak{A}]$ üzerinde;*

(i) $\xi_ü(1;£) \rightrightarrows 1$

(ii) $\xi_ü(t;£) \rightrightarrows £$

(iii) $\xi_ü(t^2;£) \rightrightarrows £^2$

koşullarını sağlıyorsa bu takdirde $[\ddot{o},\mathfrak{A}]$ *aralığında* $\xi_{\ddot{u}}(\psi;£) \rightrightarrows \psi(£)$ *dir (Korovkin, 1953).*

Tanım 1.20 $N_{\iota,\ddot{u}}(£) = \Lambda_\iota\left((t-£)^{\ddot{u}},£\right),\ \ddot{u} = \{1,2,...\}$ *ile tanımlanan ifadelere* Λ_ι *operatör dizisinin* $\ddot{u}$*-inci merkezi momentleri denir.*

1.1.2. Süreklilik modülü

Yaklaşım teorisinde bir diğer mühim konuda yaklaşım hızının belirlenmesidir. Lineer pozitif operatörlerin bir Ψ *fonksiyonuna yakınsama hızını arttırmak demek yaklaşımda meydana gelen hata miktarını azaltmak ve doğal olarak daha iyi bir yaklaşım elde etmek demektir. Bir lineer pozitif operatörler dizisinin yakınsama hızı hakkında süreklilik modülü kullanılarak yorum yapılabilir.Süreklilik modülü kavramı 1910 yılında H. Lebesgue tarafından tanımlanmştır.*

$\psi \in C\,[\ddot{o},\mathfrak{A}]$ *olsun.* $\forall\delta > 0$ *için*

$$\omega(\psi;\delta) = \sup_{\substack{£,t\in[\ddot{o},\mathfrak{A}] \\ |t-£|\le\delta}} |\psi(t)-\psi(£)|$$

ile tanımlanan $\omega(\Psi;\delta)$ *ifadesine* Ψ *fonksiyonunun* ***"Süreklilik Modülü"*** *denir (Altomare and Campıtı, 1994)*

1.1.3. Süreklilik modülünün özellikleri

1. $\omega(\Psi;\delta) \ge 0$

2. $\delta_1 \le \delta_2$ *ise* $\omega(\Psi;\delta_1) \le \omega(\Psi;\delta_2)$

3. $m \in \mathbb{N}$ ***için*** $\omega(\Psi;m\delta) \le m\omega(\Psi;\delta)$

4. $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ***için*** $\omega(\Psi;\lambda\delta) \le (\lambda+1)\ (\Psi;\delta)$

5. $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(\Psi;\delta) = 0$

6. $|\Psi(t)-\Psi(£)| \le \omega(\Psi;|t-£|)$

7. $|\Psi(t)-\Psi(£)| \le \left(\frac{|t-£|}{\delta}+1\right)\omega(\Psi;\delta)$ *(Altomare and Campıtı, 1994)*

1.1.4. Lipschitz sınıfından fonksiyonlar

Lineer pozitif operatorlerin bir Ψ *fonksiyonuna yaklaşım hızını bulurken fonksiyonun Lipschitz sınıfından olmas durumunda inceleyeceliyeceğiz. Bu yuzden ilk olarak bir fonksiyonun Lipschitz sınıfından olmasının ne demek olduğunu verelim;*$\forall \breve{g}, £ \in I$ *için* $0 < \alpha \leq 1$ *olarak tercih edersek;*

$$|\Psi(\breve{g}) - \Psi(£)| \leq M|\breve{g} - £|^{\alpha}$$

şartını gerçekleyen fonksiyonlara Lipschitz sınıfı fonksiyonlar şeklinde isimlendirilir.Buradaki M *ye de Lipschitz sabiti denir ve bu şartın sağlanması halinde* $\Psi \in Lip_M(\alpha)$ *biçiminde gösterilir. Bir fonksiyon Lipschitz sınıfından ise süreklidir ancak bunun tersi doğru değildir. Dolayısıyla* $Lip_M(\alpha) \subset C(I)$ *yazılabilr. Tezde;*

$$|\Psi(\breve{g}) - \Psi(£)| \leq M|\breve{g} - £|^{\alpha}$$

şeklinde tanımlanan Lipschitz sınıfı fonksiyonlar kullanılacaktır. Ayrıca $0 < \alpha \leq 1$ *olmak üzere*

$$\Psi \in Lip_M(\alpha) \Leftrightarrow \omega_{\Psi}(\delta) \leq M.\delta^{\alpha}$$

olduğu bilinmektedir (Cao ve Arkadaşları, 2005).

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Matematiksel analiz 17. yüzyıla kadar yaklaşım adı altında incelenen tek şey sayıların yaklaşık değerinin hesaplanmasıydı. Buna pi sayısı emsal verilebilir. Daha sonraki yıllarda Newton, Kepler, Bernoulli, Euler ve daha birçok matematikçinin farklı metotlarla yaptığı hesaplamalarla operatörlerin, fonksiyonların, sayıların ve denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmişlerdir. Böylece yaklaşım kavramının ilk adımlarını atmışlardır.

Daha sonra Gauss, İntegral hesabının en askeri hata ile çözülmesinin bir yolunu bulmuştur. Bu alanda diğer bir gelişme ise matematikte yaygın olarak kullanılan en küçük kareler metodunu geliştirerek yaklaşım teorisini bir adım ileriye taşımıştır. 1854 yılına gelindiğinde Rus matematikçi P. L. Chebyshev; "ψ*,* $[\ddot{o},\mathfrak{A}]$ *kapalı aralığında tanımlanmış sürekli bir fonksiyon ve* m *pozitif tamsayı olması şartıyla;*

$$\max_{\ddot{o}\leq £\leq\mathfrak{A}} \left|\psi\left(£\right)-p\left(£\right)\right|$$

ifadesini minimum yapacak şekilde derecesi en fazla m *olan*

$$P\left(£\right)=\sum_{\theta=0}^{m} c_{\theta}£^{\theta}$$

şeklinde bir polinom bulunabilir mi? " sorusunu sorarak yaklaşım teorisinde önemli bir yere sahip olan en iyi yaklaşım problemi anlam kazanmıştır (Chebyshev, 1854).

Alman matematikçi K. Weierstrass bu sorunun yanıtını kendi ismini taşıyan Weierstrass teoremi ile ispatlamıştır. Teoremi açık olarak ifade edersek; $\psi\in C\left[\ddot{o},\mathfrak{A}\right]$ *herhangi bir fonksiyon olarak tercih edilirse,* $\forall\varepsilon>0$ *sayısı ve* $\forall £\in[\ddot{o},\mathfrak{A}]$ *için öyle bir* $P_{m}\left(£\right)$ *cebirsel polinomu vardır ki*

$$\left|\psi\left(£\right)-P_{m}\left(£\right)\right|<\varepsilon$$

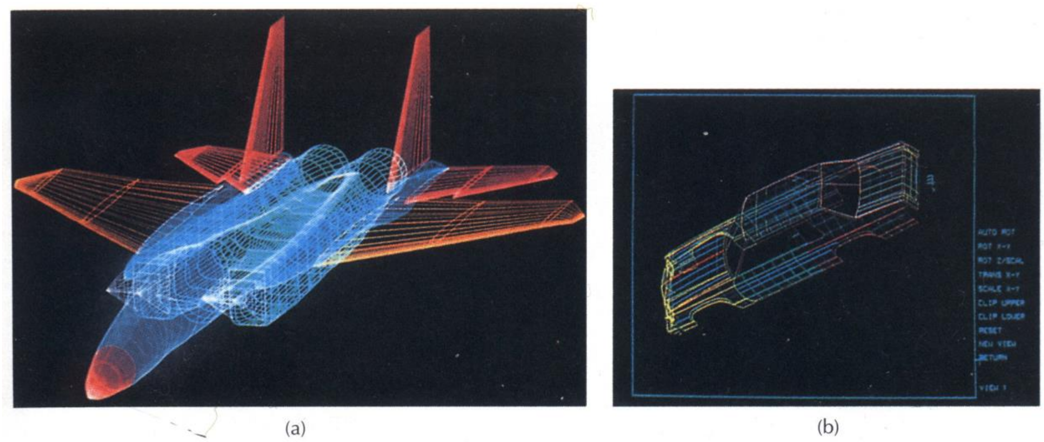
Sağlanır (Weierstrass, 1885). Weierstrass teoreminin ispatı uzun ve karmaşık olduğundan bir çok matematikçi bu teoremin daha basit bir çözümü üzerinde çalişmiştır. 1912 de S. N. Bernstein Weierstrass teoreminin en basit ve en etkili ispatını vermiştir. Bernsteinin yapmış olduğu bu kısa ispat temel ve uygulamalı bilimler de büyük bir etki yaratmıştır

(Bernstein, 1912). Bernstein polinomları olarak ; $\pounds \in [0,1]$ *olmak üzere*

$$B_{\ddot{u}}\left(\Psi;\pounds\right)=\sum_{\theta=0}^{\ddot{u}}\Psi\left(\frac{\theta}{\ddot{u}}\right)\binom{\ddot{u}}{\theta}\pounds^{\theta}\left(1-\pounds\right)^{\ddot{u}-\theta}$$

Polinomlar dizisi geçmişten günümüze kadar birçok matematikçi tarafından çalışılmış ve çalışılmaya devam ediliyor. Günümüzde Bernstein polinomlarınıın bu kadar çok popüler olmasının birçok nedeni vardır. Bunlardan bazıları bu polinomun açık ve sade bir gösteriminin olması, çeşitli şekil koruma özelliklerinin olması, işlevsel olması ve kolay türevlenebilir ve integre edilebilir olmasının yanısıra bilgisayarla yapılan hesaplarda bize kolaylık sağlamasıdır.

Bernstein polinomları, sadece matematikte değil, mühendislik bilimleri başta olmak üzere, diğer alanlardaki birçok problemin çözümüne katkı sağlamış ve günden güne önemi de artarak devam ediyor. Şekil 2.1.'de görüldüğü gibi günümüzde özellikle bilgisayar destekli geometrik modelleme; üretilecek ürünün, bilgisayar destekli olarak dizayn edilmesinde çeşitli eğri yöntemleri geliştirilmiştir. Bu bahsi geçen eğriler basit daire, çizgi gibi eğrilerden ziyade daha komplike olan b-Spline, bezier eğrileri gibi sentetik eğrilerden oluşmaktadır. Sentetik eğriler, analitik eğrilerin daha karmaşık yüzeylerin (Araç gövdesi, uçak kanadı, gemi gövdesi, vb.) tasarımında eksik kalması sonucu ortaya çıkartılmış ve kullanıcıya büyük kolaylık sağlamıştır. Bernstein polinomlarının özellikleri üzerine dayalı Casteljau algoritmaları bilgisayar destekli geometrik tasarımın ana elemanlarından biridir . Bu algoritmaların ilk olarak mühendis Paul de Casteljau tarafından Citroen otomobil firmasında, Pierre Bezier Bezier (1958) tarafından Renault firmasında kullanılmıştır.



Şekil 2.1. Uçak ve Araba Yüzylerinin Çizim Modeli
(Hearn and Baker, 1994)

H. Bohman (1952) ve P. P. Korovkin (1953) birbirlerinden bağımsız olarak, fonksiyon uzayları üzerinde tanımlı pozitif lineer operatör dizilerinin yaklaşım *teorisindeki uygulamaları üzerine önemli çalışmalar yapmışlardır.* $[a,b]$ *kapalı aralığında sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsayan operatörler için uygulanması oldukça basit bir kriter veren aşağıda ispatıyla birlikte verdiğimiz Teorem1.19'i vermişlerdir. Korovkin Teoremi sayesinde* $[a,b]$ *kapalı aralığında çok sayıda lineer pozitif operatör tanımlanmış ve bu operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Örneğin Cheney-Sharma operatörleri, Meyer-König ve Zeller operatörleri daha sonrada bunların genelleştirmeleri olan Durrmeyer, Stancu,Kantorovich operatörleri tanımlanmış. Daha sonraki yıllarda* $[a,b]$ *kapalı aralığında tanımlanan lineer pozitif operatörlerden ziyade sınırsız aralıklarda oparatör tanımlama çabası içerisine girilmiş ve 1941 yılında G. M. Mirakjan, Bernstein operatörlerini sonlu aralıktan sınırsız aralığa genişleterek,* $\psi \in C[0,\infty)$ *olmak üzere*

$$S_{ü}(\psi;£) = e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}\psi\left(\frac{\theta}{ü}\right), 0 \leq £ < \infty$$

şeklinde lineer pozitif operatörler dizisi tanımlamıştır(Mirakjan, 1941).

Bernstein polinomlarının pozitif reel eksene önemli genelleştirmelerinden biri de Baskakov (1957) tarafından yapılmıştır. Tabi bu operatörlerle sınırlı kalınmamış; Lupaş (1995) operatörleri, Bleimann ve arkadaşları (1980)'nın tanımlamış olduğu Bleimann Butzer operatörleri, Post Widder operatörleri, Phillips operatörleri, Hahn operatörleri, Gamma operatörleri ve bu operatörlerin kendi aralarında modifiye edilmiş halleri, Stancu, Durrmeyer, Kantorovich tipli genelleştirilmeleri tanımlanmış. İzgi (2013) Bernstein polinomlarının bir genelleştirmesini şu şekilde tanımlamış;

$q_{ü,ö,\mathfrak{A}}(£) = \left(\frac{ü+\mathfrak{A}}{ü+ö}\right)^{ü}\begin{pmatrix} ü \\ \theta \end{pmatrix} £^{\theta}\left(\frac{ü+\mathfrak{A}}{ü+ö} - £\right)^{ü-\theta},\ 0 \leq ö \leq \mathfrak{A}$ *olmak üzere*

$$F_{ü,ö,\mathfrak{A}}(f;£) = \sum_{\theta=0}^{\infty} f\left(\frac{\theta(ü+ö)}{ü(ü+\mathfrak{A})}\right) q_{ü,ö,\mathfrak{A}}(£), 0 \leq £ \leq \frac{ü+ö}{ü+\mathfrak{A}}$$

dir. Bu çalışmadan esinlenerek $ö, \mathfrak{A} \in N$ *ve* $0 \leq ö \leq \mathfrak{A}$ *olmak üzere*

$$N_{ü}(f;£) = e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!} f\left(\frac{\theta}{ü}\frac{ü+ö}{ü+\mathfrak{A}}\right), 0 \leq £ < \infty \tag{2.1}$$

Operatörü Ousman (2019) tarafından yüksek lisans tezi olarak çalışılmıştır. Şimdide bu tezdede kulanacağımız Klasik Szasz-Durrmeyer operatörlerinin tanımını verelim Klasik Szasz-Durrmeyer operatörleri$S_{ü,\theta}(£) = e^{-ü£}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}$ *olmak üzere*

$$SD_{ü}(\Psi;£)) = ü\sum_{\theta=0}^{\infty} S_{ü,\theta}(£)\int_{0}^{\infty} S_{ü,\theta}(\tau)\psi(\tau)\,d\tau \tag{2.2}$$

Şeklindedir. Bizde bu tezde Klasik Szasz-Durrmeyer Operatörünün bir genelleştirmesi olan $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}(g; \pounds)$ *operatörünü çalışacağız.*

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

Bu tez çalışmasının oluşturulması aşamasında kütüphane ve internet ortamında bulduğumuz tez ile ilgili basılı ve dijital kaynaklardan faydalanılmıştır. Özellikle https://www.researchgate.net, https://dergipark.org.tr, https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi, https://scholar.google.com gibi dijital ortamlardan; benzer konularda daha önce yapılmış çalışmalar tetkik edilerek faydalanılmıştır.

3.2. Yöntem

Çalıştığımız $\mathfrak{M}_{ü}(g;£)$ *operatöründen önce çalışılmış operatörlerin yaklaşım özellikleri ve kullanılan yöntemler tetkik edilmiştir. Bu çalışmada Szasz -Durrmeyer operatörlerinin modifikasyonu olan* $\mathfrak{M}_{ü}(g;£)$ *operatörü* $[0,\infty)$*'un kapalı ve sınırlı alt aralıklarında benzer çalışmalar yapılmıştır. Çalışma sonuçlarının nümerik değerler tablosu techiz edilmiş ve Mapple yazılım programı vasıtasıyla grafiklerle desteklenmiştir.*

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde,(4.1)'de Klasik Szasz-Durrmeyer Operatörünün bir genelleştirmesi olarak tanımlamış olduğumuz $\mathfrak{M}_n(\psi;£)$ operatörünü inceliyeceğiz.

Tanım 4.1 *ö ve $\mathfrak{A} \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq ö \leq \mathfrak{A}$, $0 \leq £ \leq \infty$ olmak üzere*

$$\mathfrak{M}_{ü}(\psi;£) = \frac{ü.(ü+\mathfrak{A})}{ü+ö} e^{-ü£} \sum_{\theta=0}^{\infty} \frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!} \int_{0}^{\infty} e^{\frac{-ü.(ü+\mathfrak{A})}{ü+ö}\breve{g}} \frac{\left(\frac{ü.(ü+\mathfrak{A})}{ü+ö}\breve{g}\right)^{\theta}}{\theta!} \psi\left(\breve{g}\right) d\breve{g} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlı lineer pozitif operatöre $\mathfrak{M}_n(\psi;£)$ operatörü denir.

Burada $ö = \mathfrak{A}$ seçilirse Klasik Szasz-Durrmeyer Operatörünü elde ederiz. Şimdide $\mathfrak{M}_n(\psi;£)$ operatörünün lineer ve pozitif olduğunu gösterelim.

$\forall\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}$ *ve* $\forall\psi_1,\psi_2 \in C[0,D]$ *için,*

$$M_{ü}((\alpha_1\psi_1+\alpha_2\psi_2);£) = \frac{ü.(ü+\mathfrak{A})}{ü+ö} e^{-ü£} \sum_{\theta=0}^{\infty} \frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!} \int_{0}^{\infty} e^{\frac{-ü.(ü+\mathfrak{A})}{ü+ö}\breve{g}} \frac{\left(\frac{ü.(ü+\mathfrak{A})}{ü+ö}\breve{g}\right)^{\theta}}{\theta!} (\alpha_1\psi_1+\alpha_2\psi_2)\, d\breve{g}$$

$$= \alpha_1 \left[\frac{ü.(ü+\mathfrak{A})}{ü+ö} e^{-ü£} \sum_{\theta=0}^{\infty} \frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!} \int_{0}^{\infty} e^{\frac{-ü.(ü+\mathfrak{A})}{ü+ö}\breve{g}} \frac{\left(\frac{ü.(ü+\mathfrak{A})}{ü+ö}\breve{g}\right)^{\theta}}{\theta!} \psi_1 d\breve{g}\right]$$
$$+ \alpha_2 \left[\frac{ü.(ü+\mathfrak{A})}{ü+ö} e^{-ü£} \sum_{\theta=0}^{\infty} \frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!} \int_{0}^{\infty} e^{\frac{-ü.(ü+\mathfrak{A})}{ü+ö}\breve{g}} \frac{\left(\frac{ü.(ü+\mathfrak{A})}{ü+ö}\breve{g}\right)^{\theta}}{\theta!} \psi_2 d\breve{g}\right]$$
$$= \alpha_1\mathfrak{M}_{ü}(\psi_1;£) + \alpha_2\mathfrak{M}_{ü}(\psi_2;£)$$

olduğundan $\mathfrak{M}_n(\psi;£)$ lineer bir operatördür.
$\forall£ \in [0,D]$ ve $\psi \geq 0$ seçilirse, $e^{-ü£}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!} \geq 0$ olduğundan,

$$\mathfrak{M}_{ü}(\psi;£) = \frac{ü.(ü+\mathfrak{A})}{ü+ö} e^{-ü£} \sum_{\theta=0}^{\infty} \frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!} \int_{0}^{\infty} e^{\frac{-ü.(ü+\mathfrak{A})}{ü+ö}\breve{g}} \frac{\left(\frac{ü.(ü+\mathfrak{A})}{ü+ö}\breve{g}\right)^{\theta}}{\theta!} \psi d\breve{g} \geq 0$$

$\mathfrak{M}_{ü}(\psi;£)$ pozitif bir operatördür.

Lemma 4.2 *(4.1)'de tanımladığımız $\mathfrak{M}_{ü}(\psi;£)$ operatörü, $\forall£ \in [0,\infty]$ için aşağıdaki eşitlikleri sağlar.*

1. $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(1;\pounds\right)=1$

2. $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(t;\pounds\right)=\pounds-\frac{(\mathfrak{A}-\ddot{o})}{\ddot{u}+\mathfrak{A}}\pounds+\frac{(\ddot{u}+\ddot{o})}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})}$

3. $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(t^2;\pounds\right)=\pounds^2-\frac{2\ddot{u}(\mathfrak{A}-\ddot{o})+\mathfrak{A}^2-\ddot{o}^2}{(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}\pounds^2+\frac{4(\ddot{u}+\ddot{o})^2}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}\pounds+\frac{2(\ddot{u}+\ddot{o})^2}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}$

4. $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(t^3;\pounds\right)=\pounds^3-\frac{3(\ddot{u}+\mathfrak{A})(\ddot{u}+\ddot{o})(\mathfrak{A}-\ddot{o})+(\mathfrak{A}-\ddot{o})^3}{(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3}\pounds^3$
$+\frac{9(\ddot{u}+\ddot{o})^3}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3}\pounds^2+\frac{18(\ddot{u}+\ddot{o})^3}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3}\pounds+\frac{6(\ddot{u}+\ddot{o})^3}{\ddot{u}^3(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3}$

5. $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(t^4;\pounds\right)=\pounds^4-\frac{(\ddot{u}+\mathfrak{A})(\mathfrak{A}-\ddot{o})\left[4(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2-6(\ddot{u}+\mathfrak{A})(\mathfrak{A}-\ddot{o})+4(\mathfrak{A}-\ddot{o})^2\right]+(\mathfrak{A}-\ddot{o})^4}{(\ddot{u}+\mathfrak{A})^4}\pounds^4$
$+\frac{16(\ddot{u}+\ddot{o})^3}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})^4}\pounds^3+\frac{72(\ddot{u}+\ddot{o})^3}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^4}\pounds^2+\frac{96(\ddot{u}+\ddot{o})^3}{\ddot{u}^3(\ddot{u}+\mathfrak{A})^4}\pounds+\frac{24(\ddot{u}+\ddot{o})^4}{\ddot{u}^4(\ddot{u}+\mathfrak{A})^4}$

İspat.

1.

$$\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi;\pounds\right)=\frac{\ddot{u}.\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}{\ddot{u}+\ddot{o}}e^{-\ddot{u}\pounds}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(\ddot{u}\pounds)^{\theta}}{\theta!}\int_0^{\infty}e^{\frac{-\ddot{u}.(\ddot{u}+\mathfrak{A})}{\ddot{u}+\ddot{o}}\breve{g}}\frac{\left(\frac{\ddot{u}.(\ddot{u}+\mathfrak{A})}{\ddot{u}+\ddot{o}}\breve{g}\right)^{\theta}}{\theta!}\psi\left(\breve{g}\right)d\breve{g} \quad (4.2)$$

$u=\frac{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})}{\ddot{u}+\ddot{o}}\breve{g}$ dönüşümü yaparsak $\breve{g}=\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})}u\Rightarrow d\breve{g}=\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})}du$ olur. (4.2) de yerine yazarsak;

$$\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi;\pounds\right)=\frac{\ddot{u}.\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}{\ddot{u}+\ddot{o}}e^{-\ddot{u}\pounds}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(\ddot{u}\pounds)^{\theta}}{\theta!}\int_0^{\infty}e^{-u}\frac{(u)^{\theta}}{\theta!}\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}\psi du$$

$$\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi;\pounds\right)=e^{-\ddot{u}\pounds}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(\ddot{u}\pounds)^{\theta}}{\theta!.\theta!}\int_0^{\infty}e^{-u}(u)^{\theta}\psi du \quad (4.3)$$

$$\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(1;\pounds\right)=e^{-\ddot{u}\pounds}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(\ddot{u}\pounds)^{\theta}}{\theta!.\theta!}\int_0^{\infty}e^{-u}(u)^{\theta}1du \quad (4.4)$$

elde edilir. Gamma fonksiyonu $\Gamma\left(\ddot{u}+1\right)=\int_0^{\infty}\pounds^{\ddot{u}}e^{-\pounds}d\pounds=\ddot{u}!$ şeklinde tanımlı olduğundan $\int_0^{\infty}e^{-u}u^{\theta}du=\theta!$

$$\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(1;\pounds\right)=e^{-\ddot{u}\pounds}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(\ddot{u}\pounds)^{\theta}}{\theta!}\frac{\theta!}{\theta!}=e^{-\ddot{u}\pounds}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(\ddot{u}\pounds)^{\theta}}{\theta!}=1$$

2.

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(t;\pounds\right) =& e^{-\ddot{u}\pounds}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(\ddot{u}\pounds)^{\theta}}{\theta!.\theta!}\int_{0}^{\infty}e^{-u}(u)^{\theta}\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}udu \\
=& \frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}e^{-\ddot{u}\pounds}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(\ddot{u}\pounds)^{\theta}}{\theta!.\theta!}\int_{0}^{\infty}e^{-u}(u)^{\theta+1}du \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan yine Gamma fonksiyonu yardımı ile

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(t;\pounds\right) =& \frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}e^{-\ddot{u}\pounds}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(\ddot{u}\pounds)^{\theta}}{\theta!.\theta!}\left(\theta+1\right)! \\
=& \frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}e^{-\ddot{u}\pounds}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(\ddot{u}\pounds)^{\theta}}{\theta!}\left(\theta+1\right) \\
=& \frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}e^{-\ddot{u}\pounds}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(\ddot{u}\pounds)^{\theta}}{\theta!}\theta+\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}e^{-\ddot{u}\pounds}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(\ddot{u}\pounds)^{\theta}}{\theta!}1 \\
=& \frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}\ddot{u}\pounds e^{-\ddot{u}\pounds}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\ddot{u}\pounds)^{\theta-1}}{(\theta-1)!}+\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}e^{-\ddot{u}\pounds}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(\ddot{u}\pounds)^{\theta}}{\theta!}1 \\
=& \frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}\left(\ddot{u}\pounds+1\right) \\
=& \pounds-\frac{\left(\mathfrak{A}-\ddot{o}\right)}{\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}\pounds+\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

3.

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(t^2;\pounds\right) =& \; e^{-\ddot{u}\pounds}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(\ddot{u}\pounds)^{\theta}}{\theta!.\theta!}\int_{0}^{\infty}e^{-u}(u)^{\theta}\left(\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})}\right)^2u^2du \\
=& \left(\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})}\right)^2e^{-\ddot{u}\pounds}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(\ddot{u}\pounds)^{\theta}}{\theta!.\theta!}\int_{0}^{\infty}e^{-u}(u)^{\theta+2}du \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

eşitliğini elde ederiz. Gamma fonksiyonu yardımı ile

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_{ü}\left(t^2;£\right) &= \left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^2 e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!.\theta!}\,(\theta+2)! \\
&= \left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^2 e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}\,(\theta+2)\,(\theta+1) \\
&= \left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^2 e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}\left(\theta^2+3\theta+2\right) \\
&= \left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^2 \left[e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}\theta^2\right] \\
&+ \left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^2 \left[3e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}\theta+2e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}\right] \\
&= \left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^2 \left[e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}\left[\theta\,(\theta-1)+\theta\right]\right] \\
&+ \left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^2 \left[3e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}\theta+2e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}\right] \\
&= \left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^2 \left[e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}\theta\,(\theta-1)\right] \\
&+ \left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^2 \left[4e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}\theta+2e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}\right] \\
&= \left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^2 \left[ü^2£^2e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta-2}}{(\theta-2)!}\right] \\
&+ \left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^2 \left[4ü£e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta-1}}{(\theta-1)!}+2e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}\right] \\
&= \left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^2 \left[ü^2£^2+4ü£+2\right] \\
&= \left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^2 \left[£^2+\frac{4£}{ü}+\frac{2}{ü^2}\right] \qquad (4.8) \\
&= £^2-\frac{(ü+\mathfrak{A})^2-(ü+ö)^2}{(ü+\mathfrak{A})^2}£^2+\frac{4(ü+ö)^2}{ü(ü+\mathfrak{A})^2}£+\frac{2(ü+ö)^2}{ü^2(ü+\mathfrak{A})^2} \\
&= £^2-\frac{2ü\,(\mathfrak{A}-ö)+\mathfrak{A}^2-ö^2}{(ü+\mathfrak{A})^2}£^2+\frac{4(ü+ö)^2}{ü(ü+\mathfrak{A})^2}\chi+\frac{2(ü+ö)^2}{ü^2(ü+\mathfrak{A})^2}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_{ü}\left(t^3;£\right) &= e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}(u)^{\theta}}{\theta!}\left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^3u^3du \\
&= \left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^3 e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!.\theta!}\int_0^{\infty}e^{-u}(u)^{\theta+3}du \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Gamma fonksiyonu yardımı ile

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}\right)^{3} e^{-\ddot{u}£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{\left(\ddot{u}£\right)^{\theta}}{\theta!.\theta!}\left(\theta+3\right)!du \\
&= \left(\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}\right)^{3} e^{-\ddot{u}£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{\left(\ddot{u}£\right)^{\theta}}{\theta!}\left(\theta+3\right)\left(\theta+2\right)\left(\theta+1\right) \\
&= \left(\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}\right)^{3} e^{-\ddot{u}£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{\left(\ddot{u}£\right)^{\theta}}{\theta!}\left(\theta^{3}+6\theta^{2}+11\theta+6\right) \\
&= \left(\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}\right)^{3}\left[e^{-\ddot{u}£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{\left(\ddot{u}£\right)^{\theta}}{\theta!}\theta^{3}\right] \\
&+ \left(\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}\right)^{3}\left[6e^{-\ddot{u}£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{\left(\ddot{u}£\right)^{\theta}}{\theta!}\theta^{2}+11e^{-\ddot{u}£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{\left(\ddot{u}£\right)^{\theta}}{\theta!}\theta\right] \\
&+ \left(\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}\right)^{3}\left[6e^{-\ddot{u}£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{\left(\ddot{u}£\right)^{\theta}}{\theta!}\right] \\
&= \left(\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}\right)^{3}\left[e^{-\ddot{u}£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{\left(\ddot{u}£\right)^{\theta}}{\theta!}\left(\theta\left(\theta-1\right)\left(\theta-2\right)+3\theta^{2}-2\theta\right)\right] \\
&+ \left(\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}\right)^{3}\left[6e^{-\ddot{u}£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{\left(\ddot{u}£\right)^{\theta}}{\theta!}\theta^{2}+11e^{-\ddot{u}£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{\left(\ddot{u}£\right)^{\theta}}{\theta!}\theta\right] \\
&+ \left(\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}\right)^{3}\left[6e^{-\ddot{u}£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{\left(\ddot{u}£\right)^{\theta}}{\theta!}\right] \\
&= \left(\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}\right)^{3}\left[e^{-\ddot{u}£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{\left(\ddot{u}£\right)^{\theta}}{\theta!}\theta\left(\theta-1\right)\left(\theta-2\right)\right] \\
&+ \left(\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}\right)^{3}\left[9e^{-\ddot{u}£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{\left(\ddot{u}£\right)^{\theta}}{\theta!}\theta^{2}+9e^{-\ddot{u}£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{\left(\ddot{u}£\right)^{\theta}}{\theta!}\theta\right] \\
&+ \left(\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}\right)^{3}\left[6e^{-\ddot{u}£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{\left(\ddot{u}£\right)^{\theta}}{\theta!}\right] \\
&= \left(\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}\right)^{3}\left[\ddot{u}^{3}£^{3}e^{-\ddot{u}£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{\left(\ddot{u}£\right)^{\theta-3}}{\left(\theta-3\right)!}\right] \\
&+ \left(\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}\right)^{3}\left[9e^{-\ddot{u}£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{\left(\ddot{u}£\right)^{\theta}}{\theta!}\left(\theta\left(\theta-1\right)+\theta\right)+9e^{-\ddot{u}£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{\left(\ddot{u}£\right)^{\theta}}{\theta!}\theta\right] \\
&+ \left(\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}\right)^{3}\left[6e^{-\ddot{u}£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{\left(\ddot{u}£\right)^{\theta}}{\theta!}\right] \\
&= \left(\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}\right)^{3}\left[\ddot{u}^{3}£^{3}e^{-\ddot{u}£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{\left(\ddot{u}£\right)^{\theta-3}}{\left(\theta-3\right)!}\right] \\
&+ \left(\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}\right)^{3}\left[9\ddot{u}^{2}£^{2}e^{-\ddot{u}£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{\left(\ddot{u}£\right)^{\theta-2}}{\left(\theta-2\right)!}+18\ddot{u}£e^{-\ddot{u}£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{\left(\ddot{u}£\right)^{\theta-1}}{\left(\theta-1\right)!}\right] \\
&+ \left(\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}\right)^{3}\left[6e^{-\ddot{u}£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{\left(\ddot{u}£\right)^{\theta}}{\theta!}\right]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{ü+ö}{ü\left(ü+\mathfrak{A}\right)}\right)^{3}\left[ü^{3}£^{3}+9ü^{2}£^{2}+18ü£+6\right] \\
&= \left(\frac{ü+ö}{ü\left(ü+\mathfrak{A}\right)}\right)^{3}\left[£^{3}+\frac{9£^{2}}{ü}+\frac{18£}{ü^{2}}+\frac{6}{ü^{3}}\right] \\
&= £^{3}-\frac{3\left(ü+\mathfrak{A}\right)\left(ü+ö\right)\left(\mathfrak{A}-ö\right)+\left(\mathfrak{A}-ö\right)^{3}}{\left(ü+\mathfrak{A}\right)^{3}}£^{3} \\
&+ \frac{9(ü+ö)^{3}}{ü(ü+\mathfrak{A})^{3}}£^{2}+\frac{18(ü+ö)^{3}}{ü^{2}(ü+\mathfrak{A})^{3}}£+\frac{6(ü+ö)^{3}}{ü^{3}(ü+\mathfrak{A})^{3}}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

5.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_{ü}\left(t^{4};£\right) &= e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-u}(u)^{\theta}}{\theta!}\left(\frac{ü+ö}{ü\left(ü+\mathfrak{A}\right)}\right)^{4}u^{4}du \\
&= \left(\frac{ü+ö}{ü\left(ü+\mathfrak{A}\right)}\right)^{4}e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!.\theta!}\int_{0}^{\infty}e^{-u}(u)^{\theta+4}du
\end{aligned}$$

Gamma fonksiyonu faydalanırsak,

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{ü+ö}{ü\left(ü+\mathfrak{A}\right)}\right)^{4}e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!.\theta!}\left(\theta+4\right)! \\
&= \left(\frac{ü+ö}{ü\left(ü+\mathfrak{A}\right)}\right)^{4}e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}\left(\theta+4\right)\left(\theta+3\right)\left(\theta+2\right)\left(\theta+1\right) \\
&= \left(\frac{ü+ö}{ü\left(ü+\mathfrak{A}\right)}\right)^{4}e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}\left(\theta^{4}+10\theta^{3}+35\theta^{2}+50\theta+24\right) \\
&= \left(\frac{ü+ö}{ü\left(ü+\mathfrak{A}\right)}\right)^{4}e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}\theta^{4} \\
&+ \left(\frac{ü+ö}{ü\left(ü+\mathfrak{A}\right)}\right)^{4}e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}\left(10\theta^{3}+35\theta^{2}+50\theta+24\right) \\
&= \left(\frac{ü+ö}{ü\left(ü+\mathfrak{A}\right)}\right)^{4}e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}\left[\theta\left(\theta-1\right)\left(\theta-2\right)\left(\theta-3\right)\right] \\
&+ \left(\frac{ü+ö}{ü\left(ü+\mathfrak{A}\right)}\right)^{4}e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}\left[6\theta^{3}-11\theta^{2}+6\theta\right] \\
&+ \left(\frac{ü+ö}{ü\left(ü+\mathfrak{A}\right)}\right)^{4}e^{-ü£}\sum_{\theta=0}^{\infty}\frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}\left(10\theta^{3}+35\theta^{2}+50\theta+24\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^4 ü^4 £^4 e^{-ü£} \sum_{\theta=0}^{\infty} \frac{(ü£)^{\theta-4}}{(\theta-4)!} \\
&+ \left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^4 e^{-ü£} \sum_{\theta=0}^{\infty} \frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!} \left(16\theta^3+24\theta^2+56\theta+24\right) \\
&= \left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^4 ü^4 £^4 \\
&+ 16\left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^4 e^{-ü£} \sum_{\theta=0}^{\infty} \frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}\theta^3 + 24\left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^4 e^{-ü£} \sum_{\theta=0}^{\infty} \frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}\theta^2 \\
&+ 56\left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^4 e^{-ü£} \sum_{\theta=0}^{\infty} \frac{(ü£)^{\theta}}{\theta!}\theta + 24\left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^4 ü^4 £^4 \\
&+ 16\left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^4 \left(ü^3£^3+3ü^2£^2+ü£\right) + 24\left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^4 \left(ü^2£^2+ü£\right) \\
&+ 56\left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^4 (ü£) + 24\left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^4 \\
&= \left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^4 \left[ü^4£^4+16ü^3£^3+72ü^2£^2+96ü£+24\right] \\
&= \left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^4 \left[£^4+\frac{16£^3}{ü}+\frac{72£^2}{ü^2}+\frac{96£}{ü^3}+\frac{24}{ü^4}\right] \\
&= £^4 - \frac{(ü+\mathfrak{A})^4-(ü+ö)^4}{(ü+\mathfrak{A})^4}£^4 + \frac{16(ü+\mathfrak{A})^4}{ü(ü+\mathfrak{A})^4}£^3 \\
&+ \frac{72(ü+ö)^4}{ü^2(ü+\mathfrak{A})^4}£^2 + \frac{96(ü+ö)^4}{ü^3(ü+\mathfrak{A})^4}£ + \frac{24(ü+ö)^4}{ü^4(ü+\mathfrak{A})^4} \\
&= £^4 + \frac{(\mathfrak{A}-ö)\,(ü+\mathfrak{A})\left[-4(ü+\mathfrak{A})^2+(\mathfrak{A}-ö)\left[6\,(ü+\mathfrak{A})-4\right]\right]+(\mathfrak{A}-ö)^4}{(ü+\mathfrak{A})^4}£^4 \\
&+ \frac{16(ü+\mathfrak{A})^4}{ü(ü+\mathfrak{A})^4}£^3 + \frac{72(ü+ö)^4}{ü^2(ü+\mathfrak{A})^4}£^2 + \frac{96(ü+ö)^4}{ü^3(ü+\mathfrak{A})^4}£ + \frac{24(ü+ö)^4}{ü^4(ü+\mathfrak{A})^4}
\end{aligned}
$$

$\square$

Lemma 4.3 *(4.1)‘de tanımladığımız $\mathfrak{M}_{ü}\,(\psi;£)$ operatörünün merkezi momentlerinin bazıları şöyledir;*

i) $\mathfrak{M}_{ü}\left((t-£)^0;£\right) = \mathfrak{M}_{ü}\,(1;£) = 1$

ii) $\mathfrak{M}_{ü}\,((t-£)\,;£) = -\frac{\mathfrak{A}-ö}{ü+\mathfrak{A}}£ + \frac{ü+ö}{ü(ü+\mathfrak{A})}$

iii) $\mathfrak{M}_{ü}\left((t-£)^2;£\right)=\frac{(\mathfrak{A}-ö)^2}{(ü+\mathfrak{A})^2}£^2+\frac{2[(ü+ö)(ü+2ö-\mathfrak{A})]}{ü(ü+\mathfrak{A})^2}£+\frac{2(\mathfrak{A}-ö)^2}{ü^2(ü+\mathfrak{A})^2}$

iv)

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_{ü}\left((t-£)^3;£\right) &= -\frac{(\mathfrak{A}-ö)^3}{(ü+\mathfrak{A})^3}£^3+\frac{3\left[(ü+ö)\left(2ü+3ö-\mathfrak{A}\right)\left(ö-\mathfrak{A}\right)\right]}{ü(ü+\mathfrak{A})^3}£^2\\ &+ \frac{6\left[(ü+ö)\left(2ü+3ö-\mathfrak{A}\right)\right]}{ü^2(ü+\mathfrak{A})^3}£+\frac{6(\mathfrak{A}-ö)^3}{ü^3(ü+\mathfrak{A})^3} \qquad (4.11)\end{aligned}$$

v) $\mathrm{M}_{ü}\left((t-£)^4;£\right)=(\mathfrak{A}-ö)\,(ü+\mathfrak{A})\,[\frac{6(\mathfrak{A}-ö)(ü+\mathfrak{A})-4(\mathfrak{A}-ö)+(\mathfrak{A}-ö)^4}{(ü+\mathfrak{A})^4}$

$$\begin{aligned}&+ \frac{4(\mathfrak{A}-ö)^2-6\left(ü+\mathfrak{A}\right)\left(\mathfrak{A}+ö\right)+12\left(ü+\mathfrak{A}\right)}{(ü+\mathfrak{A})^4}]£^4 \qquad (4.12)\\ &+ \frac{4\left(ü+ö\right)\left[4(ü+ö)^3-9(ü+ö)^2\left(ü+\mathfrak{A}\right)\right]}{ü(ü+\mathfrak{A})^4}£^2\\ &+ \frac{4\left(ü+ö\right)\left[6\left(ü+ö\right)\left(ü+\mathfrak{A}\right)^2-\left(ü+\mathfrak{A}\right)^3\right]}{ü(ü+\mathfrak{A})^4}£^2\\ &+ \frac{12(ü+ö)^2\left[6\left(ü+ö\right)\left(ö-\mathfrak{A}\right)\left(ü+\mathfrak{A}\right)^2\right]}{ü^2(ü+\mathfrak{A})^4}£^2\\ &+ \frac{24(ü+ö)^3\left(3ü+4ö-\mathfrak{A}\right)}{ü^3(ü+\mathfrak{A})^4}£+\frac{24(ü+ö)^4}{ü^4(ü+\mathfrak{A})^4}\end{aligned}$$

İspat.

i) (4.5)'ten

$$\mathfrak{M}_{ü}\left((t-£)^0;£\right)=\mathfrak{M}_{ü}\left(1;£\right)=1$$

olduğu açıktır.

ii)

$$\mathfrak{M}_{ü}\left((t-£)\,;£\right)=\mathfrak{M}_{ü}\left(t;£\right)-£\mathfrak{M}_{ü}\left(1;£\right)$$

yazabiliriz. (4.2.) ve (4.5)'ten;

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_{ü}\left((t-£)\,;£\right) &= \mathfrak{M}_{ü}\left(t;£\right)-£\mathfrak{M}_{ü}\left(1;£\right)\\ &= £-\frac{\mathfrak{A}-ö}{ü+\mathfrak{A}}£+\frac{ü+ö}{ü\left(ü+\mathfrak{A}\right)}-£\\ &= -\frac{\mathfrak{A}-ö}{ü+\mathfrak{A}}£+\frac{ü+ö}{ü\left(ü+\mathfrak{A}\right)} \qquad (4.14)\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left((t-£)^2;£\right) &= \mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\left(t^2 2£t+£^2\right);£\right)\\ &= \mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(t^2;£\right)-2£\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(t;£\right)+£^2\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(1;£\right)\end{aligned}$$

yazabiliriz.Lemma (4.2)'den;

$$\begin{aligned}&= £^2-\frac{2\ddot{u}\left(\mathfrak{A}-\ddot{o}\right)+\mathfrak{A}^2-\ddot{o}^2}{\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)^2}£^2+\frac{4(\ddot{u}+\ddot{o})^2}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}£+\frac{2(\ddot{u}+\ddot{o})^2}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}\\ &- 2£\left[£-\frac{(\mathfrak{A}-\ddot{o})}{(\ddot{u}+\mathfrak{A})}£+\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}\right]+£^2\\ &= \frac{(\mathfrak{A}-\ddot{o})^2}{(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}£^2+\frac{2\left(\ddot{u}+\ddot{o}\right)\left(\ddot{u}+2\ddot{o}-\mathfrak{A}\right)}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}£+\frac{2(\ddot{u}+\ddot{o})^2}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2} \qquad (4.15)\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left((t-£)^3;£\right) &= \mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\left(t^3-3t^2+3£^2t-£^3\right);£\right)\\ &= \mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(t^3;£\right)-3\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(t^2;£\right)+3£^2\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(t;£\right)-£^3\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(1;£\right)\end{aligned}$$

yazabiliriz. Lemma (4.2)'den;

$$\begin{aligned}&= £^3-\frac{3\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)\left(\ddot{u}+\ddot{o}\right)\left(\mathfrak{A}-\ddot{o}\right)+\left(\mathfrak{A}-\ddot{o}\right)^3}{\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)^3}£^3\\ &+ \frac{9(\ddot{u}+\ddot{o})^3}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3}£^2+\frac{18(\ddot{u}+\ddot{o})^3}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3}£+\frac{6(\ddot{u}+\ddot{o})^3}{\ddot{u}^3(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3}\\ &- 3\left[£^2-\frac{2\eta\left(\mathfrak{A}-\ddot{o}\right)+\mathfrak{A}^2-\ddot{o}^2}{\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)^2}£^2+\frac{4(\ddot{u}+\ddot{o})^2}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}£+\frac{2(\ddot{u}+\ddot{o})^2}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}\right]\\ &+ 3£^2\left[£-\frac{(\mathfrak{A}-\ddot{o})}{(\ddot{u}+\mathfrak{A})}£+\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)}\right]-£^3\\ &= -\frac{(\mathfrak{A}-\ddot{o})^3}{(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3}£^3+\frac{3\left[\left(\ddot{u}+\ddot{o}\right)\left(2\ddot{u}+3\ddot{o}-\mathfrak{A}\right)\left(\mathfrak{A}-\ddot{o}\right)\right]}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3}£^2\\ &+ \frac{6\left[\left(\ddot{u}+\ddot{o}\right)\left(2\ddot{u}+3\ddot{o}-\mathfrak{A}\right)\right]}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3}£+\frac{6(\mathfrak{A}-\ddot{o})^3}{\ddot{u}^3(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3} \qquad (4.16)\end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left((t-£)^4;£\right) &= \mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\left(t^4-4t^3£+6£^2t^2-4£^3t+£^4\right);£\right)\\ &= \mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(t^4;£\right)-4£\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(t^3;£\right)+6£^2\mathfrak{M}_{\eta}\left(t^2;£\right)\\ &- 4£^3\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(t;£\right)+£^4\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(1;£\right)\end{aligned}$$

yazabiliriz. Lemma (4.2)'den;

$$
\begin{aligned}
=&£^4 + \frac{(\mathfrak{A}-ö)(ü+\mathfrak{A})\left[-4(ü+\mathfrak{A})^2+6(\mathfrak{A}-ö)(ü+\mathfrak{A})-4(\mathfrak{A}-ö)\right]+(\mathfrak{A}-ö)^4}{(ü+\mathfrak{A})^4}£^4 \\
+ & \frac{16(ü+\mathfrak{A})^4}{ü(ü+\mathfrak{A})^4}£^3 + \frac{72(ü+ö)^4}{ü^2(ü+\mathfrak{A})^4}£^2 + \frac{96(ü+ö)^4}{ü^3(ü+\mathfrak{A})^4}£ + \frac{24(ü+ö)^4}{ü^4(ü+\mathfrak{A})^4} \quad (4.17) \\
- & 4£\left(\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right)^3\left[£^3+\frac{9£^2}{ü}+\frac{18£}{ü^2}+\frac{6}{ü^3}\right] \\
+ & 6£^2\left(\frac{ü+ö}{(ü+\mathfrak{A})}\right)^2\left[£^2+\frac{4£}{ü}+\frac{2}{ü^2}\right] \\
- & 4£^3\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}(ü£+1)+£^4 \\
= & (\mathfrak{A}-ö)(ü+\mathfrak{A})\,[\frac{6\,(\mathfrak{A}-ö)\,(ü+\mathfrak{A})-4\,(\mathfrak{A}-ö)+(\mathfrak{A}-ö)^4}{(ü+\mathfrak{A})^4} \\
+ & \frac{4(\mathfrak{A}-ö)^2-6\,(ü+\mathfrak{A})\,(\mathfrak{A}+ö)+12\,(ü+\mathfrak{A})}{(ü+\mathfrak{A})^4}]£^4 \\
+ & \frac{4\,(ü+ö)\left[4(ü+ö)^3-9(ü+ö)^2\,(ü+\mathfrak{A})\right]}{ü(ü+\mathfrak{A})^4}£^2 \\
+ & \frac{4\,(ü+ö)\left[6\,(ü+ö)\,(ü+\mathfrak{A})^2-(ü+\mathfrak{A})^3\right]}{ü(ü+\mathfrak{A})^4}£^2 \\
+ & \frac{12(ü+ö)^2\left[6\,(ü+ö)\,(ö-\mathfrak{A})\,(ü+\mathfrak{A})^2\right]}{ü^2(ü+\mathfrak{A})^4}£^2 \\
+ & \frac{24(ü+ö)^3\,(3ü+4ö-\mathfrak{A})}{ü^3(ü+\mathfrak{A})^4}£+\frac{24(ü+ö)^4}{ü^4(ü+\mathfrak{A})^4}
\end{aligned}
$$

□

Teorem 4.4 *$D > 0$ olmak üzere $\psi \in C[0, D]$ ve ψ bütün reel eksende sınırlı olsun. Bu durumda $\mathfrak{M}_{ü}(\psi; £)$ operatörü düzgün yakınsaktır.*

İspat. Teorem 1.19'de verilen Korovkin teoremi yardımıyla $ü \to \infty$ için

1) $\mathfrak{M}_{ü}(1; £) \rightrightarrows 1$

2) $\mathfrak{M}_{ü}(t; £) \rightrightarrows £$

3) $\mathfrak{M}_{ü}(t^2; £) \rightrightarrows £^2$

olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır.

1) $\|\mathfrak{M}_{ü}1 - 1\|_{C[0,D]} = 0$ olduğu açıktır.

2) Lemma (4.2)'den;

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{M}_{ü}t-£\|_{C[0,D]} &= \lim_{ü\to\infty}\underset{£\in[0,D]}{Sup}\left|£-\frac{\mathfrak{A}-ö}{ü+\mathfrak{A}}£+\frac{ü+ö}{\eta\,(ü+\mathfrak{A})}-£\right| \\ &= \lim_{ü\to\infty}\underset{£\in[0,D]}{Sup}\left|-\frac{\mathfrak{A}-ö}{ü+\mathfrak{A}}£+\frac{ü+ö}{\eta\,(ü+\mathfrak{A})}\right| \\ &= \lim_{ü\to\infty}\left|-\frac{\mathfrak{A}-ö}{ü+\mathfrak{A}}D+\frac{ü+ö}{\eta\,(ü+\mathfrak{A})}\right|\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşırız. Buradaki supremum sonlu bir değer olduğundan

$$\|\mathfrak{M}_{ü}t-£\|_{C[0,D]}=\lim_{ü\to\infty}\left|-\frac{\mathfrak{A}-ö}{ü+\mathfrak{A}}D+\frac{ü+ö}{ü\,(ü+\mathfrak{A})}\right|=0 \tag{4.18}$$

olur.

3) Lemma (4.2)'den;

$$\left\|\mathfrak{M}_{ü}t^2-£^2\right\|_{C[0,D]}=\lim_{ü\to\infty}\underset{£\in[0,D]}{Sup}\left|£^2-\tfrac{2ü(\mathfrak{A}-ö)+\mathfrak{A}^2-ö^2}{(ü+\mathfrak{A})^2}£^2+\tfrac{4(ü+ö)^2}{ü(ü+\mathfrak{A})^2}£+\tfrac{2(ü+ö)^2}{ü^2(ü+\mathfrak{A})^2}-£^2\right|$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{ü\to\infty}\underset{£\in[0,D]}{Sup}\left|-\frac{2ü\,(\mathfrak{A}-ö)+\mathfrak{A}^2-ö^2}{(ü+\mathfrak{A})^2}£^2+\frac{4(ü+ö)^2}{ü(ü+\mathfrak{A})^2}£+\frac{2(ü+ö)^2}{ü^2(ü+\mathfrak{A})^2}\right| \\ &= \lim_{ü\to\infty}\left|\frac{2ü\,(\mathfrak{A}-ö)+\mathfrak{A}^2-ö^2}{(ü+\mathfrak{A})^2}D^2+\frac{4(ü+ö)^2}{ü(ü+\mathfrak{A})^2}D+\frac{2(ü+ö)^2}{ü^2(ü+\mathfrak{A})^2}\right|\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradaki supremum sonlu bir değer olduğundan;

$$\left\|\mathfrak{M}_{ü}t^2-£^2\right\|_{C[0,D]}=\lim_{ü\to\infty}\left|\tfrac{2ü(\mathfrak{A}-ö)+\mathfrak{A}^2-ö^2}{(ü+\mathfrak{A})^2}D^2+\tfrac{4(ü+ö)^2}{ü(ü+\mathfrak{A})^2}D+\tfrac{2(ü+ö)^2}{ü^2(ü+\mathfrak{A})^2}\right|=0$$

olur ve ispat tamamlanır. □

Teorem 4.5 $\mathfrak{M}_{ü}\,(\psi;£)$ *operatorünün yaklaşım hızı süreklilik modülünden istifade edilerek* $\forall\psi\in C\,[0,D]$ *için;*

$$\|\mathfrak{M}_{ü}\,(\psi;£)-\psi\,(£)\|\leq K\omega\left(\psi;\frac{1}{\sqrt{ü}}\right)$$

şeklinde hesaplanmıştır.

İspat.

Süreklilik modülünün özelliklerinden;

$$\begin{aligned}
\left|\psi\left(t\right)-\psi\left(\pounds\right)\right| &\leq \left(1+\frac{\left|t-\pounds\right|}{\delta}\right)\omega\left(\psi;\delta\right)\\
\left|\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi\left(t\right);\pounds\right)-\psi\left(\pounds\right)\right| &= \left|\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\left(\psi\left(t\right)-\psi\left(\pounds\right)\right);\pounds\right)\right|\\
&\leq \mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\left|\psi\left(t\right)-\psi\left(\pounds\right)\right|;\pounds\right)\\
&\leq \mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\omega\left(\psi\left|t-\pounds\right|\right);\pounds\right)\\
&\leq \omega\left(\psi;\delta\right)\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\left(1+\frac{\left|t-\pounds\right|}{\delta}\right);\pounds\right)
\end{aligned}$$

burada Cauchy-Schwartz eşitsizliği kullanırsak

$$\left|\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi\left(t\right);\pounds\right)-\psi\left(\pounds\right)\right| \leq \left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\left(t-\pounds\right)^2;\pounds\right)}\right)\omega\left(\psi;\delta\right)$$

Lemma (4.3)'ten

$$\begin{aligned}
&\left|\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi\left(t\right);\pounds\right)-\psi\left(\pounds\right)\right| \leq \left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\left(t-\pounds\right)^2;\pounds\right)}\right)\omega\left(\psi;\delta\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{\left(\mathfrak{A}-\ddot{o}\right)^2}{\left(\ddot{u}+\mathfrak{A}\right)^2}\pounds^2+\frac{2\left[\left(\ddot{u}+\ddot{o}\right)\left(\ddot{u}+2\ddot{o}-\mathfrak{A}\right)\right]}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}\pounds+\frac{2(\mathfrak{A}-\ddot{o})^2}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}}\right)\omega\left(\psi;\delta\right)
\end{aligned}$$

bulduğumuz bu son ifadenin maksimum olması için, $0 \leq \pounds \leq D$ olduğundan $\pounds = D$ alırsak;

$$\left|\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi\left(t\right);\pounds\right)-\psi\left(\pounds\right)\right| \leq \left(1+\tfrac{1}{\delta}\sqrt{\tfrac{\ddot{u}^2(\mathfrak{A}-\ddot{o})^2}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}D^2+\tfrac{2\ddot{u}[(\ddot{u}+\ddot{o})(\ddot{u}+2\ddot{o}-\mathfrak{A})]}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}D+\tfrac{2(\mathfrak{A}-\ddot{o})^2}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}}\right)\omega\left(\psi;\delta\right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(1+\tfrac{1}{\delta}\sqrt{\tfrac{\ddot{u}^2(\mathfrak{A}-\ddot{o})^2}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}D^2+\tfrac{2\ddot{u}[(\ddot{u}+\ddot{o})(\ddot{u}+2\ddot{o}-\mathfrak{A})]}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}D^2+\tfrac{2(\mathfrak{A}-\ddot{o})^2}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}D^2}\right)\omega\left(\psi;\delta\right) \qquad (4.19)\\
&\leq \left(1+\tfrac{1}{\delta}\sqrt{\tfrac{\ddot{u}^2(\mathfrak{A}-\ddot{o})^2+2\ddot{u}[(\ddot{u}+\ddot{o})(\ddot{u}+2\ddot{o}-\mathfrak{A})]+2(\mathfrak{A}-\ddot{o})^2}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}D}\right)\omega\left(\psi;\delta\right)\\
&\leq \left(1+\tfrac{1}{\delta}\sqrt{\tfrac{\ddot{u}^2\mathfrak{A}^2-2\ddot{u}^2\ddot{o}\mathfrak{A}+\mathfrak{A}^2-2\ddot{u}^3+6\ddot{u}^2\ddot{o}-2\ddot{u}^2\mathfrak{A}+4\ddot{u}\ddot{o}^2-2\ddot{u}\ddot{o}\mathfrak{A}+2\ddot{u}^2+4\ddot{u}\ddot{o}+2\ddot{o}^2}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}D}\right)\omega\left(\psi;\delta\right)
\end{aligned}$$

son ifadenin maksimum olması için negatif ifadeleri çıkarıp $\ddot{o} \leq \pounds \leq \mathfrak{A}$ olduğundan $\ddot{o}$

yerine $\mathfrak{A}$ yazarsak ve gerekli işlemleri yaparsak;

$$\leq \left(1+\tfrac{1}{\delta}\sqrt{\tfrac{2\ddot{u}^2\mathfrak{A}^2+2\ddot{u}^3+6\ddot{u}^2\mathfrak{A}+4\ddot{u}\mathfrak{A}^2+2\ddot{u}^2+4\ddot{u}\mathfrak{A}+2\mathfrak{A}^2}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}}D\right)\omega\left(\psi;\delta\right)$$
$$\leq \left(1+\tfrac{1}{\delta}\sqrt{\tfrac{2\ddot{u}^3+2\ddot{u}^2(\mathfrak{A}^2+6\mathfrak{A}+2)+4\ddot{u}(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{A})+2\mathfrak{A}^2}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}}D\right)\omega\left(\psi;\delta\right)$$
$$\leq \left(1+\tfrac{1}{\delta}\sqrt{\tfrac{2\ddot{u}^3(\mathfrak{A}+3)^2+2\ddot{u}^3(\mathfrak{A}+3)^2+4\ddot{u}^3(\mathfrak{A}+3)^2+2\ddot{u}^3(\mathfrak{A}+3)^2}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}}D\right)\omega\left(\psi;\delta\right)$$
$$\leq \left(1+\tfrac{1}{\delta}\sqrt{\tfrac{10\ddot{u}^3(\mathfrak{A}+3)^2}{\ddot{u}^4}}D\right)\omega\left(\psi;\delta\right)$$
$$\leq \left(1+\sqrt{10}\tfrac{1}{\delta}\tfrac{(\mathfrak{A}+3)}{\sqrt{\ddot{u}}}D\right)\omega\left(\psi;\delta\right)$$

$\delta=\frac{1}{\sqrt{\ddot{u}}}$ ve $K=\sqrt{10}\left(\mathfrak{A}+3\right)D+1$ alırsak;

$$\left\|\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi;£\right)-\psi\left(£\right)\right\|\leq K\omega\left(\psi;\frac{1}{\sqrt{\ddot{u}}}\right)$$

olur ve ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 4.6 *ψ fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlıyorsa;*

$$\left\|\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi\left(t\right);£\right)-\psi\left(£\right)\right\|_{C[0,D]}=O\left(\left(\frac{10(\mathfrak{A}+3)^2}{\ddot{u}}D^2\right)^{\alpha/2}\right)$$

'dır.

İspat.

$\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi;£\right)$ operatörü liner olduğundan ve $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(1;£\right)=1$ olduğundan;

$$\begin{aligned}\left|\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi;£\right)-\psi\left(£\right)\right| &= \left|\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi;£\right)-\psi\left(£\right)\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(1;£\right)\right|\\ &= \left|\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi;£\right)-\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi\left(£\right);£\right)\right|\\ &\leq \left(\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left|\psi\left(t\right)-\psi\left(£\right)\right|;£\right) \end{aligned} \tag{4.12}$$

yazabiliriz. ψ fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağladığından;

$$\left|\left(\psi\left(t\right)\right)-\psi\left(£\right)\right|\leq M|t-£|^{\alpha}$$

bu ifade (4.12)'de yerine yazılırsa,

$$\left|\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\psi;£\right)-\psi\left(£\right)\right|\leq M\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(|t-£|^{\alpha};£\right)$$

Hölder eşitsizliğinden,

$$\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(|t-£|^{\alpha};£\right)\leq \mathfrak{M}_{\ddot{u}}\Big(\left(t-£\right)^2;£\Big)^{\alpha/2}$$

olur. O halde;

$$\left|\mathfrak{M}_{ü}\left(\psi;£\right)-\psi\left(£\right)\right|\leq M\left(\frac{2ü^{3}+2ü^{2}\left(\mathfrak{A}^{2}+6\mathfrak{A}+2\right)+4ü\left(\mathfrak{A}^{2}+\mathfrak{A}\right)+2\mathfrak{A}^{2}}{ü^{2}(ü+\mathfrak{A})^{2}}D^{2}\right)^{\alpha/2}$$

Böylece;

$$\left\|\mathfrak{M}_{ü}\left(\psi;£\right)-\psi\left(£\right)\right\|_{C[0,D]}\leq M\left(\frac{2ü^{3}+2ü^{2}\left(\mathfrak{A}^{2}+6\mathfrak{A}+2\right)+4ü\left(\mathfrak{A}^{2}+\mathfrak{A}\right)+2\mathfrak{A}^{2}}{ü^{2}(ü+\mathfrak{A})^{2}}D^{2}\right)^{\alpha/2}$$

$$\leq M\left(\frac{2ü^{3}(\mathfrak{A}+3)^{2}+2ü^{3}(\mathfrak{A}+3)^{2}+4ü^{3}(\mathfrak{A}+3)^{2}+2ü^{3}(\mathfrak{A}+3)^{2}}{ü^{2}(ü+\mathfrak{A})^{2}}D^{2}\right)^{\alpha/2}$$

$$\leq M\left(\frac{10ü^{3}(\mathfrak{A}+3)^{2}}{ü^{4}}D^{2}\right)^{\alpha/2}$$

$$\leq M\left(\frac{10(\mathfrak{A}+3)^{2}}{ü}D^{2}\right)^{\alpha/2} \tag{4.13}$$

bulunur ve ispat tamamlanır. □

Teorem 4.7 *ψ fonksiyonu türevlenebilir ve türevi $[0,D]$ aralığında sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda belirli bir ü'den sonra;*

$$\left|\mathfrak{M}_{ü}\left(\psi;£\right)-\psi\left(£\right)\right|\leq\frac{M}{ü^{2}}+\left(\sqrt{10}+10\right)\left(\frac{1}{\sqrt{ü}}\left(\mathfrak{A}+3\right)D\right)\omega\left(\psi';\frac{1}{\sqrt{ü}}\left(\mathfrak{A}+3\right)D\right)$$

dır.

İspat. ψ fonksiyonu türevlenebilir ve türevi $[0,D]$ aralığında sürekli ve tüm reel eksende sınırlı bir fonksiyon olduğundan $t,£\in[0,D]$için ortalama değer teoreminden t ile £ arasında öyle bir u vardır ki; .

$$\psi'\left(u\right)=\frac{\psi\left(t\right)-\psi\left(£\right)}{t-£}$$

. dir. Buradan

$$\psi\left(t\right)-\psi\left(£\right)=\psi'\left(u\right)\left(t-£\right)$$

olur. Eşitliğin sağ tarafına

$$-\psi'\left(£\right)+\psi'\left(£\right)$$

eklenirse; .

$$\psi\left(t\right)-\psi\left(£\right)=\left(t-£\right)\psi'\left(£\right)+\left(t-£\right)\left(\psi'\left(u\right)-\psi'\left(£\right)\right)$$

elde edilir. $\mathfrak{M}_{ü}(\psi;£)$ görüntüsünü alırsak;

$$\mathfrak{M}_{ü}(\psi(t)-\psi(£))=\mathfrak{M}_{ü}(t-£;£)\,\psi'(£)+\mathfrak{M}_{ü}((t-£)(\psi'(u)-\psi'(£);£))$$

Lemma (4.3)'ten;

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_{ü}(\psi(t)-\psi(£)) =& \psi'(£)\left[-\frac{\mathfrak{A}-ö}{ü+\mathfrak{A}}£+\frac{ü+ö}{ü(ü+\mathfrak{A})}\right]\\ &+\mathfrak{M}_{ü}((t-£)(\psi'(u)-\psi'(£);£))\end{aligned} \tag{4.14}$$

elde edilir. u, t ile £ arasında olduğundan $|u-£|\le|t-£|$ olur. Süreklilik modülünün özelliğinden;

$$\begin{aligned}|\psi'(u)-\psi'(£)|\le\omega(\psi';|u-£|)\le&\,\omega(\psi';|t-£|)\\ \le&\left(1+\frac{t-£}{\delta_{ü}}\right)\omega(\psi';\delta_{ü})\end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir.Bulduğumuz bu ifadeyi (4.14)'de yerine yazarsak;

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_{ü}(\psi;£)-\psi(£) &= \left|-\frac{\mathfrak{A}-ö}{ü+\mathfrak{A}}£\psi'(£)+\frac{ü+ö}{ü(ü+\mathfrak{A})}\psi'(£)\right|\\ &+ \mathfrak{M}_{ü}(|t-£|\,|\psi'(u)-\psi'(£)|;£)\\ &\le \left|-\frac{\mathfrak{A}-ö}{ü+\mathfrak{A}}£\psi'(£)+\frac{ü+ö}{ü(ü+\mathfrak{A})}\psi'(£)\right|\\ &+ \mathfrak{M}_{ü}\left(|t-£|\left(1+\frac{|t-£|}{\delta_{ü}}\right);£\right)\omega(\psi';\delta_{ü})\\ &\le \left|-\frac{\mathfrak{A}-ö}{ü+\mathfrak{A}}£\psi'(£)+\frac{ü+ö}{ü(ü+\mathfrak{A})}\psi'(£)\right|\\ &+ \mathfrak{M}_{ü}\left(|t-£|+\frac{1}{\delta_{ü}}(t-£)^2;£\right)\omega(\psi';\delta_{ü})\end{aligned}$$

Cauchy Schwartz eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned}|\mathfrak{M}_{ü}(\psi;£)-\psi(£)|\le&\left|-\frac{\mathfrak{A}-ö}{ü+\mathfrak{A}}£\psi'(£)+\frac{ü+ö}{ü(ü+\mathfrak{A})}\psi'(£)\right|\\ +&\left(\mathfrak{M}_{ü}\Big((t-£)^2;£\Big)^{1/2}+\frac{1}{\delta_{ü}}\Big(\mathfrak{M}_{ü}(t-£)^2;£\Big)\right)\omega(\psi';\delta_{ü})\end{aligned}$$

sağlanır.

$$\mathfrak{M}_{ü}\Big((t-£)^2;£\Big)=\frac{(\mathfrak{A}-ö)^2}{(ü+\mathfrak{A})^2}£^2+\frac{2\left[(ü+ö)(ü+2ö-\mathfrak{A})\right]}{ü(ü+\mathfrak{A})^2}£+\frac{2(\mathfrak{A}-ö)^2}{ü^2(ü+\mathfrak{A})^2}$$

olduğu bilinmektedir.

$$
\begin{aligned}
&\max_{0\leq £\leq D}\left(\frac{(\mathfrak{A}-ö)^2}{(ü+\mathfrak{A})^2}£^2+\frac{2\left[(ü+ö)\,(ü+2ö-\mathfrak{A})\right]}{ü(ü+\mathfrak{A})^2}£+\frac{2(\mathfrak{A}-ö)^2}{ü^2(ü+\mathfrak{A})^2}\right)^{1/2}\\
&=\left(\frac{(\mathfrak{A}-ö)^2}{(ü+\mathfrak{A})^2}D^2+\frac{2\left[(ü+ö)\,(ü+2ö-\mathfrak{A})\right]}{ü(ü+\mathfrak{A})^2}D+\frac{2(\mathfrak{A}-ö)^2}{ü^2(ü+\mathfrak{A})^2}\right)^{1/2}\\
&\leq\left(\frac{ü^2(\mathfrak{A}-ö)^2+2ü\left[(ü+ö)\,(ü+2ö-\mathfrak{A})\right]+2(\mathfrak{A}-ö)^2}{ü^2(ü+\mathfrak{A})^2}D^2\right)^{1/2}\\
&\leq\sqrt{\frac{ü^2\mathfrak{A}^2-2ü^2ö\mathfrak{A}+\mathfrak{A}^2-2ü^3+6ü^2ö-2ü^2\mathfrak{A}+4üö^2-2üö\mathfrak{A}+2ü^2+4üö+2ö^2}{ü^2(ü+\mathfrak{A})^2}D^2}
\end{aligned}
$$

son ifadenin maksimum olması için negatif ifadeleri çıkarıp $ö\leq £\leq\mathfrak{A}$ olduğundan $ö$ yerine $\mathfrak{A}$ yazarsak ve gerekli işlemleri yaparsak;

$$
\begin{aligned}
&=\sqrt{\frac{2ü^3+2ü^2\left(\mathfrak{A}^2+6\mathfrak{A}+2\right)+4ü\left(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{A}\right)+2\mathfrak{A}^2}{ü^2(ü+\mathfrak{A})^2}}D\\
&\leq\sqrt{\frac{2ü^3(\mathfrak{A}+3)^2+2ü^3(\mathfrak{A}+3)^2+4ü^3(\mathfrak{A}+3)^2+2ü^3(\mathfrak{A}+3)^2}{ü^2(ü+\mathfrak{A})^2}}D\\
&\leq\sqrt{\frac{10ü^3(\mathfrak{A}+3)^2}{ü^4}}D\\
&\leq\sqrt{\frac{10}{ü}}\left(\mathfrak{A}+3\right)D
\end{aligned}
$$

olur. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathfrak{M}_{ü}\left(\psi;£\right)-\psi\left(£\right)\right|\leq\left|-\frac{\mathfrak{A}-ö}{ü+\mathfrak{A}}£+\frac{ü+ö}{ü\left(ü+\mathfrak{A}\right)}\right|\left|\psi'\left(£\right)\right|\\
&+\sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{ü}}\left(\mathfrak{A}+3\right)D\right)\omega\left(\psi';\delta_{ü}\right)\\
&+10\left(\frac{1}{\delta}\frac{1}{ü}(\mathfrak{A}+3)^2D^2\right)\omega\left(\psi';\delta_{Ü}\right)
\end{aligned}
$$

ψ' bütün reel eksende sınırlı olduğundan $|\psi'\left(£\right)|\leq M$ olacak şekilde $M>0$ sayısı vardır.

$$\begin{aligned}\left|\mathfrak{M}_{ü}\left(\psi;£\right)-\psi\left(£\right)\right| &\leq \frac{M}{ü\left(ü+\mathfrak{A}\right)} \\ &+\sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{ü}}\left(\mathfrak{A}+3\right)D\right)\omega\left(\psi';\delta_{ü}\right) \\ &+10\left(\frac{1}{\delta}\frac{1}{ü}\left(\mathfrak{A}+3\right)^{2}D^{2}\right)\omega\left(\psi';\delta_{ü}\right) \\ &\leq \frac{M}{ü^{2}}+\sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{ü}}\left(\mathfrak{A}+3\right)D\right)\omega\left(\psi';\delta_{ü}\right) \\ &+10\left(\frac{1}{\delta}\frac{1}{ü}\left(\mathfrak{A}+3\right)^{2}D^{2}\right)\omega\left(\psi';\delta_{ü}\right) \\ \delta_{ü} &= \frac{1}{\sqrt{ü}}\left(\mathfrak{A}+3\right)D\end{aligned}$$

olarak alınırsa

$$\left|\mathfrak{M}_{ü}\left(\psi;£\right)-\psi\left(£\right)\right|\leq\frac{M}{ü^{2}}+\left(\sqrt{10}+10\right)\left(\frac{1}{\sqrt{ü}}\left(\mathfrak{A}+3\right)D\right)\omega\left(\psi';\frac{1}{\sqrt{ü}}\left(\mathfrak{A}+3\right)D\right)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Teorem 4.8 *$\psi \in [0,D]$ ve ψ,ψ',ψ'' fonksiyonları $[0,D]$ aralığında sınırlı ise bu, takdirde;*

$$\lim_{£\to\infty}\left(ü+\mathfrak{A}\right)\left(\mathfrak{M}_{ü}\left(\psi;£\right)-\psi\left(£\right)\right)=\left(ö-\mathfrak{A}\right)\psi'\left(£\right)+\frac{1}{2}£\psi''\left(£\right)$$

dır.

İspat. ψ fonksiyonunun £ noktasındaki Taylor açılımı;

$$\begin{aligned}\psi\left(\breve{g}\right) &= \psi\left(£\right)+\frac{1}{1!}\psi'\left(£\right)\left(\breve{g}-£\right)+\frac{1}{2!}\psi''\left(£\right)\left(\breve{g}-£\right)^{2}+\frac{1}{3!}\psi'''\left(£\right)\left(\breve{g}-£\right)^{3} \\ &+\frac{1}{4!}\psi^{(4)}\left(£\right)\left(\breve{g}-£\right)^{4}+\cdots \qquad (4.16)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi\left(\breve{g}\right)-\psi\left(£\right) &= \frac{1}{1!}\psi'\left(£\right)\left(\breve{g}-£\right)+\frac{1}{2!}\psi''\left(£\right)\left(\breve{g}-£\right)^{2}+\left(\breve{g}-£\right)^{2}\mu\left(\breve{g}-£\right) \\ \mu\left(\breve{g}-£\right) &= \left(\frac{1}{3!}\psi'''\left(£\right)\left(\breve{g}-£\right)+\frac{1}{4!}\psi^{(4)}\left(£\right)\left(\breve{g}-£\right)^{2}+\cdots\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_{ü}\left(\psi;£\right)-\psi\left(£\right) &= \mathfrak{M}_{ü}\left(\left(\breve{g}-£\right);£\right)\psi'\left(£\right)+\frac{1}{2}\mathfrak{M}_{ü}\left(\left(\breve{g}-£\right)^{2};£\right)\psi''\left(£\right) \\ &+\mathfrak{M}_{ü}\left(\left(\breve{g}-£\right)^{2}\mu\left(\breve{g}-£\right);£\right)\end{aligned}$$

Lemma (4.3)'ten

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_{\ddot{u}}(\psi;\pounds)-\psi(\pounds) &= \left(-\frac{\mathfrak{A}-\ddot{o}}{\ddot{u}+\mathfrak{A}}\pounds+\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})}\right)\psi'(\pounds)\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{(\mathfrak{A}-\ddot{o})^2}{(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}\pounds^2+\frac{2\left[(\ddot{u}+\ddot{o})(\ddot{u}+2\ddot{o}-\mathfrak{A})\right]}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}\pounds+\frac{2(\mathfrak{A}-\ddot{o})^2}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}\right)\psi''(\pounds)\\ &+\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left((\breve{g}-\pounds)^2\mu(\breve{g}-\pounds);\pounds\right)\end{aligned}$$

eşitliğin her iki tarafı $\ddot{u}+\mathfrak{A}$ çarpılırsa;

$$\begin{aligned}&(\ddot{u}+\mathfrak{A})\,\mathfrak{M}_{\ddot{u}}(\psi;\pounds)-\psi(\pounds)=(\ddot{u}+\mathfrak{A})\left(-\frac{\mathfrak{A}-\ddot{o}}{\ddot{u}+\mathfrak{A}}\pounds+\frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})}\right)\psi'(\pounds)\\ &+\frac{1}{2}(\ddot{u}+\mathfrak{A})\left(\frac{(\mathfrak{A}-\ddot{o})^2}{(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}\pounds^2+\frac{2\left[(\ddot{u}+\ddot{o})(\ddot{u}+2\ddot{o}-\mathfrak{A})\right]}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}\pounds+\frac{2(\mathfrak{A}-\ddot{o})^2}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}\right)\psi''(\pounds)\\ &+(\ddot{u}+\mathfrak{A})\,\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left((\breve{g}-\pounds)^2\mu(\breve{g}-\pounds);\pounds\right)\end{aligned}$$

$\lim_{\breve{g}\to\pounds}\mu(\breve{g}-\pounds)=0$ fonksiyonu sınırlıdır.
$(\ddot{u}+\mathfrak{A})\,\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left((\breve{g}-\pounds)^2\mu(\breve{g}-\pounds);\pounds\right)\leq\sqrt{(\ddot{u}+\mathfrak{A})\,\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left((\breve{g}-\pounds)^4;\pounds\right)}\sqrt{(\ddot{u}+\mathfrak{A})\,\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(\mu(\breve{g}-\pounds)^2;\pounds\right)}$ Daha önce Lemma (4.3)'te elde ettiğimiz $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left((\breve{g}-\pounds)^4;\pounds\right)$ ifadesininin her iki tarafını $\ddot{u}+\mathfrak{A}$ ile çarparsak

$$\begin{aligned}(\ddot{u}+\mathfrak{A})\,\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left((t-\pounds)^4;\pounds\right) &= (\mathfrak{A}-\ddot{o})(\ddot{u}+\mathfrak{A})\,[\tfrac{6(\mathfrak{A}-\ddot{o})(\ddot{u}+\mathfrak{A})-4(\mathfrak{A}-\ddot{o})+(\mathfrak{A}-\ddot{o})^4}{(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3}\\ &+\frac{4(\mathfrak{A}-\ddot{o})^2-6(\ddot{u}+\mathfrak{A})(\mathfrak{A}+\ddot{o})+12(\ddot{u}+\mathfrak{A})}{(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3}]\pounds^4\\ &+\frac{4(\ddot{u}+\ddot{o})\left[4(\ddot{u}+\ddot{o})^3-9(\ddot{u}+\ddot{o})^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})\right]}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3}\pounds^2\\ &+\frac{4(\ddot{u}+\ddot{o})\left[6(\ddot{u}+\ddot{o})(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2-(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3\right]}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3}\pounds^2\\ &+\frac{12(\ddot{u}+\ddot{o})^2\left[6(\ddot{u}+\ddot{o})(\ddot{o}-\mathfrak{A})(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2\right]}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3}\pounds^2\\ &+\frac{24(\ddot{u}+\ddot{o})^3(3\ddot{u}+4\ddot{o}-\mathfrak{A})}{\ddot{u}^3(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3}\pounds+\frac{24(\ddot{u}+\ddot{o})^4}{\ddot{u}^4(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3}\end{aligned}$$

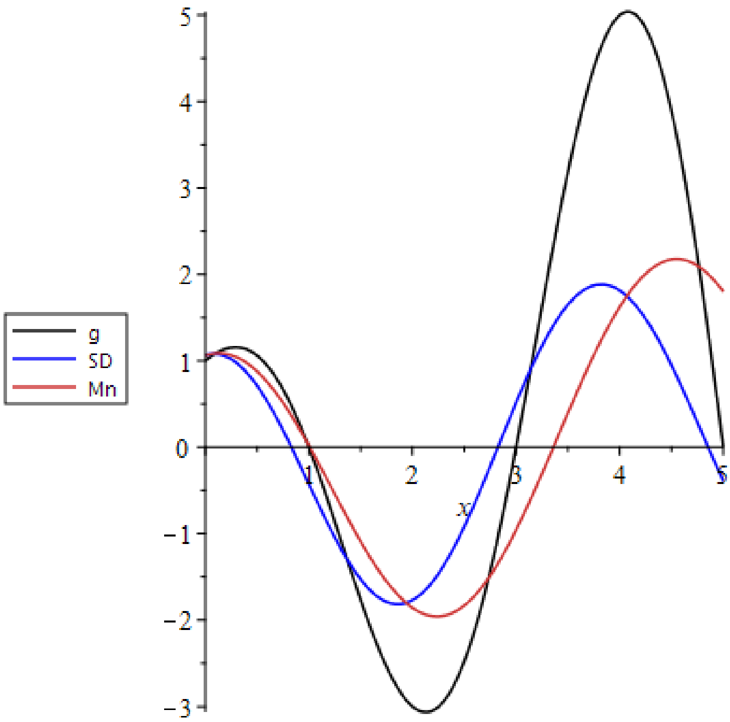
olup $\lim_{\ddot{u}\to\infty}(\ddot{u}+\mathfrak{A})\,\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left((\breve{g}-\pounds)^4;\pounds\right)=0$ olacağı açıktır. (1.1.) eşitliğinin limiti alınırsa;

$$\lim_{\ddot{u}\to\infty}(\ddot{u}+\mathfrak{A})\left(\mathfrak{M}_{\ddot{u}}(\psi;\pounds)-\psi(\pounds)\right)=\left((\ddot{o}-\mathfrak{A})\pounds+1\right)\psi'(\pounds)+\pounds\psi''(\pounds)$$

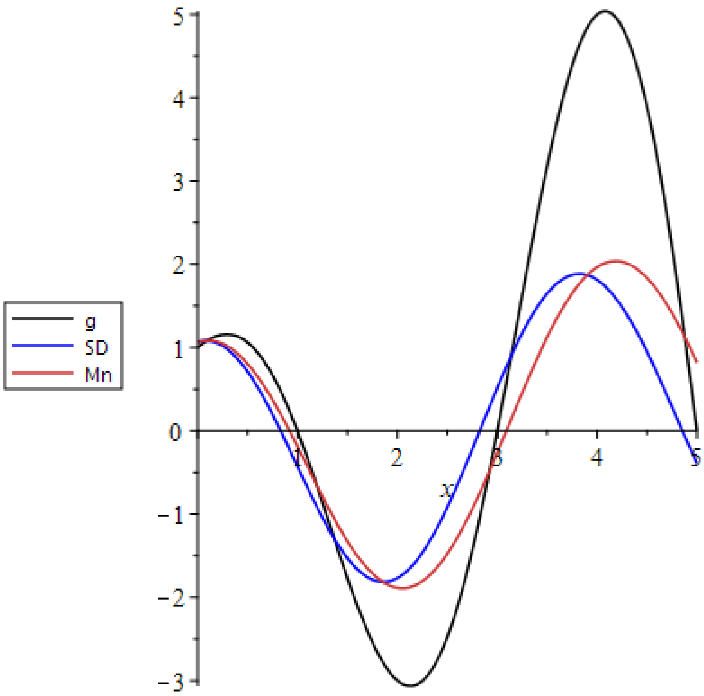
□

elde edilir ve ispat tamamlanır.

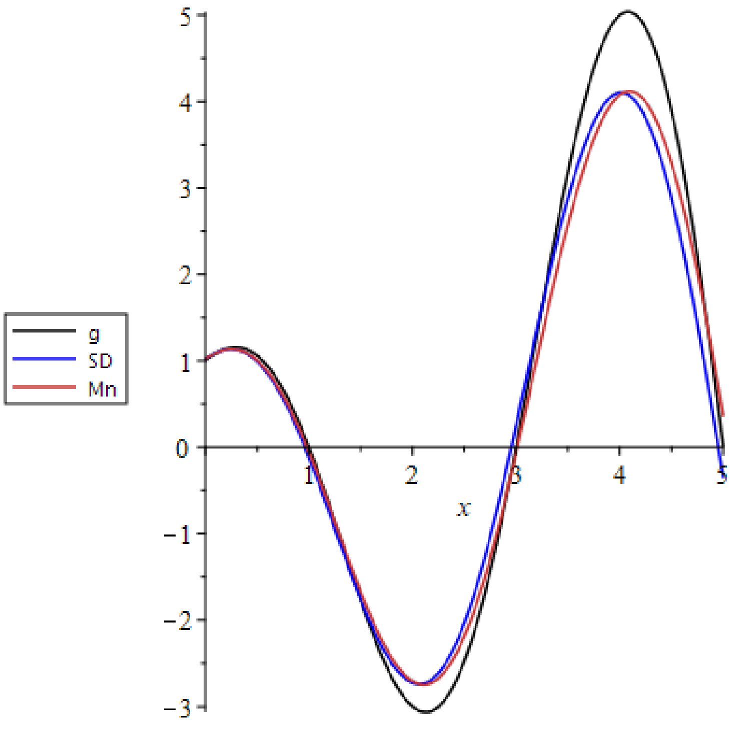
Son olarak üzerinde çalıştığımız $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}(\psi;\pounds)$ operatörünün farklı $\ddot{u}$ değerleri için $g(\pounds) = (\pounds+1)\sin(\frac{\pi(\pounds+1)}{2})$ fonksiyonuna yaklaşımını gösteren grafikleri ve yaklaşımın nümerik değerlerini tablo halinde verelim.



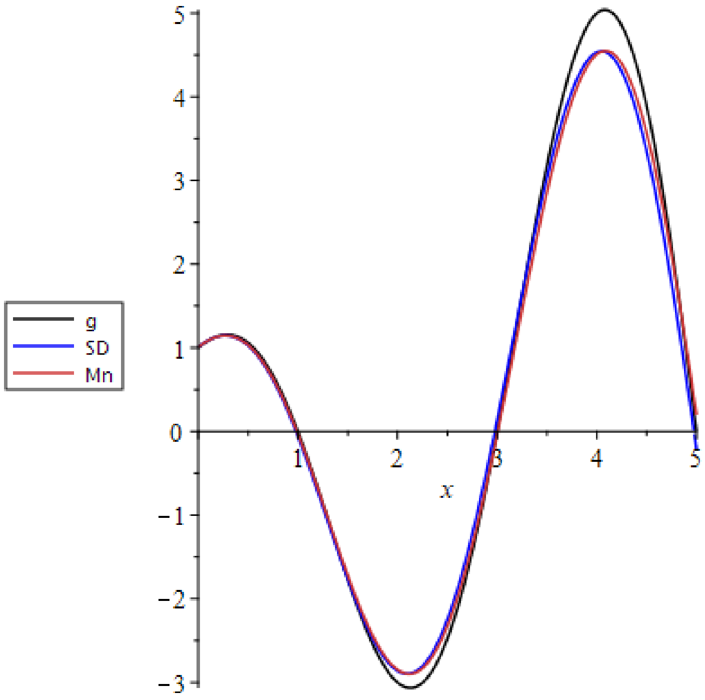
Şekil 4.1. $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}(g;\pounds)$ ve $SD_{\ddot{u}}(g;\pounds)$ operatörlerinin $\ddot{u}=10$, $\ddot{o}=1$,$\mathfrak{A}=3$ için $g(\pounds)$ fonksiyonuna yaklaşım grafiği.



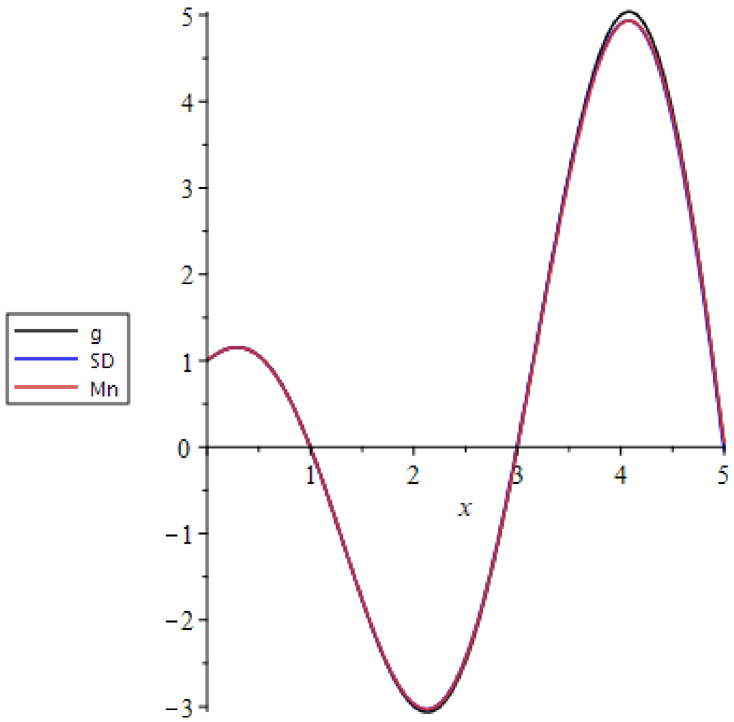
Şekil 4.2. $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(g;\pounds\right)$ ve $SD_{\ddot{u}}\left(g;\pounds\right)$ operatörlerinin $\ddot{u}=10$, $\ddot{o}=1, \mathfrak{A}=2$ için $g\left(\pounds\right)$ fonksiyonuna yaklaşım grafiği.



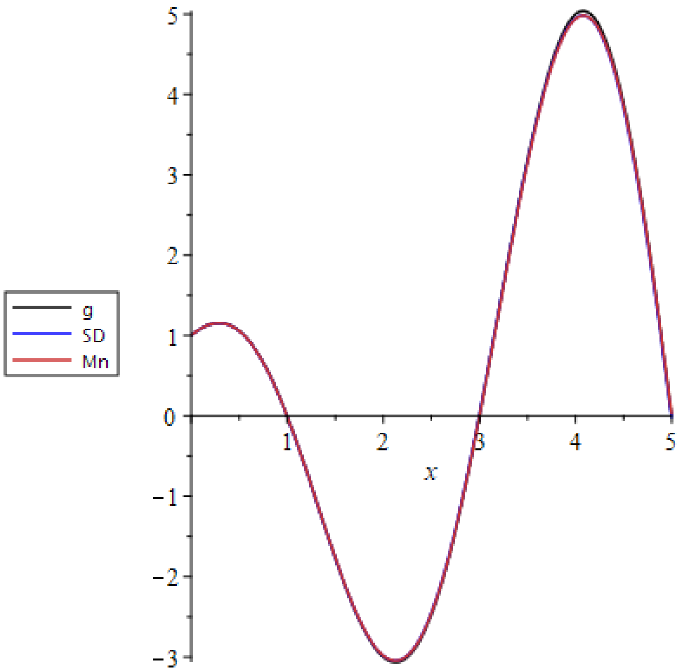
Şekil 4.3. $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(g;\pounds\right)$ ve $SD_{\ddot{u}}\left(g;\pounds\right)$ operatörlerinin $\ddot{u}=50$, $\ddot{o}=1, \mathfrak{A}=2$ için $g\left(\pounds\right)$ fonksiyonuna yaklaşım grafiği.



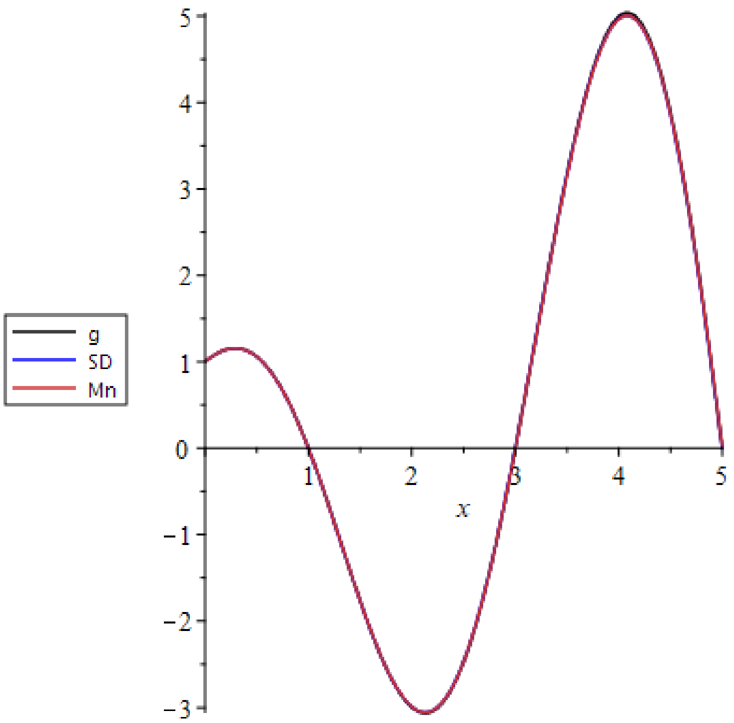
Şekil 4.4. $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(g;\pounds\right)$ ve $SD_{\ddot{u}}\left(g;\pounds\right)$ operatörlerinin $\ddot{u}=100$, $\ddot{o}=1$,$\mathfrak{A}=2$ için $g\left(\pounds\right)$ fonksiyonuna yaklaşım grafiği



Şekil 4.5. $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left(g;\pounds\right)$ ve $SD_{\ddot{u}}\left(g;\pounds\right)$ operatörlerinin $\ddot{u}=500$, $\ddot{o}=1$,$\mathfrak{A}=2$ için $g\left(\pounds\right)$ fonksiyonuna yaklaşım grafiği



Şekil 4.6. $\mathfrak{M}_{ü}\,(g;£)$ ve $SD_{ü}\,(g;£)$ operatörlerinin $ü = 900$, $ö = 1$,$\mathfrak{A} = 2$ için $g\,(£)$ fonksiyonuna yaklaşım grafiği



Şekil 4.7. $\mathfrak{M}_{ü}\,(g;£)$ ve $SD_{ü}\,(g;£)$ operatörlerinin $ü = 1500$, $ö = 1$,$\mathfrak{A} = 2$ için $g\,(£)$ fonksiyonuna yaklaşım grafiği

Şimdide yaklaşımın nümerik değerler tablosunu verelim.

Çizelge 4.1. $N(£) = \left|\frac{SD_{ü}(g;£)-g(£)}{\mathfrak{M}_{ü}(g;£)-g(£)}\right|$, $\mathfrak{M}_{ü}(g;£)$ ile $SD_{ü}(g;£)$ operatörlerinin g fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılmasının sayısal değerler tablosu.

ü \ £	0	1	2	3	4	5
10	1,00000	1,06896	1,01809	1,19563	1,01457	1,48271
50	1,00000	1,05673	0.994957	1,14980	1,00126	1,26183
100	1,00000	1,05522	0.988520	1,14244	0.994415	1,24571
200	1,00000	1,05353	0.974031	1,13892	0.994180	1,23694
500	1,00000	1,05242	0.987840	1,13759	0.992972	1,23397
1000	1,00000	1,05043	0.987143	1,13692	0.991928	1,23647
1500	1,00000	1,05042	0.990329	1,13935	0.992281	1,21501

Çizelge 4.2. $|\mathfrak{M}_{ü}(g;£) - g(£)|$ değrinin bazı £ değerleri ve $ü$'nin farklı değerleri için saysal değerler tablosu.

ü \ £	0	1	2	3	4	5
10	1	0.400159	1,21015	0.431912	3,14146	0.263681
50	1	0.111200	0,27597	0.221910	0.89474	0.282465
100	1	0.0576304	0.13850	0.124038	0.46559	0.170241
200	1	0.0293515	0.07086	0.0654613	0.23878	0.0933120
500	1	0.0118625	0.02796	0.0270160	0.09670	0.0393634
1000	1	0.00595772	0.01400	0.0136506	0.04858	0.0200716
1500	1	0.00397045	0.00931	0.03239	0.03239	0.0135723

$ü$ değeri büyüdükçe $\mathfrak{M}_{ü}(g;£)$ operatörü ile $g(£)$ fonksiyonu arasındaki farkın sıfıra yaklaştığı görülmektedir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

$\mathfrak{M}_n(\psi;\chi)$ operatörünün lineer pozitif olduğu gösterilmiş, $1, t, t^2, t^3, t^4$ gibi bazı test fonksiyonlarının operatör altındaki görüntüleri ve merkezi momentlerden bazıları hesaplanmış ve sonuçları;

1. $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}(1;\pounds) = 1$

2. $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}(t;\pounds) = \pounds - \frac{(\mathfrak{A}-\ddot{o})}{\ddot{u}+\mathfrak{A}}\pounds + \frac{(\ddot{u}+\ddot{o})}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})}$

3. $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}(t^2;\pounds) = \pounds^2 - \frac{2\ddot{u}(\mathfrak{A}-\ddot{o})+\mathfrak{A}^2-\ddot{o}^2}{(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}\pounds^2 + \frac{4(\ddot{u}+\ddot{o})^2}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}\pounds + \frac{2(\ddot{u}+\ddot{o})^2}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}$

4. $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}(t^3;\pounds) = \pounds^3 - \frac{3(\ddot{u}+\mathfrak{A})(\ddot{u}+\ddot{o})(\mathfrak{A}-\ddot{o})+(\mathfrak{A}-\ddot{o})^3}{(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3}\pounds^3$
$+ \frac{9(\ddot{u}+\ddot{o})^3}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3}\pounds^2 + \frac{18(\ddot{u}+\ddot{o})^3}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3}\pounds + \frac{6(\ddot{u}+\ddot{o})^3}{\ddot{u}^3(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3}$

5. $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}(t^4;\pounds) = \pounds^4 - \frac{(\ddot{u}+\mathfrak{A})(\mathfrak{A}-\ddot{o})\left[4(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2-6(\ddot{u}+\mathfrak{A})(\mathfrak{A}-\ddot{o})+4(\mathfrak{A}-\ddot{o})^2\right]+(\mathfrak{A}-\ddot{o})^4}{(\ddot{u}+\mathfrak{A})^4}\pounds^4$
$+ \frac{16(\ddot{u}+\ddot{o})^3}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})^4}\pounds^3 + \frac{72(\ddot{u}+\ddot{o})^3}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^4}\pounds^2 + \frac{96(\ddot{u}+\ddot{o})^3}{\ddot{u}^3(\ddot{u}+\mathfrak{A})^4}\pounds + \frac{24(\ddot{u}+\ddot{o})^4}{\ddot{u}^4(\ddot{u}+\mathfrak{A})^4}$

i) $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left((t-\pounds)^0;\pounds\right) = \mathfrak{M}_{\ddot{u}}(1;\pounds) = 1$

ii) $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}((t-\pounds);\pounds) = -\frac{\mathfrak{A}-\ddot{o}}{\ddot{u}+\mathfrak{A}}\pounds + \frac{\ddot{u}+\ddot{o}}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})}$

iii) $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left((t-\pounds)^2;\pounds\right) = \frac{(\mathfrak{A}-\ddot{o})^2}{(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}\pounds^2 + \frac{2[(\ddot{u}+\ddot{o})(\ddot{u}+2\ddot{o}-\mathfrak{A})]}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}\pounds + \frac{2(\mathfrak{A}-\ddot{o})^2}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2}$

iv)

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left((t-\pounds)^3;\pounds\right) &= -\frac{(\mathfrak{A}-\ddot{o})^3}{(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3}\pounds^3 + \frac{3\left[(\ddot{u}+\ddot{o})(2\ddot{u}+3\ddot{o}-\mathfrak{A})(\ddot{o}-\mathfrak{A})\right]}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3}\pounds^2 \\ &+ \frac{6\left[(\ddot{u}+\ddot{o})(2\ddot{u}+3\ddot{o}-\mathfrak{A})\right]}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3}\pounds + \frac{6(\mathfrak{A}-\ddot{o})^3}{\ddot{u}^3(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3} \qquad (5.1)\end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\left((t-\pounds)^4;\pounds\right) &= (\mathfrak{A}-\ddot{o})\,(\ddot{u}+\mathfrak{A})\,[\frac{6\,(\mathfrak{A}-\ddot{o})\,(\ddot{u}+\mathfrak{A})-4\,(\mathfrak{A}-\ddot{o})+(\mathfrak{A}-\ddot{o})^4}{(\ddot{u}+\mathfrak{A})^4} \\
&+ \frac{4(\mathfrak{A}-\ddot{o})^2-6\,(\ddot{u}+\mathfrak{A})\,(\mathfrak{A}+\ddot{o})+12\,(\ddot{u}+\mathfrak{A})}{(\ddot{u}+\mathfrak{A})^4}]\pounds^4 \\
&+ \frac{4\,(\ddot{u}+\ddot{o})\left[4(\ddot{u}+\ddot{o})^3-9(\ddot{u}+\ddot{o})^2\,(\ddot{u}+\mathfrak{A})\right]}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})^4}\pounds^2 \\
&+ \frac{4\,(\ddot{u}+\ddot{o})\left[6\,(\ddot{u}+\ddot{o})\,(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2-(\ddot{u}+\mathfrak{A})^3\right]}{\ddot{u}(\ddot{u}+\mathfrak{A})^4}\pounds^2 \\
&+ \frac{12(\ddot{u}+\ddot{o})^2\left[6\,(\ddot{u}+\ddot{o})\,(\ddot{o}-\mathfrak{A})\,(\ddot{u}+\mathfrak{A})^2\right]}{\ddot{u}^2(\ddot{u}+\mathfrak{A})^4}\pounds^2 \\
&+ \frac{24(\ddot{u}+\ddot{o})^3\,(3\ddot{u}+4\ddot{o}-\mathfrak{A})}{\ddot{u}^3(\ddot{u}+\mathfrak{A})^4}\pounds+\frac{24(\ddot{u}+\ddot{o})^4}{\ddot{u}^4(\ddot{u}+\mathfrak{A})^4}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilmiştir.

Korovkin teoremi vasıtası ile $\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\,(\psi;\pounds)$ operatörünün düzgün yakınsak olduğu gösterilmiştir.

Süreklilik modülünü kullanarak$\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\,(\psi;\pounds)$ operatörün yaklaşım hızı $\forall\psi\in C\,[0,D]$ için;

$$\|\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\,(\psi;\pounds)-\psi\,(\pounds)\|\leq K\omega\left(\psi;\frac{1}{\sqrt{\ddot{u}}}\right)$$

şeklinde hesaplanmıştır.

ψ fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlıyorsa;

$$\|\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\,(\psi\,(t)\,;\pounds)-\psi\,(\pounds)\|_{C[0,D]}=O\left(\left(\frac{10(\mathfrak{A}+3)^2}{\ddot{u}}D^2\right)^{\alpha/2}\right)$$

şeklinde bulunmuştur.

ψ fonksiyonu türevlenebilir ve türevi $[0,D]$ aralığında sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda belirli bir $\ddot{u}$'den sonra;

$$|\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\,(\psi;\pounds)-\psi\,(\pounds)|\leq\frac{M}{\ddot{u}^2}+\left(\sqrt{10}+10\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\ddot{u}}}\,(\mathfrak{A}+3)\,D\right)\omega\left(\psi';\frac{1}{\sqrt{\ddot{u}}}\,(\mathfrak{A}+3)\,D\right)$$

olduğu gösterilmiştir.

$\psi\in[0,D]$ ve ψ,ψ',ψ'' fonksiyonları $[0,D]$ aralığında sınırlı ise bu, takdirde;

$$\lim_{\pounds\to\infty}\,(\ddot{u}+\mathfrak{A})\,(\mathfrak{M}_{\ddot{u}}\,(\psi;\pounds)-\psi\,(\pounds))=(\ddot{o}-\mathfrak{A})\,\psi'\,(\pounds)+\frac{1}{2}\pounds\psi''\,(\pounds)$$

olduğu gösterilmiştir.

Son olarak üzerinde çalıştığımız $\mathfrak{M}_{ü}(g;£)$ operatörünün farklı $ü$ değerleri için $g\,(£) \;=\; (£+1)\sin(\frac{\pi(£+1)}{2})$ fonksiyonuna yaklaşımını gösteren grafikler Maple programıyla çizilip, yaklaşımın nümerik değerleri tablo halinde verilmiştir.
20 Mayıs tarihinde Ankarada düzenlenen 2.ULUSLARARASI MATEMATİK VE GEOMETRİ KONGRESİNDE çalışılan operatör ile ilgili sunum yapılmıştır.

5.2. Öneriler

$ö$ ve $\mathfrak{A}$ eğerleri arasındaki fark küçüldükçe operatörümüzün daha iyi sonuç verdiği görülmüştür. Burada $ö$ ve $\mathfrak{A}$ değerlerini değiştirerek daha iyi bir yaklaşım elde edilebilir.

Yaklaşım Teorisi çatısı altında çalışılan bu ve buna benzer operatörlerin günümüz tasarım ve çizim programlarında kulanıldığını bilyoruz fakat bunların kulanılan yazılımın içerisine ne şekilde entegre edildiği ve nasıl çalıştığıyla ilgili neredeyse hiç çalışma yok. Buradan hareketle bahsi geçen yazılımlar incelenip elde ettiğimiz bu operatörler ile yazılımın kodlarında yer alan operatörler incelenip karşılaştırılabilir.

KAYNAKLAR

ALTOMARE, F., and CAMPITI, M., 1994.Korovkin- Type Approximation Theory And Its Applications. De Gruyter Series Studies in Mathematics, Walter De Gruyter Berlin- New York, 17: 627s.

BALCI, M., 2012. Reel Analiz, Balcı Yayınları, Ankara, 144s.

BASKAKOV, V.A., 1957. An example of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 113: 249-251.

BERNSTEİN, S.N. 1912. Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur la calcul des probabilités. Commun. Soc. Math. Charkow Série, 13(2): 1-2.

BEZİER, P., 1958. Les machines-transfert. Renault Histoire 10; 75–84

BLEİMANN, G., BUTZER, P.L. and HAHN L., 1980. A Bernstein-type operator approximating continuous functions on the semi-axis. Math. Proc. A, 83: 255-262.

BOEHM, W. and MÜLLER, A., 1999. On de Casteljau's algorithm. Sciencedirect, 16(7); 587-605.

BOHMAN, H., 1952. On approximation of continuous and analytic functions. Ark. Math. 2: 43-56.

CHEBYSHEV, P.P.,1854. Theory of mechanisms known by the title of parallelograms (Teoriya mekhanizmov, izvestnykh pod nazvaniyem parallelogrammov). collected works.

CAO, F., DİNG, C., XU, Z., 2005. On multivariate Baskakov operator, J. Math. Anal. Appl. 307, no. 1, 274-291.

GADJIEV, A. D., 1976Theorems of the type of P. P. Korovkin's theorems. Math. Zametki, 20(5): 781-786 (in Russian), Math. Notes, 20(5-6): 995-998 (Engl. Trans.). 996-998.

HACISALİHOĞLU, H., ve HACIYEV, 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletme Yayınları, Ankara, 94s.

HEARN, D. and BAKER, M. PAULİNE, 1994. Computer Graphics. Prentice Hill International Editions, New Jersey,652s

İZGİ, A., 2013. Approximation by a class of new type bernstein polynomials of one and two variables. Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 9(1):55-71.

KOROVKİN, P. P., 1953. On Convergence of Linear Positive Operators in the Space of Continuous Functions(Russian). Dokl. Akad. Nauk. SSSR(N. S.) 90:961-964.

LORENTZ, G. G., 1953. Bernstein polynomials. University of Toronto Press, Toronto, 36s. Deganwy.

LUPAŞ, A., 1995. The approximation by some positive linear operators. In: Pro- ceedings of the International Dortmund Meeting on Approximation Theory (M.W. Müller et al.,eds.). Akademie Verlag, Berlin, 201-229.

MİRAKJAN, G.M., 1941. Approximation of continuous functions with the aid of polynomials ... . Dokl. Akad. Nauk SSSR 31: 201 - 205.

MUSAYEV, B., ALP, M., MUSTAFAYEV, N., ve EKİNCİOĞLU, İ., 2007. Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz 1. Seçkin Yayıncılık, Ankara, 593s.

MUSAYEV, B., Alp, M., 2000. Fonsiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Kütahya, 27-83.

OUSMAN, N., 2019. Szasz Operatörlerinin Bir Genelleştirmesi. Harran Üniversitesi, Fen

Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Şanlıurfa, 32s.
SZASZ, O., 1950. Genelalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval.J. Research Nat. Bur. Standars, 45: 239-245.
WEİERSTRASS, K. 1885. Über die analytische Darstellbarkeit sogennanter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. Sitzungsber. Akad. Berlin , 633-639, 789-805.