T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ SİNGÜLER KISMI İÇİN BİR TAKDİM

Didem POLAT GÜNEY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA

2021

Dr. Öğr. Üyesi Kemal TOKER' in danışmanlığında, Didem POLAT GÜNEY' in hazırladığı "Dönüşüm Yarıgruplarının Singüler Kısmı İçin Bir Takdim" konulu bu çalışma 23/08/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

		İmza
Danışman	: Dr. Öğr. Üyesi Kemal TOKER	………………………………………
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi N. Feyza YALÇIN	…………………………………….
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Cennet ESKAL	………………………………………..

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Doç. Dr. İsmail HİLALİ

Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ SİNGÜLER KISMI İÇİN BİR TAKDİM

Didem POLAT GÜNEY

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Kemal TOKER
Yıl: 2021, Sayfa: 53

Bu tezde, dönüşüm yarıgruplarının singüler kısmı için bir takdim incelenmiştir. Giriş bölümünde Cayley teoreminin önemi ve tarihçesi açıklanmıştır. Temel kavramlar olarak serbest yarıgrup, kongrüans, yarıgrup takdimi ile ilgili bazı temel bilgilerden bahsedilmiştir. Dönüşüm yarıgruplarının bazı özel alt yarıgrupları tanımlanmış ve bu alt yarıgrupların takdimleri bulunmuş ve bunlardan faydalanarak dönüşüm yarıgruplarının singüler kısmı için bir takdim verilmiştir. Ayrıca minimal doğuray kümesi ile bağlantılı takdim tanımı verilmiş olup n=3 için dönüşüm yarıgruplarının singüler kısmının minimal doğuray kümesi ile bağlantılı takdimi verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: yarıgruplar, yarıgrup takdimi, dönüşüm yarıgrupları

ABSTRACT

MSc Thesis

A PRESENTATION FOR THE SINGULAR PART OF THE FULL TRANSFORMATION SEMIGROUP

Didem POLAT GÜNEY

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Kemal TOKER
Year: 2021, Page: 53

In this thesis, a presentation is given for singular part of the full transformation semigroup. In the part of introduciton, the importance and history of Cayley's theorem is explained. Some basic information about free semigroup, congruence, semigroup presentation as basic concepts are mentioned. Some special subsemigroups of the transformation semigroups are defined and the presentations of these subsemigroups are found and a presentation is given for the singular part of the transformation semigroups by making use of them. In addition, the definition of presentation associated with the minimal generating set is given, and presentation associated with the minimal generating set is given which n=3 for the singular part of the transformation semigroups.

KEY WORDS: semigroups, semigroup presentation, transformation semigroups

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, yüksek lisans eğitimim boyunca çalıştığım tüm hocalarıma; değerli bilgilerini benimle paylaşan, mesleki tecrübesini süreç boyunca esirgemeyen Dr. Öğr. Üyesi Kemal TOKER'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Doğduğum günden beri beni milli bilinç ve evrensel ahlak ilkeleri çerçevesinde yetiştiren ve bu günlere gelmemde en büyük paya sahip olan anne ve babama minnettarım. Sevgili babacığımın beni izlediğini ve gurur duyduğunu biliyorum. Hayat boyu desteğini arkamda hissettiğim tüm aileme sonsuz şükranlarımı sunarım.

Her çalışmamı sabote eden, klavyenin üzerine yatıp bilgisayarın yeni özelliklerini keşfetmemi sağlayan kedim Hurşit'e; mesleki hayatımın özel hayatıma en büyük katkısı ve en güzel yol kesişmesi olan, içsel motivasyon kaynağım, sadece yüksek lisans eğitimim boyunca değil hayatın her anında maddi manevi destekçim, sevgili eşim Gökhan GÜNEY'e biliyorum ne yazsam eksik kalacak sonsuz teşekkürlerimle.

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{Z}$: Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$: Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{Q}$: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi
$\langle \mid \rangle$: Takdim sembolü
X_n : 1' den n sayısına olan pozitif tamsayılar kümesi
S_n : X_n kümesi üzerindeki simetrik grup
T_n : X_n kümesi üzerindeki dönüşümler yarıgrubu
Ker : Çekirdek
Im : Görüntü
A^+ : A kümesi üzerindeki serbest yarıgrup
A^* : A kümesi üzerindeki serbest monoid

1.GİRİŞ

Yarıgrup teorisi içerisinde yer alan yarıgrup takdimleri konusu son yıllarda çalışılan oldukça popüler bir konudur, ayrıca yarıgrup takdiminde temel problemlerden bir tanesi verilen bir yarıgrubun takdimini bulmaktır.

Grup teorisinde simetrik gruplar oldukça önemli bir yere sahiptir. Bunun sebebi ise her grubun bir simetrik grubun altgrubuna izomorfik olmasıdır, bu ifade Cayley teoremi olarak bilinir (Cayley, 1854), bu teoremin ispatı ilk olarak Dyck ın makalesinde yer almıştır (Dyck, 1882). Benzer bir durum yarıgruplarda dönüşüm yarıgrupları için mevcuttur. $X_n = \{1,2,\dots,n\}$ sonlu bir küme olmak üzere X_n üzerindeki simetrik grup S_n ile ve X_n üzerindeki dönüşüm yarıgrubu T_n ile gösterilir. $T_n \backslash S_n$ kümesinin fonksiyonların bileşke işlemi ile bir yarıgrup oluşturduğu bilinmektedir. $T_n \backslash S_n$ yarıgrubunun takdimi ile ilgili açık problem ilk olarak Nikola Ruskuc un “Semigroup Presentations” isimli doktora tezinde yer almaktadır (Ruskuc, 1995). James East bu probleme 2010 yılında bir çözüm bulmuştur ancak bulmuş olduğu takdim $T_n \backslash S_n$ yarıgrubunun minimal doğuray kümesi ile bağlantılı değildir (East, 2010).

Bu tezde, yarıgrup takdimlerinin temel özellikleri sunulmuştur. Bu tezin ikinci bölümü temel kavram ve teoremlere ayrılmıştır. Dördüncü bölümde ise $T_n \backslash S_n$ yarıgrubunun bir takdimi verilmiştir, ayrıca $n = 3$ için yani $T_3 \backslash S_3$ ün minimal doğuray kümesi ile bağlantılı olan bir takdimi sunulmuştur.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde bu çalışmada kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1. Yarıgrup ve Homomorfizma

Tanım 2.1.1. $\emptyset \neq A$, A bir küme $\theta: A \times A \rightarrow A$ şeklinde tanımlı bir fonksiyonu varsa (A, θ) ikilisine bir grupoid denir. Genellikle "θ"yerine "." yazılabilir. Yani $x, y \in A$ için

$$(x, y)\theta = x.y = xy$$

yazılır (Howie, 1995).

Tanım 2.1.2. $(S,\cdot)$ bir grupoid olsun. $\forall a, b, c \in S$ için

$$(a.b).c = a.(b.c)$$

oluyorsa $(S,\cdot)$ yapısına bir yarıgrup denir. Ayrıca bu durumda S bir yarıgruptur denir (Howie, 1995).

Tanım 2.1.3. S bir yarıgrup olsun. Eğer S birim elemana sahip ise yani S birimli bir yarıgrup ise S ye bir monoid denir (Howie, 1995).

Tanım2.1.4. S bir yarıgrup olsun. Eğer S birim eleman içermiyor ise S ye birim eleman aşağıdaki gibi eklenebilir. $S \cup \{1\}$ kümesi üzerinde ikili işlem $\forall s, t \in S$ için $s \cdot t = st$ ifadesi S deki ile aynı ve

$$1 \cdot s = s$$

$$s \cdot 1 = s$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

olarak tanımlanır ise $S \cup \{1\}$ birimli yarıgrup (monoid) olur. Bu monoide S ye birim eleman eklenerek elde edilen monoid denir. Bu monoid S^1 ile gösterilir.

$$S^1 = \begin{cases} S, & S \text{ birim elemana sahip ise} \\ S \cup \{1\}, & S \text{ de birim eleman yoksa} \end{cases}$$

biçimindedir (Howie, 1995).

Tanım 2.1.5. S bir yarıgrup ve X de S nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. S nin X i içeren S nin en küçük alt yarıgrubuna X tarafından doğurulan alt yarıgrup denir. Bu yarıgrup $< X >$ ile gösterilir. Ayrıca $S =< X >$ ise X e, S nin bir doğuray kümesi denir. Sonlu bir X kümesi için $S =< X >$ ise S ye sonlu doğuraylı yarıgrup denir (Howie, 1995).

Tanım 2.1.6. S ve T iki yarıgrup ve $\theta: S \to T$ bir fonksiyon olsun Eğer $\forall a, b \in S$ için

$$(ab)\theta = (a\theta)(b\theta)$$

ise θ ya bir homomorfizma (yarıgrup homomorfizması) denir. Ayrıca eğer θ birebir ise θ ya monomorfizma, θ örten ise θ ya epimorfizma ve θ hem örten hem de birebir ise θ ya bir izomorfizma denir. S ve T iki yarıgrup olmak üzere S ve T yarıgrupları arasında bir izomorfizma mevcut ise $S \cong T$ yazılır ve bu yarıgruplara izomorfik yarıgruplar denir (Howie, 1995).

Tanım 2.1.7. S ve T iki yarıgrup ve $\theta: S \to T$ bir homomorfizm olsun.

$$Im\theta = \{(a\theta): a \in S\}$$

olarak tanımlanır ve bu kümeye θ nın görüntü kümesi denir.

Ayrıca;

$$Ker\theta = \{(a, b) \in S \times S: a\theta = b\theta\}$$

kümesine θ nın çekirdeği denir (Howie, 1995).

Bazı yarıgrup örnekleri verelim;

Örnek 2.1.1. Gruplar yarıgruptur.

Örnek 2.1.2. $(\mathbb{Z}^+, +)$ ve $(\mathbb{Z}^+, \cdot)$ birer yarıgruptur.

Örnek 2.1.3. $(\mathbb{Q}, \cdot)$ bir yarıgruptur.

Örnek 2.1.4. $(\mathbb{R}, \cdot)$ bir yarıgruptur.

Örnek 2.1.5. R bir halka ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. R üzerindeki tüm $n \times n$ tipindeki matrislerin kümesi R^{nxn} ile gösterilirse bu küme matrislerin çarpımı ile bir yarıgruptur.

Örnek 2.1.6. $L \neq \emptyset$ bir küme olsun. L üzerinde ikili işlem $\forall a, b \in L$ için $a.b = a$ olarak tanımlansın. Açıkça bu işlem ikili işlem olur.

Ayrıca $\forall a, b, c \in L$ için

$$(ab)c = ac = a$$
$$a(bc) = ab = a$$

olduğundan L bu işlem ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba sol sıfır yarıgrup denir.

Örnek 2.1.7. $S \neq \emptyset$ bir küme ve sabit bir $s \in S$ seçelim. S üzerindeki ikili işlem; $\forall x, y \in S$ için

$$x.y = s$$

olarak tanımlanırsa bu işlem ile S bir yarıgrup olur.

Örnek 2.1.8. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $X \times X$ kartezyen çarpımının alt kümesine bir bağıntı denir. X üzerinde bütün bağıntıların kümesini $\mathcal{B}_X$ ile gösterelim. $\mathcal{B}_X$ üzerinde " $\circ$ " ikili işlemi $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$ için

$$\alpha \circ \beta = \{(a, b) \in X \times X : \exists\, c \in X \text{ için } (a, c) \in \alpha \text{ ve } (c, b) \in \beta\}$$

şeklinde tanımlansın. Tanımdan $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$ için $(\alpha \circ \beta) \in \mathcal{B}_X$ olur. Ayrıca $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{B}_X$ ve $(a, b) \in (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$ olsun. $\exists c \in X$ vardır ve

$$(a, c) \in \alpha \circ \beta \text{ ve } (c, b) \in \gamma$$

olur. Bu durumda $\exists d \in X$ vardır ve

$$(a, d) \in \alpha, (d, c) \in \beta \text{ ve } (c, b) \in \gamma$$

olur. Böylece $(d, b) \in (\beta \circ \gamma)$ olur.

$$(a, d) \in \alpha \text{ ve } (d, b) \in (\beta \circ \gamma)$$

olduğundan

$$(a, b) \in \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$$

olur yani

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma \subseteq \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$$

olur. Benzer şekilde

$$\alpha \circ (\beta \circ \gamma) \subseteq (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$$

olduğu gösterilir. Böylece $\mathcal{B}_X$; $\circ$ işlemi ile birleşme özelliğine sahiptir. Sonuç olarak $(\mathcal{B}_X, \circ)$ bir yarıgruptur. Ayrıca

$$1_x = \{(x, x) : x \in X\}$$

kümesi X üzerinde bir bağıntı olup $1_x \in \mathcal{B}_X$ dir. $\forall \alpha \in \mathcal{B}_X$ için

$$\alpha \circ 1_x = \alpha \text{ ve } 1_x \circ \alpha = \alpha$$

olduğundan 1_x, $\mathcal{B}_X$ in birim elemanıdır.

2.2. Bağıntılar ve Kongrüanslar

Tanım 2.2.1. $\emptyset \neq X$ bir küme olsun. $\beta \subseteq X \times X$ ise β; X üzerinde bir bağıntı olur. Eğer β bağıntısı $\forall a \in X$ için $(a, a) \in \beta$ ise β 'ya yansıyan bağıntı denir. Eğer $\forall (a, b) \in \beta$ için $(b, a) \in \beta$ oluyorsa β ya simetrik bağıntı denir. Eğer $\forall (a, b), (b, c) \in \beta$ için $(a, c) \in \beta$ oluyorsa β ya geçişmeli ya da geçişken bağıntı denir. Eğer β bağıntısı hem yansıyan hem simetrik hem de geçişken ise β bağıntısına bir denklik bağıntısı denir (Howie, 1995).

Tanım 2.2.2. S bir yarıgrup ve R de S üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer $\forall s \in S$ ve $\forall (a, b) \in R$ için $(sa, sb) \in R$ ise R ye sol uyumlu bağıntı ve $(as, bs) \in R$ ise R ye sağ uyumlu bağıntı denir. R, S üzerinde bir denklik bağıntısı ve R hem sol hem de sağ uyumlu bir bağıntı ise R ye S üzerinde bir kongrüans denir (Howie, 1995).

S bir yarıgrup ve ρ da S üzerinde bir kongrüans olsun.

$$S/\rho = \{a\rho : a \in S\}$$

olarak tanımlanır. S/ρ kümesi üzerinde bir ikili işlem, $\forall\, a\rho, b\rho \in S/\rho$ için $(a\rho)(b\rho) = (ab)\rho$ şeklinde tanımlansın. Öncelikle bu işlemin iyi tanımlı olduğunu gösterelim.

$$a\rho = c\rho \text{ ve } b\rho = d\rho$$

olsun.

ρ aynı zamanda bir denklik bağıntısı olduğundan $(a, c) \in \rho$ ve $(b, d) \in \rho$ olur. ρ sağ uyumlu olduğundan $(ab, cb) \in \rho$ ve ρ sol uyumlu olduğundan $(cb, cd) \in \rho$ olup geçişme özelliğinden $(ab, cd) \in \rho$ yani $(ab)\rho = (cd)\rho$ olur. Tanımdan S/ρ kümesi bu işlem ile kapalıdır. Ayrıca S 'de birleşme özelliği sağlandığından S/ρ kümeside bu işlem ile birleşme özelliğine sahiptir. Böylece S/ρ kümesi bu işlem ile bir yarıgruptur.

Örnek 2.2.1. $X = \{1,2,3\}$ olmak üzere $P^*(X) = P(X)\setminus\{\emptyset\}$ olsun. Ayrıca, $S = (P^*(X),\cup) = SL_3$ ve $I = S \setminus \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ alınır ise bu durumda $I \trianglelefteq S$ olur. Yani I, S nin bir ideali olur.

$$\rho_I = (I \times I) \cup \{(\{1\},\{1\}),(\{2\},\{2\}),(\{3\},\{3\})\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda ρ_I, S üzerinde bir kongrüans olur. Böylece $S/_{\rho_I}$ bir yarıgrup olup bu yarıgrup aşağıda çizelge ile verilmiş olan yarıgruba izomorftur.

Çizelge 2.2.1. $S/_{\rho_I}$ yarıgrubuna izomorf olan bir yarıgrup

	0	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
0	0	0	0	0
$\{1\}$	0	$\{1\}$	0	0
$\{2\}$	0	0	$\{2\}$	0
$\{3\}$	0	0	0	$\{3\}$

Tanım 2.2.3. $\emptyset \neq X$ bir küme ve E de X üzerinde yansımalı ($1_X \subseteq E$) bağıntı olsun. Bu durumda

$$E = E \circ 1_X \subseteq E \circ E = E^2 = E^2 \circ 1_X \subseteq E^2 \circ E = E^3 \subseteq \cdots \subseteq E^n \subseteq \cdots$$

olur. Yani $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $E^n = E^n \circ 1_X \subseteq E^n \circ E = E^{n+1}$ olur. $E^\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} E^n$ olarak tanımlanır ve E^∞ a, E nin geçişmeli kapanışı denir. Ayrıca E^∞ bağıntısı E yi içeren en küçük geçişmeli bağıntıdır (Howie, 1995).

Teorem 2.2.1. S bir yarıgrup ve R de S üzerinde bir bağıntı olsun.

$$R^c = \{(xay, xby): x, y \in S^1 \text{ ve } (a,b) \in R\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda R^c, R yi içeren en küçük sol ve sağ uyumlu bağıntıdır (Howie, 1995).

İspat. $\forall\ (a,b) \in R$ için $1a1 = a, 1b1 = b$ olup $(a,b) \in R^c$ olduğundan $R \subseteq R^c$ olur. $(a,b) \in R$ ve $s \in S$ olsun.

$x, y \in S^1$ için $sx \in S^1$ olup $(xay, xby) \in R^c$ ise $(sxay, sxby) \in R^c$ olur. Böylece R^c sol uyumludur. Benzer şekilde R^c sağ uyumludur.

$R \subseteq \rho$ ve ρ sol ve sağ uyumlu bir bağıntı olsun. $(a,b) \in R$ ve $x \in S^1$ için $(xa, xb) \in \rho$ (ρ sol uyumlu olduğundan) ve $y \in S^1$ için $(xay, xby) \in \rho$ (ρ sağ uyumlu olduğundan) olur. Böylece $R^c \subseteq \rho$ olup ispat tamamlanır.

Ayrıca tanımdan

$$R \subseteq Q \text{ ise } R^c \subseteq Q^c$$
$$(R^{-1})^c = (R^c)^{-1}$$
$$(R \cup Q)^c = R^c \cup Q^c$$

olur.

S bir yarıgrup ve I bir indis kümesi olsun. $i \in I$ olmak üzere ρ_i, S üzerinde kongrüans olsun. Bu durumda $\bigcap_{i \in I} \rho_i$ kümesi S üzerinde bir kongrüanstır. R yi içeren S üzerindeki en küçük kongrüansa R tarafından doğurulan kongrüans denir ve $R^\#$ ile gösterilir. Böylece

$$R^\# = \bigcap \{\rho, S \text{ üzerinde kongrüans ve } R \subseteq \rho\}$$

olur.

Tanım 2.2.4. $\emptyset \neq X$ bir küme ve $R \subseteq X \times X$ olsun. X üzerinde R yi içeren en küçük denklik bağıntısına R nin doğurduğu denklik bağıntısı denir ve R^e ile gösterilir. $X \times X$ bir denklik bağıntısı olup

$$A = \{\rho : R \subseteq \rho \text{ ve } \rho, X \text{ üzerinde bir denklik bağıntısı olsun.}\}$$

olarak tanımlanırsa $A \neq \emptyset$ olup $R^e = \bigcap_{\rho \in A} \rho$ olup R^e daima mevcuttur.

Ayrıca $R = \emptyset$ ise $R^e = 1_x$ ve R bir denklik bağıntısı ise $R^e = R$ olur.

Teorem 2.2.2. $\emptyset \neq X$ bir küme ve R de X üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. O zaman

$$R^e = [R \cup R^{-1} \cup 1_x]^\infty$$

olur (Howie, 1995).

İspat. $E = R \cup R^{-1} \cup 1_x$ olsun. $1_x \subseteq E$ olup E yansıyan bir bağıntıdır. Böylece $1_x \subseteq E^\infty$ olup E^∞ yansıyandır. Ayrıca E^∞ un tanımından $R \subseteq E^\infty$ olur ve E^∞ geçişmelidir.

$$E^{-1} = [R \cup R^{-1} \cup 1_x]^{-1} = R^{-1} \cup R \cup 1_x = E$$

olur.

$$(E^2)^{-1} = (E \circ E)^{-1} = E^{-1} \circ E^{-1} = E \circ E = E^2$$

olur.

Tümevarım hipotezi kullanılırsa $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$(E^n)^{-1} = (E^{-1})^n = E^n$$

olduğu görülür.

$E^\infty = \bigcup_{n\geq 1} E^n$ olup $(\bigcup E^n)^{-1} = \bigcup (E^{-1})^n = \bigcup E^n$ olup $(E^\infty)^{-1} = E^\infty$ olur. Böylece E^∞ simetriktir. E^∞ bağıntısı R yi içeren bir denklik bağıntısıdır. ρ, R yi içeren bir denklik bağıntısı olsun. Bundan dolayı; $1_x \subseteq E \subseteq \rho$ olur.

E^∞, E ‘yi içeren en küçük geçişmeli bağıntı olduğundan $E^\infty \subseteq \rho$ olur. Böylece

$$R^e = E^\infty = [R \cup R^{-1} \cup 1_x]^\infty$$

olur.

Örnek 2.2.2. $X = \{1,2,3,4\}$, $R = \{(1,2),(3,1)\}$ olsun. R yi içeren X üzerindeki en küçük denklik bağıntısını bulalım.

$$E = R \cup R^{-1} \cup 1_x$$

$$E = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1)\}$$

$E \circ E = E \cup \{(2,3),(3,2)\} = E^2$ bir denklik bağıntısı olur. Böylece

$A_1 = \{1,2,3\}$, $A_2 = \{4\}$ olmak üzere

$$R^e = E \cup \{(2,3),(3,2)\} = \bigcup_{i=1}^{2} A_i \times A_i$$

olur.

Önerme 2.2.1. R, X üzerinde bir bağıntı olsun. O zaman $(x,y) \in R^e$ olması için gerek ve yeter koşul $x = y$ ya da $(z_i, z_{i+1}) \in R \cup R^{-1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$ olmak üzere

$$x = z_1 \to z_2 \to \cdots \to z_n = y$$

dizisinin olmasıdır (Howie, 1995).

İspat. ($\Rightarrow$) $(x,y) \in R^e$ ve $E = R \cup R^{-1} \cup 1_x$ olsun. $x = y$ ise sonuç açıktır. $x \neq y$ olsun.

$$(x,y) \in R^e = [R \cup R^{-1} \cup 1_x]^\infty$$

olup

$$\exists k \in \mathbb{Z}^+ \text{ vardır öyle ki } (x,y) \in [R \cup R^{-1} \cup 1_x]^k = E^k$$

olur. Böylece $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ vardır öyle ki

$$(x, z_2) \in E, (z_2, z_3) \in E, \ldots, (z_{n-1}, y) \in E$$

olacak şekilde $z_2, \ldots, z_{n-1} \in X$ vardır. $(z_i, z_{i+1}) \in R \cup R^{-1}$ olarak seçilebilir. Bu ise

$$x = z_1 \to z_2 \to \cdots \to z_{n-1} \to z_n = y$$

dizisinin varlığını gösterir.

($\Leftarrow$) Açık.

Teorem2.2.3. S bir yarıgrup ve R, S üzerinde bir bağıntı ise $R^\# = (R^c)^e$ olur (Howie, 1995).

İspat. $\theta = R^c \cup (R^c)^{-1} \cup {1_s}^c$ olsun. Bu durumda

$$\theta = R^c \cup (R^{-1})^c \cup (1_s)^c = (R \cup R^{-1} \cup 1_s)^c$$

olup θ, R yi içeren sol ve sağ uyumlu bir bağıntıdır ve θ yansıyan bir bağıntıdır. Ayrıca $\theta^{-1} = \theta$ ve $1_s \subseteq \theta$ olduğundan

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \theta^n = \theta^e = ((R \cup R^{-1} \cup 1_s)^c)^e$$

olup bu bağıntı R yi içeren bir denklik bağıntısıdır. θ^e sol ve sağ uyumlu olup θ^e, R yi içeren bir kongrüanstır. Ayrıca $R \subseteq \rho$ ve ρ, S üzerinde bir kongrüans olsun. $(a, b) \in \theta^e$ olsun. Bu durumda

$$(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b) \in \theta$$

olacak şekilde $a = x_0, b = x_n$ ve $0 \le i \le n-1$ olmak üzere $(x_i, x_{i+1}) \in \theta$ mevcut olup $(x_i, x_{i+1}) \in R^c \cup (R^c)^{-1}$ olur. R^c, R yi içeren en küçük sol ve sağ uyumlu bağıntı olduğundan $R^c \subseteq \rho$ ve ρ simetrik bağıntı olduğundan

$$(R^c)^{-1} \subseteq \rho$$

olur. Böylece

$$(x_i, x_{i+1}) \in \rho \text{ olup } \theta^e \subseteq \rho$$

olur. Yani

$$R^\# = (R^c)^e$$

olur.

Tanım 2.2.5. S bir yarıgrup ve R ‘de S üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer $c, d \in S$ için $c = xay$ ve $d = xby$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ ve $(a, b) \in R \cup R^{-1}$ mevcut ise c ile d ye basit R-geçişmesi ile bağlıdır denir.

Önerme 2.2.2. S bir yarıgrup ve R de S üzerinde bir bağıntı olsun. $(a, b) \in R^{\#}$ olması için gerek ve yeter koşul $a = b$ ya da $a = z_1 \to z_2 \to \cdots \to z_{n-1} \to z_n = b$ dizisinin z_i ile z_{i+1} in basit R geçişmesi ile bağlı olacak şekilde mevcut olmasıdır (Howie, 1995).

İspat. ($\Rightarrow$) $(a,b) \in R^{\#}$ ve $a \neq b$ olsun.

$$(a, b) \in R^{\#} = (R^c)^e = (R^c \cup (R^c)^{-1} \cup 1_s)^{\infty}$$

olur. $\exists\, n \in \mathbb{Z}^+$ için;

$$(a, z_2), (z_2, z_3), \dots, (z_{n-1}, b) \in R^c \cup (R^c)^{-1} \cup 1_s = R^c \cup (R^{-1})^c \cup 1_s$$

olur.

$$(a, z_2), (z_2, z_3), \dots, (z_{n-1}, b) \in R^c \cup (R^{-1})^c$$

olarak düşünülebilir. $a = z_1, b = z_n$ ve $1 \leq i \leq n-1$ olmak üzere $(z_i, z_{i+1}) \in R^c \cup (R^{-1})^c$ ise öyle $(r_i, r_{i+1}) \in R \cup R^{-1}$ ve $x, y \in S^1$ vardır ve $z_i = xr_iy$ ve $z_{i+1} = xr_{i+1}y$ olup z_i ve z_{i+1} basit R-geçişmelidir.

($\Leftarrow$) $a = b$ ise açık, dizinin varlığı durumunda ise yapılan ispatın ters yönüne hareketle doğruluğu görülür.

Örnek 2.2.3. $X = \{1,2,3\}$ olmak üzere $S = (P^*(X), \cup)$ olsun.

$S = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ olur. $R = (\{1\}, \{2\})$ olmak üzere $R^{\#}$ bağıntısını bulalım.

$R \cup 1_s \subseteq R^{\#}$ olmalıdır. $(A, B) \in R^{\#} \Rightarrow A \to \cdots \to B$ olmak üzere A dan B ‘ye basit R- geçişmeli dizisi vardır.

$$K \in S^1 \text{ ise } (K \cup \{1\}, K \cup \{2\}) \in R^{\#}$$

$$K \in S^1 \text{ ise } (K \cup \{2\}, K \cup \{1\}) \in R^{\#} \text{ olur.}$$

$$R^{\#} = 1_s \cup \{(A \cup \{1\}, (A \cup \{2\}) : A \subseteq S \backslash \{\{1\}, \{2\}\}\}$$
$$\bigcup \{(A \cup \{2\}, A \cup \{1\}) : A \subseteq S \backslash \{\{1\}, \{2\}\}\}$$

$$\bigcup\{(A \cup \{1,2\}, A \cup \{1\}): A \subseteq S\backslash\{\{1\},\{2\}\}\}$$
$$\bigcup\{(A \cup \{1,2\}, A \cup \{2\}): A \subseteq S\backslash\{\{1\},\{2\}\}\}$$
$$\bigcup\{(A \cup \{1\}, A \cup \{1,2\}): A \subseteq S\backslash\{\{1\},\{2\}\}\}$$
$$\bigcup\{(A \cup \{2\}, A \cup \{1,2\}): A \subseteq S\backslash\{\{1\},\{2\}\}\}$$

olur.

Örnek 2.2.4. $L = \{1,2, \dots m\}$ sol sıfır yarıgrup ve $R = \{(1,2)\}$ olsun. $R^{\#} =?$
$\forall i, j \in L$ için $i.j = i$ olur. Ayrıca $R^c = \{(x1y, x2y): x, y \in L^1\}$ olur. Eğer $x \in L$ ise $x1y = x$ ve $x2y = x$ olup $(x, x) \in R^c$ dir. Eğer $x \in L^1\backslash L$ ise $x1y = 1y = 1$ ve $x2y = 2$ olup $(1,2) \in R^c$

$$R^c = 1_L \cup \{(1,2)\}$$
$$\theta = R^c \cup (R^c)^{-1} \cup 1_L = 1_L \cup \{(1,2),(2,1)\}$$

θ bir denklik bağıntısı olup $\theta^e = \theta$ Yani, $R^{\#} = \theta$ olur.

Önerme 2.2.3. Homomorfizma çekirdeği bir kongrüanstır (Clifford, 1962).

İspat. S ve T yarıgruplar ve $\alpha: S \rightarrow T$ homomorfizma olsun.

$$Ker\alpha = \{(a, b) \in S \times S, a\alpha = b\alpha\}$$

olup $Ker\alpha$ nın bir denklik bağıntısı olduğu açıktır.

Ayrıca $s \in S$ ve $(a, b) \in Ker\alpha$ için $a\alpha = b\alpha$ olup

$$(s\alpha).(a\alpha) = (s\alpha).(b\alpha)$$

olup α bir homomorfizma olduğundan $(sa)\alpha = (sb)\alpha$ olup $(sa, sb) \in Ker\alpha$ olur. Benzer şekilde $(as, bs) \in Ker\alpha$ olur, böylece $Ker\alpha$, S üzerinde bir kongrüanstır.

Tanım 2.2.6. S bir yarıgrup olsun, $a, b \in S$ olmak üzere $S^1a = S \cup \{a\}$ kümesi S nin a elemanını içeren en küçük sol idealidir. S üzerinde L (Green-L denklik) bağıntısı $(a, b) \in L$ olması için gerek ve yeter koşul $S^1a = S^1b$ ile tanımlanır. Benzer şekilde S üzerinde R (Green-R denklik) bağıntısı $(a, b) \in R$ olması için gerek ve yeter koşul $aS^1 = bS^1$ ile tanımlanır. Ayrıca S üzerinde H (Green-H denklik) bağıntısı $H = L \cap R$ olarak tanımlanır.

2.3. Serbest Yarıgruplar ve Takdim

Tanım 2.3.1. A boş olmayan küme olsun. Bu kümeyi bir alfabe olarak düşünelim. A^+ ile de A alfabesinden elde edilen boş olmayan tüm sonlu kelimelerin kümesini gösterelim.
A^+ üzerinde tanımlı $a_1a_2 \dots a_n, b_1b_2 \dots b_m \in A^+$ için

$$(a_1a_2 \dots a_n)(b_1b_2 \dots b_m) = a_1a_2 \dots a_nb_1b_2 \dots b_m$$

şeklinde tanımlı işlem ile A^+ bir yarıgruptur. Ayrıca $w \in A^+$ için w kelimesi n tane harften oluşuyor ise $|w| = n$ ya da $l(w) = n$ yazılır.

Örnek 2.3.1. $A = \{x, y\}$ için $A^+ = \{x, y, xy, yx, x^2, y^2, x^3, x^2y, yx^2, y^2x, \dots\}$ olur.

A üzerinde boş kelime ε ile gösterilir. $A^* = A^+ \cup \{\varepsilon\}$ kümesi tanımlanan ikili işlem ile bir monoid olur.

Tanım.2.3.2. A bir küme, F bir yarıgrup ve $A \subseteq F$ olsun. $i: A \to F$ fonksiyonu $\forall x \in A$ için $xi = x$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyona gömme fonksiyonu denir.

Tanım 2.3.3. A bir küme ve F bir yarıgrup ve $A \subseteq F$ olsun. Ayrıca $i: A \to F$ gömme fonksiyonu olsun. Her S yarıgrubu ve her $\theta: A \to S$ fonksiyonu için $\theta = i \circ \psi$ olacak şekilde sadece bir tane $\psi: F \to S$ yarıgrup homomorfizması varsa F yarıgrubuna A üzerinde serbest yarıgrup denir.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\theta"'] & F \arrow[dl, "\psi"] \\ S & \end{tikzcd}$$

Teorem 2.3.1. A üzerindeki tek serbest yarıgrup (izomorfizme göre) A^+ olur (Howie, 1995).

İspat. F ve F' yarıgrupları A üzerindeki serbest yarıgruplar olsun. F, A üzerinde serbest olduğundan $i: A \to F$ gömme fonksiyonu ve $i: A \to F'$ gömme fonksiyonu olsun, bu durumda $i = i \circ \psi$ olacak şekilde $\psi: F \to F'$ bir tek homomorfizm vardır.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & F \\ i\downarrow & \swarrow \psi & \\ F' & & \end{array}$$

Benzer şekilde F', A üzerinde serbest olduğundan $i = i \circ \psi'$ olacak şekilde $\psi' : F' \to F$ bir tek homomorfizm vardır.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & F' \\ i\downarrow & \swarrow \psi' & \\ F & & \end{array}$$

Böylece $i = (i \circ \psi') \circ \psi = i \circ (\psi' \circ \psi)$ olur. Ayrıca

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & F' \\ i\downarrow & \swarrow 1_{F'} & \\ F' & & \end{array}$$

olup $\psi' \circ \psi : F' \to F'$ bir homomorfizm ve $i = i \circ (\psi' \circ \psi)$ olduğundan teklikten dolayı

$$\psi' \circ \psi = 1_{F'}$$

olur. Benzer şekilde

$$\psi \circ \psi' = 1_F$$

olur. Böylece ψ homomorfizması birebir ve örtendir yani $F \cong F'$ olur. Ayrıca F yerine A^+ seçersek A^+ nın A üzerinde serbest yarıgrup olduğu açıktır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.3.2. Her yarıgrup bir serbest yarıgrubun homomorfik imajıdır (Lallement, 1979).

İspat. S bir yarıgrup olsun. $\emptyset \neq A \subseteq S$ olacak şekilde $< A >= S$ vardır. A^+, A üzerinde serbest yarıgrup olur. Bu durumda i birim dönüşüm olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & A^+ \\ i\downarrow & \swarrow \varphi & \\ S & & \end{array}$$

$i = i \circ \varphi$ olacak şekilde $\varphi : A^+ \to S$ bir homomorfizm vardır. $s \in S$ olsun. A doğuray kümesi olduğundan $s = a_1 a_2 \dots a_n$ olacak şekilde $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ vardır.

$$(a_1 a_2 \dots a_n)\varphi = (a_1)\varphi(a_2)\varphi \dots (a_n)\varphi = a_1 a_2 \dots a_n = s$$

olup φ örtendir.

Teorem 2.3.3. Yukarıdaki notasyonlar ile ${A^+}/{Ker\ \varphi} \cong S$ olur (Howie, 1995).

İspat. Bir önceki teoremin ispatından $\varphi : A^+ \to S$ homomorfizması mevcut olup $Ker\ \varphi$ bağıntısı A^+ üzerinde bir kongrüanstır. Böylece ${A^+}/{Ker\ \varphi}$ bir yarıgrup olur. Ayrıca

$$\delta : {A^+}/{Ker\ \varphi} \to S$$

dönüşümü

$$\forall a_1 a_2 \dots a_n \in A^+ \text{ için } \big((a_1 a_2 \dots a_n) Ker\ \varphi\big)\delta = (a_1 a_2 \dots a_n)\varphi$$

olarak tanımlanırsa δ nın bir izomorfizm olduğu görülür.

Ayrıca, $R \subseteq A^+ \times A^+$ olmak üzere $R^\# = Ker\ \varphi$ ise yukarıdaki notasyonlarla $S \cong {A^+}/{R^\#}$ olur.

Tanım 2.3.4. S bir yarıgrup, A bir alfabe ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ olsun. Eğer $S \cong {A^+}/{R^\#}$ ise $\langle A | R \rangle$ ifadesine S nin yarıgrup takdimi denir. $S \cong \langle A | R \rangle$ yazılır.

Tanım 2.3.5. S bir yarıgrup olsun. A ve R sonlu kümeler olmak üzere $S \cong \langle A | R \rangle$ olacak şekilde S yarıgrubunun takdimi varsa S ye sonlu takdimli yarıgrup denir.

Tanım 2.3.6. $w_1, w_2 \in A^+$ olmak üzere w_1 ve w_2 aynı kelimeler ise $w_1 \equiv w_2$ yazılır. $R \subseteq A^+ \times A^+$ olmak üzere $w_1 \equiv urv$ ve $w_2 \equiv usv$ olacak şekilde $u, v \in A^*$ ve $(r, s) \in R \cup R^{-1}$ mevcut ise w_1, w_2 den R nin bir ilişkisi kullanılarak elde edilmiştir denir. Tanımdan görüleceği üzere ise w_1, w_2 den R nin bir ilişkisi kullanılarak elde edilmiş ise w_2 de w_1 den R nin bir ilişkisi kullanılarak elde edilmiş olur. Bu durumda $w_1 \overset{R}{\leftrightarrow} w_2$ yazılır.

Ayrıca $w_1 \equiv w_2$ ya da her $i = 1,2, \dots, n-1$ için α_{i+1}, α_i den R nin bir ilişkisi kullanılarak elde edilmiş olmak üzere

$$w_1 \equiv \alpha_1 \overset{R}{\leftrightarrow} \alpha_2 \overset{R}{\leftrightarrow} \dots \overset{R}{\leftrightarrow} \alpha_{n-1} \overset{R}{\leftrightarrow} \alpha_n \equiv w_2$$

dizisi mevcut ise $w_1 = w_2$ ifadesi R nin bir sonucudur denir.

Teorem 2.3.4. $\langle A|R\rangle$ bir yarıgrup takdimi ρ da R yi içeren en küçük kongruans ($\rho = R^{\#}$) olmak üzere $S \cong A^+/\rho$ ve $w_1, w_2 \in A^+$ olsun. O zaman $w_1\rho = w_2\rho$ olması için gerek ve yeter koşul $w_1 = w_2$ ifadesinin R nin bir sonucu olmasıdır (Ruckuc, 1995).

İspat. ($\Leftrightarrow$) $Y = \{ (\alpha, \beta) \in A^+ \times A^+ : \alpha = \beta, R \text{ nin bir sonucudur}\}$ olarak tanımlayalım. Eğer, $w_1 \equiv w_2$ ise $(w_1, w_2) \in Y$ olup açıkça $w_1\rho = w_2\rho$ olur. $w_1 \not\equiv w_2$ olsun. Eğer $(w_1, w_2) \in Y$ ise α_{i+1}, α_i den $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ R nin bir ilişkisi kullanılarak elde edilmiş olmak üzere

$$w_1 \equiv \alpha_1 \overset{R}{\leftrightarrow} \alpha_2 \overset{R}{\leftrightarrow} \dots \overset{R}{\leftrightarrow} \alpha_{n-1} \overset{R}{\leftrightarrow} \alpha_n \equiv w_2$$

dizisi vardır. $\alpha_i \equiv \gamma_i u_i \beta_i$ ve $\alpha_{i+1} \equiv \gamma_i v_i \beta_i$ olacak şekilde $\gamma_i, \beta_i \in A^*$, $(u_i, v_i) \in R \cup R^{-1}$ vardır.

$$\begin{aligned} w_1\rho = \alpha_1\rho &= (\gamma_1 u_1 \beta_1)\rho \\ &= (\gamma_1\rho)(u_1\rho)(\beta_1\rho) \\ &= (\gamma_1\rho)(v_1\rho)(\beta_1\rho) \\ &= (\gamma_1 v_1 \beta_1)\rho = \alpha_2\rho = \dots = w_2\rho \end{aligned}$$

olur. Böylece $Y \subseteq \rho$ olur. Ayrıca Y kümesinin tanımıdan $R \subseteq Y$ ve Y 'nin bir kongrüans olduğu açıktır. $\rho = R^{\#}$ olduğundan tanım gereği $\rho \subseteq Y$ olur. Böylece $\rho = Y$ olur.

Tanım 2.3.7. S bir yarıgrup ve ρ 'da S üzerinde bir kongrüans olsun. $\forall a \in S$ için a elemanını $a\rho \in S/\rho$ elemanına götüren dönüşüme doğal dönüşüm adı verilir ve $\rho^{\wedge}$ ile gösterilir. Açıkça $\rho^{\wedge}$ örten bir yarıgrup homomorfizmasıdır.

$\langle A|R\rangle$ ikilisi S yarıgrubunun takdimi ve ρ da R yi içeren en küçük kongruans olmak üzere $w_1, w_2 \in A^+$ için

$$w_1\rho = w_2\rho$$

ise $w_1 = w_2$ ifadesi S de sağlanır denir. $\psi: A^+ \to S$ dönüşümü $\forall w \in A^+$ için

$$w\psi = w\rho$$

olarak tanımlanırsa

$$w_1\psi = w_2\psi$$

olur. Böylece w_1 ile w_2 kelimeleri S nin aynı elemanını temsil eder.

Tanım 2.3.8. S sonlu doğuraylı bir yarıgrup ve $\langle A|R\rangle$ ikilisi S yarıgrubunun takdimi ve ayrıca A kümesinin eleman sayısı S yarıgrubunun minimal doğuray kümesinin eleman sayısına eşitse $\langle A|R\rangle$ ikilisine S yarıgrubunun minimal doğuray kümesi ile bağlantılı takdimi denir.

Tanım 2.3.9. S sonlu doğuraylı bir yarıgrup olmak üzere S yarıgrubunun rankı

$$rank(S) = \min\{|X| :< X >= S\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.3.10. M bir monoid, A bir alfabe ve $R \subseteq A^* \times A^*$ olsun. Eğer $M \cong A^*/_{R^\#}$ ise $\langle A|R\rangle$ ifadesine M nin monoid takdimi denir. $M \cong \langle A|R\rangle$ yazılır.

2.4. Takdim ile İlgili Teoremler

Teorem 2.4.1. $\langle A|R\rangle$ bir yarıgrup takdimi ve $S = A^+/_{R^\#}$ olsun. Ayrıca T bir yarıgrup, $B \subseteq T$ ve $< B >= T$ olsun. $f: A \to B$ örten fonksiyon olsun. Bu durumda $\theta : A^+ \to T$, f yi geren tek homomorfizm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & A^+ \arrow[dl, "\theta"] \\ T & \end{tikzcd}$$

olmak üzere eğer her $(u, v) \in R$ için $u\theta = v\theta$ oluyor ise her $wR^\# \in A^+/_{R^\#}$ için $(wR^\#)\varphi = w\theta$ olarak tanımlanan $\varphi: S \to T$ fonksiyonu bir örten homomorfizma olur (Ruckuc, 1995).

$(R^\# = \rho)$

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{i}{\rightarrow} & A^{+} \\ f\downarrow & \swarrow\theta & \downarrow\rho^{\wedge} \\ T & \underset{\varphi}{\leftarrow} & A^{+}/\rho \end{array}$$

İspat. $w_1, w_2 \in A^+$ için $\rho = R^\#$ olmak üzere $(w_1, w_2) \in \rho$ olsun. Eğer $w_1 \not\equiv w_2$ ise

$$\alpha_i = \beta_i u_i \gamma_i \text{ ve } \alpha_{i+1} = \beta_i v_i \gamma_i \qquad (\beta_i \gamma \in A^*, (u_i, v_i) \in R \cup R^{-1})$$

olmak üzere

$$w_1 \equiv \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \equiv w_2$$

dizisi vardır. Böylece

$$w_1\theta = \alpha_1\theta = (\beta_1 u_1 \gamma_1)\theta$$
$$= (\beta_1\theta)(u_1\theta)(\gamma_1\theta) = (\beta_1\theta)(v_1\theta)(\gamma_1\theta) = (\beta_1 v_1 \gamma_1)\theta =$$
$$\alpha_2\theta = \cdots = w_2\theta$$

olur. Ayrıca

$$w_1 \equiv w_2 \text{ ise } w_1\theta = w_2\theta$$

olur. Böylece $w_1\rho = w_2\rho \implies w_1\theta = w_2\theta$ olur. φ dönüşümünün iyi tanımlı olduğunu göstermiş olduk. $T = <\beta>$ ve $f: A \to B$ örten fonksiyon olduğundan $\forall\, t \in T$ için,

$$t = b_1 b_2 \dots b_n = (a_1 f)(a_2 f) \dots (a_n f)$$

olacak şekilde

$$b_i = a_i f \quad (1 \le i \le n)$$

vardır $(a_i \in A, b_i \in B)$. Dolayısıyla $(a_1 a_2 \dots a_n)\rho \in S$ için

$$((a_1 a_2 \dots a_n)\rho)\varphi = (a_1 a_2 \dots a_n)\theta = a_1\theta a_2\theta \dots a_n\theta$$
$$= (a_1 f)(a_2 f) \dots (a_n f)$$
$$= b_1 b_2 \dots b_n = t$$

olup φ örtendir. Ayrıca $w_1\rho, w_2\rho \in S$ için,

$$\big((w_1\rho)(w_2\rho)\big)\varphi = \big((w_1 w_2)\rho\big)\varphi = (w_1 w_2)\theta = (w_1\theta)(w_2\theta)$$
$$= ((w_1\rho)\varphi)((w_2\rho)\varphi)$$

olur.

Sonuç 2.4.1. $\langle A|R\rangle$ bir yarıgrup takdimi $S = {A^+}/{R^\#}$ ve T de A tarafından doğrulan bir yarıgrup olsun. Eğer $\forall (u, v) \in R$ için, $u = v$, T de sağlanıyor ise T, S nin homomorfik imajı olur ($S \to T$ örten homomorfizm vardır).

Sonuç 2.4.2. $\langle A|R\rangle$ ve $\langle A|Q\rangle$ iki yarıgrup takdimi ve $S = \langle A|R\rangle$, $T = \langle A|Q\rangle$ olsun. Eğer $R \subseteq Q$ ise (S deki tüm eşitliklerin T de sağlanması demek olur). T, S nin homomorfik imajı olur ($S \to T$ örten homomorfizm vardır).

Teorem 2.4.2. S bir yarıgrup $A \subseteq S$ nin bir doğuray kümesi olsun ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ olsun. O zaman $\langle A|R\rangle$ nin S nin takdimi olması için gerek ve yeter koşul ($S = \langle A|R\rangle$)

i) R deki tüm bağıntıların (ilişkilerin) S de sağlanıyor olması.

ii) Her $u, v \in A^+$ için $u = v$ ifadesi S de sağlanıyor ise $u = v$ ifadesinin R nin bir sonucu olmasıdır (Ruckuc, 1995).

İspat: ($\Rightarrow$) Açık.

($\Leftarrow$) i) ve ii) sağlansın. A kümesi S yarıgrubunun doğuray kümesi olduğundan

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & A^+ \arrow[dl, "\theta"] \\ S & \end{tikzcd}$$

$\theta : A^+ \to S$ örten homomorfizması mevcut olup bu homomorfizma i birim dönüşümünün homomorfizm genişlemesidir yani $\forall a \in A$ için $a\theta = a$ olur.

Ayrıca $\rho = R^{\#}$ olmak üzere $\varphi : A^+/\rho \to S$ homomorfizması $w\rho \in A^+/\rho$ için $(w\rho)\varphi = w\theta$ olarak bir önceki teoremde tanımlanan homomorfizm olsun. Bu durumda i) den dolayı φ örten olur.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & A^+ \arrow[dl, "\theta"] \arrow[d, "\rho^{\wedge}"] \\ S & A^+/\rho \arrow[l, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

φ homomorfizmasının birebir olduğunu gösterelim. $(w_1\rho, w_2\rho) \in Ker\varphi$ olsun. Bu durumda

$$(w_1\rho)\varphi = (w_2\rho)\varphi$$
$$w_1\theta = w_2\theta$$

olur. Yani $w_1 = w_2$ ifadesi S de sağlanır. Böylece ii) den dolayı $w_1 = w_2$ ifadesi R nin bir sonucu olur yani $w_1\rho = w_2\rho$ olur. Dolayısıyla φ bir izomorfizmadır.

2.5. Kanonik Form

Takdim bulma yöntemlerinden birisi direkt yöntemdir. S bir yarıgrup olmak üzere

i) S nin bir doğuray kümesi (A kümesi) bulunur.

ii) Teorem 2.4.2 deki koşulları sağlayan $R \subseteq A^+ \times A^+$ bulunur.

Teorem 2.4.2' de yer alan ii) koşulunu göstermek bazen zor olabilir. Bunun yerine

a) $\forall w \in A^+$ için $w = \overline{w}$ ifadesi S de sağlanacak şekilde $\overline{w} \in W$ varsa $(W \subseteq A^+)$

b) $\forall\ \overline{w_1}, \overline{w_2} \in W$ için $\overline{w_1} \not\equiv \overline{w_2}$ ise $\overline{w_1} = \overline{w_2}$ S de sağlanmayacak şekilde

$W \subseteq A^+$ mevcut olmasıdır

koşulları gösterilir, bu koşullar sağlanıyor ise W ya S nin kanonik formu denir.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & A^+ \arrow[dl, "\theta"] \arrow[d, "\rho^{\wedge}"] \\ S & A^+/\rho \arrow[l, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

Burada tanımlanan W kümesi $\theta : A^+ \to S$ örten homomorfizmasında S nin elemanlarının ters görüntüsüdür. Yani $\forall s \in S$ için ters görüntü kümesinden birer eleman seçiliyor.

Önerme 2.5.1. S bir yarıgrup, $A \subseteq S$ ve $< A > = S$, $R \subseteq A^+ \times A^+$ olsun.

Eğer,

i) R deki tüm ilişkiler S de sağlanıyor.

ii) $\forall\ w \in A^+$ için $w = \overline{w}$ ifadesi R nin bir sonucu olacak şekilde $\overline{w} \in W$ varsa

iii) $\forall u, v \in W$ için $u \not\equiv v$ ise S de $u \neq v$ ise

$\langle A|R \rangle$ ifadesi S nin bir takdimi olur (Ruckuc, 1995).

İspat. $w_1, w_2 \in A^+$ ve $w_1 = w_2$ ifadesi S de sağlansın. ii) den $w_1 = \overline{w_1}$ ve $w_2 = \overline{w_2}$ ifadeleri R nin sonucu olacak şekilde $\overline{w_1}, \overline{w_2} \in W$ vardır. $w_1 = w_2$ ifadesi S de sağlandığından $\overline{w_1} = \overline{w_2}$ ifadeside S de sağlanır. iii) 'den $\overline{w_1} \equiv \overline{w_2}$ olur. Böylece

$$w_1 \overset{R^*}{\leftrightarrow} \overline{w_1} \equiv \overline{w_2} \overset{R^*}{\leftrightarrow} w_2$$

olur, yani $w_1 = w_2$ ifadesi R nin bir sonucudur.

Önerme 2.5.2. S bir yarıgrup $A \subseteq S$ olmak üzere $< A > = S$, $R \subseteq A^+ \times A^+$ ve $W \subseteq A^+$ olsun. Eğer,

i) R deki tüm ilişkiler S de sağlanıyor,

ii) $\forall\, w \in A^+$ için $w = \overline{w}$ ifadesi R nin bir sonucu olacak şekilde $\overline{w} \in W$ varsa

iii) $|W| \leq |S|$ ise

$\langle A|R \rangle$ ifadesi S nin bir takdimi olur (Ruskuc, 1995).

İspat. i) ve ii) den $|W| \geq |S|$ olur. Ayrıca iii) den $|W| = |S|$ olur. S, $\langle A|R \rangle$ nin homomorfik imajı olduğundan ${A^+}/{R^\#} \to S$ izomorfizmi vardır.

Önerme 2.5.3. S bir yarıgrup olsun. A ve B kümeleri S nin iki farklı sonlu doğuray kümesi olsun. Eğer sonlu bir $R \subseteq A^+ \times A^+$ için $S = \langle A|R \rangle$ ise $S = \langle B|Q \rangle$ olacak şekilde $Q \subseteq B^+ \times B^+$ vardır (Ruskuc, 1995).

İspat. $S =< B >$ olduğundan $\forall a \in A$ için $w_a = a$ olacak şekilde $w_a \in B^+$ vardır. $\forall a \in A$ için $af = w_a$ olacak şekilde $f : A \to B^+$ olarak tanımlayalım.

$$
\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{i} & A^+ \\
f\downarrow & \swarrow \phi & \\
B^+ & &
\end{array}
$$

A^+ yarıgrubu A kümesi üzerinde serbest olduğundan ϕ homomorfizması f fonksiyonunun homomorfizma genişlemesidir.

Benzer şekilde $S =< A >$ olduğunda $\forall b \in B$ için $w_b = b$ olacak şekilde $w_b \in A^+$ vardır. $\forall b \in B$ için $bg = w_b$ olacak şekilde $g : B \to A^+$ olarak tanımlayalım.

$$
\begin{array}{ccc}
B & \xrightarrow{i} & B^+ \\
g\downarrow & \swarrow \varphi & \\
A & &
\end{array}
$$

φ , g nin bir homomorfizm genişlemesidir.

Ayrıca $\forall u \in A^+$ için $u\phi = u_a$ sembolü ile ve $\forall v \in B^+$ için $v\phi = v_b$ sembolü ile gösterelim. $u = a_1 a_2 \dots a_n$ ise

$$u_a = u\phi = (a_1 a_2 \dots a_n)\phi = a_1\phi a_2\phi \dots a_n\phi = a_1 f a_2 f \dots a_n f$$

olur, yani $u = u_a$ ifadesi S de sağlanır, benzer şekilde $v = v_b$ ifadesi S de sağlanır.

$$Q_R = \{u\phi, v\phi : (u,v) \in R\} = \{(u_a, v_a) : (u,v) \in R\}$$

ve

$$B_A = \{((b\varphi)\phi, b) : b \in B\}$$

olarak tanımlayalım.

$Q = Q_R \cup B_A$ olsun. $(u,v) \in R$ ise $u, v \in A^+$ olup $u\phi \in B^+$ ve $v\phi \in B^+$ olur. Ayrıca $b \in B$ olup $(b\varphi)\phi \in B^+$ olur. Yani $Q \subseteq B^+ \times B^+$ olur. R sonlu olup tanımından Q_R sonludur. B sonlu olup B_A kümesi de sonlu kümedir. Böylece Q sonlu bir kümedir. $(u,v) \in R \Rightarrow u = v$ ifadesi S de sağlanır. Ayrıca $u = u\phi$ ve $v = v\phi$ ifadesi S de sağlandığından $u\phi = v\phi$ S de sağlanır. $b \in B$ için $b = b\varphi$ ifadesi S de sağlanır. Benzer şekilde $b\varphi \in A^+$ olup $b\varphi = (b\varphi)\phi$ ifadesi S de sağlanır. Yani; $b = (b\varphi)\phi$ ifadesi S de sağlanır. Böylece Q daki tüm ilişkiler S de sağlanır.

$u, v \in B^+$ için $u = v$ ifadesi S de sağlansın. $u = b_1 b_2 \ldots b_n$ olsun.

$$(u\varphi)\phi = (b_1\varphi)\phi(b_2\varphi)\phi \ldots (b_n\varphi)\phi = u$$

olup $(u\varphi)\phi = u$ ifadesi B_A nın yani Q nun bir sonucudur. Benzer şekilde $(v\varphi)\phi = v$ ifadesi B_A nın yani Q nun bir sonucudur. $u = v$ ifadesi S de sağlandığında $u\varphi = v\varphi$ ifadesi de S de sağlanır. Böylece $u\varphi = v\varphi$ ifadesi R nin bir sonucudur. (R deki ilişkiler kullanılarak geçiş yapılabilir)

$$u\varphi \underset{R^*}{\rightarrow} \cdots \underset{R^*}{\rightarrow} u\varphi \text{ olup } (u\varphi)\phi \underset{Q_R^*}{\rightarrow} \cdots \underset{Q_R^*}{\rightarrow} (v\varphi)\phi \text{ olur.}$$

$$u \underset{B_A}{\rightarrow} (u\varphi)\phi \underset{Q_R^*}{\rightarrow} \cdots \underset{Q_R^*}{\rightarrow} (v\varphi)\phi \underset{B_A}{\rightarrow} v$$

olduğundan $u = v$ ifadesi Q nun bir sonucudur.

Önerme 2.5.4. S bir yarıgrup olsun.

$$A = \{a_s : s \in S\} \text{ ve } R = \{(a_s a_t, a_{st}) : s, t \in S\}$$

olarak tanımlanırsa $\langle A|R \rangle$ ifadesi S nin bir takdimi olur (Howie, 1995).

İspat. $\forall a_s \in A$ için $a_s f = a$ olacak şekilde $f : A \rightarrow S$ fonksiyonu tanımlayalım.

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{i}{\rightarrow} & A^+ \\ f\downarrow & \swarrow \phi & \\ S & & \end{array}$$

$\phi : A^+ \rightarrow S$ olmak üzere ϕ homomorfizması f nin homomorfizm genişlemesidir.

$$Af\ = S \text{ olup } < Af > = S$$

olur. Böylece ϕ örtendir. $\forall\ (a_s a_t, a_{st}) \in R$ için

$$(a_s a_t)\phi = a_s\phi a_t\phi = a_s f a_t f = \ st\ = a_{st} f\ = a_{st}\phi$$

olur. Böylece R deki tüm ilişkiler S de sağlanır. $W = A \subseteq A^+$ olsun. $w \in A^+$ olsun. $|w| = 1$ ise $w \in\ W$ olur. $|w| \geq 2$ olsun. Kabul edelim ki $\forall|u| < |w|$ için $u = \bar{u}$ olacak şekilde $\bar{u} \in W$ olsun. $W = A$ olduğundan $\bar{u} \equiv a_s$ olacak şekilde $s \in S$ vardır. $w \equiv u.a_t$ $(u \in A^+, a_t \in A)$ olsun. Tümevarım hipotezinden $u = a_s$ ifadesi R nin sonucu olacak şekilde $a_s \in W$ vardır. Dolayısıyla

$$w \equiv u.a_t \underset{R^*}{\rightarrow} a_s a_t \underset{R^*}{\rightarrow} a_{st} \in W$$

olur. Ayrıca $|W| = |A| = |S|$ olduğundan W kümesi S nin kanonik formu olup $\langle A|R\rangle$ ifadesi S nin bir takdimi olur.

Örnek 2.5.1. $A = \{a, b\}$ ve $R = \{(a^4, a), (b^3, b), (ab, ba), (a^3, b^2)\}$ olsun. ${A^+}/{R^\#}$ yarıgrubunu bulalım.

Bu örnekte 3.(bağıntı) ilişki her elemanın $a^n b^m$ biçiminde $(m \geq 0, n \geq 0)$ yazılabileceğini gösterir. Ayrıca 1.(bağıntı) ilişki,$0 \leq n \leq 3$ ve 2.(bağıntı) ilişki $0 \leq m \leq 2$ yazılabileceğini gösterir. 4.(bağıntı) ilişki $0 \leq n \leq 2$ olduğunu ifade eder.

$${A^+}/{R^\#} = \{a, b, ab, a^2, b^2, a^2 b\}$$

olur.

Örnek 2.5.2. $m, r \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $M(m,r) = \{a, a^2, \ldots, a^m, a^{m+1}, \ldots, a^{m+r-1}\}$ kümesinde tüm elemanlar birbirinden farklı ve $a^m = a^{m+r}$ oluyor ise $M(m,r)$ yarıgrubuna indeksi m ve periyodu r olan monojenik yarıgrup denir. $M(m,r)$ yarıgrubunun takdimi aşağıda verilmiştir (Howie, 1995).

$A\ = \{a\}$ ve $S = \langle a | a^m = a^{m+r}\rangle$ olsun. $a^{m+r} = a^m$ (ilişkisi) bağıntısı $M(m,r)$ de sağlandığı açıktır. Ayrıca $W = \{a, a^2, \ldots, a^m, a^{m+1}, \ldots, a^{m+r-1}\}$ olsun. $w \in A^+$ ise $n \in \mathbb{Z}^+$ için $w \equiv a^n \in A^+$ biçimindedir.

$(n \geq 1)$ $1 \leq n \leq m + r - 1$ ise $w \in W$ olur. Eğer $n \geq m + r$ ise $n - m$ sayısı r ile bölünürse $n - m = qp + r$ olacak şekilde $q, p \in Z$ vardır. $(0 \leq p \leq r)$ $n = m + qr + p$ olur. Böylece,

$$a^n = a^{m+p+qr} \underset{R^*}{\rightarrow} a^{m+p+(q-r)r} \underset{R^*}{\rightarrow} \cdots \underset{R^*}{\rightarrow} a^{m+p} \in W$$

olup $a^n = a^{m+p}$, R nin bir sonucudur. Ayrıca $|W| \leq |S|$ olduğundan $\langle a | a^m = a^{m+r} \rangle$, $M(m, r)$ nin takdimidir.

Örnek 2.5.3. $Q = \{\mp 1, \mp i, \mp j, \mp k\}$ kuaternion grup olsun. Bu durumda $i.j = k$, $j.k = i$, $k.i = j$, $j.i = -k$, $k.j = -i$, $i.k = -j$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ olur. Q için yarıgrup takdimi aşağıdaki gibidir (Ruskuc, 1995).

$A = \{a, b\}$ olsun. $X = \{i, j\}$, $< X > = Q$ olup $f: A \to X$ olmak üzere $af = i$, $bf = j$ olarak tanımlansın. Bu durumda $Af = X$ olur. $\mu: A^+ \to Q$; f nin genişlemesi olan homomorfizm olsun.

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{i}{\rightarrow} & A^+ \\ f\downarrow & \swarrow \mu & \\ Q & & \end{array}$$

Ayrıca $R = \{(aba, b), (bab, a)\} \subseteq A^+ \times A^+$ olarak tanımlansın. Bu durumda

$$(aba)\mu = a\mu b\mu a\mu = afbfaf = i.j.i = j = bf = b\mu$$

$$(bab)\mu = b\mu a\mu b\mu = bfafbf = j.i.j = i = af = a\mu$$

olup R deki tüm ilişkiler S de sağlanır. $W = \{a, b, a^2, ab, ba, a^3, a^2b, a^4\}$ olsun. $w \in A^+$ alalım.

$$|w| = 1 \text{ ise } w = a \in W \text{ ya da } w = b \in W$$

$|w| = 2$ ise $w = a^2, w = ab, w = ba$ ise $w \in W$ olur. Ayrıca $w = b^2$ ise

$$b^2 \to bb \to abab \to aa = a^2 \in W$$

olup $b^2 = a^2$, R nin bir sonucudur.

$|w| = 3$ ise $w = a^3$, $w = a^2b \Rightarrow w \in W$ olur.

Ayrıca;

$$w = aba \underset{R^*}{\rightarrow} b \in W$$

$$w = bab \underset{R^*}{\rightarrow} a \in W$$

$$w = ab^2 \underset{R^*}{\to} aa^2 \underset{R^*}{\to} a^3 \in W$$
$$w = ba^2 \underset{R^*}{\to} bbaba \underset{R^*}{\to} b^3 \underset{R^*}{\to} b^2b \underset{R^*}{\to} a^2b \in W$$

$w \in A^+$ ve $|w| = 4$ olsun. $w = a^4$ ise $w \in W$ olur. $w \not\equiv a^4$ olsun. $\bar{u} \in W$ olmak üzere $w = \bar{u}a$ ya da $w = \bar{u}b$ olur. $w = \bar{u}a$ için ve $w = \bar{u}b$ için

$$\bar{u} = a \Rightarrow w = a^2 \in W$$
$$\bar{u} = b \Rightarrow w = ba \in W$$
$$\bar{u} = a^2 \Rightarrow w = a^3 \in W$$
$$\bar{u} = ab \Rightarrow w = aba = b \in W$$
$$\bar{u} = a^3 \Rightarrow w = a^4 \in W$$
$$\bar{u} = ba \Rightarrow w = ba^2 \underset{R^*}{\to} a^2b \in W$$
$$\bar{u} = a^2b \Rightarrow w = a^2ba \underset{R^*}{\to} ab \in W$$

olur. Benzer şekilde $\bar{u} \in W$ olmak üzere $w = \bar{u}b$ ise $w \in W$ olur. Ayrıca

$a^4a \to a^5 \to a^2aa^2 \to b^2ab^2 \to b(bab)b \to bab \to a$ $a^5 = a \in W$ ve $a^4b \to$
$a^2a^2b \to b^2b^2b \to b^5 \to b^2bb^2 \to a^2ba^2 \to aabaa \to aba \to b \in W$

Böylece $Wa \subseteq W$ ve $Wb \subseteq W$ olur. Yani W bu yarıgrup için bir kanonik form olup $Q \cong \langle A|R \rangle$ olur.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

Bu tez hazırlanırken gerekli literatür taraması yapılmış olup ilgili kitap, makale ve tez çalışmaları incelenmiştir. Konu ile alakalı çalışmalar ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

3.2. Yöntem

Çalışmada dönüşüm yarıgruplarının singüler kısmının yarıgrup takdimi incelenmiştir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde $T_n \backslash S_n$ yarıgrubu için bir takdim verilmiş olup ayrıca $T_3 \backslash S_3$ yarıgrubunun minimal doğuray kümesi ile bağlantılı olan bir takdimi verilmiştir.

4.1. Dönüşüm Yarıgruplarının Singüler Kısmı

Tanım 4.1.1. X boş olmayan bir küme olsun. X ten X e birebir ve örten olan tüm fonksiyonların kümesi S_x ile gösterilir. Fonksiyonların bileşkesi işlemi ile S_x kümesi bir grup olup bu gruba X üzerinde permütasyon grubu ya da simetrik grup denir. Ayrıca eğer X kümesi sonlu bir küme ve $|X| = n$ ise S_x kümesi S_n ile gösterilir ve bu grup n. dereceden simetrik grup olarak adlandırılır.

Tanım 4.1.2. X boş olmayan bir küme olsun. X ten X e tüm fonksiyonların kümesi T_x ile gösterilir. Fonksiyonların bileşkesi işlemi ile T_x kümesi bir yarıgrup olup bu yarı gruba X üzerindeki dönüşümler yarı grubu denir. Ayrıca eğer X kümesi sonlu bir küme ve $|X| = n$ ise T_x kümesi T_n ile gösterilir .

Teorem 4.1.1. Her grup bir simetrik grubun alt grubuna izomorftur (Cayley, 1854).

Bu teoremin ispatı için (bk. Rotman, 2002). Grup teoride iyi bilinen bu teoremin bir benzeri de yarıgrup teorisinde vardır.

Teorem 4.1.2. Her yarıgrup bir dönüşüm yarıgrubunun alt yarıgrubuna izomorftur (Howie, 1995).

İspat. S bir yarıgrup ve $X = S^1$ olsun. $\forall x \in X$ için $a \in S$ olmak üzere $x\rho_a = ax$ olarak tanımlanırsa $\rho_a \in T_X$ olur. Ayrıca $\theta: S \to T_X$ dönüşümü $\forall a \in S$ için $a\theta = \rho_a$ olarak tanımlayalım. $a = b$ olsun.

$$a\theta = \rho_a, b\theta = \rho_b$$

olup $\forall s \in S^1$ için $a = b \Rightarrow sa = sb$ olduğundan $\rho_a = \rho_b$ olur yani θ iyi tanımlıdır.

$$(ab)\theta = \rho_{ab}$$

olup

$$\forall s \in S^1 \text{ için } x\rho_{ab} = xab = (xa)b = (x\rho_a)\rho_b$$

Böylece $\rho_{ab} = \rho_a.\rho_b$ olur, $(ab)\theta = a\theta.b\theta$ olur. Yani θ bir homomorfizmdir. Ayrıca $a, b \in S$ için $a\theta = b\theta$ olsun. Bu durumda $\rho_a = \rho_b$ olup $1 \in X$ olduğundan

$$1\rho_a = 1a = a \text{ ve } 1\rho_b = 1b = b$$

olur, böylece $a = b$ elde edilir. Yani θ bir monomorfizmdir.

Dikkat edilecek olursa S_x kümesi T_x in bir alt kümesidir. Ayrıca eğer X sonlu bir küme ise $T_x\backslash S_x$ kümesi bileşke işlemiyle bir yarıgruptur. Yani $n \in \mathbb{Z}^+$ için $T_n\backslash S_n$ bir yarıgruptur, bu yarıgruba dönüşüm yarıgrubunun singüler kısmı denir. $T_n\backslash S_n$ yarıgrubunun takdimi ile ilgili açık problem ilk olarak Nikola Ruskuc un "Semigroup Presentations" isimli doktora tezinde yer almaktadır (Ruskuc, 1995). James East bu probleme 2010 yılında bir çözüm bulmuştur ancak bulmuş olduğu takdim $T_n\backslash S_n$ yarıgrubunun minimal doğuray kümesi ile bağlantılı değildir (East, 2010).

4.2. Bazı Önemli Yarıgruplar

Bu bölümde A_n,B_n,$\ell_{n-1} \subseteq T_n$ alt yarıgrupları tanımlanmış olup bu yarıgrupların takdimleri verilmiştir.

4.2.1. A_n Monoidi

Tanım 4.2.1.1. $\alpha \in T_n$ olsun. $Im(\alpha)$ ve $rank(\alpha)$ ifadeleri sırasıyla α nın görüntü kümesini ve rankını belirtmektedir. Ayrıca bir dönüşümün rankı dönüşümün görüntü kümesinin eleman sayısını ifade etmektedir. $n \in \mathbb{Z}^+$için $X_n = \{1,2, \dots, n\}$ olarak tanımlanır. α nın çekirdeği ise

$$Ker(\alpha) = \{(i,j) \in X_n \times X_n | i\alpha = j\alpha\}$$

olarak tanımlanır ve $Ker(\alpha)$ bir denklik bağıntısıdır. $Ker(\alpha)$ nın denklik sınıflarına α nın çekirdek sınıfları denir. α nın çekirdek sınıfları $K_1, K_2, \dots, K_n$ şeklinde ise;

$$Mins(\alpha) = \{\min\ (K_1), \dots, \min(K_n)\}$$

olarak tanımlanır. $\forall i, j \in Mins(\alpha)$ için $i < j$ olduğunda $i\alpha < j\alpha$ oluyorsa α ya blok sıra koruyan dönüşüm denir.

Örnek 4.2.1.1. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 2 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in T_6$ için α nın çekirdek sınıfları $\{1,2\}, \{3,5,6\}, \{4\}$ olur. Böylece $Mins(\alpha) = \{1,3,4\}$ olur. Ancak $1,3 \in Mins(\alpha)$ ve $1 < 3$ olup $1\alpha > 3\alpha$ olduğundan α blok sıra koruyan dönüşüm değildir.

Tanım 4.2.1.2. A_n kümesi,

$A_n = \{\alpha \in T_n |\ \alpha$ blok sıra koruyan dönüşüm ve $\exists k \in X_n$ için $Im(\alpha) = X_k\}$ olarak tanımlansın.

Ayrıca $1 \leq i < j \leq n$ için $\overline{a_{ij}} \in A_n$,

$$x\overline{a_{ij}} = \begin{cases} x, & 1 \leq x < j \\ i, & x = j \\ x - 1, & j < x \leq n \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Lemma 4.2.1.1. A_n, T_n nin bir alt monoididir. Ayrıca

$$\bar{A} = \{\overline{a_{ij}} | 1 \leq i < j \leq n\}$$

olmak üzere, A_n (bir monoid olarak) $\bar{A}$ kümesi tarafından üretilir (East, 2010).

İspat. M, $\bar{A}$ kümesi tarafından üretilmiş T_n nin bir alt monoidi olsun. Öncelikle $A_n \subseteq M$ olduğunu gösterelim. $\alpha \in A_n$ ve $k = rank(\alpha)$ olsun. k üzerinden tümevarım yöntemi ile $\alpha \in M$ olduğunu göstereceğiz. Eğer $k = n$ ise $\alpha = 1 \in M$ olur. Şimdi varsayalım ki $1 \leq k \leq n - 1$ olsun. Bu durumda $i, j \in X_n$ vardır ki $i < j$ ve $i\alpha = j\alpha$ olur. Ayrıca $\beta \in T_n$ dönüşümünü

$$x\beta = \begin{cases} x\alpha, & 1 \leq x < j \\ (x + 1)\alpha, & j \leq x < n \\ k + 1, & x = n \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda $\beta \in A_n$ ve $\alpha = \overline{a_{ij}}\beta$ olduğu kolayca görülür. Sonuç olarak $rank(\beta) = k + 1$ olduğundan tümevarım hipotezi gereği $\beta \in M$ olur, dolayısıyla $\alpha = \overline{a_{ij}}\beta \in \overline{a_{ij}}M \subseteq M$ olur. Böylelikle $A_n \subseteq M$ olduğu ispatlanır.

Şimdi $M \subseteq A_n$ olduğunu gösterelim. $\bar{A} \subseteq A_n$ olduğundan $\bar{A}$ nin elemanlarının A_n üzerinde sağdan çarpma işlemi ile kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. Varsayalım ki $\alpha \in A_n$ ve $1 \leq i < j \leq n$ olsun. $\alpha\overline{a_{ij}} \in A_n$ olduğunu gösterelim. $im(\alpha) = X_r$ α nın çekirdek sınıflarının kümesi $K_1, K_2, .., K_r$ ve $\min(K_1) < \cdots < \min(K_r)$ olsun. (özel olarak biliyoruz ki $\forall i \in X_r$ $için$ $K_i = i\alpha^{-1}$) Burada iki durum vardır, bunları inceleyelim. Eğer $j \geq r+1$ ise $im(\alpha) = X_r \subseteq \{1, \dots, j-1\}$ olur, bundan dolayı $\alpha\overline{a_{ij}} = \alpha \in M$ olur. Sonra varsayalım ki $j \leq r$ olsun.

$$(1, \dots, r)\overline{a_{ij}} = (1, \dots j-1, j, j+1, \dots, r)\overline{a_{ij}} = (1, \dots, j-1, i, j, \dots, r-1)$$

olur. Bundan dolayı $im(\alpha\overline{a_{ij}}) = X_r\overline{a_{ij}} = \{1, \dots, r-1\}$ olur. Ayrıca $\alpha\overline{a_{ij}}$ nin çekirdek sınıflarının kümesi $K_1, \dots K_{i-1}, K_i \cup K_j, K_{i+1}, \dots, K_{j-1}, K_{j+1}, \dots, K_r$ olup $\alpha\overline{a_{ij}}$ blok sıra koruyan dönüşümdür ve $im(\alpha\overline{a_{ij}}) = X_{r-1}$ yani $\alpha\overline{a_{ij}} \in A_n$ olur, böylece $M \subseteq A_n$ olduğu gösterilmiş olup ispat tamamlanır.

Not 4.2.1.1. $n \geq 3$ için tüm blok sıra koruyan dönüşümlerin kümesi, T_n nin alt monoidi değildir.

Örnek 4.2.1.2. T_3 için $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ elemanlarını alırsak bu ifade ispatlanır. Bu elemanlar blok sıra koruyandır fakat $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ elemanı blok sıra koruyan değildir.

Tanım 4.2.1.3. $A = \{a_{ij} | 1 \leq i \leq n\}$ kelimeleri $\bar{A}$ ile birebir ve örten olacak şekildeki kümeyi tanımlayalım. Ayrıca aşağıdaki bağıntıları göz önüne alalım,

$$a_{kl}a_{in} = a_{kl} \text{ tüm } i, k, l \text{ için (A1)}$$

$$a_{jk}a_{ij} = a_{ik}a_{ij} = a_{ij}a_{ik-1} \quad i < j < k \text{ (A2)}$$

$$a_{kl}a_{ij} = \begin{cases} a_{ij}a_{k-1l-1}, & i < j < k < l \\ a_{ij}a_{kl-1}, & i < k < j < l \\ a_{ij+1}a_{kl}, & i < k < l \leq j \leq n-1 \end{cases}$$

(A3-A5)

(A1-A5) bağıntı kümesiyle üretilen A^* üzerindeki kongrüansı $\sim_A$ ile gösterelim. Lemma 4.2.1.1 den dolayı

$$\phi_A: A^* \to A_n: a_{ij} \mapsto \overline{a_{ij}}$$

epimorfizmini tanımlayabiliriz.

Eğer $ker\phi_A = \sim_A$ olduğunu ispatlarsak A_n nin monoid takdiminin $\langle A | (A1 - A5) \rangle$ olduğunu göstermiş oluruz. $w \in A^*$ için $\overline{w} = w\phi_A$ olarak tanımlayalım.

Lemma 4.2.1.2. $\sim_A \subseteq ker\phi_A$ olur (East, 2010).

İspat. (A1-A5) bağıntıları A_n de sağlandığından $\sim_A \subseteq ker\phi_A$ olur.

$ker\phi_A \subseteq \sim_A$ olduğunu göstermek için, $N_A \subseteq A^*$ olmak üzere normal kelimeler kümesini tanımlayalım. Öncelikle A üzerinde " $<$ " sıralamasını tanımlayalım. $a_{ij} \prec a_{rs}$ olması için gerek ve yeter koşul ya $i < r$ veya $i = r$ ve $j > s$ olarak tanımlansın. $a_{i_1j_1} \dots a_{i_kj_k} \in A^*$ olmak üzere $a_{i_1j_1} < \cdots < a_{i_kj_k}$ oluyorsa $a_{i_1j_1} \dots a_{i_kj_k}$ kelimesi artan bir kelime olarak adlandırılır.
$a_{i_1j_1} \dots a_{i_kj_k}$ artan bir kelime olmak üzere eğer $\forall r \in X_k$için $j_r \leq n - r + 1$ oluyor ise $a_{i_1j_1} \dots a_{i_kj_k}$ kelimesine normal kelime denir. A üzerindeki tüm normal kelimelerin kümesini N_A ile gösterelim, burada $N_A \subseteq A^*$ olur. (w bir kelime olmak üzere w daki bazı harfleri silerek elde edilen kelimeyi w' ile gösterelim bu kelimeye w nun bir alt kelimesi denir.)

Ayrıca, $1 \leq i \leq n$ için bir alfabe $A_i = \{ a_{ii+1}, \dots, a_{in}\} \subseteq A$ olarak tanımlayalım, bu kümeye A nın bir alt alfabesi denir.

Lemma 4.2.1.3. $1 \leq i < j \leq n$ ve $w \in (A_{i+1} \cup \dots \cup A_{n-1})^*$ olsun. Bu durumda $l(w_2) = l(w)$ özelliğine sahip öyle $w_1 \in A_i{}^*$ ve $w_2 \in (A_{i+1} \cup \dots \cup A_{n-1})^*$ vardır ki $wa_{ij} \sim_A w_1w_2$ olur (East, 2010).

İspat. $w = a_{i_1j_1} \dots a_{i_kj_k}$ olsun. İspatı k üzerinden tümevarım ile yapalım. Eğer $k = 0$ ise $w = \varepsilon$ (boş kelime) olur,

$$w.a_{ij} = \varepsilon a_{ij} = a_{ij}$$

$l(w_2) = l(w)$ olduğundan $w_2 = \varepsilon$ olup $w_1.w_2 = w_1\varepsilon = w_1$ olur, yani bu durumda $w_1 = a_{ij}$ seçilmesi yeterlidir. $k \geq 1$ olduğunu varsayalım. Şimdi

$$a_{i_kj_k}a_{ij} \sim_A \begin{cases} a_{i_kj_k} & A1 \text{ den} \quad j = n \\ a_{ij+1}a_{i_kj_k} & A5 \text{ ten} \quad j_k \leq j < n \\ a_{ij}a_{i_kj_{k-1}} & A4 \text{ ten} \quad i_k < j < j_k \\ a_{ij}a_{ij_{k-1}} & A2 \text{ den}\, j = i_k \\ a_{ij}a_{i_{k-1}j_{k-1}} & A3 \text{ ten} \quad j < i_k \end{cases}$$

bağıntılarını düşünelim. Bağıntı kümesindeki ilk durumda yani $j = n$ ise

$$wa_{ij} = a_{i_1j_1} \dots a_{i_kj_k}.a_{ij} = a_{i_1j_1} \dots a_{i_kj_k}.a_{in}$$

olup $wa_{ij} \sim_A a_{i_1j_1} \dots a_{i_{k-1}j_{k-1}} a_{i_kj_k} = w$ olur. Yani $w_2 = w$ ve $w_1 = \varepsilon$ seçmek yeterlidir. Diğer durumlarda tümevarım hipotezi ile gösterilir.

Lemma 4.2.1.4. $w \in A^*$ olsun. $\exists\, w_1 \in {A_1}^*, \dots, w_{n-1} \in A_{n-1}^*\ için\ w \sim_A w_1 \dots w_{n-1}$ olur (East,2010).

İspat. $w = a_{i_1j_1} \dots a_{i_{k-1}j_{k-1}} a_{i_kj_k}$ olsun. $k = 0$ ise sonuç açıktır. Varsayalım ki $k \geq 1$ ve $i = \min\,(i_1, \dots, i_k)$ olsun. k üzerinden tümevarım ile

$$\exists\, w_1 \in {A_1}^*, \dots, w_{n-1} \in A_{n-1}^*\ için\ w \sim_A w_1 \dots w_{n-1}$$

olduğunu göstereceğiz. $k = 1$ ise sonuç yine açıktır. $k \geq 2$ olsun. Bu durumda $i < j \leq n$ olmak üzere $w_1 \in (A_{i+1} \cup \dots \cup A_{n-1})^*$ ve $w_2 \in (A_i \cup \dots \cup A_{n-1})^*$ vardır öyle ki $w = w_1 a_{ij} w_2$ olur. Lemma 4.2.1.3 ten $l(w_4) = l(w_1)$ olacak şekilde $\exists w_3 \in A_i^*$ ve $w_4 \in (A_{i+1} \cup \dots \cup A_{n-1})^*$ vardır öyle ki $w_1 a_{ij} \sim_A w_3 w_4$ olur. Böylece $w = w_1 a_{ij} w_2 \sim_A w_3 w_4 w_2$ olur. Benzer şekilde $w_4 w_2$ kelimesine tümevarım hipotezi uygulanırsa ispat tamamlanır.

Lemma 4.2.1.5. $w \in A^*$ olsun. $\exists\, i + 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$ için $w \sim_A a_{ij_r} \dots a_{ij_1}$ olur (East, 2010).

İspat: $m = n - i$ olsun. Ayrıca $\forall 1 \leq j \leq m$ için $\lambda_j = a_{i,i+j}$ olacak şekilde tanımlansın. (A1) ve (A2) bağlantılarından

$$\begin{cases} \lambda_j \lambda_k = \lambda_{k+1} \lambda_j, & 1 \leq \mathrm{j} \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{m} - 1 \qquad (\mathrm{L1}) \\ \lambda_j \lambda_m = \lambda_j\,, & \forall j \qquad (L2) \end{cases}$$

bağıntıları elde edilir. Böylece sonuç (bk. Lemma 4. East, 2006) açıktır.

Lemma 4.2.1.4 ve Lemma 4.2.1.5 in bir sonucu olarak A üzerindeki her kelime $\sim_A$ kongrüansı üzerinde o kelimeye denk olan artan bir kelime vardır.

Lemma 4.2.1.6. $w = a_{i_1j_1} \dots a_{i_{k-1}j_{k-1}} a_{i_kj_k} \in N_A$ ve $k \geq 1$ olsun. Bu durumda $\forall 1 \leq p \leq n - k$ için $wa_{p,n-k+1} \sim_A$ w olur (East, 2010).

İspat. $k = 1$ ise (A1) den dolayı sonuç açıktır. $k \geq 2$ olsun. w normal olduğundan $j_k \leq n - k + 1$ olur, böylece

$$q = \begin{cases} p\,, & p < j_k \\ p + 1, & p \geq j_k \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa (A2-A4) den dolayı $a_{i_k j_k} a_{p,n-k+1} \sim_A a_{q,n-k+2} a_{i_k j_k}$ olur. Böylece

$$w a_{p,n-k+1} \sim_A (a_{i_1 j_1} \dots a_{i_{k-1} j_{k-1}}) a_{q,n-k+2}\, a_{i_k j_k}$$

olur. Ayrıca $(a_{i_1 j_1} \dots a_{i_{k-1} j_{k-1}}) a_{q,n-k+2}$ ifadesine tümevarım hipotezi uygulanarak ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.1.1. $w = a_{i_1 j_1} \dots a_{i_{k-1} j_{k-1}} a_{i_k j_k} \in N_A$ ve $k \geq 1$ olsun. $1 \leq p < q$ ve $n - k + 1 \leq q \leq n$ için $w a_{pq} \sim_A w$ olur (East, 2010).

İspat. $0 \leq r \leq k - 1$ için $q = (n - k + 1) + r = n - (k - r) + 1$ olarak tanımlansın. Bu durumda

$$w a_{pq} = (a_{i_1 j_1} \dots a_{i_r j_r})(a_{i_{r+1} j_{r+1}} \dots a_{i_k j_k}) a_{p,n-(k-r)+1}$$

olur. w kelimesinin alt kelimesi olan $a_{i_{r+1} j_{r+1}} \dots a_{i_k j_k}$ kelimesi normal kelime olduğundan Lemma 4.2.1.6 dan dolayı

$$(a_{i_{r+1} j_{r+1}} \dots a_{i_k j_k}) a_{p,n-(k-r)+1} \sim_A a_{i_{r+1} j_{r+1}} \dots a_{i_k j_k}$$

olur. Böylelikle ispat tamamlanır.

Lemma 4.2.1.7. A üzerindeki her kelime için $\sim_A$ bağıntısı üzerinde o kelimeye denk olan normal bir kelime vardır (East, 2010).

İspat. Lemma 4.2.1.4 ve Lemma 4.2.1.5 ten dolayı $w = a_{i_1 j_1} \dots a_{i_k j_k}$ artan bir kelimesi için $\sim_A$ kongrüansı üzerinde w kelimesine denk olan normal bir kelimenin varlığını göstermek yeterlidir. $k \leq 1$ olduğunda sonuç açıktır, $k \geq 2$ olsun. Eğer w normal bir kelime ise sonuç açıktır. Diğer durumda, $w' = a_{i_1 j_1} \dots a_{i_r j_r} \in N_A$ ve $w' a_{i_{r+1} j_{r+1}} \notin N_A$ olacak şekilde $r \in X_k$ vardır. $w' a_{i_{r+1} j_{r+1}}$ artan bir kelime fakat normal olmayan bir kelime olduğundan $j_{r+1} \geq n - r + 1$ olur, bu durumda Sonuç 4.2.1.1 den $w' a_{i_{r+1} j_{r+1}} \sim_A w'$ olur. Böylece $w \sim_A a_{i_1 j_1} \dots a_{i_r r} a_{i_{r+2} j_{r+2}} \dots a_{i_k j_k}$ olur, $a_{i_1 j_1} \dots a_{i_r r} a_{i_{r+2} j_{r+2}} \dots a_{i_k j_k}$ kelimesinin uzunluğu $k - 1$ olduğu için tümevarım hipotezinden dolayı $a_{i_1j_1} \dots a_{i_r r} a_{i_{r+2}j_{r+2}} \dots a_{i_kj_k}$ kelimesine denk olan $\sim_A$ bağıntısı üzerinde normal bir kelime vardır. Sonuç olarak w kelimesine $\sim_A$ bağıntısı üzerinde denk olan normal bir kelime vardır.

Böylece w, A üzerinde herhangi bir kelime ise w kelimesine karşılık gelen N_A üzerinde bir kelime olduğunu biliyoruz, sonraki amacımız ise ϕ_A nın tanım kümesi N_A kümesine kısıtlanır ise ϕ_A nın birebir olduğunu göstermektir. $w \in A^*$ olmak üzere $w\phi_A \in A_n$ ifadesini $\overline{w}$ ile gösterdiğimizi hatırlayalım.

Lemma 4.2.1.8. $w \in N_A$ ve $l(w) = k$ ise $im(\overline{w}) = \{1, \dots, n-k\}$ olur (East, 2010).

İspat. $w = a_{i_1j_1} \dots a_{i_kj_k}$ olsun. $k \leq 1$ ise sonuç açıktır. $k \geq 2$ olsun, tümevarım hipotezinden dolayı

$$im\left(\overline{a}_{i_1j_1} \dots \overline{a}_{i_{k-1}j_{k-1}}\right) = \{1, \dots, n-k+1\}$$

olur. w normal kelime olduğunda $j_k \leq n-k+1$ olur. Bu durumda ise

$$\begin{aligned}(1, \dots, n-k+1)\overline{a}_{i_kj_k} &= (1, \dots, j_k - 1, j_k, j_k + 1, \dots, n-k+1)\overline{a}_{i_kj_k} \\ &= (1, \dots, j_k - 1, i, j_k, \dots, n-k)\end{aligned}$$

olur. Bundan dolayı $im(\overline{w}) = \{1, \dots, n-k+1\}\overline{a}_{i_kj_k} = \{1, \dots, n-k\}$ olur.

Sonuç 4.2.1.2. $w_1, w_2 \in N_A$ ve $\overline{w}_1 = \overline{w}_2$ ise $l(w_1) = l(w_2)$ olur (East, 2010).

İspat: $w_1, w_2 \in N_A$ ve $l(w_1) = k_1$ ve $l(w_2) = k_2$ olsun. Bu durumda Lemma 4.2.1.8 den dolayı,

$$im(\overline{w}_1) = \{1, \dots, n-k_1\}$$
$$im(\overline{w}_2) = \{1, \dots, n-k_2\}$$

olur. $\overline{w}_1 = \overline{w}_2$ oluğundan

$$n - k_1 = n - k_2$$
$$k_1 = k_2$$

olur, yani $l(w_1) = l(w_2)$ olur.

Lemma 4.2.1.9. $1 \leq i, j \leq n-1$ olmak üzere $\overline{w}_1 = \overline{w}_2$ olacak şekilde $w_1 \in A_i^+(A_{i+1} \cup \dots \cup A_{n-1})^*$ ve $w_2 \in A_j^+(A_{j+1} \cup \dots \cup A_{n-1})^*$ olsun. Bu durumda $i = j$ olur (East, 2010).

İspat. $i = min\{x \in X_n | x\overline{w}_1^{-1} \neq \{x\}\} = min\{x \in X_n | x\overline{w}_2^{-1} \neq \{x\}\} = j$ olduğundan $i = j$ olur.

Lemma 4.2.1.10. $1 \leq i \leq n-1$ olmak üzere $w_1 w_1', w_2 w_2' \in N_A$ ve $\overline{w_1 w_1'} = \overline{w_2 w_2'}$ olacak şekilde $w_1, w_2 \in A_i^+$ ve $w_1', w_2' \in (A_{i+1} \cup \ldots \cup A_{n-1})^*$ olsun. Bu durumda $w_1 = w_2$ olur (East, 2010).

İspat. $w_1 = a_{ij_r} \ldots a_{ij_1}$ ve $w_2 = a_{ik_s} \ldots a_{ik_1}$ olsun. $i\overline{w_1 w_1'}^{-1} = i\overline{w_1}^{-1} = \{j_1, \ldots, j_r\}$ olur. Benzer şekilde $i\overline{w_2 w_2'}^{-1} = \{k_1, \ldots, k_s\}$ olur. $\overline{w_1 w_1'} = \overline{w_2 w_2'}$ olduğundan dolayı $\{j_1, \ldots, j_r\} = \{k_1, \ldots, k_s\}$ olur. Yani $w_1 = w_2$ olur.

Lemma 4.2.1.11. $1 \leq i \leq n-1$ olmak üzere $ww_1, ww_2 \in N_A$ ve $\overline{ww_1} = \overline{ww_2}$ olacak şekilde $w \in A_i^+$ ve $w_1, w_2 \in (A_{i+1} \cup \ldots \cup A_{n-1})^*$ olsun. Bu durumda $\overline{w_1} = \overline{w_2}$ olur (East, 2010).

İspat. $w_1, w_2 \in (A_{i+1} \cup \ldots \cup A_{n-1})^*$ olduğundan dolayı her $1 \leq x \leq i$ için $x\overline{w_1} = x = x\overline{w_2}$ olur. $k = \ell(w)$ ve $l = \ell(w_1)$ olsun. Bu durumda Sonuç 4.2.1.2 den $\ell(ww_1) = \ell(ww_2)$ olur, böylece $\ell(w_1) = \ell(w_2)$ olur sonuç olarak $\ell(w_2) = l$ olur. $w_1 = a_{p_1 q_1} \ldots a_{p_l q_l}$ ve $w_2 = a_{u_1 v_1} \ldots . a_{u_l v_l}$ olsun. $ww_1, ww_2 \in N_A$ olduğundan $\forall\ 1 \leq r \leq l$ için $q_r, v_r \leq n - (k + r) + 1$ olur. Böylece $\forall n - k + 1 \leq x \leq n$ için $x\overline{w}_1 = x\overline{w}_2 = x - l$ olur. $\overline{w}$ dönüşümünün tanım kümesi $X_n \setminus i\overline{w}^{-1}$ kümesine kısıtlanırsa birebir olur, bundan dolayı öyle $i + 1 \leq d_{i+1} < \cdots < d_{n-k} \leq n\ için\ (i + 1, \ldots, n - k)\overline{w}^{-1} = (d_{i+1}, \ldots, d_{n-k})$ olur. Ayrıca, $x \in \{i + 1, \ldots, n - k\}$ için $x\overline{w}_1 = d_x\overline{ww_1} = d_x\overline{ww_2} = x\overline{w}_2$ olur, yani $\overline{w}_1 = \overline{w}_2$ olur.

Sonuç 4.2.1.3. ϕ_A fonksiyonunun tanım kümesinin N_A kümesine kısıtlanmasıyla elde edilen fonksiyon birebir olur (East, 2010).

İspat. $w_1, w_2 \in N_A$ ve $\overline{w}_1 = \overline{w}_2$ olduğunu kabul edelim. Sonuç 4.2.1.2 den dolayı bu kelimelerin uzunlukları eşit olur. $k = \ell(w_1) = \ell(w_2)$ olsun. $k = 0\ ise\ \varepsilon = w_1 = w_2$ olur. Kabul edelim ki $k \geq 1$ olsun. Lemma 4.2.1.9 ve Lemma 4.2.1.10 dan dolayı $1 \leq$

$i \leq n-1$ için öyle $w \in A_i^+$ ve $w_1', w_2' \in (A_{i+1} \cup \ldots \cup A_{n-1})^*$ vardır ki $w_1 = ww_1'$ ve $w_2 = ww_2'$ olur. Lemma 4.2.1.11 den $\overline{w_1'} = \overline{w_2'}$ olur, tümevarım hipotezinden $w_1' = w_2'$ olup sonuç olarak $w_1 = w_2$ olur.

Lemma 4.2.1.1, Lemma 4.2.1.2, Lemma 4.2.1.7 ve Sonuç 4.2.1.3 ifadelerinin bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 4.2.1.1. A_n monoidinin (monoid) takdimi $\langle A | (A1 - A5) \rangle$ olur (East, 2010).

4.2.2. B_n Monoidi

$n^b = X_n \setminus \{n\}$ olarak tanımlansın. $X = \{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq n^b$ ve $x_1 < \cdots < x_k$ olmak üzere $\bar{b}_X \in T_n$ dönüşümü

$$i\bar{b}_X = \begin{cases} x_{i,} & i \in X_k \\ n, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın, ayrıca $B_n = \{ \bar{b}_X \mid X \subseteq n^b \}$ olsun.

Lemma 4.2.2.1. B_n, T_n nin alt monoididir (East, 2010).

İspat. $\alpha, \beta \in B_n$ olsun, bu durumda öyle $1 \leq x_1 < \cdots < x_k \leq n-1$ ve $1 \leq y_1 < \cdots < y_l \leq n-1$ vardır ve $im(\alpha) = \{x_1, \ldots, x_k, n\}$ ve $im(\beta) = \{y_1, \ldots y_l, n\}$ olur. $0 \leq p \leq k$ için $n\beta^{-1} \cap im(\alpha) = \{x_{p+1}, \ldots, x_k, n\}$ (eğer $p = k$ ise $\{x_{p+1}, \ldots, x_k\} = \emptyset$) olur. Böylece,

$$\begin{aligned} n(\alpha\beta)^{-1} &= \left(n\beta^{-1} \cap im(\alpha)\right)\alpha^{-1} \\ &= \{x_{p+1}, \ldots, x_k, n\}\alpha^{-1} \\ &= \{p+1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

olur. Eğer; $1 \leq i \leq p$ ise $i(\alpha\beta) = x_i\beta = y_{x_i}$ olup bunun sonucu olarak $Z = \{y_{x_1}, \ldots, y_{x_p}\} \subseteq n^b$ olmak üzere $\alpha\beta = \bar{b}_Z \in B_n$ olup ispat tamamlanır.

$\bar{b}_i = \bar{b}_{n^b \setminus \{i\}} \in B_n$ olarak tanımlansın. Şimdi, B_n için bir doğuray kümesi bulalım.

Lemma 4.2.2.2. $X \subseteq n^b$ ve varsayalım ki $i_1 < \cdots < i_k$ için $n^b \setminus \{X\} = \{i_1, \ldots, i_k\}$ olsun. Bu durumda $\bar{b}_X = \bar{b}_{i_1} \ldots \bar{b}_{i_k}$ olur, böylece B_n nin doğuray kümesi $\bar{B} = \{\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_{n-1}\}$ olur (East, 2010).

İspat. Lemma 4.2.2.1 den dolayı $\bar{b}_{i_1} \ldots \bar{b}_{i_k} \in B_n$ olup $im(\bar{b}_{i_1} \ldots \bar{b}_{i_k}) = X \cup \{n\}$ olduğunu göstermek yeterli olur. $k = 0$ ise sonuç açıktır. Varsayalım ki $k \geq 1$ olsun. Tümevarım hipotezinden

$$im(\bar{b}_{i_1} \ldots \bar{b}_{i_{k-1}}) = X \cup \{i_k, n\}$$

olur. $\bar{b}_{i_k}$ dönüşümü tanımından dolayı $\{1,2 \ldots, i_{k-1}\}$ kümesi üzerinde birimdir ve $\{i_k, \ldots n\}$ kümesinin $\bar{b}_{i_k}$ dönüşümü altındaki görüntüsü $\{i_{k+1}, \ldots, n\}$ olur. Böylece,

$$im(\bar{b}_{i_1} \ldots \bar{b}_{i_{k-1}} \bar{b}_{i_k}) = (X \cup \{i_k, n\})\bar{b}_{i_k} = X \cup \{n\}$$

olup ispat tamamlanır.

$B = \{b_1 \ldots b_{n-1}\}$ olarak tanımlansın, ayrıca $\bar{B}$ ile B kümesi arasında doğal birebir eşleme vardır. Aşağıdaki bağlantıları dikkate alalım.

$$b_j b_i = b_i b_{j+1} \quad 1 \leq i \leq j \leq n-2 \quad (B1)$$

$$b_{n-1} b_i = b_i \quad \forall i \text{ için} \quad (B2)$$

B^* üzerinde $(B1 - B2)$ bağlantılarıyla üretilen kongrüans $\sim_B$ olsun. Lemma 4.2.2.2 den dolayı

$$\phi_B : B^* \longrightarrow B_n : b_i \longmapsto \bar{b}_i$$

epimorfizmi vardır.

Lemma 4.2.2.3. $\sim_B \subseteq ker\phi_B$ olur (East, 2010).

İspat. $(B1 - B2)$ bağıntıları B_n de sağlandığından dolayı $\sim_B \subseteq ker\phi_B$ olur.

$(B1 - B2)$ bağıntıları $(L1 - L2)$ bağıntılarının duali olduğundan (Lemma 4. East, 2006) kullanılarak aşağıdaki lemmayı yazabiliriz.

Lemma 4.2.2.4. $w \in B^*$ olsun. Bu durumda öyle $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n-1$ vardır ki $w \sim_B b_{i_1} \ldots b_{i_k}$ olur. (East, 2010).

$N_B = \{b_{i_1} \dots b_{i_k} | 0 \leq k \leq n-1,\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n-1\}$ olsun. Bu kümeye ait kelimeleri B üzerinde normal kelime olarak adlandıralım. Lemma 2.2.2.4 ten dolayı B üzerindeki her kelimeye için bu kelimeye eşit olan normal bir kelime vardır. Ayrıca Lemma 2.2.2.2 den dolayı ϕ_B fonksiyonunun tanım kümesinin N_B kümesinde kısıtlanmasıyla elde edilen fonksiyon birebir olur. Bunların bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 4.2.2.1. B_n monoidinin monoid takdimi $\langle B | (B1 - B2) \rangle$ olur (East, 2010).

4.2.3. Maksimal Yarıgrup ℓ_{n-1}

Dikkat edilecek olursa, $\bar{a}_{n-1,n} \in A_n \subseteq T_n$ bir idempotent elemandır. $\alpha \in T_n$ olmak üzere eğer α elemanı T_n' de $\bar{a}_{n-1,n}$ ile H bağlantılı ise tanımdan $im(\alpha) = im(\bar{a}_{n-1,n}) = n^b$ ve $\ker(\alpha) = \ker(\bar{a}_{n-1,n}) = (1| \dots |\mathrm{n}-2|\mathrm{n}-1,\mathrm{n})$ olur. Böylece,

$$\{\alpha \in T_n | n\alpha = (n-1)\alpha \text{ ve } im(\alpha) = n^b\}$$

kümesi T_n nin $\bar{a}_{n-1,n}$ elemanını içeren maksimal altgrubu olur (bk. Clifford, Preston, 1962 sayfa 22). Ayrıca bu maksimal altgrubun S_{n-1} simetrik grubuna izomorf olduğu açıktır. Bundan dolayı biz bu yarıgrubu ℓ_{n-1} ile göstereceğiz. $1 \leq k \leq n-1$ için

$$\ell_k = \{\alpha \in \ell_{n-1} |\ x\alpha = x\ (\forall x \in n^b \setminus X_k)\}$$

olarak tanımlayalım. Açıkça ℓ_k, ℓ_{n-1} in bir alt yarıgrubu olup S_k simetrik grubuna izomorftur. $1 \leq i \leq n-2$ için $\bar{s}_i$ dönüşümünü

$$x\bar{s}_i = \begin{cases} x\ , & x \neq i, i+1, n \\ i+1\ , & x = i \\ i\ , & x = i+1 \\ (n-1)\bar{s}_i\ , & x = n \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. ℓ_{n-1} grubu (yarıgrup olarak) $\bar{S} = \{\overline{s_1}, \dots, \overline{s_{n-2}}\}$ kümesi tarafından üretilir. $S = \{s_1, \dots, s_{n-2}\}$ kümesi $\bar{S}$ ile doğal birebir eşleme oluşturulacak şekilde tanımlansın, ayrıca $1 \leq k \leq n-1$ için $S_k = \{s_1, \dots, s_{k-1}, a_{n-1,n}\}$ olsun. S_{n-1} üzerinde

$$s_i a_{n-1,n} = a_{n-1,n} s_i = s_i \qquad \forall\ i \text{ için} \quad (S1)$$

$$s_i^2 = a_{n-1,n} \qquad \forall\ i \text{ için} \quad (S2)$$

$$s_i s_j = s_j s_i \quad |i-j| > 1 \quad (S3)$$

$$s_i s_j s_i = s_j s_i s_j \qquad |i-j| = 1 \quad (S4)$$

bağlantıları tanımlansın. S_{n-1}^{+} üzerinde $(S1 - S4)$ bağıntılarını içeren en küçük kongrüansı $\sim_S$ ile gösterelim.

Teorem 4.2.3.1. $\ell_{n-1} \cong S_{n-1}$ grubunun yarıgrup takdimi $\langle S_{n-1} | (S1 - S4) \rangle$ olur (Moore, 1897).

Teorem 4.2.3.1 deki epimorfizma $\phi_S : S_{n-1}^{+} \to \ell_{n-1} : s_i \to \bar{s}_i, a_{n-1,n} \to \bar{a}_{n-1,n}$ şeklinde tanımlıdır. $w \in S_{n-1}^{+}$ için $\overline{w} = w\phi_S$ olarak tanımlayalım. Ayrıca, $1 \leq i \leq j \leq n-1$ için $v_{ij} \in S_{n-1}^{+}$ kelimesini

$$v_{ij} = \begin{cases} s_{j-1} \dots s_i \,, & i < j \text{ ise} \\ a_{n-1,n}, & i = j \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bunların bir sonucu olarak aşağıdaki lemmayı ifade edebiliriz.

Lemma 4.2.3.1. $1 \leq k \leq n-1$, $w \in S_k^{+}$ ve $j = k\overline{w}$ olsun. Bu durumda $\exists w' \in S_{k-1}^{+}$ için $w \sim_S w' v_{jk}$ olur (East, 2010).

4.3. Dönüşüm Yarıgrubunun Singüler Kısmı İçin Bir Takdim

Bu bölümde $T_n \backslash S_n$ yarıgrubunun takdimi verilecektir.

Lemma 4.3.1. $\alpha \in T_n \backslash S_n$ ve $rank(\alpha) = r$ olsun. Bu durumda öyle $rank(\beta) = r$,

$$rank(\delta) = \begin{cases} r, & n \in im(\alpha) \text{ise} \\ r+1\,, & n \notin im(\alpha) \text{ise} \end{cases}$$

özelliklerine sahip olan ve $\alpha = \beta\gamma\delta$ koşulunu sağlayan tek türlü $\beta \in A_n$, $\gamma \in \ell_r$, $\delta \in B_n$ vardır (East, 2010).

İspat. $\beta \in A_n$ ve $\ker(\beta) = \ker\,(\alpha)$ olsun, tanımdan dolayı bunu sağlayan sadece bir tane β vardır. Sonra, varsayalım ki α nın çekirdek sınıfları kümesi $K_1, \dots, K_r$ ve $\min(K_1) < \dots < \min\,(K_r)$, ayrıca $i_1 < \dots < i_r$ olmak üzere $im(\alpha) = \{i_1, \dots, i_r\}$ olsun. Bu durumda öyle $\pi \in S_r$ vardır ki her bir $t \in X_r$ için $K_t\alpha = \{i_{t\pi}\}$ olur. Ayrıca, $\gamma \in \ell_r$ dönüşümünü

$$x\gamma = \begin{cases} x\pi\,, & 1 \le x \le r \\ x, & r+1 \le x \le n-1 \\ (n-1)\gamma, & x = n \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Ayrıca,

$$X = \begin{cases} im(\alpha) \setminus \{n\}, & n \in im(\alpha) \\ im(\alpha)\,, & n \notin im(\alpha) \end{cases}$$

olmak üzere $\delta = \bar{b}_X \in B_n$ olsun. $t \in X_r$ ve $x \in K_t$ için

$$x(\beta\gamma\delta) = t(\gamma\delta) = (t\pi)\delta = i_{t\pi} = x\alpha$$

olup dolayısıyla $\alpha = \beta\gamma\delta$ olur. β, γ, δ nın tekliğini ispatlayalım. Varsayalım ki $\alpha = \beta'\gamma'\delta'$ ve β', γ', δ' gerekli koşulları sağlasın. $ker(\beta') \subseteq \ker(\beta'\gamma'\delta') = \ker(\alpha)$ olur ve $rank(\beta') = rank(\alpha)$ olduğundan $\ker(\beta') = \ker(\alpha) = \ker(\beta)$ olur bundan dolayı $\beta' = \beta$ olur. Ayrıca, $im(\alpha) = im(\beta'\gamma'\delta') \subseteq im(\delta')$ olur.

$$|im(\delta')| = \begin{cases} |im(\alpha)|, & n \in im(\alpha) \\ |im(\alpha)| + 1, & n \notin im(\alpha) \end{cases}$$

olduğundan

$$im(\delta') = \begin{cases} im(\alpha), & n \in im(\alpha) \\ im(\alpha) \cup \{n\}\,, & n \notin im(\alpha) \end{cases}$$

olur, dolayısıyla $\delta' = \bar{b}_X = \delta$. Ayrıca, $t \in X_r$ ve $x \in K_t$ için

$$i_{t\pi} = x\alpha = x(\beta'\gamma'\delta') = x(\beta\gamma'\delta) = (t\gamma')\delta = i_{t\gamma'}$$

olup, $\gamma'|_{X_r} = \pi = \gamma|_{X_r}$ olduğundan $\gamma' = \gamma$ olur. Böylelikle ispat tamamlanır.

Bu lemmanın sonucu olarak $T_n \backslash S_n = A_n \ell_{n-1} B_n$ olur ve bu yarıgrup $\bar{A} \cup \bar{S} \cup \bar{B}$ kümesi tarafından üretilir. Bundan dolayı

$$\phi: (A \cup S \cup B)^+ \to T_n \backslash S_n : \begin{cases} a_{ij} \mapsto \bar{a}_{ij} \\ s_i \mapsto \bar{s}_i \\ b_i \mapsto \bar{b}_i \end{cases}$$

olacak şekilde bir epimorfizm tanımlanabilir. $w \in (A \cup S \cup B)^+$ olmak üzere $\overline{w} = w\phi$ olsun.

$$s_r a_{ij} = \begin{cases} a_{n-1,n} a_{ij} s_r \ , & r \leq i-2 \quad ve \quad j < n \\ a_{n-1,n} a_{i-1,j} s_r , & r = i-1 \ \ ve \ \ j < n \\ a_{n-1,n} a_{i+1,j} s_r , & r = i < j-1 \ \ ve \ \ j < n \\ a_{n-1,n} a_{ij} \ , & r = i = j-1 \\ a_{n-1,n} a_{ij} s_r , & i < \ r < j-1 \ \ ve \, j < n \\ a_{n-1,n} a_{i,j-1} \ , & i < \ r < j-1 \ ve \, j < n \\ a_{n-1,n} a_{i,j-1} , & i < r = j-1 \\ a_{n-1,n} a_{i,j+1} , & r = j \\ a_{n-1,n} a_{ij} s_{r-1} \ , & j < r \\ s_r \ , & j = n \end{cases}$$

(SA1-SA9)

$$b_i s_r = \begin{cases} a_{n-1,n} a_{n-2,n-1} s_r b_i \ , & r \leq i-2 \ ve \quad i < n-1 \\ s_r \ , & r \leq i-2 \ ve \quad i = n-1 \\ a_{n-1,n} a_{n-2,n-1} b_{i-1} \ , & r \leq i-1 \ ve \quad i < n-1 \\ s_r , & r = i-1 \ ve \quad i = n-1 \\ a_{n-1,n} a_{n-2,n-1} b_{i+1} \ , & r = i \\ a_{n-1,n} a_{n-2,n-1} s_{i+1} , & r = i = n-3 \\ a_{n-1,n} a_{n-2,n-1} \ , & r = i = n-2 \\ a_{n-1,n} a_{in-2,n-1} s_{r-1} b_i \quad , & i < r \end{cases}$$

(BS1-BS8)

$$b_r a_{ij} = \begin{cases} a_{n-1,n} a_{i-1,j-1} b_r , & r < i \\ s_{j-2} \ldots s_i \ \ , & r = i \ < j-1 \\ a_{n-1,n} \ \ , & r = i = j-1 \\ a_{n-1,n} a_{i,j-1} b_r \ , & i < r < j \\ a_{n-1,n} \ \ , & r = j \\ a_{n-1,n} a_{ij} b_{r-1} \ , & j < r \end{cases}$$

(BA1-BA6)

$$a_{n-1,n} b_{n-1} = b_{n-1} \text{ (BA7)}$$

bağıntıları tanımlansın. $(A \cup S \cup B)^+$ üzerindeki (A1-A5),(S1-S4),(B1-B2),(SA1-SA9),(BS1-BS8) ve (BA1-BA7) ilişkileri ile üretilmiş kongrüansı "$\sim$" ile gösterelim.

Lemma 4.3.2. $\sim \subseteq ker\phi$ olur (East, 2010).

İspat. (A1-A5),(S1-S4),(B1-B2),(SA1-SA9),(BS1-BS8) ve (BA1-BA7) ilişkiler $T_n \backslash S_n$ de sağlandığından dolayı $\sim\ \subseteq ker\phi$ olur.

Lemma 4.3.3. Eğer $w \in (A \cup S \cup B)^+$ ise $\exists w_1 \in (A \cup S)^+$ ve $w_2 \in B^*$ için $w \sim w_1 w_2$ olur (East, 2010).

İspat. Eğer $w \in (A \cup S)^+$ ise sonuç açıktır. Ayrıca, (BS1-BS8) ve (BA1-BA6) bağlantıları kullanarak B kümesine ait elemanlar kelimenin en sağında olacak şekilde tekrardan düzenlenebilir (veya bu durumda kelimenin içerinde B kümesine ait eleman olmayabilir). Böylece öyle $w_1{}' \in (A \cup S)^+$ ve $w_2 \in B^*$ vardır ki $w \sim w_1{}' w_2$ olur. Eğer $w_1' \neq \varepsilon$ sonuç açıktır. Eğer $w_1' = \varepsilon$ ise (B2) ve (BA7) deki bağıntıları kullanılırsa $w \sim w_2 \sim b_{n-1} w_2 \sim a_{n-1,n} b_{n-1} w_2 \sim a_{n-1,n} w_2$ olur, bu durumda $w_1 = a_{n-1,n}$ olup ispat tamamlanır.

Lemma 4.3.4. Eğer $w \in (A \cup S)^+$ ise öyle $w_1 \in A^+$ ve $w_2 \in S_{n-1}^+$ vardır ki $w \sim w_1 w_2$ olur (East, 2010).

İspat. Eğer $w \in A^+$ ise $(A1)$ den dolayı $w \sim w a_{n-1,n}$ olur, bu durumda $w_1 = w$ ve $w_2 = a_{n-1,n}$ alınır. Diğer durumda ise $(SA1 - SA9)$ bağıntıları kullanılırsa S kümesine ait elemanlar kelimenin en sağında olacak şekilde tekrardan düzenlenebilir (veya bu durumda kelimenin içerinde S kümesine ait eleman olmayabilir). Bu durumda $\exists w_1' \in A^*$ ve $w_2' \in S^*$ vardır ve $w \sim w_1' w_2'$ olur. Ayrıca $(A1)$ ve $(S1)$ bağıntıları kullanılırsa $w_1' w_2' \sim w_1' a_{n-1,n} a_{n-1,n} w_2'$ olur, bu durumda $w_1 = w_1' a_{n-1,n}$ ve $w_2 = a_{n-1,n} w_2'$ alınır.

Lemma 4.3.3 ve Lemma 4.3.4 ün bir sonucunu yazalım.

Sonuç 4.3.1. Eğer $w \in (A \cup S \cup B)^+$ ise öyle $w_1 \in A^+, w_2 \in S_{n-1}^+$ ve $w_3 \in B^*$ vardır ve $w \sim w_1 w_2 w_3$ olur (East, 2010).

N_A ve N_B sırasıyla A ve B kümeleri üzerindeki tüm normal kelimelerin kümesini göstermektedir. $0 \leq k \leq n-1$ için $N_A^{(k)} = \{w \in N_A | \ell(w) = k\}$ ve $N_B^{(k)} =$

$\{w \in N_B | \ell(w) = k\}$ olarak tanımlansın, ayrıca $N_A^{(+)} = N_A \setminus N_A^{(0)}$ olsun. Lemma 4.2.1.7, Lemma 4.2.2.4 ve Sonuç 4.3.1 in bir sonucunu yazalım.

Sonuç 4.3.2. Eğer $w \in (A \cup S \cup B)^+$ öyle $w_1 \in N_A^{(+)}, w_2 \in S_{n-1}^+$ ve $w_3 \in N_B$ vardır ki $w \sim w_1 w_2 w_3$ olur (East, 2010).

$1 \le i \le n-1$ için $\alpha_i = a_{in} a_{i,n-1} \dots a_{i,i+1} \in N_A^{(n-i)}$ kelimesini tanımlayalım. Bu durumda, $\overline{\alpha_\iota} \in A_n$ ve

$$x\overline{\alpha_\iota} = \begin{cases} x, & 1 \le x \le i \\ i, & i+1 \le x \le n \end{cases}$$

olur.

Lemma 4.3.5. $1 \le k \le n-1$ olmak üzere $w \in N_A^{(k)}$ ise $w \sim w\alpha_{n-k}$ olur (East, 2010).

İspat. Lemma 4.2.1.8 den $im(\overline{w}) = \{1, \dots, n-k\}$ olur, ayrıca $\overline{\alpha}_{n-k}$ dönüşümünün tanım kümesi $\{1, \dots, n-k\}$ kümesine kısıtlanırsa bu küme üzerinde birim dönüşüm olur. Böylece $\overline{w}\overline{\alpha}_{n-k} = \overline{w}$ olup $w \sim w\alpha_{n-k}$ olur.

Lemma 4.3.6. Eğer $1 \le i \le n-1$ ve $w \in S_i^+$ ise o zaman $\alpha_i w \alpha_i \sim \alpha_i w$ olur (East, 2010).

İspat: İlk olarak, eğer $1 \le r \le i-1$ ise

$$\alpha_i s_r \alpha_i = \alpha_i s_r a_{in} a_{i,n-1} \dots a_{i,i+1}$$
$$\sim \alpha_i s_r a_{i,n-1} \dots a_{i,i+1} \qquad (SA9 \text{ bağıntısından})$$

$$\sim \begin{cases} \alpha_i (a_{n-1,n} a_{i,n-1}) \dots (a_{n-1,n} a_{i,i+1}) s_r, & (SA1' \text{den}) \text{ eğer}, r \le i-2 \\ \alpha_i (a_{n-1,n} a_{i-1,n-1}) \dots (a_{n-1,n} a_{i-1,i+1}) s_r, & (SA2' \text{den}) \text{ eğer } r = i-1 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} \alpha_i a_{i,n-1} \dots a_{i,i+1} s_r, & (A1 \text{ bağıntısından}) \\ \alpha_i a_{i-1,n-1} \dots a_{i-1,i+1} s_r, & (A1 \text{ bağıntısından}) \end{cases}$$

olur, her iki durumda $\overline{a}_{i,n-1} \dots \overline{a}_{i,i+1}$ ve $\overline{a}_{i-1,n-1} \dots \overline{a}_{i-1,i+1}$ dönüşümlerinin tanım kümeleri $\{1, \dots, i\} = im(\overline{\alpha}_i)$ kümesine kısıtlanırsa birim dönüşüm olduğundan $\alpha_i s_i \alpha_i \sim \alpha_i s_r$ olur. Diğer durumda ise yani $r \ge i$ ise, $\alpha_i a_{n-1} \alpha_i \sim \alpha_i a_{n-1,n}$ olur. Böylece

$\ell(w) = 1$ ise $\alpha_i w \alpha_i \sim \alpha_i w$ olduğu gösterildi. Eğer $\ell(w) \geq 2$ ise o zaman $\exists w_1, w_2 \in S_i^+$ vardır ki $w = w_1 w_2$ olup, $\ell(w_1)$ ve $\ell(w_2)$ değerleri $\ell(w)$ dan daha küçüktür. w_1 ve w_2 ye tümevarım hipotezi uygulanırsa,

$$\alpha_i w \alpha_i = \alpha_i w_1 w_2 \alpha_i \sim \alpha_i w_1 \alpha_i w_2 \alpha_i \sim \alpha_i w_1 \alpha_i w_2 \sim \alpha_i w_1 w_2 = \alpha_i w$$

eşitliği elde edilir, böylece ispat tamamlanır.

Lemma 4.3.7. $1 \leq i \leq n-2$ için $\alpha_i b_{i+1} \sim \alpha_i$ olur (East, 2010).

İspat. r üzerinden tümevarımla her $1 \leq r \leq n-i-1$ için $a_{in}\alpha_{i,n-1} \ldots a_{i,n-r} \sim a_{in} a_{i,n-1} \ldots a_{i,n-r} b_{n-r}$ olduğunu gösterelim. Eğer $r = 1$ ise $\bar{a}_{n-1,n}\bar{a}_{n-2,n-1}$ dönüşümünün tanım kümesi $\{1, \ldots, n-2\} = im(\bar{a}_{in}\bar{a}_{i,n-1})$ kümesine kısıtlanırsa birim dönüşüm olur, böylece

$$a_{in}a_{i,n-1} \sim a_{in}a_{i,n-1}a_{n-1,n}a_{n-2,n-1}$$
$$\sim a_{in}a_{i,n-1}a_{n-1,n}a_{n-2,n-1}b_{n-1} \qquad \text{(BS5 ve BS7 bağıntılarından)}$$
$$\sim a_{in}a_{i,n-1}b_{n-1}$$

olur. Eğer $2 \leq r \leq n-i-1$ ise,

$$a_{in}\alpha_{i,n-1} \ldots a_{i,n-r} \sim a_{in}a_{i,n-1} \ldots a_{i,n-r+1}b_{n-r+1}a_{i,n-r} \qquad \text{(tümevarım hipotezinden)}$$
$$\sim a_{in}a_{i,n-1} \ldots a_{i,n-r+1}a_{n-1,n}a_{i,n-r,}b_{n-r} \qquad (BA6 \text{ bağıntısından})$$
$$\sim a_{in}a_{i,n-1} \ldots a_{i,n-r+1}a_{i,n-r}b_{n-r} \qquad (A1 \text{ bağıntısından})$$

olur. Sonuç olarak, $r = n-i-1$ alınırsa $\alpha_i b_{i+1} \sim \alpha_i$ olur.

Lemma 4.3.8. Eğer $1 \leq i \leq n-2$ ve $1 \leq r \leq i+1$ ise $\alpha_i v_{r,i+1} \sim \alpha_i b_r$ olur (East, 2010).

İspat. İspatı için r üzerinden (tersine) tümevarım ile yapalım. Eğer $r = i+1$ ise o zaman; $(A1)$ den dolayı

$$\alpha_i v_{r,i+1} = \alpha_i a_{n-1,n} \sim \alpha_i$$

olur ve Lemma 4.3.7' den dolayı bu durumda $\alpha_i v_{r,i+1} \sim \alpha_i b_r$ olur. Eğer $1 \leq r \leq i$ ise,

$$\alpha_i a_{n-1,n} a_{n-2,n-1} \sim \alpha_i$$

olur. Ayrıca,

$$\alpha_i v_{r,i+1} = \alpha_i v_{r+1,i+1} s_r \qquad \text{(tanımdan)}$$

$$\sim \alpha_i b_{r+1} s_r \qquad \text{(tümevarım hipotezinden)}$$

$$\sim \begin{cases} \alpha_i a_{n-1,n} a_{n-2,n-1} b_r, & r < n-2 \text{ ise } (BS3 \text{ bağıntısından}) \\ \alpha_i s_{n-2}, & r = n-2 \text{ ise } (BS4 \text{ bağınıtısından}) \end{cases}$$

olur. Böylece, $r < n-2$ ise $\alpha_i v_{r,i+1} \sim \alpha_i a_{n-1,n} a_{n-2,n-1} b_r \sim \alpha_i b_r$ olur. Eğer $r = n-2$ ise,

$$\alpha_i s_{n-2} \sim a_i a_{n-1,n} a_{n-2,n-1} s_{n-2} \qquad \text{(tanımdan)}$$

$$\sim \alpha_i a_{n-1,n} a_{n-2,n-1} b_{n-2} \qquad (BS5) \text{ ve } (BS6) \text{ bağıntılarından}$$

$$\sim \alpha_i b_{n-2} \qquad \text{(tanımdan)}$$

olur, böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.3.9. Eğer $2 \le k \le n-1, w_1 \in N_A^{(k)}$ ve $w_2 \in S_{n-k+1}^+$ ise o zaman öyle $w_2' \in S_{n-k}^+$ vardır ki $1 \le r \le n-k+1$ olmak üzere $w_1 w_2 \sim w_1 w_2' b_r$ olur (East, 2010).

İspat. $1 \le r \le n-k+1$ olmak üzere Lemma 4.2.3.1 den dolayı öyle bir $w_2' \in S_{n-k}^+$ vardır ki $w_2 \sim w_2' v_{r,n-k+1}$ olur. Böylece,

$$w_1 w_2 \sim w_1 w_2' v_{r,n-k+1} \sim w_1 \alpha_{n-k} w_2' v_{r,n-k+1} \qquad \text{(Lemma 4.3.5 ten)}$$

$$\sim w_1 \alpha_{n-k} w_2' \alpha_{n-k} v_{r,n-k+1} \qquad \text{(Lemma 4.3.6 dan)}$$

$$\sim w_1 \alpha_{n-k} w_2' \alpha_{n-k} b_r \qquad \text{(Lemma 4.3.8 den)}$$

$$\sim w_1 \alpha_{n-k} w_2' b_r \qquad \text{(Lemma 4.3.6 dan)}$$

$$\sim w_1 w_2' b_r \qquad \text{(Lemma 4.3.5 ten)}$$

olup ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.3. Eğer $1 \le k \le n-1, w_1 \in N_A^{(k)}$ ve $w_2 \in S_{n-k}^+$ ise o zaman öyle $w_2' \in S_{n-k}^+$ vardır ki $1 \le r_1 \ldots r_{k-1} \le n-1$ olmak üzere $w_1 w_2 \sim w_1 w_2' b_{r_1} \ldots b_{r_{k-1}}$ olur (East, 2010).

İspat. Eğer $k = 1$ ise sonuç açıktır, varsayalım ki $2 \le k \le n-1$ olsun. $1 \le i < j \le n$ için $w_1' \in N_A^{(k-1)}$ olmak üzere $w_1 = a_{ij} w_1'$ olur. Tümevarım hipotezinden en az bir $w_2'' \in S_{n-k+1}^+$ vardır ki $1 \le r_2, \ldots, r_{k-1} \le n-1$ olmak üzere $w_1' w_2 \sim w_1' w_2'' b_{r_2} \ldots b_{r_{k-1}}$ olur. Böylece,

$$w_1 w_2 = a_{ij} w_1' w_2 \sim a_{ij} w_1' w_2'' b_{r_2} \ldots b_{r_{k-1}} = w_1 w_2'' b_{r_2} \ldots b_{r_{k-1}}$$

olur. Lemma 4.3.9 un $w_1 w_2''$ elemanına uygulanmasıyla ispat tamamlanır.

Lemma 2.2.2.4, Sonuç 4.3.1 ve Sonuç 4.3.3 ifadelerinin bir sonucunu yazalım.

Sonuç 4.3.4. Eğer $w \in (A \cup B \cup S)^+$ ise o zaman $1 \leq k \leq n-1$ olmak üzere öyle $w_1 \in N_A^{(k)}$, $w_2 \in S_{n-k}^+$, $w_3 \in N_B$ vardır ki $w \sim w_1 w_2 w_3$ olur (East, 2010).

$1 \leq i \leq n-1$ için $\beta_i = b_i b_{i+1} \ldots b_{n-1} \in N_B^{(n-i)}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $\bar{\beta_i} \in B_n$ olup,

$$x\bar{\beta_i} = \begin{cases} x, & 1 \leq x \leq i-1 \\ n, & i \leq x \leq n \end{cases}$$

olur.

Lemma 4.3.10. Eğer $1 \leq k \leq n-1$ ve $w \in N_B^{(k)}$ ise o zaman $w \sim \beta_{n-k} w$ olur (East, 2010).

İspat. Tanımdan $\beta_{n-k} \in N_B^{(k)}$ olur, böylece $\ker(\bar{\beta}_{n-k}) = \ker(\bar{w})$ olur. Bu durumda, $\overline{w}$ elemanı ile $\bar{\beta}_{n-k}$ eleamanı T_n de R bağlantılı olur. $\bar{\beta}_{n-k}$ idempotent eleman olduğundan $\bar{\beta}_{n-k}$ elemanı $\bar{\beta}_{n-k}$ elemanını içeren Green R-denklik sınıfının sol birimi olur. Böylece $w \sim \beta_{n-k} w$ olur.

Lemma 4.3.11. Eğer $1 \leq k \leq n-1$ ise o zaman $\beta_i \sim \alpha_i \beta_i$ (East, 2010).

İspat: i üzerinden (tersine) tümevarımla ispatı yapalım. $i = n-1$ ise, $(BA7)$ bağıntısı kullanılırsa

$$\beta_{n-1} = b_{n-1} \sim a_{n-1,n} b_{n-1} = \alpha_{n-1}\beta_{n-1}$$

olur. $1 \leq i \leq n-2$ olsun, bu durumda

$$\beta_i = b_i \beta_{i+1}$$

$$\sim b_i \alpha_{i+1} \beta_{i+1} \text{ (tümevarım hipotezinden)}$$

$$= b_i a_{i+1,n} a_{i+1,n-1} \ldots a_{i+1,i+2} \beta_{i+1}$$

$$\sim (a_{n-1,n} a_{i,n-1})(a_{n-1,n} a_{i,n-2}) \ldots (a_{n-1} a_{i,i+1}) b_i \beta_{i+1} \qquad (BA1 \text{ bağıntısından})$$

$$\sim a_{n-1,n}a_{i,n-1}a_{i,n-2} \dots a_{i,i+1}b_i\beta_{i+1} \qquad (A1 \text{ bağıntısından})$$
$$\sim a_{in}a_{i,n-1}a_{i,n-2} \dots a_{i,i+1}b_i\beta_{i+1} \qquad (A2 \text{ bağıntısından})$$
$$= \alpha_i\beta_i$$

olup ispat tamamlanır.

Tanımlar kullanılarak aşağıdaki 3 adet lemmayı yazabiliriz.

Lemma 4.3.12. $1 \leq i < j \leq n-1$ ise $\alpha_j\alpha_i \sim \alpha_i$ olur (East, 2010).

Lemma 4.3.13. $1 \leq i \leq n-2$ ise $\alpha_i \sim \alpha_{i+1}a_{i,i+1}$ olur (East, 2010).

Lemma 4.3.14. $1 \leq i \leq n-1$ ise $\beta_i \sim b_i^{n-i}$ olur (East, 2010).

Lemma 4.3.7 ve Lemma 4.3.14 ün bir sonucu olarak aşağıdaki lemmayı yazabiliriz.

Lemma 4.3.15. $1 \leq i \leq n-2$ ise $\alpha_i \sim \alpha_i\beta_{i+1}$ olur (East, 2010).

Lemma 4.3.16. Eğer $0 \leq k \leq n-1$, $w \in N_B^{(k)}$ ve $1 \leq i \leq n-k$ ise bu durumda öyle $w' \in N_B^{(n-i)}$ vardır ki $\beta_i w \sim w'$ olur (East, 2010).

İspat. $\bar{\beta_i}$ dönüşümünün tanım kümesi $\{1, \dots, i-1\}$ kümesine kısıtlanırsa birim dönüşüm olur, bundan dolayı eğer $1 \leq x \leq i-1$ ise $x\bar{\beta_i}\bar{w} = x\bar{w}$ ve eğer $i \leq x \leq n$ ise $x\bar{\beta_i}\bar{w} = n\bar{w} = n$ olur. Ayrıca $\bar{w}_{|\{1,\dots,i\}}$ dönüşümü $1 \leq i \leq n-k$ aralığında birebirdir. Böylece $rank(\bar{\beta_i}\bar{w}) = i$ olup Lemma 4.2.2.2 den dolayı öyle $w' \in N_B^{(n-i)}$ vardır ki $\beta_i w \sim w'$ olur.

Lemma 4.3.17. $2 \leq i \leq n-1$ olmak üzere $w_1 \in S_{n-1}^+$ ve $w_2 \in N_A^{(i)}$ olsun. Bu durumda $j \in \{i, i+1\}$ olmak üzere öyle $w_1' \in S_{n-1}^+$ ve $w_2' \in N_A^{(j)}$ vardır ki $w_1w_2 \sim w_2'w_1'$ olur (East, 2010).

İspat. Lemma 4.2.1.7 ve Lemma 4.3.4 ten dolayı öyle $w_1' \in S_{n-1}^{+}$ ve $w_2' \in N_A^{(+)}$ vardır ki $w_1 w_2 \sim w_2' w_1'$ olur, bundan dolayı $j = \ell(w_2') \in \{i, i+1\}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Ayrıca,

$$rank(\overline{w}_1\overline{w}_2) = \begin{cases} rank(\overline{w}_2) - 1 & (n\overline{w}_2)\overline{w}_2^{-1} \\ rank(\overline{w}_2) & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olur. $im(\overline{w}_2) = \{1, \dots, n-i\}$ olduğundan Lemma 4.2.1.8 den dolayı $rank(\overline{w}_1\overline{w}_2)$ ya $n-i$ ya da $n-i-1$ olur. Yine, Lemma 4.2.1.8 den dolayı $im(\overline{w}_2') = \{1, \dots, n-j\}$ olur, ayrıca $\overline{w}_1' \in \ell_{n-1}$ olup $\overline{w}_1'$ dönüşümünün tanım kümesi $n^b \supseteq \{1, \dots, n-j\}$ kümesine kısıtlandığında birebir dönüşüm olduğundan dolayı $rank(\overline{w}_2'\overline{w}_1') = rank(\overline{w}_2') = n-j$ olur. $w_1 w_2 \sim w_2' w_1'$ olduğundan $n-j = n-i$ ya da $n-j = n-i-1$ olur. Böylelikle ispat tamamlanır.

Lemma 4.3.18. $i < j$ olmak üzere $w_1 \in N_A^{(i)}$ ve $w_2 \in N_A^{(j)}$ olsun, bu durumda $k \geq j$ olmak üzere öyle $w_3 \in N_A^{(k)}$ vardır ki $w_1 w_2 \sim w_3$ olur (East, 2010).

İspat. Lemma 4.2.1.7' den öyle $w_3 \in N_A^{(+)}$ vardır ki $w_1 w_2 \sim w_3$ olur. Bundan dolayı $k = l(w_3) \geq j$ olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 4.2.1.8 den dolayı

$$\{1, \dots, n-k\} = im(\overline{w}_3) = im(\overline{w}_1\overline{w}_2) \subseteq im(\overline{w}_2) = \{1, \dots n-j\}$$

olur, böylece $n-k \leq n-j$ olur, sonuç olarak $k \geq j$ olur.

Lemma 4.3.18 in bir benzerini ifade edelim.

Lemma 4.3.19. $0 \leq k \leq n-1$ olmak üzere $w_1 \in B^*$ ve $w_2 \in N_B^{(k)}$ olsun, bu durumda $l \geq k$ olmak üzere öyle $w_3 \in N_B^{(l)}$ vardır ki $w_1 w_2 \sim w_3$ olur (East, 2010).

Lemma 4.3.20. $w \in (A \cup S \cup B)^{+}$olsun. Bu durumda $1 \leq k \leq n-1$ ve $l \in \{k, k-l\}$ olmak üzere öyle $w_1 \in N_A^{(k)}, w_2 \in S_{n-k}^{+}$ ve $w_3 \in N_B^{(l)}$ vardır ki $w \sim w_1 w_2 w_3$ olur. Üstelik, $rank(\overline{w}) = n-k$ olur ve $l = k$ olması için gerek ve yeter koşul $n \in im(\overline{w})$ olmasıdır (East, 2010).

İspat. Sonuç 4.3.4 ten en az bir $1 \leq p \leq n-1$ için öyle $u_1 \in N_A^{(p)}, u_2 \in S_{n-p}^+$ ve $u_3 \in N_B$ vardır ki $w \sim u_1 u_2 u_3$ olur. $q = \ell(u_3)$ olsun. İlk olarak,

$$(i)\ y \in \{x, x-1\}$$

$$(ii)\ x + y > p + q$$

koşullarından en az birisini sağlayan x ve y sayıları için öyle $v_1 \in N_A^{(x)}$,$v_2 \in S_{n-x}^+$ ve $v_3 \in N_B^{(y)}$ vardır ki $w \sim v_1 v_2 v_3$ olduğunu ispatlayalım.

Eğer $q \in \{p, p-1\}$ ise bu durumda (i) koşulu sağlanır ($x = p$ ve $y = q$). $q < p-1$ ise, bu durumda

$$w \sim u_1 u_2 u_3$$
$$\sim u_1 \alpha_{n-p} u_2 u_3 \text{ (Lemma 4.3.5 ten)}$$
$$\sim u_1 \alpha_{n-p} u_2 \alpha_{n-p} u_3 \text{ (Lemma 4.3.6 dan)}$$
$$\sim u_1 \alpha_{n-p} u_2 \alpha_{n-p} \beta_{n-p+1} u_3 \text{ (Lemma 4.3.15 ten)}$$
$$\sim u_1 \alpha_{n-p} u_2 \alpha_{n-p} u_3' \text{ (Lemma 4.3.16 dan, en az bir } u_3' \in N_B^{(p-1)} \text{ için)}$$
$$\sim u_1 u_2 u_3' \text{ (Lemma 4.3.5 ve Lemma 4.3.6 dan)}$$

olup (i) koşulu sağlanır. Eğer $q > p$ ise, bu durumda

$$w \sim u_1 u_2 u_3$$
$$\sim u_1 \alpha_{n-p} u_2 \alpha_{n-p} \beta_{n-p} u_3 \text{ (Lemma 4.3.5, Lemma 4.3.6 ve Lemma 4.3.10 dan)}$$
$$\sim u_1 \alpha_{n-p} u_2 \alpha_{n-p} \alpha_{n-q} \beta_{n-p} u_3 \text{ (Lemma 4.3.11 den)}$$
$$\sim u_1 \alpha_{n-p} u_2 \alpha_{n-q} \beta_{n-p} u_3 \text{ (Lemma 4.3.12 den)}$$
$$\sim u_1 u_2 \alpha_{n-p} u_3 \text{ (Lemma 4.3.5 ve Lemma 4.3.10 dan)}$$
$$\sim u_1 u_4 u_2' u_3 \begin{cases} \text{Lemma 4.3.17 den,} \\ \text{en az bir } u_2' \in S_{n-1}^+ \text{ ve } u_4 \in N_A^{(j)} \\ j \in \{q, q+1\} \end{cases}$$
$$\sim u_1' u_2' u_3 \begin{cases} \text{Lemma 4.3.18 den,} \\ k \geq j \text{ için en az bir } u_1' \in N_A^{(k)} \end{cases}$$
$$\sim u_1' u_2'' b_{r_1} \dots b_{r_{k-1}} u_3 \begin{cases} \text{Sonuç 4.3.3 ten} \\ \text{en az bir } u_2'' \in S_{n-k}^+ \text{ ve } 1 \leq r_1, \dots, r_{k-1} \leq n-1 \end{cases}$$
$$\sim u_1' u_2'' u_3' \begin{cases} \text{Lemma 4.3.20 den,} \\ l \geq q \text{ için en az bir } u_3' \in N_B^{(l)} \end{cases}$$

olup $k + l > p + q$ olduğundan (ii) sağlanır.

p ve q sayılarının sonlu sayılar olmasından dolayı yukarıdaki argüman yeterli sayıda (sonlu olmak üzere) tekrarda uygulanırsa bu durumda $1 \leq k \leq n-1$ ve $l \in$

$\{k, k-l\}$ olmak üzere öyle $w_1 \in N_A^{(k)}, w_2 \in S_{n-k}^+$ ve $w_3 \in N_B^{(l)}$ vardır ki $w \sim w_1 w_2 w_3$ ifadesi elde edilir.

Ayrıca, bu durumda $X_n(\overline{w}_1 \overline{w}_2) = \{1, \dots n-k\}$ $\overline{w}_2 = \{1, \dots n-k\}$ olur. $w_3 \in N_B^{(l)}$ ve $l \leq k$ olduğundan $\overline{w}_3$ dönüşümünün tanım kümesi $\{1, \dots n-k\}$ kümesine kısıtlanmasıyla elde edilen dönüşüm birebir olur bundan dolayı $rank(\overline{w}) = n-k$ olur. $\overline{w}_3$ dönüşümünün çekirdek sınıfları $\{1\}, \dots, \{n-l-1\}, \{n-l, \dots, n\}$ olur, böylece $n = (n-1)\overline{w}_3 \in im(\overline{w})$ olması için gerek ve yeter koşul $n-l \in im(\overline{w}_1 \overline{w}_2) = \{1, \dots, n-k\}$ olmasıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.1. $T_n \setminus S_n$ yarıgrubunun takdimi,

$$< A \cup S \cup B | (A1 - A5), (S1 - S4), (B1 - B2), (SA1 - SA9),$$
$$(BS1 - BS8), (BA1, BA7)>$$

olur (East, 2010).

İspat. Lemma 4.3.2 den $\sim \subseteq ker\phi$ olduğu bilindiğinden dolayı $ker\phi \subseteq \sim$ olduğunu göstermek yeterlidir. $(u,v) \in ker\phi$ olsun, bu durumda bir k sayısı için $k = rank(\overline{u}) = rank(\overline{v})$ olur. Ayrıca, Lemma 4.3.20 den $l \in \{k, k-1\}$ olmak üzere öyle $u_1, v_1 \in N_A^{(k)}, u_2, v_2 \in S_{n-k}^+$ ve $u_3, v_3 \in N_B^{(l)}$ vardır ki $u \sim u_1 u_2 u_3$ ve $v \sim v_1 v_2 v_3$ olur. Lemma 4.3.1 den $\overline{u}_1 = \overline{v}_1, \overline{u}_2 = \overline{v}_2$ ve $\overline{u}_3 = \overline{v}_3$ olur. Böylece, Teorem 4.2.1.1, Teorem 4.2.2.1 ve Teorem 4.2.3.1 den $u_1 = v_1, u_2 \sim_s v_2$ ve $u_3 = v_3$ olur. Sonuç olarak

$$u \sim u_1 u_2 u_3 = u_1 u_2 v_3 \sim v_1 v_2 v_3 \sim v$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.1 de verilen takdim $T_n \setminus S_n$ minimal doğuray kümesiyle bağlantılı olacak şekildeki bir takdim değildir (East, 2010). Şimdi $n = 3$ için yani $T_3 \setminus S_3$ yarıgrubunun minimal doğuray kümesi ile bağlantılı olacak şekilde takdimini verelim.

Önerme 4.3.1. $A = \{a, b, c\}$, $R_1 = \{a^2 = a, b^2 = b, c^2 = c\}$, $R_2 = \{aba = bab = cba = ba\}$, $R_3 = \{aca = bac = cac = ac\}$, $R_4 = \{acb = bcb = cbc = cb\}$, $R_5 = \{abcabca = a, bcabcab = b, = cabcabc = c\}$ ve $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4 \cup R_5$

olsun. Bu durumda, $\langle A|R\rangle$ ifadesi $T_3 \setminus S_3$ yarıgrubunun minimal doğuray kümesi ile bağlantılı olacak şekilde bir takdimidir.

İspat. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda $<\alpha,\beta,\gamma>= T_3 \setminus S_3$ olur, ayrıca $rank(T_3 \setminus S_3) = 3$ olduğundan $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ kümesi $T_3 \setminus S_3$ yarıgrubunun minimal doğuray kümesidir. $A = \{a,b,c\}$ ve $f: A \longrightarrow T_3 \setminus S_3$ fonksiyonunu $af = \alpha$, $bf = \beta$ ve $cf = \gamma$ olarak tanımlayalım, böylece $\bar{f}: A^+ \longrightarrow T_3 \setminus S_3$ homomorfizm genişlemesi mevcut olur, ayrıca $\bar{f}$ örtendir. $R_1 = \{a^2 = a, b^2 = b, c^2 = c\}$, $R_2 = \{aba = bab = cba = ba\}$, $R_3 = \{aca = bac = cac = ac\}$, $R_4 = \{acb = bcb = cbc = cb\}$, $R_5 = \{abcabca = a, bcabcab = b, = cabcabc = c\}$ ve $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4 \cup R_5$ olsun. $a^2\bar{f} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = a\bar{f}$ olur, benzer şekilde R kümesindeki tüm bağıntıların $T_3 \setminus S_3$ yarıgrubunda sağlandığı kolayca gösterilir. Yani bu durumda $\langle A|R\rangle$ den $T_3 \setminus S_3$ yarıgrubuna örten homomorfizm vardır, eğer bu örten homomorfizmin birebir olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. Ayrıca,

$$W = \{a, b, c, ab, ac, ba, bc, ca, cb, abc, bca, cab, abca, bcab, cabc, abcab, bcabc, cabca, abcabc, bcabca, cabcab\}$$

olarak tanımlayalım. A^+ üzerinde R kümesindeki bağıntılar kullanılarak yazılabilecek en fazla 6 harfli kelimelerin tamamı W kümesindeki bir kelimeye denktir. Yani $w \in A^+$ ve $1 \leq l(w) \leq 6$ ise öyle bir $\overline{w} \in W$ vardır ve $w = \overline{w}$ ifadesi R nin bir sonucudur, diğer bir ifadeyle $wR^\# = \overline{w}R^\#$ olur. Ayrıca $Wa \subseteq W$, $Wb \subseteq W$ ve $Wc \subseteq W$ olur, bundan dolayı $w \in A^+$ öyle bir $\overline{w} \in W$ vardır ve $w = \overline{w}$ ifadesi R nin bir sonucudur. $|W| = 21 = |T_3 \setminus S_3|$ olduğundan dolayı ispat tamamlanır.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu tez çalışmasında yarıgrup takdimleri ile ilgili tanım teoremler verilmiş olup, $T_n \setminus S_n$ yarıgrubunun bir takdimi incelenmiştir, ayrıca $T_3 \setminus S_3$ yarıgrubunun minimal doğuray kümesi ile bağlantılı olacak şekilde bir takdimi sunulmuştur.

5.2. Öneriler

Bu tez çalışmasında sunulmuş olan yani $T_3 \setminus S_3$ yarıgrubunun minimal doğuray kümesi ile bağlantılı olacak şekildeki takdimi genelleştirilirse yani $n \in \mathbb{Z}^+$ için $T_n \setminus S_n$ yarıgrubunun minimal doğuray kümesi ile bağlantılı olacak şekilde bir takdimi bulunursa, bir açık problem çözülmüş olacaktır.

KAYNAKLAR

CAYLEY, A., 1854. On the Theory of Groups as Depending on the Symbolic Equation $\theta^n = 1$. Philosophical Magazine, 7 (42): 40-47.

CLIFFORD, A.H., PRESTON, G.R. 1962. The Algebraic Theory of Semigroups, Vol. 1. Math Surveys, No. 71 Amer. Math. Soc., 224p.

DYCK, W., 1882. Gruppentheoretische Studien. Mathematische Annalen, 20 (1): 1-44.

EAST, J., 2006. A Presentation of the Singular Part of the Symmetric Inverse Monoid. Commun. Algebra, 34: 1671-1689.

EAST, J., 2010. A Presentation for the Singular Part of the Full Transformation Semigroup. Semigroup Forum, 81: 357-379.

HOWIE, J.M., 1995. Fundamentals of Semigroup Theory. Claredon Press, Oxford, 351p.

LALLEMENT, G., 1979. Semigroups and Combinaotical Applications. John Wiley, New York., 376p.

MOORE, E.H., 1897. Concerning the Abstract Groups of Order $k!$ and $\frac{1}{2}k!$ Holohedrically Isomorphic with the Symmetric and Alternating Substitution Groups on k Letters. Proc. Lond. Math. Soc., 28: 357-366.

ROTMAN, J, 2003. Advanced Modern Algebra. Prencite-Hall, 1012p.

RUCKUC, N., 1995. Semigroup Presentations. Ph. D. Thesis University of St Andrews, 256p.