T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TERS YÖNDE İLERLEYEN YANMA MODELİNE DİFÜZYON TERİMİNİN EKLENMESİ

Hacire YOKUŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2022

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ iv
1. GİRİŞ 1
    1.1. Model 3
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR 5
3. MATERYAL ve YÖNTEM 7
    3.1. Materyal 7
    3.2. Yöntem 7
        3.2.1. Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları 7
        3.2.2. İlerleyen dalga denklemi 8
        3.2.3. Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için spektrum 10
        3.2.4. Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için ağırlık fonksiyonu 14
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA 21
    4.1. Ters Yönde İlerleyen Yanma Dalgalarının Lineer Kararlılığı 21
    4.2. Spektral Enerji Tahminleri 23
    4.3. Evans Fonksiyonu 31
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER 33
KAYNAKLAR 34
ÖZGEÇMİŞ 37

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TERS YÖNDE İLERLEYEN YANMA MODELİNE DİFÜZYON TERİMİNİN EKLENMESİ

Hacire YOKUŞ

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Fatih ÖZBAĞ
Yıl: 2022, sayfa: 37

Yanma dalgaları, sıvı olmayan petrol geri kazanım tekniklerinde ayrıntılı olarak incelendiğinden, bu çalışmada bu yanma dalgalarına yer verilmiştir. Asıl amaç; ilk durumda bir miktar katı yakıt bulunan gözenekli ortama hava pompalandığında ortaya çıkan ilerleyen dalgaları varlığını ispatlamaktır. Ele alınan yanma sistemi parçalı paraboliktir. Sistemdeki denklemlerin birinde difüzyon var iken diğer denklemlerde bulunmamaktadır. Diğer çalışmalardan farklı olarak bu yanma sisteminin oksijen denklemine bir difüzyon terimi eklenerek önce yanma dalgalarının değişmediği gösterilecek daha sonra ise sistemin spekturumu ve ağırlık fonksiyonu bulunacaktır. Ardından ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için lineer kararlılık çalışması yapılacaktır. Son olarak, spektral enerji yaklaşımı ile özdeğerlerin konumuna ilişkin bir sınır bulunacaktır. Bu çalışmalar oksijen ve sıcaklığın hızı eşit ve ilerleyen dalganın hızı negatif kabul edilerek yapılacaktır.

ANAHTAR KELİMELER: Yanma dalgası, Evans fonksiyonu, gözenekli ortam, spektral enerji, spektrum

ABSTRACT

MSc Thesis

ADDING DIFFUSION TERM TO THE COUNTERFLOW COMBUSTION MODEL

Hacire YOKUŞ

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Fatih ÖZBAĞ
Year: 2022, page: 37

Since combustion waves are studied in detail in non-fluid oil recovery techniques, these combustion waves are included in this study. The main purpose; In the first case, it is to prove the existence of propagating waves that appear when air is pumped into a porous medium containing some solid fuel. The combustion system considered is partially parabolic. While there is diffusion in one of the equations in the system, it is absent in the other equations. Unlike other studies, by adding a diffusion term to the oxygen equation of this combustion system, first it will be shown that the combustion waves do not change, and then the spectrum and weight function of the system will be found. Then, linear stability study will be done for combustion waves traveling in the opposite direction. Finally, with the spectral energy approximation, a bound will be found regarding the position of the eigenvalues. These studies will be carried out by assuming the velocity of oxygen and temperature as equal and the velocity of the traveling combsution waves as negative.

KEYWORDS: combustion waves, spectrum, porous media, spectral energy, evans function

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen, her koşulda beni bilgilendiren çok değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Fatih ÖZBAĞ'a şükranlarımı borç bilirim.

Ayrıca, bu zorlu süreçte her şartta yanımda olan ve destekleyen babam, annem ve kardeşlerime teşekkür ederim.

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

FC Fuel Controlled
OC Oxygen Controlled
TC Temperature Controlled

1. GİRİŞ

Yanma dalgaları, akışkan olmayan petrol geri kazanım tekniklerinde yaygın olarak incelenmektedir. Birkaç tane gelişmiş petrol geri kazanım yöntemleri vardır. En yaygın kullanılan yaklaşımlar; hava enjeksiyonu (yerinde yanma), buhar enjeksiyonu ve su enjeksiyonudur. Bu tezde, hava enjeksiyonu kullanılarak geliştirilmiş petrol geri kazanımının basitleştirilmiş, tek boyutlu bir modelinde ortaya çıkan yanma dalgaları incelenmiştir. Yerinde yanmanın (ISC) arkasındaki temel amaç, petrol viskozitesini düşürmek ve petrol akışını zenginleştirmektir. Bu yöntemle kurtarma sürecinin kontrol edilmesi zordur ve patlama tehlikesi vardır. Güvenlik riskleri nedeniyle bu yöntemin kullanımı yaygın değildir.

Bu tez gözenekli ortamdaki yanma dalgalarının analizine ayrılmıştır. Bu modelde, bir yanma dalgası sadece sabit uç durumlarına sahip sürekli durmaksızın hareket eden bir dalgadır. Yanma dalgalarının kararlılığını anlamak petrolü maksimum seviyede çıkarmaya yardımcı olur. Gözenekli ortamdaki yanma dalgaları ile ilgili çalışmalardan bazıları şunlardır: (Ozbag (2016); Marchesin ve Shecter (2003); Souza (2008); Akkutlu ve Yortsos (2003); Chapiro ve Souza (2016)).

Asıl amaç; ilk durumda bir miktar katı yakıt bulunan gözenekli ortama hava pompalandığında ortaya çıkan ilerleyen dalgaların varlığını ispatlamaktır. Çalıştığımız model ilk kez Akkutlu ve Yortsos (2003) tarafından öne sürülen yanma modeline dayanmaktadır ve (Chapiro (2009), Chapiro ve ark. (2014) ve Ozbag ve ark. (2018)) çalışmalarında daha da geliştirilmiştir. Ele alınan yanma sistemi parçalı paraboliktir. Üzerinde çalıştığımız model sıcaklık, oksijen ve katı yakıt denge yasalarını veren üç farklı diferansiyel denklemden oluşur. Bu modelde, sıcaklık denkleminde difüzyon terimi var iken oksijen ve katı yakıt denklemlerinde difüzyon terimi bulunmamaktadır, ayrıca katı yakıt yayılmaz ve oksijen yayılımının önemsenmediği kabul edilir.

Aynı yönde (co-flow) ve ters yönde (counter-flow) olmak üzere iki tip dalga vardır. Aynı yönde (co-flow) ilerleyen dalgaların varlığı, oksijen ve ısının aynı hızda taşındığı durum için Chapiro ve ark. (2014)' da pozitif hıza sahip dört tür yanma dalgası olduğu tespit edilmiştir. Bunlardan ikisi hızlı diğer ikisi ise yavaş yanma dalgalarıdır. Ozbag ve ark. (2018), ise sıcaklık hızının oksijen hızından küçük kabul edilerek pozitif hıza sahip altı tür yanma dalgası olduğu tespit edilmiştir. Bu dalgalardan ikisi hızlı yanma dalgası, ikisi yavaş yanma dalgası, diğer ikisi ise ara yanma dalgalarıdır.

Ters yönde (counter-flow) ilerleyen yanma dalgaların varlığı, oksijen ve ısının aynı hızda taşındığı durum için Chapiro ve Senos (2017)' da ve daha önemli durum olan oksijenin sıcaklıktan daha hızlı taşındığı durum için Barlas (2020)' de ispatlanmıştır. Yanma dalgası negatif bir hıza sahiptir ($c < 0$). Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları ile ilgili çalışmalardan bazıları (Chapiro ve Souza (2016); Schult ve ark. (1998); Souza (2008)) çalışmalarında bulunmaktadır.

Bu çalışma mühendislik, fizik ve uygulamalı matematik gibi uygulamalı bilimlerin pek çok farklı alanlarında kullanılan ilerleyen dalgaların analizine ayrılmıştır. Burada, özellikle mühendislik alanında petrol kazanımı metotlarında kullanılan yanma dalgalarının varlığının, çözümünün ve kararlılığının ispatlanması bu alanda önemli rol oynamaktadır. Bu çalışmada, oksijen denklemine difüzyon terimi eklendikten sonra oksijen ve sıcaklığın hızları eşit kabul edilerek ve yanma dalgasının hızı negatif kabul edilerek bulunan ilerleyen dalgaların kararlılık analizinin yapılması, bu çalışmayı diğer yapılan çalışmalardan farklı kılmaktadır.

Bu çalışmada, gözenekli ortama hava enjekte edildiğinde ortaya çıkan ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının varlığı araştırılmıştır. Burada oksijen ve sıcaklığın hızı aynı kabul edilip c negatif olarak varsayılmaktadır. Genel sınır koşulları ve genel dalgalar tanımlanmaktadır. Ardından yanma dalgaları varlığı ile ilgili teoremler ifade edilmektedir. Sadece her iki son duruma üstel olarak yaklaşan yanma dalgaları dikkate alınmaktadır. Modelimiz, faz düzlemi analizi adı verilen bir teknikle hareket eden dalgaların varlığını kanıtlamamızı sağlayan doğrusal olmayan sistemlerin davranışını incelemek için uygun bir biçimde basitleştirilmiştir. Bu nedenle modele difüzyon terimi eklendiğinde yanma dalgalarının değişmediği gösterilmektedir. Ayrıca bu dalgaların kararlılık analizi için önce matematiksel modelin spektrumu Fourier dönüşüm yöntemiyle bulunmuştur. Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için esas spektrumu stabilize eden bir ağırlık fonksiyonu olup olmadığı araştırılmıştır. Ardından ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının lineer kararlılığı hakkında bilgi verilmiştir. Bu lineer kararlılığı göstermek için Yurov (2013)' un yakın tarihli bir sonucundan yararlanılmaktadır. Son olarak, spektral enerji yaklaşımıyla kararsız özdeğerler için sınır bulunmuştur. Bulunan bu sınır, Evans fonksiyonu yardımı ile ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için kararlılık analizi yapılabilir. Buda gelecekteki çalışmalara bırakılmıştır.

Bu çalışma aşağıdaki gibi düzenlenmiştir. Bölüm 1.1' de matematiksel modeli tanıtıyoruz. Model; sıcaklık, oksijen ve yakıt dengesini veren üç farklı denklemden oluşur. Sıcaklık belirli bir eşik değere ulaştığında yanma oluşmaktadır. Bölüm 2' de yanma dalgaları için daha önce yapılan çalışmalar hatırlanmaktadır. Bölüm 3.1' te ise modele difüzyon terimi eklenerek verilen sistemi daha uygun bir biçimde incelemek için sistemi iki boyuta indirgeyerek ilerleyen dalgaları değiştirmediği gösterilmiştir. Ancak sürekli spektrumda bazı farklılıklara neden olabilir. Bu nedenle 3.2. bölümde difüzyon eklenmiş sistem için spektrum bulunmuştur. Ayrıca 3.3. bölümde bu model için ağırlık fonksiyonunun olup olmadığı incelenmiştir. Bölüm 4.1 de ise ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için lineer kararlılık çalışması yapılmıştır. 4.2. bölümde ise spektral enerji yaklaşımıyla kararsız özdeğerler için sınır bulunmuştur. Son olarak, 5. bölümde ise elde edilen bulgular özetlenerek sonuçlandırılmıştır.

1.1. Model

Ele alınan sistem, sıcaklık (θ), oksijen (Y) ve katı yakıt (ρ) denge yasalarını veren üç farklı denklemden oluşur.

$$\partial_t\theta + a\partial_x\theta = \partial_{xx}\theta + \rho Y\Phi, \tag{1.1}$$

$$\partial_t\rho = -\rho Y\Phi, \tag{1.2}$$

$$\partial_t Y + a\partial_x Y = -\rho Y\Phi, \tag{1.3}$$

$$\Phi = \begin{cases} e^{(-1/\theta)}, & \theta > 0 \\ 0, & \theta \leq 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

(Akkutlu ve Yortsos, 2003). Burada $a > 0$ termal ve oksijen taşıma hızı olup Φ birim reaksiyon hızıdır. Tutuşma sıcaklığının üzerinde yanmanın gerçekleştiği varsayılır; $\theta = 0$ olacak şekilde tutuşma sıcaklığı normalize edilmiştir. (1.1) denklemi, sıcaklığın taşınması ve difüzyonunun yanı sıra kimyasal reaksiyonla termal enerji üretimini temsil eder. (1.2) denklemi, dağılmayan ve gazla taşınmayan katı yakıt tüketimini temsil eder. (1.3) denklemi, kimyasal reaksiyonda oksijen taşınmasını ve tüketimini temsil eder. Oksijen difüzyonu ihmal edilir. Parametre sayısını azaltmak için denklemler boyutsuzlaştırılmıştır. Ayrıca $\rho \geq 0$ ve $Y \geq 0$ olan çözümlerle ilgilenilmektedir.

Aşağıdaki sabit sınır koşulları (1.1)–(1.3) sisteminin $t \geq 0$ ve $-\infty < x < \infty$ için verilmiştir.

$$(\theta, \rho, Y)(-\infty, t) = (\theta^L, \rho^L, Y^L), \qquad (\theta, \rho, Y)(+\infty, t) = (\theta^R, \rho^R, Y^R). \tag{1.5}$$

Reaksiyonun sınırda gerçekleşmeyeceği varsayılmaktadır. Dolayısıyla $x = \pm\infty$' da ya oksijen yetersizliği $Y = 0$ yani (OC), ya yetersiz sıcaklık $\theta \leq 0$ yani (TC), ya da yakıt yetersizliği $\rho = 0$ yani (FC), durumlarından birisi ya da iki veya üçü aynı anda ortaya çıkabilir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Dalganın yönü $(\theta^-, \rho^-, Y^-) \xrightarrow{c} (\theta^+, \rho^+, Y^+)$ şeklindedir. Bu dalga denkleminde sağ durum (θ^+, ρ^+, Y^+), sol durum ise (θ^-, ρ^-, Y^-) dir. İlerleyen bir yanma dalgasının hızı c ile gösterilmektedir. Dalganın son durumdaki (1.1)–(1.3) ün reaksiyon terimleri kaybolmaktadır. Reaksiyon terimlerinin kaybolduğu durumlar; $TC \cap FC \cap OC$, $TC \cap OC$, $TC \cap FC$, $FC \cap OC$, OC, TC, FC olacak şekilde sınıflandırılır. Durumların çeşidi, o durumda tam olarak hangi şartların geçerli olduğunu göstermektedir. Örneğin, $\theta \leq 0$, $\rho = 0$ ve Y değeri pozitif ise sol durum $TC \cap FC$ tipindedir. Böylece sınır koşullarının sadece FC, OC veya TC olabileceğini varsayıyoruz. Bunların kesişimi sınır koşullarında yer alamaz. Ancak bunların kesişimi ara durumların sağ ve sol durumu olarak bulunabilmektedir. Bir ” Yanma dalgası ” ile sürekli ve önemsiz olmayan $c \neq 0$, $c \neq a$ hızıyla hareket eden bir dalga kastedilmektedir. Diğer yaklaşımlar için (Akkutlu ve Yortsos (2003); Aldushin ve ark. (1999); Chapiro ve ark. (2012); Ghazaryan ve ark. (2010); Schult ve ark. (1996); Zeldovic ve ark. (1985)) bakınız.

Teorem 2.1 *Chapiro ve ark. (2014), her iki ucada üstel olarak yaklaşan, sıcaklık ve oksijenin hızı aynı kabul edilip pozitif hıza sahip* $(c > 0)$ *dört tip yanma dalgaları vardır. Bunlardan ikisi hızlı (* $c_f > a$*), diğer ikisi ise yavaş (*$c_s < a$*) yanma dalgalarıdır :*

$$(1) FC \xrightarrow{c_f} TC \qquad (3) TC \xrightarrow{c_s} OC$$

$$(2) OC \xrightarrow{c_f} TC \qquad (4) FC \xrightarrow{c_s} OC$$

Teorem 2.2 *Chapiro ve Senos (2017), her iki ucada üstel olarak yaklaşan, sıcaklık ve oksijenin hızları aynı kabul edilerek negatif hızda iki tane ters yönde ilerleyen yanma dalgaları vardır. Bunlar:*

$$(1) TC \xrightarrow{c_c} FC \qquad (2) TC \xrightarrow{c_c} OC$$

.

Teorem 2.3 *Ozbag ve ark. (2018), her iki ucada üstel olarak yaklaşan oksijen hızının sıcaklık hızından büyük kabul edilerek pozitif hızda altı tür yanma dalgaları vardır.*

Bunlardan ikisi hızlı $(0 < a < b < c_f)$*, ikisi yavaş* $(b > a > c_s > 0)$ *ve diğer ikiside ara* $(b > c_m > a)$ *yanma dalgalarıdır. Bunlar:*

$$(1) OC \xrightarrow{c_f} TC \qquad (3) FC \xrightarrow{c_s} OC \qquad (5) FC \xrightarrow{c_m} OC$$

$$(2) FC \xrightarrow{c_f} TC \qquad (4) TC \xrightarrow{c_s} OC \qquad (6) FC \xrightarrow{c_m} TC$$

.

Bu teoremlerin ispatı belirtilen makalelerde yapılmıştır. Bu model Chapiro ve ark. (2014), sıcaklık ve oksijenin hızları aynı kabul edilerek $(a = b)$ pozitif hıza sahip dört tür yanma dalgası olduğu tespit edilmiştir. Ozbag ve ark. (2018) çalışmalarında ise oksijen hızının sıcaklık hızından büyük alınarak $(b > a)$ pozitif hızda altı tür yanma dalgası olduğu tespit edilmiştir. Chapiro ve Senos (2017) çalışmasında ise sıcaklık ve oksijenin hızları aynı kabul edilerek $(a = b)$ negatif hıza sahip iki tane ters yönde ilerleyen yanma dalgası olduğu tespit edilmiştir.

Bu çalışmada ise, (1.1)–(1.3) sistemine difüzyon terimi eklendiğinde ters yönde ilerleyen yanma dalgaların değişmediği gösterilecektir. İlerleyen dalgalar değişmese bile sürekli spektrumda değişiklik olabilir. Bu nedenle bölüm 3.2' de PDE sistemini hareket eden bir dalga civarında doğrusallaştırarak elde edilen operatörün spektrumu bulunacaktır. Gerekli olan esas spektrum Fourier dönüşüm metodu kullanılarak bulunacaktır. Daha sonra ise ters yönde ilerleyen yanma dalgarı için ağırlık fonksiyonu bulunacaktır. Ardından ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için lineer kararlılık çalışması yapılacaktır. Bu lineer kararlılık çalışması için Yurov (2013)' un yakın tarihli bir sonucundan yararlanılmıştır. Evans fonksiyonunun sayısal hesaplaması, olası özdeğerlerin konumuna önceden bağlı bir sınır olmadığı için kesin bir doğrusal kararlılık ispatı sağlamaz. Bu nedenle, 4.2. bölümde spektral enerji tahminleri ile difüzyon eklenmiş sistem için kararsız özdeğerlerin sınırları bulunacaktır. Son olarak, 5. bölümde sonuçlardan bahsedilmiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

Bu çalışmaya başlanılmadan önce konu ile ilgili makaleler, dergiler, daha önce yayınlanmış yüksek lisans tezleri incelenerek gerekli çalışmalar yapılmıştır.

3.2. Yöntem

Bölüm 1.1 de üzerinde çalışılan modelimizden ve bölüm 2 de ise önceki çalışmalardan bahsettik. Bu bölümde, ters yönde ilerleyen yanma dalgalarından ve ters yönde ilerleyen yanma dalgalarına difüzyon terimi eklendiğinde ilerleyen dalgaların değişmediği gösterilecektir. Daha sonra ise ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için spektrum ve ağırlık fonksiyonları bulunacaktır.

3.2.1. Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları

Ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının hızı negatif $(c < 0)$ olarak kabul edilmiştir. (1.1)–(1.3) sistemindeki oksijen denklemine difüzyon terimi eklendiğinde oluşan yeni denklem sistemi aşağıda verilmiştir.

$$\partial_t\theta + a\partial_x\theta = \partial_{xx}\theta + \rho Y\Phi, \tag{3.1}$$

$$\partial_t\rho = -\rho Y\Phi, \tag{3.2}$$

$$\partial_t Y + a\partial_x Y = -\rho Y\Phi + \epsilon\partial_{xx}Y, \tag{3.3}$$

$$\Phi = \begin{cases} e^{(-1/\theta)}, & \theta > 0 \\ 0, & \theta \leq 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Teorem 3.1 *Sistem* (3.1)–(3.3) *ün* $TC \xrightarrow{c_c} OC$ *ve* $TC \xrightarrow{c_c} FC$ *dışında ilerleyen dalgaları yoktur.*

İspat. (3.2)' deki yakıt denkleminde bir adveksiyon terimi bulunmadığından sol durumda FC nin bulunma olasılığı yoktur. Enjekte edilen hava ile ilerleyen yanma dalgası zıt yönde ilerlediğinden, sol tarafın oksijen kontrollü durum olması mümkün değildir. Öte yandan, aynı tipteki durumları birbirine bağlayan hiçbir yanma dalgası olmadığını görmek kolaydır. Geriye kalan tek olasılıklar $TC \xrightarrow{c_c} OC$ ve $TC \xrightarrow{c_c} FC$ dir. □

Bölüm 3.1.1' de yeni oluşan denklem sistemi için ilerleyen yanma dalgaların değişmediği gösterilecektir.

3.2.2. İlerleyen dalga denklemi

Ters yönde ilerleyen yanma dalgalarına difüzyon terimi eklendiğinde oluşan (3.1)-(3.3) sisteminin yanma dalgalarını en uygun şekilde bulmak için, (3.2) denklemini (3.1) ve (3.2) denklemlerinin toplamıyla ve (3.3) denklemini (3.3) ve (3.2) denklemlerinin farkıyla değiştirildiğinde elde edilen denklem sistemi ise aşağıda verilmiştir.

$$\partial_t\theta + a\partial_x\theta = \partial_{xx}\theta + \rho Y\Phi \tag{3.5}$$

$$\partial_t(\theta+\rho) + a\partial_x\theta = \partial_{xx}\theta \tag{3.6}$$

$$\partial_t(Y-\rho) + a\partial_x Y = \epsilon\partial_{xx}Y \tag{3.7}$$

$c < 0$ olmak üzere, $\xi = x - ct$ ile hareketli koordinatlara geçiş yapılırsa yani, $\xi = x - ct$, $\tau = t$ olacak şekilde zincir kuralı uygulandığında

$$\partial_t\theta = \partial_\xi\theta\partial_\xi t + \partial_\tau\theta\partial_\tau t = -c\partial_\xi\theta + \partial_\tau\theta \tag{3.8}$$

$$\partial_x\theta = \partial_\xi\theta\partial_\xi x + \partial_\tau\theta\partial_\tau x = \partial_\xi\theta + 0 = \partial_\xi\theta \tag{3.9}$$

$$\partial_{xx}\theta = \partial_{\xi\xi}\theta \tag{3.10}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler (3.5)–(3.7) sisteminde yerine yazıldığında aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz.

$$\partial_t\theta = (c-a)\partial_\xi\theta + \partial_{\xi\xi}\theta + \rho Y\Phi(\theta) \tag{3.11}$$

$$\partial_t(\theta+\rho) = (c-a)\partial_\xi\theta + \partial_{\xi\xi}\theta + c\partial_\xi\rho \tag{3.12}$$

$$\partial_t(Y-\rho) = (c-a)\partial_\xi Y + \epsilon\partial_{\xi\xi}Y - c\partial_\xi\rho \tag{3.13}$$

(3.11)–(3.13) sisteminin sabit bir çözümü, c hızıyla (3.1)–(3.3) sisteminin ilerleyen bir dalga çözümüdür. (3.11)–(3.13) sisteminin sabit çözümleri ODE sistemini sağlar.

$$0 = (c-a)\partial_\xi \theta + \partial_{\xi\xi}\theta + \rho Y \Phi(\theta) \tag{3.14}$$

$$0 = (c-a)\partial_\xi \theta + \partial_{\xi\xi}\theta + c\partial_\xi \rho \tag{3.15}$$

$$0 = (c-a)\partial_\xi Y + \epsilon\partial_{\xi\xi} Y - c\partial_\xi \rho \tag{3.16}$$

Şimdi $\dot{\theta} = v_1$, $\dot{Y} = v_2$ ve (3.15) ile (3.16) denklemlerinin ξ ye göre integrali alınırsa oluşan yeni denklem sistemi;

$$\dot{\theta} = v_1 \tag{3.17}$$

$$\dot{Y} = v_2 \tag{3.18}$$

$$\dot{v_1} = (a-c)v_1 - \rho Y \Phi(\theta) \tag{3.19}$$

$$w_1 = (c-a)\theta + v_1 + c\rho \tag{3.20}$$

$$w_2 = (c-a)Y + \epsilon v_2 - c\rho \tag{3.21}$$

w_1 ve w_2 nin sabit olduğu sistem elde edilir. $c = a$ olduğunda ilerleyen dalga olmadığını aşağıda (önerme 3.2) gösterilmiştir. Bu nedenle $c \neq a$ olduğu varsayılmaktadır. Daha sonra (3.21) denklemini kullanarak Y için, (3.20) denklemini kullanarak v_1 için çözüm bulunmaktadır. (3.17), (3.18) ve (3.21) denklemlerine geçip ikinci denklemi c ye bölelim ve üçüncü denklemin her tarafı ϵ değeri ile çarpılmaktadır. Sonra bulduğumuz $\dot{\rho}$ değeri denklemde yerine yazıldığında aşağıdaki indirgenmiş dalga sistemini elde ederiz.

$$\dot{\theta} = (a-c)\theta - c\rho + w_1 \tag{3.22}$$

$$\dot{\rho} = \frac{c\rho + w_2 - \epsilon v_2}{c(c-a)}\rho\Phi(\theta) \tag{3.23}$$

$$\epsilon\dot{v_2} = \frac{w_2 + c\rho - \epsilon v_2}{c-a}\rho\Phi(\theta) - (c-a)v_2 \tag{3.24}$$

(3.22)–(3.24) sistemindeki w_1 ve w_2 ler parametre vektörleridir. Bunlar tam olarak $\epsilon = 0$ olduğunda elde ettiğimiz ilerleyen dalga denklemleri olup kritik manifold $v_2 = \frac{w_2+c\rho}{(c-a)^2}\rho\Phi(\theta)$’ dır. $v_2 = \frac{w_2+c\rho}{(c-a)^2}\rho\Phi(\theta) + \epsilon F(\theta, \rho, \epsilon)$ (3.22)–(3.24) ile değiştirildiğinde yeni sistemin hala $\rho = 0$ değişmez doğrusuna ve tüm dengeleri içeren $(a-c)\theta - c\rho + w_1$ ile tanımlanan H eş eğim doğrusuna sahiptir. Ters yönde ilerleyen yanma dalgalar $\theta^- \leq 0$, $\rho^- > 0$ ve $Y^- > 0$ ile TC sol durumuna sahip olduğundan, hala H’

de bulunan dengeye sahibiz. Ayrıca $\rho = 0$ değişmez doğrusu da H'de bulunan bir dengeye sahiptir. Böylece (1.1)–(1.3) sistemine difüzyon terimi eklendiğinde ilerleyen dalgaların değişmediği gösterilmiştir.

Önerme 3.2 (3.1)–(3.3) *sistemini ele alalım. Varsayalım* $c = a$ *olsun. Bu durumda* (3.1)–(3.3) *sistemi için ilerleyen dalgaları yoktur.*

İspat. (3.17)–(3.21) sistemi için $c = a$ alalım. Bu durumda denklem sistemi aşağıda verilmiştir.

$$\dot{\theta} = v_1 \tag{3.25}$$

$$\dot{Y} = v_2 \tag{3.26}$$

$$\dot{v_1} = (c - c)v_1 - \rho Y \Phi(\theta) = -\rho Y \Phi(\theta) \tag{3.27}$$

$$w_1 = (c - c)\theta + v_1 + c\rho = v_1 + c\rho \tag{3.28}$$

$$w_2 = (c - c)Y + \epsilon v_2 - c\rho = \epsilon v_2 - c\rho \tag{3.29}$$

burada w_1 ve w_2 sabit sayılardır. (3.25)–(3.29) sistemi içinde (3.28) denklemini kullanarak v_1 için, (3.29) denklemini kullanarak Y için çözüm bulalım. Böylece indirgenmiş denklem sistemi elde edilmektedir.

$$\dot{\theta} = -c\rho + w_1 \tag{3.30}$$

$$\dot{\rho} = \frac{\rho Y \Phi(\theta)}{c} \tag{3.31}$$

$$\epsilon \dot{v_2} = \rho Y \Phi(\theta) \tag{3.32}$$

$\dot{\theta} = 0$ olacak şekilde seçildiğinde $\rho = \frac{w_1}{c}$ doğrusundan oluşur. $\dot{\rho} = 0$ ise $\rho = 0$ veya $Y = 0$ dan oluşur. $\dot{v_2} = 0$ ise $\rho = 0$ veya $Y = 0$ dan oluşur. (3.30)–(3.32) sistemi, $\{(\theta, \rho, v_2) : \theta < 0, \rho = \frac{w_1}{c}, v_2 = 0\}$ olan bir dizi denge noktasına sahiptir. Bu nedenle $a = c$ olacak şekilde seçildiğinde $c < 0$ hızıyla hareket eden bir dalgaya sahip olma ihtimalinin olmadığı açıktır. $\square$

3.2.3. Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için spektrum

Bu bölümde, doğrusal olmayan PDE' nin hareket eden bir dalga civarında linerize edilen spektrumunun yapısına ilişkin sonuçlar gözden geçirilmektedir. Sistemi ilerleyen dalga civarında linerize edip ve linerize edilen $\mathcal{L}$ operatörünün spektrumu incelenmektedir. $Sp(\mathcal{L})$ olarak ifade ettiğimiz $\mathcal{L}$ spektrumu, ayrık spektrum $Sp_d(\mathcal{L})$ ve esas spektrum $Sp_{ess}(\mathcal{L})$' den oluşmaktadır. Ayrık spektrum, spektrumda izole edilmiş sonlu çokluğu olan $\mathcal{L}$' nin tüm özdeğerlerinin kümesidir ve esas spektrum, spektrumun geri kalanıdır. Bu bölümde, $Sp_{ess}(\mathcal{L})$ incelenmektedir. $c < 0$ olmak üzere, (3.1)–(3.3) sistemini $\xi = x - ct$ ile hareketli koordinatlara geçiş yapılırsa;

$$\partial_t \theta = \partial_{\xi\xi}\theta + (c-a)\partial_\xi \theta + F, \tag{3.33}$$

$$\partial_t \rho = c\partial_\xi \rho - F, \tag{3.34}$$

$$\partial_t Y = \epsilon\partial_{\xi\xi} Y + (c-a)\partial_\xi Y - F, \tag{3.35}$$

sistemi elde edilir. Burada $F = \rho Y \Phi$ dır. c hızıyla ilerleyen $T^*(\xi) = (\theta^*(\xi), \rho^*(\xi), Y^*(\xi))$ dalgası (3.33)-(3.35) sisteminin sabit bir çözümü ile birlikte sol ve sağ durum

$$\lim_{\xi\to-\infty} T^*(\xi) = T^-, \qquad \lim_{\xi\to+\infty} T^*(\xi) = T^+.$$

Varsayalım ki; $T^*(\xi)$' nin $T^\pm$' ye üstel bir oranda yaklaşsın. $T^*(\xi)$ dalgasının kararlılığı, $T = T^* + \tilde{T}$ şeklindeki küçük bir T^* perturbasyonunu alarak ve ardından bunun bir T^* kaymasına yakınsadığını gösterilerek kanıtlanmıştır. Bu nedenle (3.33)-(3.35) sistemini ilerleyen bir $T^*(\xi)$' da linerize edildiğinde elde edilen sistem aşağıda verilmiştir.

$$\partial_t\tilde{\theta} = \partial_{\xi\xi}\tilde{\theta} + (c-a)\partial_\xi\tilde{\theta} + F_\theta(T^*(\xi))\tilde{\theta} + F_\rho(T^*(\xi))\tilde{\rho} + F_Y(T^*(\xi))\tilde{Y}, \tag{3.36}$$

$$\partial_t\tilde{\rho} = c\partial_\xi\tilde{\rho} - F_\theta(T^*(\xi))\tilde{\theta} - F_\rho(T^*(\xi))\tilde{\rho} - F_Y(T^*(\xi))\tilde{Y}, \tag{3.37}$$

$$\partial_t\tilde{Y} = (c-a)\partial_\xi\tilde{Y} + \epsilon\partial_{\xi\xi}\tilde{Y} - F_\theta(T^*(\xi))\tilde{\theta} - F_\rho(T^*(\xi))\tilde{\rho} - F_Y(T^*(\xi))\tilde{Y} \tag{3.38}$$

(3.36)–(3.38) sisteminin spektrumunu bulmak için, $\mathcal{L}$ operatörünü $\mathcal{X}_t = \mathcal{L}\mathcal{X}$ olacak şekilde yazıldığında, aşağıdaki operatör elde edilmektetir.

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \partial_{\xi\xi} + (c-a)\partial_\xi + F_\theta(T^*(\xi)) & F_\rho(T^*(\xi)) & F_Y(T^*(\xi)) \\ -F_\theta(T^*(\xi)) & c\partial_\xi - F_\rho(T^*(\xi)) & -F_Y(T^*(\xi)) \\ -F_\theta(T^*(\xi)) & -F_\rho(T^*(\xi)) & (c-a)\partial_\xi + \epsilon\partial_{\xi\xi} \\ & & -F_Y(T^*(\xi)) \end{pmatrix}. \tag{3.39}$$

$T^\pm$' de (3.33)-(3.35) sistemi linerize edildiğinde elde edilen, $\mathcal{X}_t = \mathcal{L}_\pm\mathcal{X}$ sabit katsayılı iki doğrusal kısmi diferansiyel denklem vardır. $\mathcal{L}_\pm$ spektrumu, Fourier dönüşümü kullanılarak hesaplanmıştır. Burada Fourier dönüşümü,

$$\mathcal{F}\{\partial_\xi\} = (i\mu),$$

$$\mathcal{F}\{\partial_{\xi\xi}\} = (i\mu)^2 = -\mu^2$$

olacak şekilde seçilip $\mathcal{L}_\pm$ operatöründe yazıldığında oluşan operatör aşağıda verilmiştir.

$$\hat{\mathcal{L}}_\pm = \begin{pmatrix} -\mu^2 + i\mu(c-a) + F_\theta(T^*(\pm\infty)) & F_\rho(T^*(\pm\infty)) & F_Y(T^*(\pm\infty)) \\ -F_\theta(T^*(\pm\infty)) & i\mu c - F_\rho(T^*(\pm\infty)) & -F_Y(T^*(\pm\infty)) \\ -F_\theta(T^*(\pm\infty)) & -F_\rho(T^*(\pm\infty)) & i\mu(c-a) - \epsilon\mu^2 \\ & & -F_Y(T^*(\pm\infty)) \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

$\mathcal{L}^2$ veya H^1' deki $\mathcal{L}$'nin esas spektrumunun sağ tarafındaki sınırı, $Sp(\mathcal{L}_-)$ ve $Sp(\mathcal{L}_+)$' nin sağ taraftaki sınırlarının birleşiminden oluşmaktadır.

Tanım 3.3 *Aşağıdaki iki madde sağlanırsa, ilerleyen $T^*(\xi)$ dalgası bir $\mathcal{X}$ uzayında spektral olarak kararlıdır.*

- *0, $\mathcal{X}$ üzerinde $\mathcal{L}$' nin, özfonksiyon $T^{*\prime}(\xi)$ ile izole edilmiş basit bir özdeğeridir.*
- *$v > 0$ vardır öyle ki $\mathcal{L}$' nin $\mathcal{X}$ üzerindeki spektrumunun geri kalanı $Re\lambda < -v$' de bulunur.*

(3.1)-(3.3) sisteminin $TC \overset{c_c}{\to} OC$ ve $TC \overset{c_c}{\to} FC$ dışında ilerleyen dalgaların olmadığını göstermiştik. Bu nedenle bu dalgaların spektrumları bulunacaktır.

- Sol durum her ikisi içinde TC tipine sahip olduğundan, önce $\hat{\mathcal{L}}_-$ nin spektrumunu (θ^-, ρ^-, Y^-)' de hesaplanmaktadır. Burada $\theta^- \leq 0$, $\rho^- > 0$ ve $Y^- > 0$ dır.

$$\hat{\mathcal{L}}_- = \begin{pmatrix} -\mu^2 + i\mu(c-a) & 0 & 0 \\ 0 & i\mu c & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon\mu^2 + i\mu(c-a) \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

L^2 veya H^1' deki $\hat{\mathcal{L}}_-$ nın spektrumu, $\mathbb{R}$' de bazı μ' ler için (3.41)' in özdeğerleri olan λ kümeleridir. Böylece, özdeğerler şu şekilde parametrelendirilir.

$$\lambda(\mu) = -\mu^2 + i\mu(c-a), \quad \lambda(\mu) = i\mu c, \quad \lambda(\mu) = -\epsilon\mu^2 + i\mu(c-a).$$

Linerize edilen $\hat{\mathcal{L}}_-$ nın spektrumu, sol yarı düzlemde, sanal eksene teğet orijinden geçen iki parabolden oluşur. Ayrıca sanal eksenin üzerinde parabollere teğet bir dikey doğrudan oluşur. Benzer şekilde,

- OC sağ durumu

(θ^+, ρ^+, Y^+) noktasında $\hat{\mathcal{L}}_+$' nın spektrumu belirlenmektedir. Burada $\theta^+ \leq 0$, $\rho^+ > 0$ ve $Y^+ = 0$.

$$\hat{\mathcal{L}}_+ = \begin{pmatrix} -\mu^2 + i\mu(c-a) & 0 & \rho^+\Phi(\theta^+) \\ 0 & i\mu c & -\rho^+\Phi(\theta^+) \\ 0 & 0 & -\epsilon\mu^2 + i\mu(c-a) - \rho^+\Phi(\theta^+) \end{pmatrix}. \tag{3.42}$$

L^2 veya H^1' deki $\hat{\mathcal{L}}_+$' nın spektrumu, $\mathbb{R}$' deki bazı μ' ler için (3.42)' un özdeğerleri olan λ kümeleridir.

$$\lambda(\mu) = -\mu^2 + i\mu(c-a), \quad \lambda(\mu) = -\epsilon\mu^2 + i\mu(c-a) - \rho^+\Phi(\theta^+), \quad \lambda(\mu) = i\mu c.$$

Dolayısıyla, linerize edilen $\hat{\mathcal{L}}_+$' nın spektrumu, sol yarı düzlemde bir parabol ve sanal eksene teğet orijinden geçen başka bir parabolden oluşur. Ayrıca sanal eksenin üzerinde dikey bir doğrudan oluşur.

- FC sağ durumu

(θ^+, ρ^+, Y^+) noktasında $\hat{\mathcal{L}}_+$' nın spektrumu belirlenmektedir. Burada $\theta^- \leq 0$, $\rho^+ = 0$ ve $Y^+ > 0$.

$$\hat{\mathcal{L}}_+ = \begin{pmatrix} -\mu^2 + i\mu(c-a) & Y^+\Phi(\theta^+) & 0 \\ 0 & i\mu c - Y^+\Phi(\theta^+) & 0 \\ 0 & Y^+\Phi(\theta^+) & -\epsilon\mu^2 + i\mu(c-a) \end{pmatrix}. \tag{3.43}$$

L^2 veya H^1' deki $\hat{\mathcal{L}}_+$' nın spektrumu, $\mathbb{R}$' deki bazı μ' ler için (3.43)' ın özdeğerleri olan λ kümeleridir.

$$\lambda(\mu) = -\mu^2 + i\mu(c-a), \quad \lambda(\mu) = -\epsilon\mu^2 + i\mu(c-a), \quad \lambda(\mu) = i\mu c - Y^+\Phi(\theta^+).$$

Dolayısıyla, linerize edilen $\hat{\mathcal{L}}_+$' nın spektrumu, sol yarı düzlemde, orijine temas eden iki parabolden oluşur. Ayrıca sol yarı düzlemde parabollerin üzerinden geçen bir dikey doğrudan oluşur.

3.2.4. Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için ağırlık fonksiyonu

Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için $\mathcal{L}_-$ ve $\mathcal{L}_+$ spektrumu sanal eksene değdiği için herhangi bir yanma dalgası için spektral kararlılığa sahip değiliz. Bu spektrumlar, ağırlıklı normlu bir uzayda çalışılarak sanal eksenin soluna hareket ettirilebilirse spektral kararlılık elde edilebilir.

$\alpha = (\alpha_-, \alpha_+) \in \mathcal{R}^2$, $\gamma_\alpha : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ için bir ağırlık fonksiyonu tanımlanmaktadır. Burada

$$\gamma_\alpha(\xi) = \begin{cases} e^{\alpha_- \xi}, & \xi \leq 0 \\ e^{\alpha_+ \xi}, & \xi \geq 0 \end{cases} \tag{3.44}$$

şeklindedir. $\mathcal{X}_0$, standart Banach uzaylarından $L^2(\mathcal{R}, \mathcal{R}^3)$ veya $H^1(\mathcal{R}, \mathcal{R}^3)$ ile ve normu $|| \quad ||_0$ ile gösterilmektedir. $\mathcal{X}_\alpha$, $\gamma_\alpha(\xi)$ ağırlık fonksiyonuna karşılık gelen ağırlıklı uzayını göstersin öyle ki $x(\xi) \in \mathcal{X}_\alpha$ için $\gamma_\alpha(\xi)x(\xi) \in \mathcal{X}_0$ iken $|| \ \gamma_\alpha(\xi)x(\xi) \ ||_0$ normu ile gösterilmektedir.

Sol ve sağ uç durumlarında ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için ağırlık fonksiyonlarını belirlemek için $\mathcal{X}_\alpha$ üzerinde $\mathcal{L}$ nin spektrumu bulunması gerekmektedir. $X = (\tilde{\theta}(\xi), \tilde{\rho}(\xi), \tilde{Y}(\xi)) \in \mathcal{X}_\alpha$ ve $W = \gamma_\alpha(\xi)X = (u(\xi), v(\xi), z(\xi)) \in \mathcal{X}_0$ olacak şekilde seçildiğinde $X_t = \mathcal{L}X$ denklemi $\gamma_\alpha^{-1}W_t = \mathcal{L}\gamma_\alpha^{-1}W$ 'yi verir. Her iki tarafı γ_α ile çarpıldığında $W_t = \gamma_\alpha \mathcal{L}\gamma_\alpha^{-1}W$ denklemi elde edilir, burada $\gamma_\alpha \mathcal{L}\gamma_\alpha^{-1}$ $\mathcal{X}_0$ üzerinde lineer bir operatörden oluşur. $\mathcal{L}$' nin $\mathcal{X}_\alpha$ üzerindeki spektrumunu bulmak için, bunun yerine $\mathcal{X}_0$ üzerinde $\mathcal{L}_\alpha = \gamma_\alpha \mathcal{L}\gamma_\alpha^{-1}$ izomorfik operatörünün spektrumunu bulmaktır.

$$W = \gamma_\alpha \mathcal{X} = \gamma_\alpha(\tilde{\theta}(\xi), \tilde{\rho}(\xi), \tilde{Y}(\xi)) = (\gamma_\alpha\tilde{\theta}(\xi), \gamma_\alpha\tilde{\rho}(\xi), \gamma_\alpha\tilde{Y}(\xi)) = (u(\xi), v(\xi), z(\xi)) \tag{3.45}$$

olsun. Burada $\gamma_\alpha \mathcal{X} = W \in \mathcal{X}_0$ için $\mathcal{X} = \gamma_\alpha^{-1}W$ elde edilir.

$$\gamma_\alpha\tilde{\theta}(\xi) \quad = u(\xi) \Rightarrow \tilde{\theta}(\xi) \quad = \gamma_\alpha^{-1}u(\xi) \tag{3.46}$$

$$\gamma_\alpha\tilde{\rho}(\xi) \quad = v(\xi) \Rightarrow \tilde{\rho}(\xi) \quad = \gamma_\alpha^{-1}v(\xi) \tag{3.47}$$

$$\gamma_\alpha\tilde{Y}(\xi) \quad = z(\xi) \Rightarrow \tilde{Y}(\xi) \quad = \gamma_\alpha^{-1}z(\xi) \tag{3.48}$$

olup (3.36)–(3.38) sisteminde yerine yazıldığında;

$$\partial_t(\gamma_\alpha^{-1}u(\xi)) = \partial_{\xi\xi}(\gamma_\alpha^{-1}u(\xi)) + (c-a)\partial_\xi(\gamma_\alpha^{-1}u(\xi)) + F, \tag{3.49}$$

$$\partial_t(\gamma_\alpha^{-1}v(\xi)) = c\partial_\xi(\gamma_\alpha^{-1}v(\xi)) - F, \tag{3.50}$$

$$\partial_t(\gamma_\alpha^{-1}z(\xi)) = (c-a)\partial_\xi(\gamma_\alpha^{-1}z(\xi)) + \epsilon\partial_{\xi\xi}(\gamma_\alpha^{-1}z(\xi)) - F, \tag{3.51}$$

denklem sistemi elde edilir. Daha sonra γ_α^{-1}' i $e^{-\alpha\xi}$ olacak şekilde belirlendiğinde;

$$\partial_t(e^{-\alpha\xi}u(\xi)) = \partial_{\xi\xi}(e^{-\alpha\xi}u(\xi)) + (c-a)\partial_\xi(e^{-\alpha\xi}u(\xi)) + F, \tag{3.52}$$

$$\partial_t(e^{-\alpha\xi}v(\xi)) = c\partial_\xi(e^{-\alpha\xi}v(\xi)) - F, \tag{3.53}$$

$$\partial_t(e^{-\alpha\xi}z(\xi)) = (c-a)\partial_\xi(e^{-\alpha\xi}z(\xi)) + \epsilon\partial_{\xi\xi}(e^{-\alpha\xi}z(\xi)) - F, \tag{3.54}$$

sistemi elde edilir. Elde edilen sistemi uygun hale getirmek için 1. ve 2. türevleri alınırsa;

$$(e^{-\alpha\xi}u(\xi))_\xi = \alpha e^{-\alpha\xi}u(\xi) + e^{-\alpha\xi}u_\xi \tag{3.55}$$

$$(e^{-\alpha\xi}u(\xi))_{\xi\xi} = \alpha^2 e^{-\alpha\xi}u(\xi) - 2\alpha e^{-\alpha\xi}u_\xi + e^{-\alpha\xi}u_{\xi\xi} \tag{3.56}$$

$$(e^{-\alpha\xi}v(\xi))_\xi = -\alpha e^{-\alpha\xi}v(\xi) + e^{-\alpha\xi}v_\xi \tag{3.57}$$

$$(e^{-\alpha\xi}z(\xi))_\xi = -\alpha e^{-\alpha\xi}z(\xi) + e^{-\alpha\xi}z_\xi \tag{3.58}$$

$$(e^{-\alpha\xi}z(\xi))_{\xi\xi} = \alpha^2 e^{-\alpha\xi}z(\xi) - 2\alpha e^{-\alpha\xi}z_\xi + e^{-\alpha\xi}z_{\xi\xi} \tag{3.59}$$

elde edilir. (3.55) ve (3.56) denklemleri (3.52)' de, (3.57) denklemi (3.53)' de ve (3.58) ve (3.59) denklemleri ise (3.54)' da yerine yazıldığında;

$$\partial_t(e^{-\alpha\xi}u) = e^{-\alpha\xi}u_{\xi\xi} + (c-a-2\alpha)e^{-\alpha\xi}u_\xi + (\alpha^2 + (a-c)\alpha)e^{-\alpha\xi}u + F \tag{3.60}$$

$$\partial_t(e^{-\alpha\xi}v) = ce^{-\alpha\xi}v_\xi - c\alpha e^{-\alpha\xi}v - F \tag{3.61}$$

$$\partial_t(e^{-\alpha\xi}z) = \epsilon e^{-\alpha\xi}z_{\xi\xi} + (c-a-2\epsilon\alpha)e^{-\alpha\xi}z_\xi + (\epsilon\alpha^2 + (a-c)\alpha)e^{-\alpha\xi}z - F \tag{3.62}$$

denklem sistemi elde edilir. $\mathcal{L}_\alpha = \gamma_\alpha \mathcal{L} \gamma_\alpha^{-1}$ olduğundan (3.60)–(3.62) sisteminin her tarafı $e^{\alpha\xi}$ ile çarpıldığında aşağıdaki sistem elde edilir.

$$\partial_t u = u_{\xi\xi} + (c-a-2\alpha)u_\xi + (\alpha^2 - c\alpha + a\alpha)u(\xi) + F \tag{3.63}$$

$$\partial_t v = cv_\xi - c\alpha v(\xi) - F \tag{3.64}$$

$$\partial_t z = \epsilon z_{\xi\xi} + (c-a-2\epsilon\alpha)z_\xi + (\epsilon\alpha^2 + a\alpha - c\alpha)z(\xi) - F \tag{3.65}$$

Elde edilen (3.63)–(3.65) sistemi $\mathcal{L}_\alpha$' yı verir. Daha sonra $\mathcal{L}_\alpha$ operatör olarak yazıldığında;

$$\mathcal{L}_\alpha = \begin{pmatrix} \partial_{\xi\xi} + (c-a-2\alpha)\partial_\xi + & & \\ \alpha^2 + a\alpha - c\alpha + F_\theta(T^*) & F_\rho(T^*) & F_Y(T^*) \\ -F_\theta(T^*) & c\partial_\xi - c\alpha - F_\rho(T^*) & -F_Y(T^*) \\ -F_\theta(T^*) & -F_\rho(T^*) & \epsilon\partial_{\xi\xi} + (c-a-2\epsilon\alpha)\partial_\xi \\ & & +\epsilon\alpha^2 + a\alpha - c\alpha - F_Y(T^*) \end{pmatrix}. \quad (3.66)$$

elde edilir. Bu operatörde $\xi \to \pm\infty$ alındığında, $W_t = \mathcal{L}_\alpha W$ denklemi sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemler için $W_t = \mathcal{L}_\alpha^\pm W$ denklemini verir. Burada

$$\mathcal{L}_\alpha^- = \begin{pmatrix} \partial_{\xi\xi} + (c-a-2\alpha_-)\partial_\xi + & & \\ \alpha_-^2 + a\alpha_- - c\alpha_- + F_\theta(T^-) & F_\rho(T^-) & F_Y(T^-) \\ -F_\theta(T^-) & c\partial_\xi - c\alpha_- - F_\rho(T^-) & -F_Y(T^-) \\ -F_\theta(T^-) & -F_\rho(T^-) & \epsilon\partial_{\xi\xi} + (c-a-2\epsilon\alpha_-)\partial_\xi \\ & & +\epsilon\alpha_-^2 + a\alpha_- - c\alpha_- - F_Y(T^-) \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

ve

$$\mathcal{L}_\alpha^+ = \begin{pmatrix} \partial_{\xi\xi} + (c-a-2\alpha_+)\partial_\xi + & & \\ \alpha_+^2 + a\alpha_+ - c\alpha_+ + F_\theta(T^+) & F_\rho(T^+) & F_Y(T^+) \\ -F_\theta(T^+) & c\partial_\xi - c\alpha_+ - F_\rho(T^+) & -F_Y(T^+) \\ -F_\theta(T^+) & -F_\rho(T^+) & \epsilon\partial_{\xi\xi} + (c-a-2\epsilon\alpha_+)\partial_\xi \\ & & +\epsilon\alpha_+^2 + a\alpha_+ - c\alpha_+ - F_Y(T^+) \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

$\mathcal{L}_\alpha$' nın esas spektrumunun sağ sınırı, $Sp(\mathcal{L}_\alpha^-)$ ve $Sp(\mathcal{L}_\alpha^+)$' nın sağ taraftaki sınırların birleşiminden oluşur. Bu spektrumlar $\mathcal{L}^2$ veya H^1 de aynıdır, dolayısıyla bunlar $\mathcal{L}^2$' de Fourier dönüşümü kullanılarak hesaplanmaktadır. Şimdi (3.67) ve (3.68) operatörlerine Fourier dönüşümü uygulandığında;

$$\mathcal{L}_\alpha^- = \begin{pmatrix} -\mu^2 + (c-a-2\alpha_-)i\mu + & & \\ \alpha_-^2 + a\alpha_- - c\alpha_- + F_\theta(T^-) & F_\rho(T^-) & F_Y(T^-) \\ -F_\theta(T^-) & ci\mu - c\alpha_- - F_\rho(T^-) & -F_Y(T^-) \\ -F_\theta(T^-) & -F_\rho(T^-) & -\epsilon\mu^2 + (c-a-2\epsilon\alpha_-)i\mu \\ & & +\epsilon\alpha_-^2 + a\alpha_- - c\alpha_- - F_Y(T^-) \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

ve

$$\mathcal{L}_\alpha^+ = \begin{pmatrix} -\mu^2 + (c-a-2\alpha_+)i\mu + & & \\ \alpha_+^2 + a\alpha_+ - c\alpha_+ + F_\theta(T^+) & F_\rho(T^+) & F_Y(T^+) \\ -F_\theta(T^+) & ci\mu - c\alpha_+ - F_\rho(T^+) & -F_Y(T^+) \\ -F_\theta(T^+) & -F_\rho(T^+) & -\epsilon\mu^2 + (c-a-2\epsilon\alpha_+)i\mu \\ & & +\epsilon\alpha_+^2 + a\alpha_+ - c\alpha_+ - F_Y(T^+) \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

elde edilir.

- TC sol durumu

Sol durum, ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için aynı tip TC' ye sahip olduğundan, sol uç durumda (θ^-, ρ^-, Y^-) için $\mathcal{L}_\alpha^-$' nın spektrumu hesaplanmaktadır. Burada $\theta^- \le 0$, $\rho^- > 0$ ve $Y^- > 0$ dır.

$$\mathcal{L}_\alpha^- = \begin{pmatrix} -\mu^2 + (c-a-2\alpha_-)i\mu + & & \\ \alpha_-^2 + a\alpha_- - c\alpha_- & 0 & 0 \\ 0 & ci\mu - c\alpha_- & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon\mu^2 + (c-a-2\epsilon\alpha_-)i\mu + \\ & & \epsilon\alpha_-^2 + a\alpha_- - c\alpha_- \end{pmatrix} \tag{3.71}$$

$\mathcal{L}_\alpha^-$ spektrumu, R' deki bazı μ' ler için (3.71)' nın özdeğerleri olan λ kümeleridir. Bu λ kümeleri aşağıda verilmiştir.

$$\lambda(\mu) = -\mu^2 + (c-a-2\alpha_-)i\mu + \alpha_-^2 + (a-c)\alpha_- \tag{3.72}$$

$$\lambda(\mu) = i\mu c - c\alpha_- \tag{3.73}$$

$$\lambda(\mu) = -\epsilon\mu^2 + (c-a-2\epsilon\alpha_-)i\mu + \epsilon\alpha_-^2 + (a-c)\alpha_- \tag{3.74}$$

Spektrumu sol yarı düzleme taşımak için, tüm özdeğerlerin reel kısmının negatif olması gerekir. Bu nedenle;

$$-\mu^2 + \alpha_-^2 + a\alpha_- - c\alpha_- < 0, \tag{3.75}$$

$$-c\alpha_- < 0, \tag{3.76}$$

$$-\epsilon\mu^2 + \epsilon\alpha_-^2 + a\alpha_- - c\alpha_- < 0 \tag{3.77}$$

eşitsizliklerini sağlayan bir α_- değeri bulunması gerekir. Bu değerin bulunması için öncelikle (3.76) eşitsizliğini ele alalım. ($c < 0$ olduğuna dikkat edin.) Bu eşitsizliğin sağlanması için $\alpha_- < 0$ olarak seçilmelidir. Şimdi (3.75) eşitsizliğinde μ' ye hangi değer verilirse verilsin sonuç negatif olacağından $-\mu^2$ ifadesi ihmal edilir. Geriye kalan reel kısmını negatif yapan değer bulunması gerekir. Yani;

$$\alpha_-^2 + a\alpha_- - c\alpha_- < 0 \Rightarrow \alpha_-(\alpha_- + a - c) < 0 \tag{3.78}$$

dır. (3.76) eşitsizliğinden $\alpha_- < 0$ olduğu bilinmektedir. O zaman

$$\alpha_- + a\alpha_- - c\alpha_- > 0 \Rightarrow \alpha_- > c - a \tag{3.79}$$

olması gerekir. Buradan $c-a < \alpha_- < 0$ elde edilir. Benzer olarak (3.77) eşitsizliğinde μ' ye hangi değer verilirse verilsin sonuç negatif olacağından $-\epsilon\mu^2$ ifadesi ihmal edilir. Geriye kalan reel kısmı negatif yapan bir α_- değeri bulunması gerekir. Yani;

$$\epsilon\alpha_-^2 + a\alpha_- - c\alpha_- < 0 \Rightarrow \alpha_-(\epsilon\alpha_- + a - c) < 0 \tag{3.80}$$

dır. Yine (3.76) eşitsizliğinden $\alpha_- < 0$ olduğu bilinmektedir. Bu durumda

$$\epsilon\alpha_- + a - c > 0 \Rightarrow \epsilon\alpha_- > c - a \tag{3.81}$$

olur. Elde edilen eşitsizliğin her tarafı ϵ değerine bölündüğünde

$$\alpha_- > \frac{c-a}{\epsilon} \Rightarrow \frac{c-a}{\epsilon} < \alpha_- < 0 \tag{3.82}$$

elde edilir. Bu durumda tüm eşitsizliklerin sağlanması için

$$0 > \alpha_- > max\{c-a, \frac{c-a}{\epsilon}\} \tag{3.83}$$

olacak şekilde seçilirse spektrum sol yarı düzlem üzerinde bulunur.

- FC sağ durumu

Benzer hesaplama ile, (θ^+, ρ^+, Y^+) noktasında $\mathcal{L}_\alpha^+$' nın spektrumu bulunmaktadır. Burada $\theta^+ > 0$, $\rho^+ = 0$ ve $Y^+ > 0$ dır.

$$\mathcal{L}_\alpha^+ = \begin{pmatrix} \begin{matrix}-\mu^2 + (c-a-2\alpha_+)i\mu \\ +\alpha_+^2 + a\alpha_+ - c\alpha_+\end{matrix} & Y^+\Phi(\theta^+) & 0 \\ 0 & ci\mu - c\alpha_+ - Y^+\Phi(\theta^+) & 0 \\ 0 & Y^+\Phi(\theta^+) & \begin{matrix}-\epsilon\mu^2(c-a-2\epsilon\alpha_+)i\mu \\ +\epsilon\alpha_+^2 + a\alpha_+ - c\alpha_+\end{matrix} \end{pmatrix} \tag{3.84}$$

$\mathcal{L}_\alpha^+$' nın spektrumu, R' deki bazı μ' ler için (3.84)' ün özdeğerleri olan λ kümeleridir. Bu λ kümeleri aşağıda verilmiştir.

$$\lambda(\mu) = -\mu^2 + (c-a-2\alpha_+)i\mu + \alpha_+^2 + (a-c)\alpha_+ \tag{3.85}$$

$$\lambda(\mu) = i\mu c - c\alpha_+ - Y^+\Phi(\theta^+) \tag{3.86}$$

$$\lambda(\mu) = -\epsilon\mu^2 + (c-a-2\epsilon\alpha_+)i\mu + \epsilon\alpha_+^2 + (a-c)\alpha_+ \tag{3.87}$$

Spektrumu sol yarı düzleme taşımak için, tüm özdeğerlerin reel kısmının negatif olması gerekir. Bu nedenle;

$$-\mu^2 + \alpha_+^2 + a\alpha_+ - c\alpha_+ < 0 \tag{3.88}$$

$$-c\alpha_+ - Y^+\Phi(\theta^+) < 0 \tag{3.89}$$

$$-\epsilon\mu^2 + \epsilon\alpha_+^2 + a\alpha_+ - c\alpha_+ < 0 \tag{3.90}$$

eşitsizliklerini sağlayan bir α_+ değeri bulunması gerekir. TC sol durumundaki benzer ifade ile $-\mu^2$ ve $-\epsilon\mu^2$ değerleri ihmal edilir.

$$\alpha_+^2 + a\alpha_+ - c\alpha_+ < 0 \Rightarrow \alpha_+(\alpha_+ + a - c) < 0 \tag{3.91}$$

$$-c\alpha_+ - Y^+\Phi(\theta^+) < 0 \Rightarrow -c\alpha_+ < Y^+\Phi(\theta^+) \Rightarrow \alpha_+ < -\frac{Y^+\Phi(\theta^+)}{c} \tag{3.92}$$

$$\epsilon\alpha_+^2 + a\alpha_+ - c\alpha_+ < 0 \Rightarrow \alpha_+(\epsilon\alpha_+ + a - c) < 0 \tag{3.93}$$

Bu durumda tüm eşitsizliklerin sağlanması için

$$0 > \alpha_+ > max\{c - a, \frac{c-a}{\epsilon}\} \tag{3.94}$$

olacak şekilde seçilirse spektrum sol yarı düzlem üzerinde bulunur.

- OC sağ durumu

Burada $c < 0$ ve $Y^+ > 0$ olduğuna dikkat edin. Benzer olarak, (θ^+, ρ^+, Y^+) noktasında $\mathcal{L}_\alpha^+$' nın spektrumu bulunmaktadır. Burada $\theta^+ > 0$, $\rho^+ > 0$ ve $Y^+ = 0$ dır.

$$\mathcal{L}_\alpha^+ = \begin{pmatrix} \begin{array}{c} -\mu^2 + (c - a - 2\alpha_+)i\mu \\ +\alpha_+^2 + a\alpha_+ - c\alpha_+ \end{array} & 0 & \rho^+\Phi(\theta^+) \\ 0 & ci\mu - c\alpha_+ & \rho^+\Phi(\theta^+) \\ 0 & 0 & \begin{array}{c} -\epsilon\mu^2 + (c - a - 2\epsilon\alpha_+)i\mu \\ +\epsilon\alpha_+^2 + a\alpha_+ - c\alpha_+ - \rho^+\Phi(\theta^+) \end{array} \end{pmatrix} \tag{3.95}$$

$\mathcal{L}_\alpha^+$' nın spektrumu, R' deki bazı μ' ler için (3.95)' in özdeğerleri olan λ kümeleridir.

$$\lambda(\mu) = -\mu^2 + (c - a - 2\alpha_+)i\mu + \alpha_+^2 + (a - c)\alpha_+ \tag{3.96}$$

$$\lambda(\mu) = i\mu c - c\alpha_+ \tag{3.97}$$

$$\lambda(\mu) = -\epsilon\mu^2 + (c - a - 2\epsilon\alpha_+)i\mu + \epsilon\alpha_+^2 + (a - c)\alpha_+ - \rho^+\Phi(\theta^+) \tag{3.98}$$

Spektrumu sol yarı düzleme taşımak için özdeğerlerin reel kısmının negatif olması gerekir. Bu durumda;

$$-\mu^2 + \alpha_+^2 + (c-a)\alpha_+ < 0 \tag{3.99}$$

$$-c\alpha_+ < 0 \tag{3.100}$$

$$-\epsilon\mu^2 + \epsilon\alpha_+^2 + (a-c)\alpha_+ - \rho^+\Phi(\theta^+) < 0 \tag{3.101}$$

eşitsizliklerini sağlayan bir α_+ değeri bulunması gerekir. Burada $c < 0$ ve $\rho^+ > 0$ olduğuna dikkat edin. TC sol durum ve FC sağ durumundaki benzer ifade ile $-\mu^2$ ve $-\epsilon\mu^2$ ifadeleri ihmal edilir. Bu α_+ değerinin bulunması için öncelikle (3.100) eşitsizliği ele alındığında $\alpha_+ < 0$ olması gerekir. Diğer eşitsizlikler için;

$$\alpha_+^2 + a\alpha_+ - c\alpha_+ < 0 \Rightarrow \alpha_+(\alpha_+ + a - c) < 0 \tag{3.102}$$

(3.100) eşitsizliğinden $\alpha_+ < 0$ olduğu bilinmektedir. Bu durumda eşitsizliğin sağlanması için $\alpha_+ + a - c > 0$ eşitsizliğin sağlanması gerekir. Böylelikle $\alpha_+ > c - a$ olarak seçilmelidir.

$$\epsilon\alpha_+^2 + a\alpha_+ - c\alpha_+ - \rho^+\Phi(\theta^+) < 0 \Rightarrow \epsilon\alpha_+^2 + (a-c)\alpha_+ - \rho^+\Phi(\theta^+) < 0 \tag{3.103}$$

Bu eşitsizliğin sağlanması için $\triangle$ yı inceleyelim. Yani

$$\triangle = (a-c)^2 - 4\epsilon(-\rho^+\Phi(\theta^+)) = (a-c)^2 + 4\epsilon\rho^+\Phi(\theta^+) \tag{3.104}$$

dır. Eğer $\triangle > 0$ ise ikinci dereceden denklemin iki kökü vardır ve bu kökler

$$\alpha_{1,2}^+ = \frac{-(a-c) \pm \sqrt{\triangle}}{2\epsilon} = \frac{c - a \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4\epsilon\rho^+\Phi(\theta^+)}}{2\epsilon}. \tag{3.105}$$

(3.100) eşitsizliğinden $\alpha_+ < 0$ olduğunu gördük. Bu durumda $\alpha_+ > \frac{c-a-\sqrt{(a-c)^2+4\epsilon\rho^+\Phi(\theta^+)}}{2\epsilon}$ olarak seçilmelidir. Son olarak tüm eşitsizliği sağlayan α_+ değeri

$$0 > \alpha_+ > max\{\frac{c - a - \sqrt{(a-c)^2 + 4\epsilon\rho^+\Phi(\theta^+)}}{2\epsilon}, c - a\} \tag{3.106}$$

olacak şekilde seçildiğinde spektrum sol yarı düzlem üzerinde bulunur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için lineer kararlılık çalışması yapılacaktır. Ayrıca spektral enerji tahminleri ile (3.1)–(3.3) sisteminin kararsız özdeğerleri için sınır bulunacaktır.

4.1. Ters Yönde İlerleyen Yanma Dalgalarının Lineer Kararlılığı

Bu bölümde, ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının doğrusal kararlılığı incelenmektedir. 3.0.2.4. bölümde, böyle bir dalganın esas spektrumunun, ağırlık fonksiyonu $\gamma_\alpha(\xi)$, $\alpha = (\alpha_-, \alpha_+)$ kullanılarak sanal eksenin soluna hareket ettirilebileceğini gördük. Ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının ağırlık fonksiyonları:

1. TC sol durum için $0 > \alpha_- > max\{c-a, \frac{c-a}{\epsilon}\}$
2. FC sağ durum için $0 > \alpha_+ > max\{c-a, \frac{c-a}{\epsilon}\}$
3. OC sağ durum için $0 > \alpha_+ > max\{\frac{c-a-\sqrt{(a-c)^2+4\epsilon\rho^+\Phi(\theta^+)}}{2\epsilon}, c-a\}$

olacak şekilde seçildiğinde spektrumun sol yarı düzlem üzerinde yer alabileceğini gördük. Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için, (Ozbağ ve Kuru, 2021)' te lineer operatör $\mathcal{L}$' nin sağ yarı-düzlemde sıfırdan farklı hiçbir özdeğeri olmadığı gösterilmiştir. Bu bölümde, durumun böyle olduğunu varsaydığımız ters yönde ilerleyen yanma dalgasını, yani $\mathcal{X}_\alpha$ ağırlıklı uzayında spektral olarak kararlı olan ters yönde ilerleyen yanma dalgasını ele alıyoruz. $\mathcal{X}_\alpha$' da ilerleyen dalganın lineer kararlılığı, standart sonuçların kullanıldığı spektral kararlılıktan çıkmaz. (3.1)–(3.3) sistemi kısmen parabolik olduğundan, lineerleştirilmiş operatörün spektrumunda dikey doğrular vardır, dolayısıyla sektörel operatör değildir. Bu nedenle, lineerize edilen sistem bir analitik yarı grup değil, bir C_0-yarı grup üretir. Bu zorluk, bazı denklemlerde olduğu gibi, difüzyonu olmayan sistemler için tipiktir. Bununla birlikte, $\mathcal{X}_\alpha$' daki lineerleştirilmiş kararlılık, $\mathcal{X}_0$ için $L^2(R, R^3)$ veya $H^1(R, R^3)$' ye eşit olan Yurov (2013)' un yakın tarihli bir sonucu ile spektral kararlılıktan kaynaklanmaktadır. Yurov (2013)' un makalesinde ele alınan sistem ise aşağıda verilmiştir.

$$\partial_t U = d\partial_{xx}U + \tilde{a}\partial_x U + R_1(U,V) \tag{4.1}$$

$$\partial_t V = \tilde{b}\partial_x V + R_2(U,V), \tag{4.2}$$

Burada $U = U(x,t) \in \mathbb{R}^{N_1}$ ve $V = V(x,t) \in \mathbb{R}^{N_2}$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ dır. Ayrıca $N_1 X N_1$ boyutunda tüm $d_k > 0$ için $d = diag(d_1, ..., d_{N_1})$ ve $\tilde{b} = diag(b_1, ..., b_{N_1})$ ile $\tilde{a} = (\tilde{a}_{kl})$ dır. d ve $\tilde{b}$ matrisleri sabittir ve R_j fonksiyonları C^2 dır. Şu an için, $\tilde{a}$ hakkında varsayımlarda bulunmaktan kaçınıyoruz. x' i $\xi = x - ct$ ile değiştirdikten sonra, (4.1)-(4.2) sistemi

$$\partial_t U = d\partial_{\xi\xi}U + a\partial_\xi U + R_1(U,V) \tag{4.3}$$

$$\partial_t V = b\partial_\xi V + R_2(U,V). \tag{4.4}$$

olur. Burada $a = \tilde{a} + diag(c, ..., c)$ ve $b = \tilde{b} + diag(c, ..., c)$ dır. Böylece, b sabit bir köşegen matristir. R_j fonksiyonlarının diferansiyellerini $R_{j1} = \partial_U R_j$ ve $R_{j2} = \partial_V R_j$ ile gösterilmektedir. $T^*(\xi) = (U^*(\xi), V^*(\xi))$, (4.1)–(4.2)' nin son durumlarına üssel olarak yaklaşan c hızıyla hareket eden bir dalga çözümü olsun. O zaman (4.3)–(4.4)' ün $T^*(\xi)$' deki lineerizasyonu;

$$\begin{pmatrix} U_t \\ V_t \end{pmatrix} = \mathcal{L}\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} d\partial_{\xi\xi} + a\partial_\xi + R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & b\partial_\xi + R_{21} \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

şeklindedir. Burada $R_{jk} = R_{jk}(U^*(\xi), V^*(\xi))$ dır.

Ağırlık fonksiyonu $\gamma_\alpha(\xi)$ olan, ağırlıklı bir Banach uzayı $\mathcal{X}_\alpha$ üzerinde $\mathcal{L}$' yi incelemek için, bunun yerine $\mathcal{X}_0$ üzerinde izomorfik operatör $\mathcal{L}_\alpha = \gamma_\alpha \mathcal{L} \gamma_\alpha^{-1}$' yı inceleriz. Bu $\mathcal{L}_\alpha$, $S_{jk}(\xi)$' nin sürekli olarak türevlenebilir olduğu ve $S'_{jk}(\xi) \to 0$ ın üssel olarak $\xi \to \pm\infty$ olduğu

$$\mathcal{L}_\alpha = \begin{pmatrix} d\partial_{\xi\xi} + \hat{a}\partial_\xi + S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & b\partial_\xi + S_{21} \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

biçimine sahiptir. d ve b nin (4.5)' ten değişmediğine dikkat edin.

İlerleyen dalga $T^*(\xi)$, $\mathcal{X}_\alpha$' da spektral olarak kararlıysa, o zaman $\mathcal{X}_\alpha$ 'da doğrusal olarak kararlıdır. Bunu yapmak için, Yurov' un son sonucuna, (Yurov, 2013)' daki teorem 1.1' e başvurabiliriz; bu, $d = diag(d_1, ..., d_{N_1})$ ile L^2 üzerinde (4.6) formunda bir lineer operatör olduğunu ima eder. Tüm d_k pozitif sabitleri için $\hat{a}(\xi)$ ve S_{jk} süreklidir ve uç durumlara üstel olarak yaklaşır ve b sabit bir diyagonal matristir. Ayrıca (3.1)–(3.3) sistemi için $\tilde{b} = diag(0, a)$ olduğuna dikkat edin. Böylece, spektral kararlılık doğrusal kararlılık anlamına gelir. (Ghazaryan ve ark., 2010) makalesinin bölüm 3' teki bir argümanla, $\hat{a}(\xi)$ ve $S_{jk}(\xi)$' nin sürekli olarak türevlenebilir olması ve türevlerinin üstel olarak $\xi \to \pm\infty$ şeklinde üstel olarak 0' a gitmesi koşuluyla, aynı sonuç H^1 üzerinde de geçerlidir.

4.2. Spektral Enerji Tahminleri

Bu bölümde spektral enerji tahminleriyle, sisteme difüzyon terimi eklendiğinde kararsız özdeğerlerin sınırları bulunmaya çalışılmaktadır. Evans fonksiyonu kullanılarak bulunan bu sınır ile kararlılık çalışması yapılabilir. (3.1)–(3.3) sistemini göz önünde bulunduralım ve sistemi $(\hat{\theta}, \hat{\rho}, \hat{Y})$ noktası civarında linerize edildiğinde, elde edilen denklem sistemi ise aşağıda verilmiştir.

$$\partial_t\theta = \partial_{\xi\xi}\theta + (c-a)\partial_\xi\theta + h_1\theta + h_2Y + h_3\rho, \tag{4.7}$$

$$\partial_t\rho = c\partial_\xi\rho - h_1\theta - h_2Y - h_3\rho, \tag{4.8}$$

$$\partial_tY = \epsilon\partial_{\xi\xi}Y + (c-a)\partial_\xi Y - h_1\theta - h_2Y - h_3\rho, \tag{4.9}$$

Burada $h_1(\xi) = \frac{\hat{\rho}(\xi)\hat{Y}(\xi)}{\hat{\theta}(\xi)^2}exp(-\frac{1}{\hat{\theta}(\xi)})$, $h_2(\xi) = \hat{\rho}(\xi)exp(-\frac{1}{\hat{\theta}(\xi)})$, $h_3(\xi) = \hat{Y}exp(-\frac{1}{\hat{\theta}(\xi)})$ şeklindedir. Şimdi (4.7)–(4.9) sisteminin özdeğer problemi çözüldüğünde oluşan sistem

$$\lambda\theta = \partial_{\xi\xi}\theta + (c-a)\partial_\xi\theta + h_1\theta + h_2Y + h_3\rho, \tag{4.10}$$

$$\lambda\rho = c\partial_\xi\rho - h_1\theta - h_2Y - h_3\rho, \tag{4.11}$$

$$\lambda Y = \epsilon\partial_{\xi\xi}Y + (c-a)\partial_\xi Y - h_1\theta - h_2Y - h_3\rho \tag{4.12}$$

şeklindedir.

Sistemin ilerleyen dalga civarındaki lineerizasyonunun spektrumu sol yarı düzlem $\{\lambda \in \mathbb{C} | Re\lambda < 0\}$ içinde yer alıyorsa, hareket eden bir dalga spektral olarak kararlıdır. Genel olarak konuşursak, spektral kararlılığın, ilerleyen dalganın doğrusal kararlılığını, yani, doğrusallaştırılmış PDE çözümlerinin bozulmasını ima etmez. $\epsilon > 0$ değerinde sıfıra yakınsayan spektral sınırların olduğu gösterilmektedir.

Lemma 4.1 *Eğer* (θ, ρ, Y) *sıfırdan farklı bir* λ *için* (4.10)–(4.12) *sistemini sağlıyorsa, tüm* $\epsilon_1 > 0$ *ve* $\epsilon_2 > 0$ *için aşağıdaki iki eşitsizlik geçerlidir.*

$$Re(\lambda) \int |\theta|^2 \leq \int h_1 |\theta|^2 + \epsilon_1 \int h_2 |\theta|^2 + \frac{1}{4\epsilon_1} \int h_2 |Y|^2 + \epsilon_2 \int h_3 |\theta|^2 + \frac{1}{4\epsilon_2} \int h_3 |\rho|^2 \quad (4.13)$$

ve

$$(Re(\lambda) + |Im(\lambda)|) \int |\theta|^2 \leq \int h_1 |\theta|^2 + \frac{(c-a)^2}{4} \int |\theta|^2 + \epsilon_1 \int h_2 |\theta|^2 + \frac{1}{2\epsilon_1} \int h_2 |Y|^2 + \epsilon_2 \int h_3 |\theta|^2 + \frac{1}{2\epsilon_2} \int h_3 |\rho|^2. \quad (4.14)$$

İspat. (4.10) denklemini $\bar{\theta}$' nın eşleneği ile çarpıldığında

$$\lambda \theta \bar{\theta} = \partial_{\xi\xi} \theta \bar{\theta} + (c-a) \partial_\xi \theta \bar{\theta} + h_1 \theta \bar{\theta} + h_2 Y \bar{\theta} + h_3 \rho \bar{\theta} \quad (4.15)$$

denklemi elde edilir. Elde edilen bu denklemin $-\infty$ dan $+\infty$' a integrali alındığında

$$\lambda \int |\theta|^2 = (c-a) \int \theta' \bar{\theta} + \int h_1 |\theta|^2 + \int h_2 Y \bar{\theta} + \int h_3 \rho \bar{\theta} - \int |\theta'|^2. \quad (4.16)$$

elde edilir. $Re \int \theta' \bar{\theta} d\xi = \int (\theta' \bar{\theta} + \bar{\theta}' \theta) \frac{d\xi}{2} = \int (\theta \bar{\theta})' \frac{d\xi}{2} = 0$ olduğundan, (4.16)' in reel ve sanal kısımlarını alarak,

$$Re(\lambda) \int |\theta|^2 = \int h_1 |\theta|^2 + Re \int h_2 Y \bar{\theta} + Re \int h_3 \rho \bar{\theta} - \int |\theta'|^2, \quad (4.17)$$

eşitliği ve

$$|Im(\lambda)| \int |\theta|^2 \leq (c-a) \int |\theta'| |\bar{\theta}| + |Im \int h_2 Y \bar{\theta}| + |Im \int h_3 \rho \bar{\theta}| \quad (4.18)$$

eşitsizliği elde edilir. Young eşitsizliğini (4.17)' da kullanarak (4.13) eşitsizliği elde edilir; Burada Young eşitsizliği $ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2$ biçiminde kullanılmaktadır, burada a ve b herhangi bir gerçek sayı ve $\epsilon > 0$' dır. (4.17) eşitliği ile (4.18) eşitsizliği toplandığında

(4.14) eşitsizliği elde edilmiştir. Ayrıca x ve y karmaşık sayılar olduğundan $|Re(x\bar{y})| + |Im(x\bar{y})| \leq \sqrt{2}|x||y|$ eşitsizliği kullanılmıştır. Son olarak $(c-a)|\theta'||\theta| \leq (c-a)^2|\theta|^2/4 + |\theta'^2|$' yi elde etmek için Young eşitsizliği kullanılmaktadır.

$$\begin{aligned}(Re(\lambda) + |Im(\lambda)|)\int|\theta|^2 &\leq \int h_1|\theta|^2 + \frac{(c-a)^2}{4}\int|\theta|^2 + \sqrt{2}\int h_2|Y||\theta| + \sqrt{2}\int h_3|\rho||\theta| \\ &\leq \int h_1|\theta|^2 + \frac{(c-a)^2}{4}\int|\theta|^2 + \epsilon_1\int h_2|\theta|^2 + \frac{1}{2\epsilon_1}\int h_2|Y|^2 + \\ &\quad \epsilon_2\int h_3|\theta|^2 + \frac{1}{2\epsilon_2}\int h_3|\rho|^2 \end{aligned} \tag{4.19}$$

□

Önerme 4.2 *(Young Eşitsizliği)* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *eşitliğini sağlayan her* $a, b \in (0,\infty)$*, her* $p, q \in (1,\infty)$ *için* $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ *dır.*

İspat. Young Eşitsizliği' nin konvekslik kavramı ile ispatı yapılmaktadır. Logaritma fonksiyonu pozitif gerçel sayılar kümesinde konkav fonksiyondur. Yani grafik üzerinden iki farklı nokta alıp bir doğru parçasıyla birleştirdiğimizde, bu doğru parçası fonksiyon grafiğinin altında kalacaktır. $x, y > 0$ ve $0 \leq t \leq 1$ için

$$t\log x + (1-t)\log y \leq \log(tx + (1-t)y) \tag{4.20}$$

veya

$$\log(x^t y^{1-t}) \leq \log(tx + (1-t)y) \tag{4.21}$$

olur. Burada $t = \frac{1}{p}$ ve $1 - t = \frac{1}{q}$ olarak seçilmektedir. $x = a^p$ ve $y = b^q$ olacak şekilde değişken değiştirmesi yapıldığında son eşitsizlikten

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{4.22}$$

elde edilir. □

Lemma 4.3 (θ, ρ, Y) *sıfırdan farklı bazı* λ *için* (4.10)–(4.12)*' yı sağlıyorsa,* $\epsilon_3 > 0$ *ve* $\epsilon_4 > 0$*' ın tümü için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:*

$$Re(\lambda)\int|\rho|^2 \leq \epsilon_3\int h_1|\rho|^2 + \frac{1}{4\epsilon_3}\int h_1|\theta|^2 + \epsilon_4\int h_2|\rho|^2 + \frac{1}{4\epsilon_4}\int h_2|Y|^2 - \int h_3|\rho|^2 \tag{4.23}$$

. **İspat.** (4.11) denklemini $\bar{\rho}$' nın eşleneği ile çarpıldığında;

$$\lambda\rho\bar{\rho} = c\partial_\xi \rho\bar{\rho} - h_1\theta\bar{\rho} - h_2 Y\bar{\rho} - h_3\rho\bar{\rho}$$

elde edilir. Elde edilen denklemin $-\infty$ dan $+\infty$' a integrali alındığında aşağıdaki denklem elde edilmektedir.

$$\lambda\int|\rho|^2 = c\int\rho'\bar{\rho} - \int h_1\theta\bar{\rho} - \int h_2 Y\bar{\rho} - \int h_3|\rho|^2. \tag{4.24}$$

(4.24)' un reel kısmı alındığında oluşan denklem

$$Re(\lambda)\int|\rho|^2 = -Re\int h_1\theta\bar{\rho} - Re\int h_2 Y\bar{\rho} - \int h_3|\rho|^2 \tag{4.25}$$

şeklindedir. (4.23) eşitsizliği, (4.25)' te Young eşitsizliği kullanarak elde edilmektedir.

□

Lemma 4.4 *(θ,ρ,Y) sıfırdan farklı bazı λ için* (4.10)–(4.12)*' yı sağlıyorsa, $\epsilon_5 > 0$ ve $\epsilon_6 > 0$' ın tümü için aşağıdaki iki eşitsizlik geçerlidir:*

$$Re(\lambda)\int|Y|^2 \le \epsilon_5\int h_1|\theta|^2 + \frac{1}{4\epsilon_5}\int h_1|Y|^2 + \epsilon_6\int h_3|\rho|^2 + \frac{1}{4\epsilon_6}\int h_3|Y|^2 + \int(\epsilon + a - c - h_2)|Y|^2 \tag{4.26}$$

ve

$$(Re(\lambda) + |Im(\lambda)|)\int|Y|^2 \le \frac{(c-a)^2}{4\epsilon}\int|Y|^2 + \epsilon_5\int h_1|\theta|^2 + \frac{1}{2\epsilon_5}\int h_1|Y|^2 + \epsilon_6\int h_3|\rho|^2 + \frac{1}{2\epsilon_6}\int h_3|Y|^2 - \int\epsilon h_2|Y|^2. \tag{4.27}$$

İspat. (4.12)' yı $\bar{Y}$ eşleneği ile çarpıldığında

$$\lambda Y\bar{Y} = \epsilon\partial_{\xi\xi}Y\bar{Y} + (c-a)\partial_\xi Y\bar{Y} - h_1\theta\bar{Y} - h_2 Y\bar{Y} - h_3\rho\bar{Y} \tag{4.28}$$

elde edilir. Elde edilen denklemin $-\infty$' dan $+\infty$' a integrali alındığında;

$$\lambda\int|Y|^2 = (c-a)\int Y'\bar{Y} - \int h_1\theta\bar{Y} - \int h_3\bar{Y}\rho - \int h_2)|Y|^2 - \epsilon\int|Y'|^2. \tag{4.29}$$

elde edilir. (4.29)' ün reel ve imajiner kısımları alındığında;

$$Re(\lambda)\int|Y|^2 = -Re\int h_1\theta\bar{Y} - Re\int h_3\bar{Y}\rho - \int h_2|Y|^2 - \epsilon\int|Y'|^2 \tag{4.30}$$

eşitliği ve

$$|Im(\lambda)|\int|Y|^2 \leq (c-a)\int|Y'\,||\bar{Y}| + |Im\int h_1\theta\bar{Y}| + |Im\int h_3\rho\bar{Y}|. \tag{4.31}$$

eşitsizliği elde edilir. Young eşitsizliğini (4.30)' de kullanarak (4.26) eşitsizliği elde edilir. (4.30) eşitliği ile (4.31) eşitsizliği toplandığında (4.27) eşitsizliği elde edilmiştir. Ayrıca x ve y karmaşık sayılar olduğundan $|Re(x\bar{y})| + |Im(x\bar{y})| \leq \sqrt{2}|x||y|$ eşitsizliği kullanılmıştır. Son olarak $(c-a)|Y'||Y| \leq (c-a)|Y|^2/4 + |Y'^2|$' yi elde etmek için Young eşitsizliği kullanılmaktadır.

$$\begin{aligned}(Re(\lambda)+|Im(\lambda)|)\int|Y|^2 &\leq \frac{(c-a)^2}{4\epsilon}\int|Y|^2 - \int h_2|Y|^2 + \\ &\sqrt{2}\int h_1|Y||\theta| + \sqrt{2}\int h_3|\rho||Y| \\ &\leq \frac{(c-a)^2}{4\epsilon}\int|Y|^2 - \int h_2|Y|^2 + \epsilon_5\int h_1|\theta|^2 + \frac{1}{2\epsilon_5}\int h_1|Y|^2 + \\ &\epsilon_6\int h_3|\rho|^2 + \frac{1}{2\epsilon_6}\int h_3|Y|^2. \end{aligned} \tag{4.32}$$

□

Teorem 4.5 (θ,ρ,Y) *sıfırdan farklı bazı* λ *için* (4.10)–(4.12)*' yi sağlıyorsa, aşağıdaki eşitsizlik tüm* $0<\delta<1$ *in için geçerlidir:*

$$Re(\lambda) \leq \frac{1}{1-\delta}\sup_{\xi} h_1 + \frac{(1-\delta)^2+2\delta}{8\delta}\sup_{\xi}\{h_2+h_3\}. \tag{4.33}$$

İspat. ilk olarak (4.13)' ü $k>0$ olacak şekilde bir k sayısı ile çarpıldığında elde edilen eşitsizlik aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}Re(\lambda)\int(k|\theta|^2) \leq \int kh_1|\theta|^2 + \epsilon_1\int kh_2|\theta|^2 + \frac{1}{4\epsilon_1}\int kh_2|Y|^2 + \\ \epsilon_2\int kh_3|\theta|^2 + \frac{1}{4\epsilon_2}\int kh_3|\rho|^2\end{aligned} \tag{4.34}$$

Daha sonra ise elde ettiğimiz son eşitsizliğe (4.23) ve (4.26) eşitsizlikleri eklendiğinde elde edilen eşitsizlik ise aşağıda verilmiştir.

$$Re(\lambda)\int(k|\theta|^2+|\rho|^2+|Y|^2) \leq (k+\epsilon_5+\frac{1}{4\epsilon_3})\int h_1|\theta|^2+\epsilon_3\int h_1|\rho|^2+\frac{1}{4\epsilon_5}\int h_1|Y|^2$$
$$+k\epsilon_1\int h_2|\theta|^2+\epsilon_4\int h_2|\rho|^2(\frac{k}{4\epsilon_1}+\frac{1}{4\epsilon_4}-1)\int h_2|Y|^2+$$
$$+k\epsilon_2\int h_3|\theta|^2+(\frac{k}{4\epsilon_2}+\epsilon_6-1)\int h_3|\rho|^2+$$
$$+\frac{1}{4\epsilon_6}\int h_3|Y|^2+\int(\epsilon+a-c-h_2)|Y|^2 \qquad (4.35)$$

Verilen eşitsizliği daha basit hale indirgemek için aşağıdaki adımlar uygulanmaktadır;

1. Adım; $\frac{k}{4\epsilon_1}+\frac{1}{4\epsilon_4}=1$ ve $\frac{k}{4\epsilon_2}+\epsilon_6=1$ ve $\epsilon_4=\epsilon_1$ ve $\epsilon_6=\frac{1}{(4\epsilon_2)}$ olacak şekilde seçildiğinde elde edilen eşitsizlik aşağıda verilmiştir.

$$Re(\lambda)\int(k|\theta|^2+|\rho|^2+|Y|^2) \leq (k+\epsilon_5+\frac{1}{4\epsilon_3})\int h_1|\theta|^2+\epsilon_3\int h_1|\rho|^2+$$
$$\frac{1}{4\epsilon_5}\int h_1|Y|^2+k\epsilon_1\int h_2|\theta|^2+\epsilon_1\int h_2|\rho|^2+$$
$$k\epsilon_2\int h_3|\theta|^2+\epsilon_2\int h_3|Y|^2+\int(\epsilon+a-c)|Y|^2 \qquad (4.36)$$

eşitsizliği elde edilir.

2. Adım; $\epsilon_1=\epsilon_2=\epsilon_4=\frac{k+1}{4}$ ve $\epsilon_6=\frac{1}{(k+1)}$ olarak alındığında,

$$Re(\lambda)\int(k|\theta|^2+|\rho|^2+|Y|^2) \leq$$
$$(k+\epsilon_5+\frac{1}{4\epsilon_3})\int h_1|\theta|^2+\epsilon_3\int h_1|\rho|^2+\frac{1}{4\epsilon_5}\int h_1|Y|^2+$$
$$k\frac{k+1}{4}\int h_2|\theta|^2+\frac{k+1}{4}\int h_2|\rho|^2+$$
$$k\frac{k+1}{4}\int h_3|\theta|^2+\frac{k+1}{4}\int h_3|Y|^2+\int(\epsilon+a-c)|Y|^2 \qquad (4.37)$$

eşitsizliği elde edilir.

3. Adım; $\epsilon_3=\frac{1}{(1-\delta)}$, $\epsilon_5=\frac{(1-\delta)}{4}$ ve $k=\frac{(1-\delta)^2}{(2\delta)}$ olarak seçildiğinde elde edilen eşitsizlik aşağıda verilmiştir.

$$Re(\lambda)\int(k|\theta|^2+|\rho|^2+|Y|^2) \leq (\frac{1}{1-\delta})\int h_1(k|\theta|^2+|\rho|^2+|Y|^2)$$
$$+(\frac{(1-\delta)^2+2\delta}{8\delta})\int h_2(k|\theta|^2+|\rho|^2)+$$
$$(\frac{(1-\delta)^2+2\delta}{8\delta})\int h_3(k|\theta|^2+|Y|^2)+\int(\epsilon+a-c)|Y|^2. \qquad (4.38)$$

Bu nedenle,

$$Re(\lambda) \leq \frac{1}{1-\delta} \sup_{\xi} h_1 + (\frac{(1-\delta)^2 + 2\delta}{8\delta}) \sup_{\xi}\{h_2 + h_3\}$$

□

Teorem 4.6 *(θ, ρ, Y) sıfırdan farklı bazı λ için* (4.10)–(4.12)*' yi sağlıyorsa, aşağıdaki eşitsizlik tüm $0 < \delta < 1$ için geçerlidir:*

$$Re(\lambda) + |Im(\lambda)| \leq \max_{\xi} \left\{ \frac{(c-a)^2}{4} + (1-\delta)h_2 + \frac{h_3}{1-\delta} + \frac{(2-\delta)}{4\delta(1-\delta)}\frac{\hat{\rho}^2}{\hat{\theta}^2}h_3 + \frac{5h_1}{4} + \frac{(c-a)^2}{4\epsilon} + \frac{h_1}{1-\delta} + \frac{h_3}{2(1-\delta)} + \frac{h_3(2-\delta)}{2\delta}\frac{\hat{\rho}^2}{\hat{Y}^2} \right\} \tag{4.39}$$

İspat. (4.39) eşitsizliğini göstermek için Lemma 4.3 tekrar gözden geçirilmektedir. h_1 ve h_2 yi h_3 cisinden yazabiliriz. Burada $h_1 = \frac{\hat{\rho}}{\hat{\theta}^2}h_3$ ve $h_2 = \frac{\hat{\rho}}{\hat{Y}}h_3$ dır. (4.39)' de $h_1\theta\bar{\rho}$ ve $h_2Y\bar{\rho}$' yı sırasıyla $\frac{\hat{\rho}}{\hat{\theta}^2}h_3\theta\bar{\rho}$ ve $\frac{\hat{\rho}}{\hat{Y}}h_3Y\bar{\rho}$ ile değiştirdikten sonra Young eşitsizliğini uygularsak aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$h_1\theta\bar{\rho} = \frac{\hat{\rho}}{\hat{\theta}^2}h_3\theta\bar{\rho} \leq \epsilon_3 h_3|\rho|^2 + \frac{\hat{\rho}^2}{4\epsilon_3\hat{\theta}^4}h_3|\theta|^2$$

ve

$$h_2Y\bar{\rho} = \frac{\hat{\rho}}{\hat{Y}}h_3Y\bar{\rho} \leq \epsilon_4 h_3|\rho|^2 + \frac{\hat{\rho}^2}{4\epsilon_4\hat{Y}^2}h_3|Y|^2$$

. Bu ifadeler (4.25) eşitsizliğinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} Re(\lambda)\int|\rho|^2 \;\; &\leq \;\; \epsilon_3\int h_3|\rho|^2 + \frac{1}{4\epsilon_3}\int\frac{\hat{\rho}^2}{\hat{\theta}^4}h_3|\theta|^2 + \\ &\epsilon_4\int h_3|\rho|^2 + \frac{1}{4\epsilon_4}\int\frac{\hat{\rho}^2}{\hat{Y}^2}h_3|Y|^2 - \int h_3|\rho|^2. \end{aligned} \tag{4.40}$$

eşitsizliği elde edilir. Yani buradaki amaç h_1 ve h_2' yı h_3 cinsinden yazmaktır. Sırasıyla (4.14) ve (4.27)' yı k_1 ve k_2 sayıları ile çarpıldığında oluşan eşitsizlik aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} (Re(\lambda) + |Im(\lambda)|)\int k_1|\theta|^2 \leq \int k_1h_1|\theta|^2 + \frac{(c-a)^2}{4}\int k_1|\theta|^2 + \epsilon_1\int k_1h_2|\theta|^2 + \\ \frac{1}{2\epsilon_1}\int k_1h_2|Y|^2 + \epsilon_2\int k_1h_3|\theta|^2 + \frac{1}{2\epsilon_2}\int k_1h_3|\rho|^2 \end{aligned} \tag{4.41}$$

ve

$$(Re(\lambda)+|Im(\lambda)|)\int k_2|Y|^2 \le \frac{(c-a)^2}{4\epsilon}\int k_2|Y|^2+\epsilon_5\int k_2h_1|\theta|^2+\frac{1}{2\epsilon_5}\int k_2h_1|Y|^2+ \epsilon_6\int k_2h_3|\rho|^2+\frac{1}{2\epsilon_6}\int k_2h_3|Y|^2-\int \epsilon k_2h_2|Y|^2. \quad (4.42)$$

Daha sonra ise (4.40) eşitsizliğine (4.41) ve (4.42) eşitsizliklerini eklendiğinde,

$$\begin{aligned}&(Re(\lambda)+|Im(\lambda)|)\int(k_1|\theta|^2+k_2|Y|^2)+Re(\lambda)\int|\rho|^2\\ &\le\int(h_1+\frac{(c-a)^2}{4}+\epsilon_1h_2+\epsilon_2h_3+\frac{h_3}{4\epsilon_3k_1}\frac{\hat{\rho}^2}{\hat{\theta}^4}+\frac{\epsilon_5k_2h_1}{k_1})k_1|\theta|^2\\ &+\int(\frac{(c-a)^2}{4\epsilon}+\frac{h_1}{2\epsilon_5}+\frac{h_3}{2\epsilon_6}+\frac{h_3}{4\epsilon_4k_2}\frac{\hat{\rho}^2}{\hat{Y}^2})k_2|Y|^2\\ &+(\epsilon_3+\epsilon_4+\frac{k_1}{2\epsilon_3}+\epsilon_6k_2-1)\int h_3|\rho|^2+(\frac{k_1}{2\epsilon_1}-k_2)\int h_2|Y|^2 \qquad (4.43)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi elde edilen eşitsizliği daha basite indirgemek için aşağıdaki adımlar uygulanmaktadır.

1. Adım: $\epsilon_1=\epsilon_6=1-\delta$, $\epsilon_3=\epsilon_4=\epsilon_5=\frac{1-\delta}{2}$, $\epsilon_2=\frac{1}{(1-\delta)}$ ve $k_1=\frac{2\delta}{2-\delta}$ olacak şekilde seçildiğinde oluşan eşitsizlik aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}&(Re(\lambda)+|Im(\lambda)|)\int(k_1|\theta|^2+k_2|Y|^2)+Re(\lambda)\int|\rho|^2\le\\ &\int(h_1+\frac{(c-a)^2}{4}+(1-\delta)h_2+\frac{1}{1-\delta}h_3+\\ &\frac{2-\delta}{4\delta(1-\delta)}\frac{\hat{\rho}^2}{\hat{\theta}^4}+\frac{(1-\delta)k_2h_1(2-\delta)}{4\delta})k_1|\theta|^2\\ &+\int(\frac{(c-a)^2}{4\epsilon}+\frac{h_1}{1-\delta}+\frac{h_3}{2(1-\delta)}+\frac{h_3}{2(1-\delta)k_2}\frac{\hat{\rho}^2}{\hat{Y}^2})k_2|Y|^2+\\ &(\epsilon_3+\epsilon_4+\frac{k_1}{2\epsilon_3}+\epsilon_6k_2-1)\int h_3|\rho|^2+(\frac{k_1}{2\epsilon_1}-k_2)\int h_2|Y|^2 \qquad (4.44)\end{aligned}$$

2. Adım: Son olarak $\epsilon_3+\epsilon_4+\frac{k_1}{(2\epsilon_2)}+k_2\epsilon_6=1$ ve $\frac{k_1}{(2k_2\epsilon_1)}=1$ olarak seçildiğinde aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz. Buradan $k_2=\frac{\delta}{(2-\delta)(1-\delta)}$ eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned}&(Re(\lambda)+|Im(\lambda)|)\int(k_1|\theta|^2+k_2|Y|^2)+Re(\lambda)\int|\rho|^2\le\\ &\int(\frac{(c-a)^2}{4}+(1-\delta)h_2+\frac{1}{1-\delta}h_3+\frac{2-\delta}{4\delta(1-\delta)}\frac{\hat{\rho}^2}{\hat{\theta}^4}h_3+\frac{5h_1}{4})k_1|\theta|^2+\\ &\int(\frac{(c-a)^2}{4\epsilon}+\frac{h_1}{1-\delta}+\frac{h_3}{2(1-\delta)}+\frac{h_3(2-\delta)}{2\delta}\frac{\hat{\rho}^2}{\hat{Y}^2})k_2|Y|^2. \qquad (4.45)\end{aligned}$$

Bu yüzden

$$Re(\lambda) + |Im(\lambda)| \geq \max_{\xi} \left\{ \frac{(c-a)^2}{4} + (1-\delta)h_2 + \frac{1}{1-\delta}h_3 + \frac{2-\delta}{4\delta(1-\delta)}\frac{\hat{\rho}^2}{\hat{\theta}^4}h_3 + \frac{5h_1}{4} \right.$$
$$\left. \frac{(c-a)^2}{4\epsilon} + \frac{h_1}{1-\delta} + \frac{h_3}{2(1-\delta)} + \frac{h_3(2-\delta)}{2\delta}\frac{\hat{\rho}^2}{\hat{Y}^2} \right\} \quad (4.46)$$

$\square$

olacak şekilde seçildiğinde bir çelişki oluşur. Bu yüzden (4.33) ve (4.39) eşitsizlikleri, olası kararsız spektrumun yamuk bir bölgesini tanımlar. Bu bölgeyi, $Re\lambda < 0$ ile özdeğerleri göz ardı etmek için bu bölgeyi bir Evans fonksiyon hesaplamasıyla birlikte kullanabiliriz.

4.3. Evans Fonksiyonu

Son yıllarda, ilerleyen dalgaların kararlılık analizinde Evans fonksiyonu önemli bir araç haline geldi. Özdeğer denkleminin azalan çözümlerinin bir Wronskiyen' i olan bu fonksiyon, dalga civarında doğrusallaştırılmış operatörün spektral analizi için hem analitik hem de nümerik hesaplama açısından faydalıdır. Özellikle, Evans fonksiyonu hesaplaması, lineer operatörün herhangi bir kararsız özdeğerin (eğer varsa) bulunmasına ve belirli bir dalganın spektral kararlılığını oluşturmasına izin verir. Evans fonksiyonun birçok kullanım yeri bulunmaktadır. Bunlardan bazıları şunlardır: (Barker ve ark. (2009); Kapitula (1998); (Gubernov ve ark., 2003)).

İlerleyen dalga çözümlerinin kararlılık analizi, bir diferansiyel operatörün ayrık spektrumunu incelemeye indirgenir. Böyle bir operatör genellikle, ilerleyen dalga çözümü etrafında Kısmi Diferansiyel Denklemlerin (PDE's) linerize edilmesiyle elde edilir. Evans fonksiyonu, sıfırlarını sağ yarı karmaşık düzlemde yerleştirerek ilerleyen dalgaların kararlılığını incelemek için kullanılır. Evans fonksiyonunun sıfırları operatörün özdeğerlerini temsil eder (Gubernov, 2003). Evans fonksiyonu ilk olarak (Evans (1972a); Evans (1972b); Evans (1972c); ve Evans (1975))' de sunuldu. O zamandan beri, çok çeşitli örneklerde hareket eden dalgaların kararlılık analizine uygulanmıştır. Bu tür örnekler şunları içerir:

(1) doğrusal olmayan Schrödinger denklemlerinin darbelerinin doğrusal kararlılık analizi (Kapitula, 2005)

(2) çoklu darbeli darbelerin kararlılığı (Sandstede, 2002)

(3) KdV Burgers denklemleri (Pego ve ark., 1993)

(4) oto-kataliz sistemi (Balmforth ve ark., 1999)

(5) viskoz şok dalgaları (Brin, 2000)

(6) yanma (Terman (1990); Gubernov ve ark. (2002); Gubernov ve ark. (2003a); Gubernov ve ark. (2003b); Gubernov ve ark. (2004) ve Ghazaryan ve Jones (2009)).

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada başlangıçta bir miktar katı yakıt bulunan gözenekli ortama oksijen enjekte edildiğinde meydana gelen yanma dalgaları incelenmiştir. Bu yanma sistemi parçalı parabolik sistemdir. Ele alınan model sıcaklık (θ), katı yakıt (ρ) ve oksijen (Y) denge yasalarını veren üç farklı diferansiyel denklemlerinden oluşur. Difüzyon terimi; sıcaklık denkleminde var iken diğer denklemlerde yani oksijen ve katı yakıt denklemlerinde bulunmamaktadır, ayrıca katı yakıt yayılmaz ve oksijen yayılımının önemsenmediği kabul edilir. Bu çalışmada, oksijen ve sıcaklığın hızı aynı kabul edilerek yanma dalgası ters yönde ilerlemektedir. Ters yönde ilerleyen yanma dalgalarına difüzyon terimi eklendiğinde ilerleyen dalgaların değişmediği gösterilmiştir. Ters yöndeki ilerleyen yanma dalgası iki dalgadan oluşmaktadır. Bunlar: $TC \xrightarrow{c} OC$ ve $TC \xrightarrow{c} FC$ dalgalarıdır. Bu nedenle bölüm 3 de ters yönde ilerleyen yanma dalgalarından bahsedilmiştir. Spektrum, ayrık spektrum ve esas spektrumdan oluşmaktadır. Ayrıca bu dalgaların kararlılık analizi için önce matematiksel modelin esas spektrumu Fourier dönüşüm metodu kullanılarak bulunmuştur. Bu metodla ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının sol ve sağ durumlardaki özdeğerleri bulunmuştur. Elde edilen bu özdeğerlerden sanal eksene dokunan paraboller oluşmaktadır. Spektral kararlılık için sağ yarı düzlem üzerindeki esas spektrumu sol yarı düzleme öteleyen bir ağırlık fonksiyonu bulunmuştur. Ters yönde ilerleyen yanma dalgaları için Yurov (2013)' un yakın tarihli bir çalışmasından yararlanılarak lineer kararlılık çalışması yapılmıştır. Son olarak, spektral enerji tahminleriyle kararsız özdeğerler için sınır bulunmuştur.

KAYNAKLAR

AKKUTLU I. and YORTSOS Y., 2003. The dynamics of in-situ combustion fronts in porous media. Combust Flame 134:229-247.

ALDUSHIN A,RUMANOV I. and MATKOWSKY B, 1999. Maximal energy accumulation in a superadiabatic filtration combustion wave. J Combust Flame 118:76-90.

BARKER B., HUMPHERYS J. and ZUMBRUN K., 2009.STABLAB:a MATLAB-based numerical library for Evans function computation.

BALMFORTH N.J, CRASTER R.V and MALHAM S.J.A, 1999. Unsteady Fronts in an Autocatalytic System.In:Proceedings of the Royal Society of London. Series A:Mathematical.Physical and Engineering Sciences.8 April 1999, The Royal Society,p.1401.

BRIN L.Q, 2000. Numerical Testing of the Stability of Viscous Shock Waves. Mathematics of Computation.70(235).pp.1071-1088.

BARLAS G, 2020 Gözenekli ortamda ters yönde ilerleyen yanma dalgalarının varlığı. Yüksek Lisans Tezi, Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Şanlıurfa, 43.

CHAPIRO G. and SOUZA AJ., 2016. Asymptotic approximation for counterflow combustion in porous media. Appl Anal 95(1):63-77

CHAPIRO G , 2009. Gas-solid combustion in insulated porous media. Doctoral thesis, IMPA. Preprint Series C88/2009.

CHAPIRO G, MARCHEIN D, and SCHECTER S, 2014. Combustion waves and Riemann solutions in light porous foam. J. Hyperbol. Differ. Equ. 11,295-328.

CHAPIRO G and SENOS L, 2017. Riemann solutions for counterflow combustion in light porous foam. Comp. Appl. Math.

CHAPIRO G., MAILYBAEV AA., SOUZA A., MARCHESIN D. and BRUINING J, 2012. Asymptotic approximation of long-time solution for low-temperature filtration combustion Comput Geosci 16:799-808.

EVANS J, 1972a. Nerve Axon Equations: I Linear Approximations. Indiana University Mathematics Journal.(21). pp.877-885.

EVANS J, 1972b. Nerve Axon Equations: II Stability at Rest. Indiana University Mathematics Journal.(22).pp.75-90 .

EVANS J, 1972c. Nerve Axon Equations: III Stability of the Nerve Impulses. Indiana University Mathematics Journal.(22).pp.557-594 .

EVANS J, 1975. Nerve Axon Equations: IV the Stable and Unstable Impulse. Indiana University Mathematics Journal.(24).pp.1169-1190.

GHAZARYAN A, LATUSHKIN Y, SCHECTER S and SOUZA A, 2010. Stability of gasless combustion fronts in one-dimensional solids. Arch Ration Mech Anal 198(3):981-1030

GUBERNOV V., MERCER G.N., SIDHU H.S. and WEBER R.O ,2003. Evans Function Stability of Combustion Waves. SIAM Journal on Applied Mathematics.63(4).pp.1259-1275.

GUBERNOV V,2003. Instabilities in Combustion . PhD. Thesis Sydney, Australia: The Universtiy of New South Wales.

GUBERNOV V., MERCER G.N., SIDHU H.S. and WEBER R.O., 2002. On the Evans Function Calculation of the Stability of Combustion Waves. Australian Mathematical Society Gazette.29(3).pp.155-163.

GUBERNOV V., MERCER G.N., SIDHU H.S. and WEBER R.O ,2003a. Evans Function Stability of Combustion Waves. SIAM Journal on Applied Mathematics.63(4).pp.1259-1275.

GUBERNOV V., MERCER G.N., SIDHU H.S. and WEBER R.O , 2003b. . Numerical Methods for the Analysis of Traveling Waves in Reaction-Diffusion Equations. ANZIAM Journal.44.pp.C271-C289.

GUBERNOV V., MERCER G.N., SIDHU H.S. and WEBER R.O , 2004 . Evans Function Stability of Non-Adiabatic Combustion Waves.In:Proceedings of the Royal Society of London.Series A:Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 8 August 2004, The Royal Society, pp.1259-1275.

GHAZARYAN A and JONES C, 2009. On the Stability of High Lewis Number Combustion Fronts.Discrete and Continuous Dynamical Systems. 24(3).pp.809-826.

KAPITULA T., 1998. The Evans function and generalized Melnikov integrals. *SIAM J. Math. Anal.* **30** 273–297.

KAPITULA T, 2005. Stability Analysis of Pulses via the Evans Function : Dissipative Systems.In:N.Akhmediev and A.Ankiewicz(eds.).Dissipative Solitons. Lecture Notes in Physics. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. pp.243-262.

MARCHESIN D. and SCHECTER S., 2003. Oxidation heat pulses in two-phase expansive flow in porous media.Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)54(1):48-83

OZBAG F, 2016. Stability analysis of combustion waves in porous media, Ph.D.thesis. North Carolina State University

OZBAG F,SCHECTER S and CHAPIRO G, 2018. Traveling waves in a simplified gas-solid combustion model in porous media. Adv. Differ. Equ. 23,409-454.

OZBAĞ F. ve KURU B.C., 2021 İlerleyen Yanma Dalgalarının Evans Fonksiyonu İle Spektral Kararlılığı . Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi , 11 (2) , 663-679 . DOI: 10.31466/kfbd.982057

PEGO, R.L,SMEREKA P and WEINSTEIN M.I., 1993. Oscillatory Instability of Traveling Waves for a KdV-Burgers Equation. Physica D:Nonlinear Phenomena.67(1-3).pp.45-65.

SOUZA AJ, 2008. Counterflow combustion in a porous medium. In:Hyperbolic problems:theory, numerics, applications.Springer, New York, pp 1005-1012.

SCHULT D, BAYLISS A and MATKOWSKY B, 1998. Traveling waves in natural counterflow filtration combustion and their stability. SIAM J Appl Math 58(3):806-852

SCHULTD, MATKOWSKY B, VOLPERT V and FERNAND-PELLO A, 1996. Forced forwad smolder combustion . Combust Flame 104(1-2):1-26

SANDSTEDE B, 2002. Stability of Traveling Waves . in Handbook of Dynamical Systems , 2:938-1055.

TERMAN D, 1990. Stability of Planar Wave Solutions to a Combustion Model. SIAM Journal on Mathematical Analysis.21(5).pp.1139-1171.

YUROV V, 2013. Stability Estimates for Semigroups and Partly Parabolic Reaction Diffusion Equation. Doctoral thesis, University of Missouri.

ZELDOVICH YB, BARENBLATT GI, LIBROVICH VB and MAKHVILADZE GM,

1985. The mathematical theory of combustion and explosion. Consultants Bureau, New York.