T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMİN KALANLI KUVVET SERİSİ METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Habibe GÖKSU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2022

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMİN KALANLI KUVVET SERİSİ METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Habibe GÖKSU

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Mahmut MODANLI
Yıl: 2022, sayfa: 36

Bu çalışmada, üçüncü mertebeden kesirli kısmi diferansiyel denklemin başlangıç-sınır değer problemi ele alındı. Bu denklemleri uygun başlangıç ve sınır koşullarıyla birlikte sayısal olarak çözmek için Laplace dönüşüm metodu ve kalanlı kuvvet serisi metodu kullanıldı. Kesirli kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü için Laplace metodu, yaklaşık çözümü için ise kullanışlı bir metot olan " kalanlı kuvvet serisi metodu (KKSM)" kullanıldı. Bu denklemlerin başlangıç ve sınır koşullarıyla birlikte nümerik çözümlerini bulmak için, (KKSM) detaylı olarak incelenerek verildi. Seçilmiş örnek problemlerin sayısal çözümü iki farklı yöntem kullanılarak karşılaştırıldı. Bulunan yaklaşık ve tam çözümler için hata analiz tablosu verildi. Burada bahsedilen yöntem, yaklaşık çözümleri (KKSM) ile bulmak ve halihazırdaki yöntem aracılığı ile elde edilen çözümleri tam çözüm ile karşılaştırarak hassasiyeti, güvenilirliği ve hızlı yakınsama yeteneğini algılamak maksadıyla tasarlandı.

ANAHTAR KELİMELER: Kesirli diferansiyel denklem, Kalanlı kuvvet serisi metodu, Laplace dönüşümü metodu, Tam çözüm, Yaklaşık çözüm

ABSTRACT

MSc Thesis

THIRD-ORDER FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION SOLUTION WITH RESIDUAL POWER SERIES METHOD

Habibe GÖKSU

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Mahmut MODANLI
Year: 2022, page: 36

In this study, the initial-boundary value problem of the third-order fractional partial differential equation is discussed. Laplace transform method and residual power series method were used to solve these equations numerically with appropriate initial and boundary conditions.The Laplace method was used for the exact solution of the fractional partial differential equation, and the ”residual power series method (RPSM)”, which is a useful method for its approximate solution, was used. In order to find the numerical solutions of these equations with initial and boundary conditions, (RPSM) is given by examining in detail. Numerical solutions of selected sample problems were compared using two different methods. The error analysis table is given for the approximate and exact solutions found. The method mentioned here is designed to find approximate solutions (RPSM) and compare the solutions obtained by the current method with the full solution to detect sensitivity, reliability and fast convergence ability.

KEYWORDS: Fractional differential equation, Residual power series method, Laplace transform method, Exact solution, Approximate solution

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımız boyunca desteklerini esirgemeyen, engin bilgileriyle beni bilgilendiren çok kıymetli ve saygıdeğer hocam Doç. Dr. Mahmut MODANLI'ya teşekkür ederim.

Ayrıca, tezin son halini almasında önemli katkıları bulunan Dr. Öğr. Üyesi Fatih ÖZBAĞ ve Doç. Dr. Haydar ALICI hocalarıma da teşekkürü borç bilirim.

Son olarak bana her koşulda ve her durumda destek olan aileme de çok teşekkür ederim.

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

1. GİRİŞ

Kısmi diferansiyel denklemlerin ve kesirli diferansiyel denklemlerin tam ve yaklaşık çözümleri için pek çok farklı nümerik metot vardır. Bu denklemleri başlangıç-sınır değer koşullarıyla beraber nümerik olarak çözmek için Fourier dönüşümleri ve Fourier seri çözüm metodu ile Laplace dönüşüm metodu kullanılmıştır. Ayrıca kesir mertebeden türevlere bağlı Grünwald, Letnikov, Liouville ve Riemann detaylı araştırmalar yapmıştır (Saldır, 2018). Kesir mertebeden türevli adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleriyle ilgili genel bir yöntem olmamasına rağmen bu alandaki çalışmalar sürmektedir. Kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin pek çok uygulama alanı vardır. Mühendislik, kontrol teorisi, fizik, akışkanlar dinamiği, akışkanlar mekaniği, dinamik sistemler, ısı transferi ve petrol sanayi gibi pek çok bilim dalında yapılan kesir mertebeden modellemelerin adi türevli modellemelere göre daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür (Modanlı ve Akgül, 2019). Çeşitli fiziksel, kimyasal, biyolojik veya çevresel süreçlerin matematiksel modelleri genellikle klasik olmayan koşullar içerir. Bu koşullar, genellikle yerel olmayan sınır koşulları olarak tanımlanır ve tanım kümesindeki verilerin doğrudan ölçülemediği veya sınır koşulların tanım kümesine bağlı olduğu durumları yansıtır (Ashyralyev ve Yıldırım, 2021).

Uygulamalı problemlerin yorumlanabilmesi için de kesirli türevlere ihtiyaç duyulmuştur. Uygulamalı bilimlerde bu türevler viskoelastisite, elektrot-elektrolit polarizasyonu, ısı iletimi, elektromanyetik dalgalar, difüzyon denklemi ve benzerleri önemli uygulama alanlarında bulunan çeşitli sistemleri modellemek için kullanılır (Modanlı ve Akgül, 2019).

1.1. Temel Kavramlar

Tanım 1.1 *"Gamma fonksiyonu* $\forall\ z \in \mathbb{R}^+$ *için*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-\theta}\theta^{z-1}d\theta \tag{1.1}$$

olarak tanımlanır."

(Podlubny, 1998)

Tanım 1.2 *"$\beta, n \in N$, $n-1 < \alpha \leq n$ ve $\beta \geq [|\alpha|]$ olmak üzere*

$$D^{\alpha}(z^{\beta}) = \frac{z^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}\Gamma(\beta+1) \tag{1.2}$$

olarak tanımlanır. "

(Podlubny, 1998)

Tanım 1.3 *"Zamana bağlı α. dereceden $D_z^{\alpha}u(z,\theta)$ Caputo kesirli türevi $n-1 < \alpha \leq n$ için*

$$D_z^{\alpha}u(z,\theta) = \frac{\partial^{\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^z \frac{1}{(z-p)^{\alpha-n+1}}\frac{\partial^{\alpha}u(p,\theta)}{\partial p^{\alpha}}\partial p \tag{1.3}$$

ve $\alpha = n \in N$ için

$$D_z^{\alpha}u(z,\theta) = \frac{\partial^{\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{\alpha}} = \frac{\partial^{n}u(z,\theta)}{\partial z^{n}} \tag{1.4}$$

olarak tanımlanır."

(Podlubny, 1998)

Tanım 1.4 *"Kesirli türevin Laplace dönüşümü için verilen formül*

$$\int_0^{\infty} e^{-pz}D_z^{\alpha}f(z)dz = p^{\alpha}F(p) - \sum_{r=0}^{n-1}p^{r}D_z^{\alpha-r-1}f(z)\mid_{z=0}, \quad (n-1 < \alpha \leq n) \tag{1.5}$$

şeklindedir."

(Podlubny, 1998)

Tanım 1.5 *"$\mu > -1$, $u(z,\theta) \in C_{\mu}(I \times \mathbb{R}^{+})$ ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere Riemann Liouville kesirli integral operatörü;*

$$J_{\theta}^{\alpha}u(z,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\theta}(\theta-\tau)^{\alpha-1}u(z,\tau)d\tau, & \alpha > 0, \quad z \in I, \quad \theta > \tau \geq 0, \\ u(z,\theta), \quad \alpha = 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

şeklinde tanımlanır."

(Podlubny, 1998)

Tanım 1.6 *"β. mertebeden Caputo kesirli uzayının türev operatörü;*

$$D_\theta^\beta u(z,\theta) = \begin{cases} J_z^{n-\beta}(\frac{\partial^n u(z,\theta)}{\partial z^n}), & n-1<\beta<n, \quad n \in \mathbb{N}^+, \\ \frac{\partial^n u(z,\theta)}{\partial z^n}, & \alpha = n \end{cases} \tag{1.7}$$

olarak tanımlanır."

(Chen ve ark. , 2018)

Tanım 1.7 *"Bir kuvvet serisinin sembolik formu*

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r(\theta-\theta_0)^{r\alpha} = c_0 + c_1(\theta-\theta_0)^\alpha + c_2(\theta-\theta_0)^{2\alpha} + ... \tag{1.8}$$

θ_0 civarında bir kesirli kuvvet serisi olarak adlandırılır. Burada θ bir değişken ve c_r ler serinin katsayılarıdır."

(Chen ve ark. , 2018)

Teorem 1.8 *Diyelim ki f in θ_0 noktasında kesirli bir kuvvet serisine sahip formu*

$$f(\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r(\theta-\theta_0)^{r\alpha}, \quad \theta_0 \leq \theta < \theta_0 + R \tag{1.9}$$

olsun. Burada R kesirli kuvvet serisinin yakınsama yarıçapıdır. $D_\theta^{r\alpha} = D_\theta^\alpha.D_\theta^\alpha.D_\theta^\alpha...D_\theta^\alpha$ olmak üzere;

$$c_r = \frac{D_\theta^{r\alpha} f(\theta)|_{\theta=\theta_0}}{\Gamma(r\alpha+1)} \tag{1.10}$$

olarak verilir. Burada $D_\theta^{r\alpha} f(\theta) \in c(\theta_0, \theta_0+R)$ için, $r = 0,1,2,...$ olmak üzere; c_r ler serinin katsayılarıdır.

Şimdi verilen problemin tam çözümü için Laplace dönüşüm metodunu kullanalım.

Örnek 1.9 *Aşağıdaki kesirli diferansiyel denkleminin*

$$\begin{cases} \frac{\partial^{3\alpha} u(z,\theta)}{\partial z^{3\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha} u(z,\theta)}{\partial z^{2\alpha}} + \frac{\partial^{\alpha} u(z,\theta)}{\partial z^{\alpha}} - \frac{\partial^2 u(z,\theta)}{\partial \theta^2} = f(z,\theta) \\ f(z,\theta) = (\frac{6z^{3-3\alpha}}{\Gamma(4-3\alpha)} + \frac{6z^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} + \frac{6z^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + z^3 - 1)\cos\theta \\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}, 0<z<1, 0<\alpha\leq 1 \\ u(0,\theta) = -\cos\theta, \ u_z(0,\theta) = u_{zz}(0,\theta) = 0 \\ u(z,0) = u(z,\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

tam çözümünü bulalım.

Her iki tarafın Laplace dönüşümü alınırsa

$$\mathscr{L}\left(\frac{\partial^{3\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{3\alpha}}\right)+\mathscr{L}\left(\frac{\partial^{2\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{2\alpha}}\right)+\mathscr{L}\left(\frac{\partial^{\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{\alpha}}\right)$$
$$-\mathscr{L}\left(\frac{\partial^{2}u(z,\theta)}{\partial \theta^{2}}\right)=\mathscr{L}\left(f(z,\theta)\right)$$

bulunur. (1.11) denklemindeki $f(z,\theta)$ fonksiyonu yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}\left(\frac{\partial^{3\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{3\alpha}}\right)+\mathscr{L}\left(\frac{\partial^{2\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{2\alpha}}\right)+\mathscr{L}\left(\frac{\partial^{\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{\alpha}}\right)\\&-\mathscr{L}\left(\frac{\partial^{2}u(z,\theta)}{\partial \theta^{2}}\right)\\=&\mathscr{L}\left((\frac{6z^{3-3\alpha}}{\Gamma(4-3\alpha)}+\frac{6z^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)}+\frac{6z^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}+z^3-1)\cos\theta\right)\end{aligned}\tag{1.12}$$

denklemi bulunur. Burada gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}&s^{3\alpha}u(s,\theta)-s^{3\alpha-1}u(0,\theta)-s^{3\alpha-2}u_z(0,\theta)-s^{3\alpha-3}u_{zz}(0,\theta)\\&+s^{2\alpha}u(s,\theta)-s^{2\alpha-1}u(0,\theta)-s^{2\alpha-2}u_z(0,\theta)\\&+s^{\alpha}u(s,\theta)-s^{\alpha-1}u(0,\theta)-u_{\theta\theta}(s,\theta)=\left\{\frac{6\Gamma(4-3\alpha)}{s^{4-3\alpha}\Gamma(4-3\alpha)}\right.\\&\left.+\frac{6\Gamma(4-2\alpha)}{s^{4-2\alpha}\Gamma(4-2\alpha)}+\frac{6\Gamma(4-\alpha)}{s^{4-\alpha}\Gamma(4-\alpha)}+\frac{6}{s^4}-\frac{1}{s}\right\}\cos\theta\end{aligned}\tag{1.13}$$

bulunur. (1.13) denkleminde başlangıç değer koşulları yerine yazılır ve denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned}&s^{3\alpha}u(s,\theta)+s^{3\alpha-1}\cos\theta+s^{2\alpha}u(s,\theta)+s^{2\alpha-1}\cos\theta\\&+s^{\alpha}u(s,\theta)+s^{\alpha-1}\cos\theta-u_{\theta\theta}(s,\theta)\\=&\left\{\frac{6}{s^{4-3\alpha}}+\frac{6}{s^{4-2\alpha}}+\frac{6}{s^{4-\alpha}}+\frac{6}{s^4}-\frac{1}{s}\right\}\cos\theta\end{aligned}\tag{1.14}$$

elde edilir. (1.14) probleminin çözümünü

$$u(s,\theta)=u^c(s,\theta)+u^p(s,\theta)\tag{1.15}$$

olarak arayalım.

$$\left(s^{3\alpha}+s^{2\alpha}+s^{\alpha}\right)u(s,\theta)+(s^{3\alpha-1}+s^{2\alpha-1}+s^{\alpha-1})\cos\theta-u_{\theta\theta}(s,\theta)=0$$

denkleminin homogen kısmı

$$\left(s^{3\alpha}+s^{2\alpha}+s^{\alpha}\right)u(s,\theta)-u_{\theta\theta}(s,\theta)=0\tag{1.16}$$

olur. Bu denklemin çözümü için

$$u^c(s,\theta) = ce^{m\theta} \tag{1.17}$$

alınıp (1.17) denkleminin θ ya göre kısmi türevi (1.16) denkleminde yazılırsa bu denklemin karakteristik denklemi

$$(s^{3\alpha} + s^{2\alpha} + s^{\alpha})(ce^{m\theta}) - m^2 ce^{m\theta} = 0 \tag{1.18}$$

olur. Bu denklemin kökleri:

$$\begin{cases} m_1 = \sqrt{s^{3\alpha} + s^{2\alpha} + s^{\alpha}} \\ m_2 = -\sqrt{s^{3\alpha} + s^{2\alpha} + s^{\alpha}} \end{cases} \tag{1.19}$$

olarak bulunur. Buradan (1.17) denkleminin çözümü

$$u^c(s,\theta) = c_1 e^{\theta\sqrt{s^{3\alpha}+s^{2\alpha}+s^{\alpha}}} + c_2 e^{-\theta\sqrt{s^{3\alpha}+s^{2\alpha}+s^{\alpha}}} \tag{1.20}$$

şeklindedir. (1.14) denkleminin homogen olmayan kısmının çözümü için

$$u^p(s,\theta) = A(s)\cos\theta \tag{1.21}$$

şeklinde seçilip türevleri alınarak (1.14) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & s^{3\alpha}A(s)\cos\theta + s^{3\alpha-1}\cos\theta + s^{2\alpha}A(s)\cos\theta + s^{2\alpha-1}\cos\theta \\ & +s^{\alpha}A(s)\cos\theta + s^{\alpha-1}\cos\theta + A(s)\cos\theta \\ = & \left\{\frac{6}{s^{4-3\alpha}} + \frac{6}{s^{4-2\alpha}} + \frac{6}{s^{4-\alpha}} + \frac{6}{s^4} - \frac{1}{s}\right\}\cos\theta \end{aligned} \tag{1.22}$$

olur. Bu denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \left(s^{3\alpha} + s^{2\alpha} + s^{\alpha}\right)A(s)\cos\theta + \left(s^{3\alpha} + s^{2\alpha} + s^{\alpha}\right)\frac{1}{s}\cos\theta + A(s)\cos\theta \\ = & \frac{6}{s^4}(s^{3\alpha} + s^{2\alpha} + s^{\alpha})\cos\theta + \left(\frac{6}{s^4} - \frac{1}{s}\right)\cos\theta \end{aligned} \tag{1.23}$$

bulunur. Burada gerekli eşitlikler kurulursa

$$\left(s^{3\alpha} + s^{2\alpha} + s^{\alpha}\right)\cos\theta(A(s) + \frac{1}{s}) = \frac{6}{s^4}(s^{3\alpha} + s^{2\alpha} + s^{\alpha})\cos\theta$$

ve

$$A(s)\cos\theta = \left(\frac{6}{s^4} - \frac{1}{s}\right)\cos\theta$$

denklemleri bulunur. Her iki denklemden

$$A(s) = \frac{6}{s^4} - \frac{1}{s} \tag{1.24}$$

olur. Bulunan $A(s)$ değeri yerine yazılırsa

$$u^p(s,\theta) = (\frac{6}{s^4} - \frac{1}{s})\cos\theta \tag{1.25}$$

denklemi elde edilir. (1.20) ve (1.25) denklemleri (1.15) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u(s,\theta) &= u^c(s,\theta) + u^p(s,\theta) \\ &= c_1 e^{\theta\sqrt{s^{3\alpha}+s^{2\alpha}+s^{\alpha}}} \\ &\quad + c_2 e^{-\theta\sqrt{s^{3\alpha}+s^{2\alpha}+s^{\alpha}}} + (\frac{6}{s^4} - \frac{1}{s})\cos\theta \end{aligned} \tag{1.26}$$

olarak bulunur. (1.11) denklemindeki sınır değer koşullar kullanılırsa c_1 ve c_2 değerlerinin 0 olduğu görülür. Dolayısıyla

$$u(s,\theta) = (\frac{6}{s^4} - \frac{1}{s})\cos\theta \tag{1.27}$$

çözümü elde edilir. Bu denklemde Laplace dönüşümünün tersi alınırsa

$$u(z,\theta) = \mathscr{L}^{-1}(u(s,\theta)) = \mathscr{L}^{-1}((\frac{6}{s^4} - \frac{1}{s})\cos\theta) = (z^3 - 1)\cos\theta \tag{1.28}$$

tam çözümü bulunur.

Bir başka örnek olarak aşağıdaki problemin tam çözümünü Laplace dönüşüm metodu ile bulmaya çalışalım.

Örnek 1.10 *Aşağıdaki kesirli diferansiyel denkleminin*

$$\begin{cases} \frac{\partial^{3\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{3\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{2\alpha}} + \frac{\partial^{\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{\alpha}} - \frac{\partial^{2}u(z,\theta)}{\partial \theta^{2}} = f(z,\theta) \\ f(z,\theta) = (\frac{6z^{3-3\alpha}}{\Gamma(4-3\alpha)} - \frac{z^{1-3\alpha}}{\Gamma(2-3\alpha)} + \frac{6z^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} - \frac{z^{1-2\alpha}}{\Gamma(2-2\alpha)} + \frac{6z^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{z^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \\ -z^3 + z - 1)e^{-\theta}, \\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < z < 1, 0 < \alpha \leq 1 \\ u(0,\theta) = e^{-\theta}, u_z(0,\theta) = -e^{-\theta}, u_{zz}(0,\theta) = 0 \end{cases} \tag{1.29}$$

tam çözümünü bulalım.

Her iki tarafın Laplace dönüşümü alınır;

$$\mathscr{L}\left(\frac{\partial^{3\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{3\alpha}}\right) + \mathscr{L}\left(\frac{\partial^{2\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{2\alpha}}\right) + \mathscr{L}\left(\frac{\partial^{\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{\alpha}}\right) \tag{1.30}$$

$$-\mathscr{L}\left(\frac{\partial^2 u(z,\theta)}{\partial\theta^2}\right)=\mathscr{L}\left(f(z,\theta)\right)$$

ve (1.29) problemindeki $f(z,\theta)$ değeri yazılırsa

$$\mathscr{L}\left(\frac{\partial^{3\alpha} u(z,\theta)}{\partial z^{3\alpha}}\right)+\mathscr{L}\left(\frac{\partial^{2\alpha} u(z,\theta)}{\partial z^{2\alpha}}\right)+\mathscr{L}\left(\frac{\partial^{\alpha} u(z,\theta)}{\partial z^{\alpha}}\right) \tag{1.31}$$

$$-\mathscr{L}\left(\frac{\partial^2 u(z,\theta)}{\partial\theta^2}\right)$$

$$=\mathscr{L}\left(\left(\frac{6z^{3-3\alpha}}{\Gamma(4-3\alpha)}-\frac{z^{1-3\alpha}}{\Gamma(2-3\alpha)}+\frac{6z^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)}-\frac{z^{1-2\alpha}}{\Gamma(2-2\alpha)}+\frac{6z^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{z^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}-z^3+z-1\right)e^{-\theta}\right)$$

denklemi bulunur. Burada gerekli işlemler yapılıp başlangıç değer koşulları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&s^{3\alpha}u(s,\theta)-s^{3\alpha-1}u(0,\theta)-s^{3\alpha-2}u_z(0,\theta)-s^{3\alpha-3}u_{zz}(0,\theta)\\
&+s^{2\alpha}u(s,\theta)-s^{2\alpha-1}u(0,\theta)-s^{2\alpha-2}u_z(0,\theta)\\
&+s^{\alpha}u(s,\theta)-s^{\alpha-1}u(0,\theta)-u_{\theta\theta}(s,\theta)\\
=&\left\{\frac{6\Gamma(4-3\alpha)}{s^{4-3\alpha}\Gamma(4-3\alpha)}-\frac{\Gamma(2-3\alpha)}{s^{2-3\alpha}\Gamma(2-3\alpha)}+\frac{6\Gamma(4-2\alpha)}{s^{4-2\alpha}\Gamma(4-2\alpha)}\right.\\
&\left.-\frac{\Gamma(2-2\alpha)}{s^{2-2\alpha}\Gamma(2-2\alpha)}+\frac{6\Gamma(4-\alpha)}{s^{4-\alpha}\Gamma(4-\alpha)}-\frac{\Gamma(2-\alpha)}{s^{2-\alpha}\Gamma(2-\alpha)}-\frac{6}{s^4}+\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}\right\}e^{-\theta}
\end{aligned} \tag{1.32}$$

elde edilir. (1.32) denklemini

$$\begin{aligned}
&s^{3\alpha}u(s,\theta)+s^{2\alpha}u(s,\theta)+s^{\alpha}u(s,\theta)-u_{\theta\theta}(s,\theta)\\
=&\,s^{3\alpha-1}e^{-\theta}-s^{3\alpha-2}e^{-\theta}+s^{2\alpha-1}e^{-\theta}-s^{2\alpha-2}e^{-\theta}+s^{\alpha-1}e^{-\theta}\\
&+\frac{6}{s^{4-3\alpha}}e^{-\theta}-\frac{1}{s^{2-3\alpha}}e^{-\theta}+\frac{6}{s^{4-2\alpha}}e^{-\theta}-\frac{1}{s^{2-2\alpha}}e^{-\theta}\\
&+\frac{6}{s^{4-\alpha}}e^{-\theta}-\frac{1}{s^{2-\alpha}}e^{-\theta}-\frac{6}{s^4}e^{-\theta}+\frac{1}{s^2}e^{-\theta}-\frac{1}{s}e^{-\theta}
\end{aligned} \tag{1.33}$$

şeklinde düzenlersek

$$\begin{aligned}
&s^{3\alpha}u(s,\theta)+s^{2\alpha}u(s,\theta)+s^{\alpha}u(s,\theta)-u_{\theta\theta}(s,\theta)\\
=&\,e^{-\theta}\left\{\frac{s^{3\alpha}}{s}-\frac{s^{3\alpha}}{s^2}+\frac{s^{2\alpha}}{s}-\frac{s^{2\alpha}}{s^2}+\frac{s^{\alpha}}{s}+\frac{6}{s^{4-3\alpha}}-\frac{1}{s^{2-3\alpha}}\right.\\
&\left.+\frac{6}{s^{4-2\alpha}}-\frac{1}{s^{2-2\alpha}}+\frac{6}{s^{4-\alpha}}-\frac{1}{s^{2-\alpha}}-\frac{6}{s^4}+\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}\right\}
\end{aligned} \tag{1.34}$$

denklemine ulaşırız. Buradan

$$\begin{aligned}&s^{3\alpha}u(s,\theta)+s^{2\alpha}u(s,\theta)+s^{\alpha}u(s,\theta)-u_{\theta\theta}(s,\theta)\\=&\,e^{-\theta}\left\{\frac{6}{s^4}\left(s^{3\alpha}+s^{2\alpha}+s^{\alpha}-1\right)-\frac{1}{s^2}\left(s^{3\alpha}+s^{2\alpha}+s^{\alpha}-1\right)\right.\\&\left.+\frac{1}{s}\left(s^{3\alpha}+s^{2\alpha}+s^{\alpha}-1\right)\right\}\end{aligned} \tag{1.35}$$

bulunur ve son olarak

$$\begin{aligned}&\left(s^{3\alpha}+s^{2\alpha}+s^{\alpha}-1\right)u(s,\theta)\\=&\,e^{-\theta}\left(s^{3\alpha}+s^{2\alpha}+s^{\alpha}-1\right)\left[\frac{6}{s^4}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right]\end{aligned} \tag{1.36}$$

ikinci mertebeden lineer olmayan homojen denklemi bulunur. (1.34) denkleminin çözümünü;

$$u(s,\theta)=u^c(s,\theta)+u^p(s,\theta) \tag{1.37}$$

olarak arayalım. Bu denklemin homogen kısmı

$$\left(s^{3\alpha}+s^{2\alpha}+s^{\alpha}\right)u(s,\theta)-u_{\theta\theta}(s,\theta)=0 \tag{1.38}$$

olur. Bu denklemin çözümü için

$$u^c(s,\theta)=ce^{m\theta} \tag{1.39}$$

alınıp (1.39) denkleminin θ e göre kısmi türevi (1.38) denkleminde yazılırsa, bu denklemin karakteristik denklemi

$$s^{3\alpha}+s^{2\alpha}+s^{\alpha}-m^2=0 \tag{1.40}$$

olup bu denklemin kökleri:

$$\begin{cases} m_1=\sqrt{s^{3\alpha}+s^{2\alpha}+s^{\alpha}} \\ m_2=-\sqrt{s^{3\alpha}+s^{2\alpha}+s^{\alpha}} \end{cases} \tag{1.41}$$

olarak bulunur. Buradan (1.39) denkleminin çözümü

$$u^c(s,\theta)=c_1e^{\theta\sqrt{s^{3\alpha}+s^{2\alpha}+s^{\alpha}}}+c_2e^{-\theta\sqrt{s^{3\alpha}+s^{2\alpha}+s^{\alpha}}} \tag{1.42}$$

şeklindedir. (1.34) denkleminin homogen olmayan kısmının çözümü için

$$\begin{aligned}u^p(s,\theta)&=A(s)e^{-\theta}\\u^{p'}(s,\theta)&=-A(s)e^{-\theta}\\u^{p''}(s,\theta)&=A(s)e^{-\theta}\end{aligned} \tag{1.43}$$

şeklinde seçilip türevleri alınarak (1.34) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &A(s)e^{-\theta}(s^{3\alpha}+s^{2\alpha}+s^{\alpha})-A(s)e^{-\theta} \\ =\ &e^{-\theta}(s^{3\alpha}+s^{2\alpha}+s^{\alpha}-1)\left[\frac{6}{s^4}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right] \end{aligned} \tag{1.44}$$

ve son olarak

$$\begin{aligned} &A(s)e^{-\theta}(s^{3\alpha}+s^{2\alpha}+s^{\alpha}-1) \\ =\ &e^{-\theta}(s^{3\alpha}+s^{2\alpha}+s^{\alpha}-1)\left[\frac{6}{s^4}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right] \end{aligned} \tag{1.45}$$

bulunur. Bulunan bu denklemde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$A(s)=\frac{6}{s^4}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s} \tag{1.46}$$

olur. Bulunan $A(s)$ değeri (1.43) denkleminde yerine yazılırsa

$$u^p(s,\theta)=\left(\frac{6}{s^4}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)e^{-\theta} \tag{1.47}$$

$$u^p(s,\theta)=(z^3-z+1)e^{-\theta} \tag{1.48}$$

denklemi elde edilir.

(1.39) ve (1.47) denklemleri (1.37) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u(s,\theta)&=u^c(s,\theta)+u^p(s,\theta) \\ &=c_1e^{\theta\sqrt{s^{3\alpha}+s^{2\alpha}+s^{\alpha}}}+c_2e^{-\theta\sqrt{s^{3\alpha}+s^{2\alpha}+s^{\alpha}}} \\ &\quad+\left(\frac{6}{s^4}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)e^{-\theta} \end{aligned} \tag{1.49}$$

olarak bulunur. (1.29) denklemindeki sınır değer koşullar kullanılırsa c_1 ve c_2 değerlerinin 0 olduğu görülür. Dolayısıyla

$$u(s,\theta)=\left(\frac{6}{s^4}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)e^{-\theta} \tag{1.50}$$

çözümü elde edilir. Bu denklemde Laplace dönüşümünün tersi alınırsa

$$\begin{aligned} u(z,\theta)&=\mathscr{L}^{-1}(u(s,\theta))=\mathscr{L}^{-1}(\left(\frac{6}{s^4}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)e^{-\theta}) \\ &=(z^3-z+1)e^{\theta} \end{aligned} \tag{1.51}$$

tam çözümü elde edilir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Kısmi diferansiyel denklemlerin çeşitli yerel olmayan başlangıç ve sınır değer problemleri birçok araştırmacı tarafından kapsamlı bir şekilde incelenmiştir. Kısmi diferansiyel denklemlerin ve kesirli diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için, homotopi pertübasyon yöntemi (Modanli ve Akgül, 2021), Laplace dönüşümü eşdizimi, değiştirilmiş kuintik B-spline Crank-Nicolson eşdizim yöntemi (Tamsir ve ark. , 2021), Daftar-Gejii -Jafaris yöntemi (Modanli, 2019), sonlu farklar yöntemi (Modanli ve Eker, 2019), Adomian ayrıştırma yöntemi (Yavuz, 2018) incelenmiştir. Kısmi diferansiyel denklemlerin ve kesirli diferansiyel denklemlerin tam çözümü için Laplace dönüşüm yöntemi (Kexue ve Jigen, 2011), Fourier serisi yöntemi (Danchin, 2005) ve kuvvet serisi yöntemi (Alquran, 2014) kullanılmıştır. Son olarak, kısmi diferansiyel denklemler (Modanli ve ark. , 2021) için kalanlı kuvvet serisi metodu sunulmuştur. Tam çözüm ve kararlılık tahminleri teoremi, üçüncü mertebeden kesirli kısmi diferansiyel denklemler için ispatlanmıştır. Bu yöntemlerle üçüncü mertebeden kesirli kısmi diferansiyel denklemin çözümlerinin $\alpha = 0.1, 0.5, 0.9$ kesirli dereceleri için Caputo kesirli türevi hesaplanmıştır (Modanli, 2019). Ancak üçüncü dereceden kısmi diferansiyel denklem için yerel olmayan sınır değer problemleri genel olarak iyi araştırılmamıştır. Bu araştırmalardan biri Atangana-Baleanu türevi ile Caputo kesirli türevi ile tanımlanan üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemdir (Modanlı ve Akgül, 2019).

Kesirli diferansiyel denklemlerin pek çoğunun tam çözümü bulunamadığı için yaklaşık ya da sayısal çözümleri için farklı metotlar incelenmiştir. Bunlardan birisi de bu çalışmada ele alınan ” Kalanlı Kuvvet Serisi metodu (KKSM)” dır. KKSM esasen artık hata fonksiyonu olan Taylor serisinin genel formülüne dayanır. Bununla ilgili yeni bir analitik çözüm yolu araştırılmaktadır. KKSM; yaklaşık çözümleri bulmak ve elde edilen çözümleri tam çözüm ile karşılaştırarak hassasiyeti, güvenilirliği ve hızlı yakınsama yeteneğini algılamak maksadıyla tasarlanmıştır (Modanlı ve ark, 2021).

Bu çalışmada, üçüncü mertebeden kısmi diferensiyel denkleminin başlangıç-sınır değer problemi

$$\begin{cases} \frac{\partial^{3\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{3\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{2\alpha}} + \frac{\partial^{\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{\alpha}} - \frac{\partial^{2}u(z,\theta)}{\partial \theta^{2}} = f(z,\theta), 0 < \theta < L, \\ 0 < z < T, 0 < \alpha \leq 1 \\ u(0,\theta) = v_1(\theta), u_z(0,\theta) = v_2(\theta), u_{zz}(0,\theta) = v_3, 0 \leq \theta \leq L, \\ u(z,0) = k_1(z), 0 \leq z \leq T, u(z,L) = k_2(z), 0 \leq z \leq T \end{cases} \quad (2.1)$$

ele alınmıştır. Burada $f, v_{1,} v_2$ ve v_3 bilinen sürekli fonksiyonlar ve $u(z,\theta)$ bilinmeyen bir fonksiyondur.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Kalanlı Kuvvet Serisi Metodunun İncelenmesi

Kalanlı kuvvet serisi metodunun temel şemasını oluşturmaya başlayalım. (2.1) probleminin yaklaşık çözümünü bu yöntemle vermeye çalışalım. Çözümün

$$u(z,\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r(z)\theta^r \tag{3.1}$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. $r = 0, 1, 2, ...,$ olduğu durumlarda $u(z,\theta)$ çözümünün k. terimi $u_k(z,\theta)$

$$u_k(z,\theta) = \sum_{r=0}^{k} f_r(z)\theta^r \tag{3.2}$$

olarak alınır. $k = 1, 2, 3, ...,$ olduğu durumlarda $u(z,\theta)$ açık bir biçimde ilk şartları karşılamaktadır. Bundan dolayı $u(z,\theta)$ denkleminin sıfırıncı kalanlı kuvvet serisinin başlangıç değer koşullarına bağlı yaklaşık çözümünü

$$u(z,0) = v_1(z) = f_0(z),\ u_\theta(z,0) = v_2(z) = f_1(z),\ u_{\theta\theta}(z,0) = v_3 = f_2(z) \tag{3.3}$$

alarak başlayalım. Öte yandan, (2.1) denklemindeki ilk koşul sağlanmıştır. Bundan sonra $u(z,\theta)$ kalanlı kuvvet serisi metodunun ilk yaklaşık çözümleri

$$u_1(z,\theta) = f_0(z) + f_1(z)\theta + f_2(z)\theta^2 \tag{3.4}$$

olmalıdır. Bundan dolayı, (3.1) formülünün açılımı $k = 3, 4, 5, ...,$ olduğu durumlarda daha sonradan kalanlı kuvvet serisi metodunun katsayılarının değerini bulmak amacıyla $f_r(z), r = 3, 4, 5, ...k$ olarak

$$u_k(z,\theta) = f_0(z) + f_1(z)\theta + f_2(z)\theta^2 + \sum_{r=3}^{k} f_r(z)\theta^r \tag{3.5}$$

şeklinde yeniden formüle edilebilir.

(2.1) denklemin çözümünün açılımında kalanlı (rezidüel) fonksiyonlar:

$$Resu(z,\theta) = \frac{\partial^{3\alpha} u(z,\theta)}{\partial z^{3\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha} u(z,\theta)}{\partial z^{2\alpha}} + \frac{\partial^{\alpha} u(z,\theta)}{\partial z^{\alpha}} - \frac{\partial^{2} u(z,\theta)}{\partial \theta^{2}} - f(z,\theta) \tag{3.6}$$

olarak tanımlanmalıdır. Bundan dolayı k.terimin kalanlı (rezidüel) fonksiyonlar, $Resu(z,\theta)$, (Abu Arqub ve ark. , 2013 ; El-Ajou ve ark. , 2015 ; Komashynska ve ark. , 2016) çalışmalarında gösterildiği gibi $k = 1, 2, 3, ...,$ olduğu durumlarda

$$Resu_k(z,\theta) = \frac{\partial^{3\alpha} u_k(z,\theta)}{\partial z^{3\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha} u_k(z,\theta)}{\partial z^{2\alpha}} + \frac{\partial^{\alpha} u_k(z,\theta)}{\partial z^{\alpha}} - \frac{\partial^{2} u_k(z,\theta)}{\partial \theta^{2}} - f(z,\theta) \quad (3.7)$$

olur. $z \in [0, Z]$ ve $\theta \geq 0$ için $Resu(z,\theta) = 0$ ve $\lim_{z\to\infty} Resu_k(z,\theta) = Resu(z,\theta)$ olduğu açıktır. Bu yüzden $\theta = 0$ ve $s = 0, k$ olduğu durumlarda

$$\frac{\partial^s}{\partial \theta^s} Resu(z,\theta) = 0 \quad (3.8)$$

dır. $f_r(z)$ katsayılarını elde etmek için $r = 2, 3, 4, ..., k$ değerlerini alınır. Ardından şu işlemler uygulanır:

(3.1) denklemindeki $r = 3, 4, 5, ..., k$ değerleri için

$$\frac{\partial^s Resu(z,\theta)}{\partial \theta^s} = 0 \quad (3.9)$$

türev formülü uygulanıp, $\theta = 0$ ifadesini yerine yazılır. Son olarak katsayılar için bu denklem çözülür:

$$Resu_k(z,\theta) = 0, \theta = 0, s = 2, 3, 4, , , , k \quad (3.10)$$

Bu şekilde kuvvet serilerindeki tüm katsayılar bulunabilir.

Değişken katsayılı herhangi mertebeden zaman uzay kesirli diferensiyel denklem için kuvvet serisi çözümleri elde etmek için, genel bir kesirli kuvvet serisi verilmelidir. Analitik $u(z,\theta)$ fonksiyonu aşağıdaki

$$u(z,\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} u_r(z,\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r(z)\theta^{r\alpha}, z \in I \subset \mathbb{R}^d, |\theta| < R. \quad (3.11)$$

şeklinde genişletilebilir. Burada R kesirli kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapıdır. Başlangıç koşulları (3.11) denkleminde yerine yazılırsa $a_r(z) = C_r(z)\Gamma(r\alpha + 1), r = 0, 1, ..., m - 1$ için

$$u_r(z,\theta) = C_r(z)\theta^{r\alpha} = \frac{\alpha_r(z)}{\Gamma(r\alpha+1)}\theta^{r\alpha}, r = 0, 1, ..., m-1 \quad (3.12)$$

olur. Böylece $u(z,\theta)$ in ilk tahmini yaklaşımı

$$\begin{aligned} u^{baslang\imath c}(z,\theta) &= u_0(z,\theta) + u_1(z,\theta) + u_2(z,\theta) + ... + u_{m-1}(z,\theta) \quad (3.13) \\ &= a_0(z) + \frac{a_1(z)}{\Gamma(\alpha+1)}\theta^{\alpha} + ... + \frac{a_{m-1}(z)}{\Gamma((m-1)\alpha+1)}\theta^{(m-1)\alpha} \end{aligned}$$

dır. Kesirli kuvvet serisinin $k.$ kesik yaklaşık çözümünü tanımlayan dizi

$$u^k(z,\theta) = u^{baslang\imath c}(z,\theta) + \sum_{r=m}^{k} c_r(z)\theta^{r\alpha}, k = m, m+1, m+2, ... \tag{3.14}$$

şeklindedir. Genel kalanlı kuvvet serisini çözmek için, önce aşağıdaki formüldeki gibi bazı notasyonların

$$Res(u,z,\theta) = D_\theta^{m\alpha} u(z,\theta) + P(z)G(u) - F(z,\theta) \tag{3.15}$$

verilmesi gerekir. $k.$ kesilmiş yaklaşık çözümleri $u^k(z,\theta)$ denkleminde yerine yazılırsa

$$Res^k(u,z,\theta) = D_\theta^{m\alpha} u^k(z,\theta) + P(z)G^k(u) - F(z,\theta) \tag{3.16}$$

$k.$ artık fonksiyonu elde edilir. Burada

$$G^k(u) = G(u^k, D_\theta^\alpha u^k, ..., D_\theta^{(m-1)\alpha} u^k, D_{z_1}^{\beta_{11}} u^k, ..., D_{z_d}^{\beta_{1d}} u^k, ..., D_{z_1}^{\beta_{l1}} u^k, ..., D_{z_d}^{\beta_{1d}} u^k)$$

olur. Bu durumda,

(1) $\lim\limits_{k\to\infty} u^k(z,\theta) = u(z,\theta)$

(2) $Res(u,z,\theta) = 0$

(3) $\lim\limits_{k\to\infty} Res^k(u,z,\theta) = Res(u,z,\theta), z \in I \subseteq \mathbb{R}^d$, $|\theta| < R$ elde edilir.

Kabul edelim ki

$$D_\theta^{(k-m)\alpha} Res^k(u,z,\theta)]_{\theta=0} = 0 \tag{3.17}$$

olsun. O halde

$$\begin{aligned} D_\theta^{(k-m)\alpha} Res^k(u,z,\theta)|_{\theta=0} &= C_k(z)\Gamma(k\alpha+1) \\ &+ D_\theta^{(k-m)\alpha}\left[P(z)G^k(u) - F(z,\theta)\right]_{\theta=0} \end{aligned} \tag{3.18}$$

olmak üzere

$$C_k(z) = -\frac{D_\theta^{(k-m)\alpha}\left[P(z)G^k(u) - F(z,\theta)\right]}{\Gamma(k\alpha+1)}, k = m, m+1, m+2, ... \tag{3.19}$$

yazılabilir. Aslında bu kural genel kalanlı kuvvet serisinde temel bir kuraldır. Böylece

$$\begin{aligned} u(z,\theta) = u^{baslang\imath c}(z,\theta) + \sum_{r=m}^{\infty} C_r(z)t^{r\alpha} &= \sum_{r=0}^{m-1} \frac{a_r(z)}{\Gamma(r\alpha+1)}\theta^{r\alpha} \\ + \sum_{r=m}^{\infty} \frac{f_r(z)}{\Gamma(r\alpha+1)}\theta^{r\alpha}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

olur. Burada

$$f_k(z) = -D_\theta^{(k-m)\alpha}\left[P(z)G^k(u) - F(z,\theta)\right]_{\theta=0}, k = m, m+1, m+2, ... \quad (3.21)$$

olur. Kalanlı kuvvet serisinin temel mantığı

$$D_\theta^{n\alpha}u(z,\theta) + R[z]\,u(z,\theta) + N[z]\,u(z,\theta) = g(z,\theta), \theta > 0, z \in R, \quad (3.22)$$
$$n - 1 < n\alpha \leq n$$

lineer olmayan kesirli diferansiyel denkleminin

$$f_0(z) = u(z,0) = f(z), f_{n-1}(z) = D_\theta^{(n-1)}u(z,0) = h(z) \quad (3.23)$$

başlangıç koşuluna bağlı olmasıdır. Burada $D_\theta^{n\alpha} = \frac{\partial^{n\alpha}}{\partial\theta^{n\alpha}},\ R[z]$ z e bağlı genel bir lineer operatör, $N[z]$, de z e bağlı genel lineer olmayan bir operatör ve $g(z,\theta)$ ise sürekli fonksiyondur. Kalanlı kuvvet serisi yöntemi; (3.22) ve (3.11) denklemlerindeki çözümünün $\theta = 0$ başlangıç noktası etrafındaki seri açılımını kesirli kuvvet serisi olarak ifade edilmektir. Çözüm açılım formunu

$$u(z,\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r(z)\frac{\theta^{r\alpha}}{\Gamma(1+r\alpha)}, 0 < \alpha \leq 1, z \in I, 0 \leq \theta < R \quad (3.24)$$

şeklinde alır. Bir sonraki adımda $u(z,\theta)$ in k.kesik serisi olan $u_k(z,\theta)$ belirlenmelidir. Yani

$$u_k(z,\theta) = \sum_{r=0}^{k} f_r(z)\frac{\theta^{r\alpha}}{\Gamma(1+r\alpha)}, 0 < \alpha \leq 1, z \in I, 0 \leq \theta < R, k = 1, 2, 3, ... \quad (3.25)$$

biçiminde ifade edilir. Açıktır ki, (3.11) denklemindeki $u(z,\theta)$, (3.23) denklemindeki başlangıç koşulunu sağlar. $u(z,0) = f_0(z) = f(z)$ eşitliği elde edilir.

(3.25) denkleminde, $u(z,\theta)$ in ilk kalanlı kuvvet serisi yaklaşık çözümü

$$u_1(z,\theta) = f(z) + f_1(z)\frac{\theta^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$$

olmalıdır. Sonuç olarak, (3.11) denklemindeki $u_k(z,\theta)$

$$u_k(z,\theta) = f(z) + f_1(z)\frac{\theta^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + \sum_{r=2}^{k} f_r(z)\frac{\theta^{r\alpha}}{\Gamma(1+r\alpha)}, \quad (3.26)$$
$$0 < \alpha \leq 1, z \in I, 0 \leq \theta < R, k = 2, 3, 4, ...$$

şeklinde yeniden formüle edilebilir. İlk olarak, artık fonksiyonu

$$Res(z,\theta) = D_\theta^{r\alpha}u(z,\theta) + R[z]\,u(z,\theta) + N[z]\,u(z,\theta) - g(z,\theta) \quad (3.27)$$

olarak verilsin ve stil formunun k. artık fonksiyonu da

$$Res_k(z,\theta) = D_\theta^{r\alpha} u_k(z,\theta) + R\,[z]\, u_k(z,\theta) + N\,[z]\, u_k(z,\theta) \tag{3.28}$$
$$-g(z,\theta), k = 1,2,3,4,...$$

olarak tanımlansın. (Abu Arqub, 2013 ; El Ajou ve ark. , 2015) çalışmalarında açıklandığı gibi, $Res(z,\theta) = 0$ olduğu açıktır. Her $z \in I$ ve $\theta \geq 0$ için $lim_{k\to\infty} Res_k(z,\theta) = Res(z,\theta)$ eşitliği sağlanır. Aslında bunlar $r = 1,2,3,4,...,k$ için $D_\theta^{(r-1)\alpha} Res_k(z,\theta_0), r = 1,2,3,4,...,k$ kesirli türevinin sıfır olması demektir. Çünkü Caputo anlamında sabit bir fonksiyon sıfırdır. Bu arada $\theta = 0$ ve $r = 1,2,3,\ldots,k$ olmak üzere $Res(z,\theta)$ ve $Res_k(z,\theta)$ için $D_\theta^{(r-1)\alpha}$ kesirli türevi

$$D_\theta^{(r-1)\alpha} Res(z,0) = D_\theta^{(r-1)\alpha} Res_k(z,0)$$

ile eşleşir. $r = 1,2,3,...,k$ olmak üzere $f_r(z)$ katsayılarını elde etmek için aşağıdaki prosedür uygulanabilir:

(3.28) denklemindeki $u(z,\theta)$ fonksiyonunun r. kesik dizisi değiştirilir, $D_\theta^{(r-1)\alpha}$ kesirli türev formülü uygulanır, aşağıdaki formülde $r = 1,2,3,...,k$ için $Res_k(z,\theta)$ de $\theta = 0$ yerine yazılır, denklem sıfıra eşitlenir ve sonunda gerekli katsayıların formunu bulmak için elde edilen algoritmik denklem çözülür. Yani

$$D_\theta^{(r-1)\alpha} Res_k(z,\theta) = 0, 0 < \alpha \leq 1, z \in I, 0 \leq \theta < R, r = 1,2,3,...,k \tag{3.29}$$

algoritmik denklemini çözmek gerekir. Bu yöntem (3.22) ve (3.29) denklemlerindeki keyfi sayıda kesirli kuvvet serisinin katsayılarını elde etmek için tekrarlanabilir. Ayrıca, daha yüksek doğruluk, çözümün ek bileşenini değerlendirerek elde edilebilir. Doğruluğunu ve verimliliğini göstermek için önerilen sayısal teknik, (Zhang ve ark. , 2008 ; Rady ve Khalfallah, 2010 ; Chen ve Li, 2006 ; Wang ve ark. , 2011) çalışmaları ile

$$D_\theta^\alpha u - \frac{1}{2} v_z + 2uu_z = 0 \tag{3.30}$$
$$D_\theta^\alpha v - \frac{1}{2} u_{zzz} + 2(uv)_z = 0, \theta \geq 0, 0 < \alpha \leq 1$$

başlangıç koşulları (He, 2003) çalışması ile

$$u(z,0) = \frac{ck}{2} + \frac{ck}{2} \tanh(\frac{-kz - \ln b}{2}) \tag{3.31}$$
$$v(z,0) = -\frac{k^2}{8} \sec h^2(\frac{kz + \ln b}{2})$$

$\alpha = 1$ için, (3.30) denkleminin tam çözümleri (He, 2003) tarafından verilir.

$$u(z,\theta) = \frac{ck}{2} + \frac{ck}{2}\tanh(\frac{ck^2t - kz - \ln b}{2}) \qquad (3.32)$$
$$v(z,\theta) = -\frac{k^2}{8}\sec h^2(\frac{-ck^2t + kz + \ln b}{2})$$

Başlangıç fonksiyonundan başlayarak kalanlı kuvvet serisini metodu kullanılırsa

$$f_0(z) = u(z,0) = \frac{ck}{2} + \frac{ck}{2}\tanh(\frac{-kz - \ln b}{2}) \qquad (3.33)$$
$$g_0(z) = v(z,0) = -\frac{k^2}{8}\sec h^2(\frac{kz + \ln b}{2})$$

olur ve k_1. ve k_2. artık fonksiyonları için Boussinesq–Berger denklemleri:

$$Res^u_{k_1}(z,\theta) = \frac{\partial^\alpha u_{k_1}}{\partial\theta^\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\partial v_{k_1}}{\partial z} + 2u_{k_1}\frac{\partial u_{k_1}}{\partial z}, k_1 = 1,2,3,... \qquad (3.34)$$
$$Res^v_{k_2}(z,\theta) = \frac{\partial^\alpha v_{k_2}}{\partial\theta^\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 u_{k_2}}{\partial z^3} + 2\frac{\partial(u_{k_2}v_{k_2})}{\partial z}, k_2 = 1,2,3,...$$

olur. Ek olarak, (3.26) denkleminin temelinde $f_0(z)$ ve $g_0(z)$ biçimleri göz önünde bulundurarak, $u(z,\theta)$ ve $v(z,\theta)$ nin $\theta = 0$ civarında genişlemesi olmak üzere, k. kesik çoklu kesirli kuvvet serisinin serisi sırasıyla

$$u_k(z,\theta) = f(z) + f_1(z)\frac{\theta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \sum_{r=2}^{k} f_r(z)\frac{\theta^{r\alpha}}{\Gamma(1+r\alpha)}, k = 2,3,4,... \qquad (3.35)$$
$$v_k(z,\theta) = g(z) + g_1(z)\frac{\theta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \sum_{r=2}^{k} g_r(z)\frac{\theta^{r\alpha}}{\Gamma(1+r\alpha)}, k = 2,3,4,...$$

olmalıdır. İlk bilinmeyen katsayıları belirlemek için, (3.34) formülünde $Res^u_1(z,\theta)$ ve $Res^v_1(z,\theta)$ yi elde etmek için, 1. artık fonksiyonlar $u_1(z)$ ve $v_1(z)$ (3.35) formülününün açılımında $f_1(z)$ ve $g_1(z)$, 1. kesilmiş seri ile değiştirilmelidir.

$$Res^u_1(z,\theta) = \frac{\partial^\alpha u_1}{\partial\theta^\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial z} + 2u_1\frac{\partial u_1}{\partial z} \qquad (3.36)$$
$$Res^v_1(z,\theta) = \frac{\partial^\alpha v_1}{\partial\theta^\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 u_1}{\partial z^3} + 2\frac{\partial(u_1v_1)}{\partial z}$$

Fakat o zaman

$$u_1(z,\theta) = f(z) + f_1(z)\frac{\theta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \qquad (3.37)$$

ve

$$v_1(z,\theta) = g(z) + g_1(z)\frac{\theta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \qquad (3.38)$$

olur. Daha sonra (3.36) formülünden aşağıdaki

$$\begin{aligned}
Res_1^u(z,\theta) &= f_1(z) - \frac{1}{2}\frac{\partial(g(z)+g_1(z)\frac{\theta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)})}{\partial z} \\
&+2(f(z)+f_1(z)\frac{\theta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}) \\
&\times\frac{\partial(f(z)+f_1(z)\frac{\theta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)})}{\partial z} \\
Res_1^v(z,\theta) &= g_1(z) - \frac{1}{2}\frac{\partial(f(z)+f_1(z)\frac{\theta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)})}{\partial z^3} \\
&+2\partial\frac{((f(z)+f_1(z)\frac{\theta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)})(g(z)+g_1(z)\frac{\theta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}))}{\partial z}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

sonucuna ulaşılır. O halde, (3.29) formülünün sonucuna bağlı olarak $n=1$ için, $\theta=0$ civarında (3.39) formülü aracılığıyla

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= \frac{1}{16}k^3\sec h^3(\frac{kz+\ln b}{2}) \\
&\times(4c^2\cosh(\frac{kz+\ln b}{2})+(1-4c^2) \\
&\times\sinh(\frac{kz+\ln b}{2})) \\
g_1(z) &= -ck^4\cos ech^3(kz+\ln b)\sinh^4(\frac{kz+\ln b}{2})
\end{aligned} \tag{3.40}$$

yazılır. Bu nedenle, (3.30) formülünün 1. kalanlı kuvvet serisi yaklaşık çözümü;

$$\begin{aligned}
u_1(z,\theta) &= \frac{ck}{2}+\frac{ck}{2}\tanh(\frac{-kz-\ln b}{2})+\frac{1}{16}k^3\sec h^3(\frac{kz+\ln b}{2}) \\
&\times(4c^2\cosh(\frac{kz+\ln b}{2})+(1-4c^2) \\
&\times\sinh(\frac{kz+\ln b}{2})))\frac{\theta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \\
v_1(z,\theta) &= -\frac{k^2}{8}\sec h^2(\frac{kz+\ln b}{2})-(ck^4\cos ech^3(kz+\ln b) \\
&\times\sinh^4(\frac{kz+\ln b}{2}))\frac{\theta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

şeklinde ifade edilebilir. Aynı şekilde, ikinci bilinmeyenin biçimini öğrenmek için $f_2(z)$ ve $g_2(z)$ katsayıları, (3.34) formülünde
$Res_2^u(z,\theta)=\frac{\partial^\alpha u_2}{\partial\theta^\alpha}-\frac{1}{2}\frac{\partial v_2}{\partial z}+2u_2\frac{\partial u_2}{\partial z}$ ve $Res_2^v(z,\theta)=\frac{\partial^\alpha v_2}{\partial\theta^\alpha}-\frac{1}{2}\frac{\partial^3 u_2}{\partial z^3}+2\frac{\partial(u_2v_2)}{\partial z}$
içinde ve (3.35) denklemindeki
$u_2(z,\theta)=f(z)+f_1(z)\frac{\theta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}+f_2(z)\frac{\theta^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}$ ve $v_2(z,\theta)=g(z)+g_1(z)\frac{\theta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}+g_2(z)\frac{\theta^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}$

kesik serilerinde yerine yazılır ve aşağıdaki

$$\begin{aligned} Res_2^u(z,\theta) = {} & f_1(z) - \frac{1}{2}g^{'}(z) + 2f(z)f'(z) + (f_2(z) - \frac{1}{2}g'(z) + 2f(z)f_1'(z) + g'(z) \\ & +2f_1(z)f'(z))\frac{\theta^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \times (-\frac{1}{2}g_2^{'}(z) + 2f(z)f_2'(z) + 2f_1(z)f_1'(z) \\ & +2f_2(z)f'(z))\frac{\theta^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + (2f_1(z)f_2'(z) + 2f_2(z)f_1'(z))\frac{\theta^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \\ & +2f_2(z)f_2'(z)\frac{\theta^{4\alpha}}{\Gamma(1+4\alpha)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Res_2^v(z,\theta) = {} & g_1(z) - \frac{1}{2}f^{'''}(z) + 2(f(z)f(z))' + (g_2(z) - \frac{1}{2}f_1^{'''}(z) \\ & +(2f(z)g_1(z) + 2f_1(z)g(z)')\frac{\theta^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \\ & +(-\frac{1}{2}f_2^{''}(z) + (2f(z)g_2(z) + 2f_1(z)g_1(z) + 2f_2(z)g(z))\frac{\theta^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\ & +(2f_1(z)g_2(z) + 2f_2(z)g_1(z))'\frac{\theta^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} + 2f_2(z)g_2(z)\frac{\theta^{4\alpha}}{\Gamma(1+4\alpha)} \end{aligned}$$

farklı formu elde edilir. (3.42) denkleminde D_θ^α operatörünü uygulayarak $Res_2^u(z,\theta)$ ve $Res_2^v(z,\theta)$ nin α. mertebeden kesirli türevi

$$\begin{aligned} D_\theta^\alpha Res_2^u(z,\theta) = {} & f_2(z) - \frac{1}{2}g_1^{'}(z) + 2f(z)f_1'(z) + 2f_1(z)f'(z) \\ & +(-\frac{1}{2}g_2^{'}(z) + 2f(z)f_2'(z) + 2f_1(z)f_1'(z) \\ & +2f_2(z)f'(z))\frac{\theta^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + (2f_1(z)f_2'(z) \\ & +2f_2(z)f_1'(z))\frac{\theta^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\ & +2f_2(z)f_2'(z)\frac{\Gamma(1+4\alpha)\theta^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned} D_\theta^\alpha Res_2^v(z,\theta) = {} & g_2(z) - \frac{1}{2}f_1^{'''}(z) + (2f(z)g_1(z) + 2f_1(z)g(z))' \\ & +(-\frac{1}{2}f_2^{''}(z) + (2f(z)g_2(z) \\ & +2f_1(z)g_1(z) + 2f_2(z)g(z))')\frac{\theta^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \\ & +(2f_1(z)g_2(z) + 2f_2(z)g_1(z))'\frac{\theta^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\ & +2f_2(z)g_2(z)\frac{\Gamma(1+4\alpha)\theta^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \end{aligned}$$

bulunur. (3.29) denkleminde $n = 2$ ve (3.42) denkleminde de $\theta = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} f_2(z) = {} & \frac{1}{32}ck^3 \sec h^5(\frac{kz+\ln b}{2}) \times (3(-1+4c^2)\cosh(\frac{kz+\ln b}{2}) \\ & +(1-4c^2)\cosh(\frac{3(kz+\ln b)}{2})(3-8c^2+(-1+8c^2) \\ & \times \cosh(kz+\ln b))\sinh(\frac{kz+\ln b}{2})) \\ g_2(z) = {} & -\frac{1}{256}k^6 \sec h^6(\frac{kz+\ln b}{2})(27-120c^2+(-22+80c^2) \\ & \times \cosh(kz+\ln b)+\cosh(2kz+\ln b)) \end{aligned} \tag{3.43}$$

formülüne ulaşılır. Bu nedenle 2. kalanlı kuvvet serisi yaklaşım çözümü (3.30) formülü şeklinde olacaktır.

$$\begin{aligned} u_2(z,\theta) = {} & \frac{ck}{2} + \frac{ck}{2}\tanh(\frac{-kz-\ln b}{2}) + \frac{1}{16}k^3 \sec h^3(\frac{kz+\ln b}{2}) \\ & \times(4c^2\cosh(\frac{kz+\ln b}{2}) + (1-4c^2) \\ & \times \sinh(\frac{kz+\ln b}{2})))\frac{\theta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \\ & +(\frac{1}{32}ck^3 \sec h^5(\frac{kz+\ln b}{2})(3(-1+4c^2)\cosh\frac{kz+\ln b}{2} \\ & +(1-4c^2)\cosh\frac{3(kz+\ln b)}{2} \\ & \times(3-8c^2+(-1+8c^2)\cosh(kz+\ln b)) \\ & \times(\sinh\frac{kz+\ln b}{2}))\frac{\theta^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\ v_2(z,\theta) = {} & -\frac{k^2}{8}\sec h^2(\frac{kz+\ln b}{2}) - (ck^4 \cos ech^3(kz+\ln b) \\ & \times \sinh^4(\frac{kz+\ln b}{2}))\frac{\theta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + (-\frac{1}{256}k^6 \sec h^6(\frac{kz+\ln b}{2}) \\ & \times(27-120c^2+(-22+80c^2)\cosh(kz+\ln b) \\ & +\cosh(2kz+2\ln b))\frac{\theta^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \end{aligned} \tag{3.44}$$

Benzer şekilde, aynı prosedür $n = 3, 4$ için uygulanarak $f_3(z)$, $g_3(z)$ ve $f_4(z)$, $g_4(z)$ elde edilir. Son olarak, dördüncü dereceden kalanlı kuvvet serisi yaklaşık çözümü (3.30) denkleminde olduğu gibi

$$u_4(z,\theta) = f(z) + (\frac{1}{2}g'(z) - 2f(z)f'(z))\frac{\theta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + (\frac{1}{2}g_1'(z) - 2f(z)f_1'(z)$$

$$-2f_1(z)f'(z))\frac{\theta^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + (\frac{1}{2}g_2'(z) - 2f(z)f_2'(z) - 2f_1(z)f_1'(z) - 2f_2(z)f'(z))\frac{\theta^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)}$$

$$+(\frac{1}{2}g_3'(z) - 2f(z)f_3'(z) - 2f_1(z)f_2'(z) - 2f_2(z)f_1'(z) - 2f_3(z)f'(z))\frac{\theta^{4\alpha}}{\Gamma(1+4\alpha)}$$

ve

$$v_4(z,\theta) = g(z) + (\frac{1}{2}f'''(z) - 2(f(z)g(z))')\frac{\theta^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + (\frac{1}{2}f_1'''(z) - 2(f(z)g_1(z)$$

$$-f_1(z)g(z))')\frac{\theta^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + (\frac{1}{2}f_2'''(z) - 2(f(z)g_2(z) - f_1(z)g_1(z) - f_2(z)g(z))')\frac{\theta^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)}$$

$$+(\frac{1}{2}f_3''''(z) - 2(f(z)g_3(z) - f_1(z)g_2(z) - f_2(z)g_1(z) - f_3(z)g(z))')\frac{\theta^{4\alpha}}{\Gamma(1+4\alpha)}$$

olarak yazılabilir. Aynı şekilde, $n \geq 5$ için; $f_n(z)$ in geri kalan bileşenleri ve $g_n(z)$ tamamen elde edilebilir. En sonunda, (3.30) denkleminin çözümleri

$$u(z,\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r(z)\frac{\theta^{r\alpha}}{\Gamma(1+r\alpha)} \tag{3.45}$$
$$v(z,\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} g_r(z)\frac{\theta^{r\alpha}}{\Gamma(1+r\alpha)}$$

olarak verilir.

3.2. Yakınsama Analizi

Teorem 3.1 $\theta \geq 0$ *olmak üzere herhangi bir* $\sum_{r=0}^{\infty} c_r\theta^{r\alpha}$ *kesirli kuvvet serisi için*

(a) $\theta \geq 0$ *olmak üzere eğer* $\sum_{r=0}^{\infty} c_r\theta^{r\alpha}$ *kuvvet serisi* $\theta = \theta_1$ *e yakınsarsa,* $|\theta| < |\theta_1|$ *olmak üzere, tüm gerçek* θ *ler için seri yakınsaktır.*

(b) $\theta \geq 0$ *olmak üzere eğer* $\sum_{r=0}^{\infty} c_r\theta^{r\alpha}$ *kuvvet serisi* $\theta = \theta_1$ *de ıraksaksa,* $|\theta| > |\theta_1|$ *olmak üzere, tüm gerçek* θ *ler için seri ıraksaktır.*

İspat.

(a) $\theta \geq 0$ olmak üzere $\sum_{r=0}^{\infty} c_r\theta_1^{r\alpha}$ kuvvet serisi $\theta = \theta_1$ noktasında yakınsak olsun. O halde $lim_{r\to\infty}c_r\theta^{r\alpha} = 0$ dır. Yakınsak olan $\{c_r\theta^{r\alpha}\}$ sayı dizisi sınırlıdır. Bu nedenle $\exists\ a$ pozitif gerçek sayıları K öyleki

$$| c_r\theta_1^{r\alpha} | \leq K \quad \forall n \in N, | c_r\theta^{r\alpha} | = | c_r\theta_1^{r\alpha} || \frac{\theta}{\theta_1} |^r \leq K | \frac{\theta}{\theta_1} |^r$$

sağlanır.

$\mid \frac{\theta}{\theta_1} \mid < 1$ olmak üzere tüm θ ler için, $\sum\limits_{r=0}^{\infty} \mid \frac{\theta}{\theta_1} \mid^r$ serisi pozitif gerçek sayılar kümesinde yakınsaktır. Karşılaştırma testi ile $\sum\limits_{r=0}^{\infty} c_r \theta^{r\alpha}$ serisi $|\theta| < |\theta_1|$ için yakınsak olur. Bu nedenle seri yakınsaktır.

(b) $|\theta_1| < |c|$ ve $\theta = c$ için kesirli kuvvet serileri yakınsak olsun. $\theta = c$ ve $|\theta_1| < |c|$ için seri yakınsak ve yukarıdaki duruma göre, seri $\theta = \theta_1$ için yakınsak olacaktır ki bu bir çelişkidir. Bu $|\theta| > |\theta_1|$ olmak üzere serinin tüm gerçek θ ler için ıraksak olduğunu kanıtlar. □

Lemma 3.2 *Eğer* $r-1<\alpha<r, r \in N$ *ise o zaman*

$$D_\theta^\alpha J_\theta^\alpha f(\theta) = f(\theta) \tag{3.46}$$

ve

$$J_\theta^\alpha D_\theta^\alpha f(\theta) = f(\theta) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\theta^k}{k!} f^{(k)}(0+), \theta > 0 \tag{3.47}$$

olur.

Lemma 3.3 *Diyelim ki* $0 \leq r-1 < \alpha \leq r$ *olmak üzere* $j = 0,1,2,...,N+1$ *için;* $u(z,\theta) \in C([R,\theta_0] \times [R,\theta_0+R])$, $D_\theta^{j\alpha} u(z,\theta) \in C([R,\theta_0] \times [R,\theta_0+R])$ *olsun. O zaman*

$$J_\theta^{(n+1)\alpha} D_\theta^{(n+1)\alpha} u(z,\theta) = \frac{D_\theta^{(n+1)\alpha} u(z,\varepsilon)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} (\theta-\theta_0)^{((n+1)\alpha)}, \quad \theta_0 \leq \varepsilon \leq \theta < \theta_0 + R$$

olur.

Teorem 3.4 *(Yakınsama Teoremi)*

Varsayalım ki $r = 0,1,2,...,N+1$ *ve* $0 \leq m-1 < \alpha \leq m$ *için;* $u(z,\theta) \in C([R,\theta_0] \times [R,\theta_0+R])$, $D_\theta^{r\alpha} \in C([R,\theta_0] \times [R,\theta_0+R])$, $m-1$ *kez* θ *ya göre türevlenebilir olsun. O zaman*

$$u(z,\theta) \cong \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{r=0}^{N} U_{p+r\alpha}(z)(\theta-\theta_0)^{p+r\alpha} \tag{3.48}$$

Burada

$$U_{p+r\alpha}(z) = \frac{D_\theta^{p+r\alpha}}{\Gamma(p+r\alpha+1)} u(z,\theta_0) \tag{3.49}$$

dır. Ayrıca, $0 \leq \varepsilon \leq \theta$ *olan bir* ε *değeri vardır. Böylece* $R_N(z,\theta)$ *hata terimi*

$$\|R_N(z,\theta)\| = \sup_{\theta\in[0,T]} \sum_{p=0}^{m-1} \left| \frac{D_\theta^{(N+1)\alpha+p} u(z,\varepsilon)\theta^{(N+1)\alpha+p}}{\Gamma((N+1)\alpha+r+1} \right|$$

şeklinde olur.

İspat. $0 \leq m-1 < \alpha \leq m$ için

$$\begin{aligned}
&P_\theta^{p+r\alpha} D_\theta^{p+r\alpha} u(z,\theta) - P_\theta^{p+(r+1)\alpha} D_\theta^{p+(r+1)\alpha} u(z,\theta)\\
&= P_\theta^{p+r\alpha}\left[D_\theta^{p+r\alpha} u(z,\theta) - P_\theta^{\alpha}(D_\theta^{p+r\alpha} u(z,\theta))\right]\\
&= P_\theta^{p+r\alpha}\left[D_\theta^{p+r\alpha} u(z,\theta) - D_\theta^{p+r\alpha} u(z,\theta) + D_\theta^{p+r\alpha} u(z,\theta_0)\right]\\
&= P_\theta^{p+r\alpha}\left[D_\theta^{p+r\alpha} u(z,\theta_0)\right]
\end{aligned}$$

(3.47) formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&= D_\theta^{p+r\alpha} u(z,\theta_0)\frac{(\theta-\theta_0)^{p+r\alpha}}{\Gamma(p+r\alpha+1)}\\
&= U_{p+r\alpha}(z)(\theta-\theta_0)^{p+r\alpha}
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi, $u(z,\theta)$ için N. dereceden yaklaşıklık;

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{r=0}^{N} U_{p+r\alpha}(z)(\theta-\theta_0)^{p+r\alpha}\\
&= \sum_{p=0}^{m-1}\sum_{r=0}^{N}(P_\theta^{p+r\alpha} D_\theta^{p+r\alpha} u(z,\theta) - P_\theta^{p+(r+1)\alpha} D_\theta^{p+(r+1)\alpha} u(z,\theta))\\
&= u(x,\theta) - \sum_{p=0}^{m-1}\left[P_\theta^{p+(N+1)\alpha} D_\theta^{p+(N+1)\alpha} u(z,\theta)\right]\\
&= u(z,\theta) - \sum_{p=0}^{m-1}\left[\frac{1}{\Gamma(N+1)\alpha+p} \times \int_0^\theta \frac{D_\theta^{p+(N+1)\alpha} u(z,\varepsilon)}{(\theta-\tau)^{1-(p+(N+1)\alpha}} d\tau\right]\\
&= u(z,\theta) - \sum_{p=0}^{m-1}\left[\frac{D_\theta^{p+(N+1)\alpha} u(z,\varepsilon)}{\Gamma(N+1)\alpha+p} \times \int_0^\theta \frac{d\tau}{(\theta-\tau)^{1-(p+(N+1)\alpha)}}\right]
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. İntegral ortalama değer teoreminin uygulanırsa

$$= u(z,\theta) - \sum_{p=0}^{m-1}\left[\frac{D_\theta^{p+(N+1)\alpha} u(z,\varepsilon)\theta^{((N+1)\alpha+p)}}{\Gamma(N+1)\alpha+p+1}\right]$$

olur. Öyleyse

$$u(z,\theta) - \sum_{p=0}^{m-1}\sum_{r=0}^{N} U_{p+r\alpha}(z)(\theta-\theta_0)^{p+r\alpha} + \sum_{p=0}^{m-1}\left[\frac{D_\theta^{p+(N+1)\alpha} u(z,\varepsilon)\theta^{((N+1)\alpha+p)}}{\Gamma(N+1)\alpha+p+1}\right]$$

dır. Dolayısıyla hata terimi

$$\|R_N(z,\theta)\| = \left\| u(z,\theta) - \sum_{p=0}^{m-1}\sum_{r=0}^{N} U_{p+r\alpha}(z)(\theta-\theta_0)^{p+r\alpha} \right\| \tag{3.50}$$
$$= \left\| \sum_{p=0}^{m-1} \left[\frac{D_\theta^{p+(N+1)\alpha} u(z,\varepsilon)\theta^{((N+1)\alpha+p)}}{\Gamma(N+1)\alpha+p+1} \right] \right\|$$

olur. Bu şu anlama gelir, eğer $N \to \infty$, $\quad \|R_N\| \longrightarrow 0$ ise

$$\|R_N(z,\theta)\| = \sup_{\theta\in[0,T]} \left\| \sum_{p=0}^{m-1} \left| \frac{D_\theta^{(N+1)\alpha+p} u(z,\varepsilon)\theta^{(N+1)\alpha+p}}{\Gamma((N+1)\alpha+r+1} \right| \right\| \tag{3.51}$$

dır. (3.51) denkleminde verilen hata terimi ile $u(z,\theta)$

$$u(z,\theta) = \sum_{p=0}^{m-1}\sum_{r=0}^{\infty} U_{p+r\alpha}(z)(\theta-\theta_0)^{p+r\alpha} \cong \sum_{p=0}^{m-1}\sum_{r=0}^{N} U_{p+r\alpha}(z)(\theta-\theta_0)^{p+r\alpha}$$

şeklinde yaklaşıklaştırılabilir. □

Sonuç 3.5 *Bir sabit* $m = 1$ *ise,* $u(z,\theta)$ *in* θ_0 *civarında genişlemesini takiben seri gösterimi (3.48) formülü*

$$u(z,\theta) \cong \sum_{r=0}^{N} U_{r\alpha}(z)(\theta-\theta_0)^{r\alpha} \tag{3.52}$$

denklemine indirgenebilir. Burada $U_{r\alpha}(z) = \frac{D_\theta^{r\alpha}}{\Gamma(r\alpha+1)} u(z,\theta_0)$ *dır. Elde edilen genelleştirilmiş Taylor serisi formülü ile aynıdır. Sonuç olarak hata terimi* $R_n(z,\theta)$ *genelleştirilmiş Taylor serisini de sağlar.*

(Odibat ve Shawagfeh, 2007)

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde kesirli mertebeden problemin yaklaşık çözümü için kalanlı rezidü metodunu bir örnek problem üzerinde uygulayacağız.

Örnek 4.1 *Üçüncü mertebeden kesirli kısmi diferansiyel denklemini*

$$\begin{cases} \frac{\partial^{3\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{3\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{2\alpha}} + \frac{\partial^{\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{\alpha}} - \frac{\partial^{2}u(z,\theta)}{\partial \theta^{2}} = \Big(\frac{6z^{3-3\alpha}}{\Gamma(4-3\alpha)} + \frac{6z^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} \\ +\frac{6z^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - z^3 + 1\Big)\cos\theta \\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2},\ 0 < z < 1,\ 0 < \alpha \leq 1 \\ u(0,\theta) = -\cos\theta,\ u_z(0,\theta) = u_{zz}(0,\theta) = 0 \\ u(z,0) = u(z,\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

kalanlı kuvvet serisi metodu ile çözelim.

İlk olarak

$$u(z,\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r(\theta)\frac{z^{\alpha r}}{\Gamma(\alpha r+1)} \tag{4.2}$$

formülünü alalım. Bu durumda (4.2) denkleminin θ ve z ye göre türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(z,\theta)}{\partial\theta} &= u_\theta(z,\theta) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\partial f_r(\theta)}{\partial\theta}\frac{z^{\alpha r}}{\Gamma(\alpha r+1)}, \\ \frac{\partial^2 u(z,\theta)}{\partial\theta^2} &= u_{\theta\theta}(z,\theta) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\partial^2 f_r(\theta)}{\partial\theta^2}\frac{z^{\alpha r}}{\Gamma(\alpha r+1)}, \\ \frac{\partial^{3\alpha} u(z,\theta)}{\partial z^{3\alpha}} &= D_z^{3\alpha}u(z,\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r(\theta)\frac{z^{\alpha r-3\alpha}}{\Gamma(\alpha r+1-3\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha r+1)}{\Gamma(\alpha r+1)}, \\ \frac{\partial^{2\alpha} u(z,\theta)}{\partial z^{2\alpha}} &= D_z^{2\alpha}u(z,\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r(\theta)\frac{z^{\alpha r-2\alpha}}{\Gamma(\alpha r+1-2\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha r+1)}{\Gamma(\alpha r+1)}, \\ \frac{\partial^{\alpha} u(z,\theta)}{\partial z^{\alpha}} &= D_z^{\alpha}u(z,\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r(\theta)\frac{z^{\alpha r-\alpha}}{\Gamma(\alpha r+1-\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha r+1)}{\Gamma(\alpha r+1)} \end{aligned}$$

olur. Şimdi $r = 0, 1, 2, ...$ için $u(z,\theta)$ in k. terimi

$$u_k(z,\theta) = \sum_{r=0}^{k} f_r(\theta)\frac{z^{\alpha r}}{\Gamma(\alpha r+1)}, \tag{4.3}$$

şeklinde alınabilir. O halde, (4.3) denkleminin türevleri

$$u_\theta(z,\theta)=\sum_{r=0}^{k}\frac{\partial f_r(\theta)}{\partial\theta}\frac{z^{\alpha r}}{\Gamma(\alpha r+1)},$$
$$u_{\theta\theta}(z,\theta)=\sum_{r=0}^{k}\frac{\partial^2 f_r(\theta)}{\partial\theta^2}\frac{z^{\alpha r}}{\Gamma(\alpha r+1)},$$
$$D_z^{3\alpha}u(z,\theta)=\sum_{r=3}^{k}f_r(\theta)\frac{z^{\alpha r-3\alpha}}{\Gamma(\alpha r+1-3\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha r+1)}{\Gamma(\alpha r+1)},$$
$$D_z^{2\alpha}u(z,\theta)=\sum_{r=2}^{k}f_r(\theta)\frac{z^{\alpha r-2\alpha}}{\Gamma(\alpha r+1-2\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha r+1)}{\Gamma(\alpha r+1)},$$
$$D_z^{\alpha}u(z,\theta)=\sum_{r=1}^{k}f_r(\theta)\frac{z^{\alpha r-\alpha}}{\Gamma(\alpha r+1-\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha r+1)}{\Gamma(\alpha r+1)}$$

olarak bulunur. $u(z,\theta)$ in sıfırıncı kalanlı kuvvet serisinin başlangıç koşullarına bağlı çözümünün

$$u(0,\theta)=-\cos\theta=f_o(\theta) \tag{4.4}$$
$$u_z(0,\theta)=0=f_1(\theta)$$
$$u_{zz}(0,\theta)=0=f_2(\theta)$$

olduğu açıktır.

$u_0(z,\theta)=f_o(\theta)=-\cos\theta$ yazılırsa

$$u_1(z,\theta)=f_o(\theta)+f_1(\theta)\frac{z^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{4.5}$$

olur. (4.4) denklemindeki başlangıç değerleri, (4.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_1(z,\theta)=-\cos\theta$$

bulunur. Benzer şekilde

$$u_2(z,\theta)=f_o(\theta)+f_1(\theta)\frac{z^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+f_2(\theta)\frac{z^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \tag{4.6}$$

olur. (4.4) denklemindeki başlangıç değerleri, (4.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_2(z,\theta)=-\cos\theta$$

olur. O halde

$$u_3(z,\theta)=f_o(\theta)+f_1(\theta)\frac{z^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+f_2(\theta)\frac{z^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}+f_3(\theta)\frac{z^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \tag{4.7}$$

olup (4.4) denklemindeki başlangıç değerleri (4.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_3(z,\theta) = -\cos\theta + f_3(\theta)\frac{z^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}$$

olur. $u_3(z,\theta)$ değerini bulmak için $f_3(\theta)$ değerini bulmak gerekir. Kalanlı rezidü iterasyon yönteminde $r = 0, 1, 2, ...$ alındığında

$$\begin{aligned} Resu_k(z,\theta) = & \left(\sum_{r=3}^{3} f_r(\theta)\frac{z^{r-3\alpha}}{\Gamma(r+1-3\alpha)}\Gamma(r+1)\right) \\ & + \left(\sum_{r=2}^{3} f_r(\theta)\frac{z^{r-2\alpha}}{\Gamma(r+1-2\alpha)}\Gamma(r+1)\right) \\ & + \left(\sum_{r=1}^{3} f_r(\theta)\frac{z^{r-\alpha}}{\Gamma(r+1-\alpha)}\Gamma(r+1)\right) \\ & - \left(\sum_{r=0}^{3} \frac{\partial^2 f_r(\theta) z^r}{\partial\theta^2}\right) \\ & -(\frac{6z^{3-3\alpha}}{\Gamma(4-3\alpha)} + \frac{6z^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} + \frac{6z^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - z^3 + 1)\cos\theta = 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

elde edilir ve bu ifade açılırsa

$$f_3(\theta) + f_2(\theta) + f_3(\theta)\frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$+f_1(\theta) + f_2(\theta)\frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + f_3(\theta)\frac{z^2\alpha}{\Gamma(2\alpha+1)}$$

$$-(\frac{\partial^2 f_o(\theta)}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 f_1(\theta)}{\partial\theta^2}\frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\partial^2 f_2(\theta)}{\partial\theta^2}\frac{z^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{\partial^2 f_3(\theta)}{\partial\theta^2}\frac{z^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)})$$

$$-(\frac{6z^{3-3\alpha}}{\Gamma(4-3\alpha)} + \frac{6z^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} + \frac{6z^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - z^3 + 1)\cos\theta = 0$$

olur. (4.4) ifadesindeki formüller kullanılıp değerler yazılırsa

$$\begin{aligned} & f_3(\theta) + f_3(\theta)\frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \cos\theta + f_3(\theta)\frac{z^2\alpha}{\Gamma(2\alpha+1)} + \cos\theta \\ & +\frac{\partial^2 f_3(\theta)}{\partial\theta^2}\frac{z^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \\ & = \frac{6z^{3-3\alpha}}{\Gamma(4-3\alpha)} + \frac{6z^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} + \frac{6z^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - z^3 + 1)\cos\theta \end{aligned}$$

olup $z = 0$ alınırsa

$$f_3(\theta) + \frac{\partial^2 cos\theta}{\partial\theta^2} - \cos\theta = 0$$

olup gerekli işlemler yapılırsa

$$f_3(\theta) = 2cos\theta$$

bulunur. (4.4) denklemindeki başlangıç değerleri, (4.7) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_3(z,\theta) = -\cos\theta + 2\cos\theta\frac{z^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}$$

bulunur. $k = 4$ için $u_4(z,\theta)$ değerini yazalım:

$$u_4(z,\theta) = f_o(\theta) + f_1(\theta)\frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + f_2(\theta)\frac{z^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}$$
$$+f_3(\theta)\frac{z^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + f_4(\theta)\frac{z^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)}$$

Şimdi $f_4(\theta)$ yı bulmak için $f_0(\theta)$,$f_1(\theta)$,$f_2(\theta)$ ve $f_3(\theta)$ değerlerini yerine yazarsak

$$f_4(\theta) - \frac{\partial^2 0}{\partial\theta^2} + 2\cos\theta = 0 \tag{4.9}$$

olup

$$f_4(\theta) = -2\cos\theta \tag{4.10}$$

bulunur.Bu durumda

$$u_4(z,\theta) = -\cos\theta + 2\cos\theta\frac{z^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} - 2\cos\theta\frac{z^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)} \tag{4.11}$$

bulunur. (4.1) denkleminin kalanlı kuvvet serisi yardımıyla bulunan yaklaşık çözümü

$$u(z,\theta) = -\cos\theta + 2\cos\theta\frac{z^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} - 2\cos\theta\frac{z^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)}$$

$$= (\cos\theta)(-1 + 2\frac{z^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} - \frac{z^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)})$$

olarak elde edilir.

Çizelge 4.1 de Örnek 1.8 deki tam çözüm ve Örnek 4.1 deki yaklaşık çözümler karşılaştırılarak hata analizi oluşturulmuştur.

Örnek 4.1 için farklı α, z ve θ değerleri için hata payı Matlab programı ile hesaplanarak verilmiştir. Tabloda da görüldüğü gibi α nın aynı değerlerine bakıldığında z sayısının değeri azaldıkça hata payı da azalmıştır.

Ayrıca $\alpha = 1, \quad z = 0.1, \quad \theta = \frac{\pi}{12}$ değerleri için hata payı en küçük değerini almıştır.

Çizelge 4.1. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < z < 1, 0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere bazı θ, z, α sayıları için $u(z,\theta)$ fonksiyonunun tam çözümü, yaklaşık çözümü ve hata payı değerleri

α	z	θ	TAM ÇÖZÜM	YAKLAŞIK ÇÖZÜM	HATA PAYI
1	0.1	$\frac{\pi}{12}$	-0.96496	-0.96562	0.00066
0.99	0.9	$\frac{\pi}{3}$	-0.13550	-0.40260	0.26710
0.99	0.5	$\frac{\pi}{6}$	-0.75779	-0.83269	0.07490
0.99	0.1	$\frac{\pi}{12}$	-0.96496	-0.96558	0.00062
0.50	0.9	$\frac{\pi}{3}$	-0.13550	-0.26270	0.12720
0.50	0.5	$\frac{\pi}{6}$	-0.75779	-0.62185	0.13594
0.50	0.1	$\frac{\pi}{12}$	-0.96496	-0.92963	0.03533
0.01	0.9	$\frac{\pi}{3}$	-0.13550	-0.50420	0.12720
0.01	0.5	$\frac{\pi}{6}$	-0.75779	-0.86312	0.10533
0.01	0.1	$\frac{\pi}{12}$	-0.96496	-0.93353	0.03143

Şimdi başka bir kesirli mertebeden problemin yaklaşık çözümü için kalanlı rezidü metodunu aşağıdaki problem üzerinde uygulayacağız.

Örnek 4.2 *Aşağıdaki üçüncü mertebeden kesirli diferansiyel denklemini*

$$\begin{cases} \frac{\partial^{3\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{3\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{2\alpha}} + \frac{\partial^{\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{\alpha}} - \frac{\partial^{2}u(z,\theta)}{\partial \theta^{2}} = \\ \Big(\frac{6z^{3-3\alpha}}{\Gamma(4-3\alpha)} - \frac{z^{1-3\alpha}}{\Gamma(2-3\alpha)} + \frac{6z^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} - \frac{z^{1-2\alpha}}{\Gamma(2-2\alpha)} \\ +\frac{6z^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{z^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - z^3 + z - 1\Big) e^{-\theta} \\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < z < 1, 0 < \alpha \leq 1 \\ u(0,\theta) = e^{-\theta}, u_z(0,\theta) = -e^{-\theta}, u_{zz}(0,\theta) = 0 \end{cases} \tag{4.12}$$

kalanlı kuvvet serisi metoduyla çözelim.

$$u(z,\theta) = \sum_{r=0}^{\infty} f_r(\theta) \frac{z^{\alpha r}}{\Gamma(\alpha r + 1)} \tag{4.13}$$

alalım. O halde

$$u_\theta(z,\theta) = \frac{\partial u(z,\theta)}{\partial \theta} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\partial f_r(\theta)}{\partial \theta} \frac{z^{\alpha r}}{\Gamma(\alpha r + 1)},$$

$$u_{\theta\theta}(z,\theta) = \frac{\partial^2 u(z,\theta)}{\partial \theta^2} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\partial^2 f_r(\theta)}{\partial \theta^2} \frac{z^{\alpha r}}{\Gamma(\alpha r + 1)},$$

$$D_z^{3\alpha}u(z,\theta) = \frac{\partial^{3\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{3\alpha}} = \sum_{r=0}^{\infty} f_r(\theta) \frac{z^{\alpha r - 3\alpha}}{\Gamma(\alpha r + 1 - 3\alpha)\Gamma(\alpha r + 1)} \Gamma(\alpha r + 1),$$

$$D_z^{2\alpha}u(z,\theta) = \frac{\partial^{2\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{2\alpha}} = \sum_{r=0}^{\infty} f_r(\theta) \frac{z^{\alpha r - 2\alpha}}{\Gamma(\alpha r + 1 - 2\alpha)\Gamma(\alpha r + 1)} \Gamma(\alpha r + 1),$$

$$D_z^{\alpha}u(z,\theta) = \frac{\partial^{\alpha}u(z,\theta)}{\partial z^{\alpha}} = \sum_{r=0}^{\infty} f_r(\theta) \frac{z^{\alpha r - \alpha}}{\Gamma(\alpha r + 1 - \alpha)\Gamma(\alpha r + 1)} \Gamma(\alpha r + 1)$$

olur. Şimdi $r = 0, 1, 2, ...$ için $u(z,\theta)$ in k. terimini ifade edelim.

$$u_k(z,\theta) = \sum_{r=0}^{k} f_r(\theta) \frac{z^{\alpha r}}{\Gamma(\alpha r + 1)}$$

$$u_\theta(z,\theta) = \frac{\partial u(z,\theta)}{\partial \theta} = \sum_{r=0}^{k} \frac{\partial f_r(\theta)}{\partial \theta} \frac{z^{\alpha r}}{\Gamma(\alpha r+1)},$$
$$u_{\theta\theta}(z,\theta) = \frac{\partial^2 u(z,\theta)}{\partial \theta^2} = \sum_{r=0}^{k} \frac{\partial^2 f_r(\theta)}{\partial \theta^2} \frac{z^{\alpha r}}{\Gamma(\alpha r+1)},$$
$$D_z^{3\alpha} u(z,\theta) = \frac{\partial^{3\alpha} u(z,\theta)}{\partial z^{3\alpha}} = \sum_{r=0}^{k} f_r(\theta) \frac{z^{\alpha r-3\alpha}}{\Gamma(\alpha r+1-3\alpha)\Gamma(\alpha r+1)}\Gamma(\alpha r+1),$$
$$D_z^{2\alpha} u(z,\theta) = \frac{\partial^{2\alpha} u(z,\theta)}{\partial z^{2\alpha}} = \sum_{r=0}^{k} f_r(\theta) \frac{z^{\alpha r-2\alpha}}{\Gamma(\alpha r+1-2\alpha)\Gamma(\alpha r+1)}\Gamma(\alpha r+1),$$
$$D_z^{\alpha} u(z,\theta) = \frac{\partial^{\alpha} u(z,\theta)}{\partial z^{\alpha}} = \sum_{r=0}^{k} f_r(\theta) \frac{z^{\alpha r-\alpha}}{\Gamma(\alpha r+1-\alpha)\Gamma(\alpha r+1)}\Gamma(\alpha r+1)$$

olarak ifade edilir. $u(z,\theta)$ in sıfırıncı kalanlı kuvvet serisinin başlangıç koşullarına bağlı çözümünün

$$u(0,\theta) = e^{-\theta} = f_o(\theta) \tag{4.14}$$
$$u_z(0,\theta) = -e^{-\theta} = f_1(\theta)$$
$$u_{zz}(0,\theta) = 0 = f_2(\theta)$$

olduğu açıktır.

$$u_0(z,\theta) = f_o(\theta) = e^{-\theta} \tag{4.15}$$

dersek

$$u_1(z,\theta) = f_o(\theta) + f_1(\theta)\frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{4.16}$$

olur. (4.14) denklemindeki $f_o(\theta)$ ı (4.15) denleminde yerine yazarsak

$$u_1(z,\theta) = e^{-\theta}(1 - \frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}) \tag{4.17}$$

bulunur. O halde

$$u_2(z,\theta) = f_o(\theta) + f_1(\theta)\frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + f_2(\theta)\frac{z^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \tag{4.18}$$

olur. (4.14) denklemindeki $f_o(\theta),\ f_1(\theta),\ f_2(\theta)$ değerlerini (4.17) denkleminde yerine yazarsak

$$u_2(z,\theta) = e^{-\theta}(1 - \frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}) \tag{4.19}$$

olacaktır. Benzer şekilde

$$u_3(z,\theta) = f_o(\theta) + f_1(\theta)\frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}) + f_2(\theta)\frac{z^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + f_3(\theta)\frac{z^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \tag{4.20}$$

olarak ifade edilir. (4.14) denklemindeki $f_o(\theta)$, $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ değerlerini (4.19) denkleminde yerine yazarsak

$$u_3(z,\theta) = e^{-\theta}(1 - \frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}) + f_3(\theta)\frac{z^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \tag{4.21}$$

bulunur. Kalanlı rezidü iterasyon yönteminde $r = 0, 1, 2, ...$ alındığında

$$\begin{aligned}
Resu_k(z,\theta) = &\left(\sum_{r=3}^{3} f_r(\theta)\frac{z^{\alpha r-3\alpha}}{\Gamma(\alpha r+1-3\alpha)\Gamma(\alpha r+1)}\Gamma(\alpha r+1)\right)\\
&+\left(\sum_{r=2}^{3} f_r(\theta)\frac{z^{\alpha r-2\alpha}}{\Gamma(\alpha r+1-2\alpha)\Gamma(\alpha r+1)}\Gamma(\alpha r+1)\right)\\
&+\left(\sum_{r=1}^{3} f_r(\theta)\frac{z^{\alpha r-\alpha}}{\Gamma(r+1-\alpha)\Gamma(\alpha r+1)}\Gamma(\alpha r+1)\right)\\
&-\left(\sum_{r=0}^{3} \frac{\partial^2 f_r(\theta)}{\partial\theta^2}\frac{z^{\alpha r}}{\Gamma(\alpha r+1)}\right)\\
&-(\frac{6z^{3-3\alpha}}{\Gamma(4-3\alpha)} - \frac{z^{1-3\alpha}}{\Gamma(2-3\alpha)} + \frac{6z^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)}\\
&-\frac{z^{1-2\alpha}}{\Gamma(2-2\alpha)} + \frac{6z^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{z^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - z^3 + z - 1)e^{-\theta} = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade açılırsa

$$\begin{aligned}
&f_3(\theta) + f_2(\theta) + f_3(\theta)\frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + f_1(\theta) + f_2(\theta)\frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\\
&+f_3(\theta)\frac{z^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - (\frac{\partial^2 f_0(\theta)}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 f_1(\theta)}{\partial\theta^2}\frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\\
&+\frac{\partial^2 f_2(\theta)}{\partial\theta^2}\frac{z^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{\partial^2 f_3(\theta)}{\partial\theta^2}\frac{z^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)})\\
&-(\frac{6z^{3-3\alpha}}{\Gamma(4-3\alpha)} - \frac{z^{1-3\alpha}}{\Gamma(2-3\alpha)} + \frac{6z^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} - \frac{z^{1-2\alpha}}{\Gamma(2-2\alpha)})\\
&+\frac{6z^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{z^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - z^3 + z - 1)e^{-\theta} = 0
\end{aligned}$$

denklemine ulaşılır. Burada (4.13) denklemindeki $f_0(\theta)$, $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ değerlerini yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
&f_3(\theta) + f_3(\theta)\frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - e^{-\theta} + f_3(\theta)\frac{z^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - e^{-\theta}\\
&+e^{-\theta}\frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{\partial^2 f_3(\theta)}{\partial\theta^2}\frac{z^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}\\
&-(\frac{6z^{3-3\alpha}}{\Gamma(4-3\alpha)} - \frac{z^{1-3\alpha}}{\Gamma(2-3\alpha)} + \frac{6z^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} - \frac{z^{1-2\alpha}}{\Gamma(2-2\alpha)}
\end{aligned}$$

$$+\frac{6z^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}-\frac{z^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}-z^3+z-1)e^{-\theta}=0$$

Burada $z=0$ için

$$f_3(\theta)=e^{-\theta}$$

bulunur. (4.20) denkleminde $f_3(\theta)$ yerine yazılırsa

$$u_3(z,\theta)=e^{-\theta}-e^{-\theta}\frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+e^{-\theta}\frac{z^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}$$

yani

$$u_3(z,\theta)=e^{-\theta}(1-\frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{z^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)})$$

bulunur. Dolayısıyla (4.12) denkleminin yaklaşık çözümü

$$u(z,\theta)=e^{-\theta}(1-\frac{z^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{z^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)})$$

olarak bulunur.

Çizelge 4.2. $0<\theta<\frac{\pi}{2}, 0<z<1, 0<\alpha\leq 1$ olmak üzere bazı θ, z, α sayıları için $u(z,\theta)$ fonksiyonunun tam çözümü, yaklaşık çözümü ve hata payı değerleri

α	z	θ	TAM ÇÖZÜM	YAKLAŞIK ÇÖZÜM	HATA PAYI
0.99	0.9	0.9	0.3370	0.0902	0.2469
0.50	0.9	0.9	0.3370	0.2325	0.1046
0.01	0.9	0.9	0.3370	0.4102	0.0731
0.99	0.1	0.1	0.8153	0.8120	0.0032
0.50	0.1	0.1	0.8153	0.6035	0.2118
0.01	0.1	0.1	0.8153	0.8741	0.0589
0.99	0.01	0.01	0.9802	0.9796	5.1098×10^{-4}
0.50	0.01	0.01	0.9802	0.8791	0.1011
0.01	0.01	0.01	0.9802	0.9159	0.0643

Çizelge 4.2 de Örnek 1.9 daki tam çözüm ve Örnek 4.2 deki yaklaşık çözümler karşılaştırılarak hata analizi oluşturulmuştur.

Örnek 4.2 için farklı α, z ve θ değerleri için hata payı Matlab programı ile hesaplanarak verilmiştir. Tabloda da görüldüğü gibi z ve θ nın aynı değerleri bakıldığında α sayısının değeri azaldıkça hata payı da azalmıştır.

Ayrıca $\alpha=0.99, \quad z=0.1, \quad \theta=0.1$ değerleri için hata payı en küçük değerini almıştır.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Çalışmada ele alınan üçüncü mertebeden kesirli kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü Laplace metodu ile çözülmüştür. Bu denklemin yaklaşık çözümü ise Kalanlı kuvvet serisi metodu ile bulunmuştur. Bu metot, çalışmada detaylı bir biçimde anlatılmıştır. Ayrıca bu metotla elde edilen yaklaşık çözüm, Laplace metodu ile elde edilen tam çözüm ile karşılaştırılarak hata analizi yapılmıştır. Hata analizi tablosundan Kalanlı kuvvet serisi metodunun üçüncü mertebeden kesirli kısmi diferansiyel denklem için uygun olduğu görülmüştür. Ayrıca bu metotla bulunan yaklaşık çözümün, Laplace metodu ile bulunan tam çözümle arasındaki hata payının küçük olduğu değerler görülmüştür.

Kullanışlı bir metot olan kalanlı kuvvet serisi metodu, farklı mertebeden lineer olmayan kesirli kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabilir.

KAYNAKLAR

ABU ARQUB, O., ABO-HAMMOUR, Z., AL-BADARNEH, R., and MOMANI, S. 2013. A reliable analytical method for solving higher-order initial value problems. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2013.

ABU ARQUB, O., EL-AJOU, A., BATAINEH, A. S., and HASHIM, I. 2013, JANUARY. A representation of the exact solution of generalized Lane-Emden equations using a new analytical method. In Abstract and applied analysis (Vol. 2013). Hindawi.

ALQURAN, M. 2014. Analytical solutions of fractional foam drainage equation by residual power series method. Mathematical sciences, 8(4), 153-160.

ASHYRALYEV, A. , 2006. Nonlocal boundary-value problems for abstract parabolic equations: well-posedness in Bochner spaces. Journal of Evolution Equations, 6(1), 1-28.

ASHYRALYEV, A. , 2008. A note on the Bitsadze–Samarskii type nonlocal boundary value problem in a Banach space. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 344(1), 557-573.

ASHYRALYEV, A. and AGGEZ, N. , 2004. A note on the difference schemes of the nonlocal boundary value problems for hyperbolic equations. Numerical Functional Analysis and Optimization, 25(5-6), 439-462.

ASHYRALYEV, A., and ARJMAND, D. , 2007. A note on the Taylor's decomposition on four points for a third-order differential equation. Applied mathematics and computation, 188(2), 1483-1490.

ASHYRALYEV, A., ARJMAND, D., and KOKSAL, M. , 2009. Taylor's decomposition on four points for solving third-order linear time-varying systems. Journal of the Franklin Institute, 346(7), 651-662.

ASHYRALYEV, A., KARATAY, I., and SOBOLEVSKII, P. E. ,, 2004. On well-posedness of the nonlocal boundary value problem for parabolic difference equations. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2004(2), 273-286.

ASHYRALYEV, A. and SOBOLEVSKII, P. E. , 2004. New difference schemes for partial differential equations (Vol. 148). Springer Science & Business Media.

ASHYRALYEV, A. and SIMSEK, S. N. , 2017. An operator method for a third order partial differential equation. Numerical Functional Analysis and Optimization, 38(10), 1341-1359.

ASHYRALYEV, A. and YILDIRIM, O. , 2021, February. On the asymptotic formula for the solution of nonlocal boundary value perturbation problems for hyperbolic equations. In AIP Conference Proceedings (Vol. 2325, No. 1, p. 020015). AIP Publishing LLC.

CAPUTO, M. 1967. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. Part II.Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society banner, 13(5), 529-539.

CHEN, B., QIN, L., XU, F., and Zu, J. 2018. Applications of general residual power series method to differential equations with variable coefficients. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2018.

CHEN, A., and LI, X. 2006. Darboux transformation and soliton solutions of

Boussinesq–Burgers equation. Chaos. Soliton Fract. 27, 43–52
DANCHIN, R. 2005. Fourier analysis methods for PDEs. Lecture notes, 14(1).
EL-AJOU, A., ARQUB, O. A., and MOMANI, S. 2015 Approximate analytical solution of the nonlinear fractional KdV–Burgers equation: a new iterative algorithm. Journal of Computational Physics, 293, 81-95.
GORDEZIANI, N., NATALINI, P., and RICCI, P. E. , 2005. Finite-difference methods for solution of nonlocal boundary value problems. Computers & Mathematics with Applications, 50(8-9), 1333-1344.
HE, J.H. 2003. Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique. Appl. Math. Comput. 135, 73–79
HILFER, R. (ED.). 2000. Applications of fractional calculus in physics. World scientific.
IVANAUSKAS, F. F., NOVITSKI, Y. A., and SAPAGOVAS, M. P. , 2013. On the stability of an explicit difference scheme for hyperbolic equations with nonlocal boundary conditions. Differential equations, 49(7), 849-856.
JACHIMAVICIENE, J., SAPAGOVAS, M., ŠTIKONAS, A., and ŠTIKONIENE, O. 2014. On the stability of explicit finite difference schemes for a pseudoparabolic equation with nonlocal conditions. Nonlinear analysis: modelling and control, 19(2), 225-240.
KEXUE, L., and JIGEN, P. 2011. Laplace transform and fractional differential equations. Applied Mathematics Letters, 24(12), 2019-2023.
KOMASHYNSKA, I., AL-SMADI, M., AL-HABAHBEH, A., and ATEIWI, A. 2016. Analytical approximate solutions of systems of multi-pantograph delay differential equations using residual power-series method. arXiv preprint arXiv:1611.05485.
KOZHANOV, A. I., and PUL'KINA, L. S. 2006. On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations. Differential equations, 42(9), 1233-1246.
KUMAR, S., KUMAR, A., and BALEANU, D. 2016. Two analytical methods for time-fractional nonlinear coupled Boussinesq–Burger's equations arise in propagation of shallow water waves. Nonlinear Dynamics, 85(2), 699-715.
MODANLI, M. 2019. On the numerical solution for third order fractional partial differential equation by difference scheme method. An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA), 9(3), 1-5.
MODANLI, M. 2019. Daftar-Gejii-Jafaris method for linear and nonlinear third order fractional differential equation. Math. Nat. Sci., 4, 26-36.
MODANLI, M., and SUMEYYE, E. K. E. R. 2020. Implicit Rather Difference Method for Third Order Differential Equations in the Sense of Atangana-Baleanu Caputo Fractional Derivative. Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 7(2), 952-959.
MODANLI, M. and AKGUL, A. , 2021. On solutions of fractional order time varying linear dynamical systems model. Arab Journal of Basic and AppliedSciences, 28(1), 300-308.
MODANLI, M., ABDULAZEEZ, S. T., and HUSEIN, A. M. 2021. A residual power series method for solving pseudo hyperbolic partial differential equations with nonlocal conditions. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 37(3), 2235-2243.
ODIBAT, Z.M., and SHAWAGFEH, N.T. 2007. Generalized Taylors formula. Appl.

Math. Comput. 186, 286–293
PODLUBNY, I., 1998. Fractional differential equations: an introduction to fractionalderivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Elsevier.
RADY, A.S.A., and KHALFALLAH, M. 2010. On soliton solutions for Boussinesq-Burgers equations. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 15, 886–894
SADYBEKOV, M. A. 1994, June. THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF A NEW-TYPE FOR A WAVE-EQUATION. In DOKLADY AKADEMII NAUK (Vol. 336, No. 5, pp. 590-591). 39 DIMITROVA UL., 113095 MOSCOW, RUSSIA: MEZHDUNARODNAYA KNIGA.
SALDIR, O. 2018. Kesir mertebeli türev içeren bazı kısmi türevli diferansiyel denklemlerin doğuran çekirdekli hilbert uzayı metodu ile nümerik çözümlerinin incelenmesi.
SH, K. T. 1993. Boundary value problems for linear partial differential equations of hyperbolic type Shymkent.
TAMSIR, M., DHIMAN, N., CHAUHAN, A., and CHAUHAN, A. 2021. Solution of parabolic PDEs by modified quintic B-spline Crank-Nicolson collocation method. Ain Shams Engineering Journal, 12(2), 2073-2082.
WANG, P., TIAN, B., LIU, W., LU, X., and JIANG, Y. 2011. Lax pair Bcklund transformation and multi-soliton solutions for the Boussinesq-Burgers equations from shallow water waves. Appl. Math. Comput. 218, 1726–1734
YAVUZ, M. 2018. Novel solution methods for initial boundary value problems of fractional order with conformable differentiation. An International Journal of Optimization and Control: Theories and Applications (IJOCTA), 8(1), 1-7.
ZHANG, L., ZHANG, L.F., and LI, C. 2008. Some new exact solutions of Jacobian elliptic function about the generalized Boussinesq equation and Boussinesq-Burgers equation. Chin. Phys. B 17, 403–410