T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RABINOVICH-FABRIKANT SİSTEMİNİN MITTAG-LEFFLER FONKSİYONLARIYLA ÇÖZÜMÜ

Mehmet Hayrullah GÜNEŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2021

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

RABINOVICH-FABRIKANT SİSTEMİNİN MITTAG-LEFFLER FONKSİYONLARIYLA ÇÖZÜMÜ

Mehmet Hayrullah GÜNEŞ

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Tanfer TANRIVERDİ
YIL: 2021, Sayfa: 61

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde temel kavramlar ve Mittag-Leffler fonksiyonu ve ilgili özellikler verilmiştir. İkinci bölümde önceki çalışmalar ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde, ele alınan metot sunulmuştur. Dördüncü bölümde, Rabinovich-Fabrikant sisteminin çözümü Mittag-Leffler fonksiyonları cinsinden ifade edildi. Son olarak, elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Diferansiyel denklemler, denge noktaları, Mittag-Leffler fonksiyonu, Caputo türev, yaklaşık çözüm

ABSTRACT

MSc Thesis

SOLUTION OF RABINOVICH-FABRIKANT SYSTEM WITH MITTAG-LEFFLER FUNCTIONS

Mehmet Hayrullah GÜNEŞ

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Tanfer TANRIVERDİ
Year: 2021, Page: 61

This thesis contains five chapters. In the first chapter, basic concepts and Mittag-Leffler functions and its related properties are introduced. In the second and third chapter, previous studies and method are presented. In the fourth chapter, approximating solutions of the Rabinovich-Fabrikant system are obtained in terms of Mittag-Leffler functions. Finally, obtained results are evaluated.

KEY WORDS: Differential equations, equilibrium points, Mittag-Leffler function, Caputo derivative, approximating solution

TEŞEKKÜR

Tez konusunun seçimi ve yürütülmesi konusundaki yardımları ve yakın ilgisinden dolayı tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Tanfer TANRIVERDİ'ye, tez jürimde görev alan ve katkıda bulunan Sayın Prof. Dr. Hamza MENKEN ve Sayın Doç. Dr. Hacı Mehmet BAŞKONUŞ hocalarıma

ve ayrıca bana her zaman desteklerini esirgemeyen ailemdeki herkese ayrı ayrı teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Matematik, matematiksel fizik, mühendislik ve daha bir çok alanda problemlerin çoğu diferansiyel denklemler olarak formüle edilir. Birinci ve ikinci mertebeden veya daha yüksek mertebeden matematiksel fizikte birçok uygulama alanına sahip diferansiyel denklemler vardır. Bu diferansiyel denklemlerin uygulama alanları için kaynaklar oldukça zengindir (Debnath, 1997; Logan, 1994; Whitham, 1974).

1.1. Bazı Tanımlar

Tanım 1 (Biz, 2019) Bağımlı değişkenin bir bağımsız değişkene göre türevlerini ihtiva eden denkleme bayağı diferansiyel denklemdir deriz. Eğer bağımsız değişken birden fazla ise denkleme kısmi diferansiyel denklem deriz. Daha formal bir deyişle, $i = 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere x_i olsun ve $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ise

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}) = 0$$

denklemi n. meretebeden kapalı formda bir kısmi diferansiyel denklem belirtir. $u = u(x,t)$ ise $\frac{\partial u}{\partial x} = f(x)$, $u_{tt} = cu_x$ veya $xu_t + t^2 = \sin(x)$ denklemleri birer kısmi diferansiyel denklemdir. İkinci mertebeden iki değişkenli kısmi diferansiyel denklemleri sınıflandırmak mümkündür. Bu sınıflandırma için aşağıdaki strateji izlenir. İkinci mertebeden

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

kısmi diferansiyel denkleminde

$B^2 - 4AC < 0$ ise eliptik,

$B^2 - 4AC = 0$ ise parabolik,

$B^2 - 4AC > 0$ ise hiperboliktir.

Tanım 2 (Biz, 2019) Tek değişkenli bir fonksiyonun $x = x_0$ civarındaki Taylor açılımı

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots \\ + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \end{aligned}$$

Eğer $x_0 = 0$ ise seriye Maclaurin açılımı olarak adlandırılır.

Tanım 3 (Biz, 2019) İki değişkenli bir fonksiyonun $(x, y) = (x_0, y_0)$ civarındaki Taylor açılımı

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &+ \frac{f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2}{2!} \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

şeklindedir.

Tanım 4 (Biz, 2019) Bir $f(x)$ fonksiyonunun türevi

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \infty$$

ile tanımlanır. Eğer $x - x_0 = h$ ise yukarıdaki tanım

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

şeklinde yazılır. x_0 keyfi olduğundan yukarıdaki x_0 yerine x yazalım. Bu halde,

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}. \tag{1.1}$$

Bizleri kesirli türevin tanımına veya amacımıza götüren formülü çıkarsamaya çalışalım. m reel olmak üzere $(x^n)^m$ foknsiyonunun m kez türevi için bir formül elde edelim.

$$\begin{aligned} (x^n)' &= nx^{n-1}, \\ (x^n)'' &= n(n-1)x^{n-2}, \\ (x^n)''' &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\ &\vdots \\ (x^n)^{(m)} &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} \ldots (n-m+1)x^{n-m} \\ &= \frac{n!}{(n-m)!}x^{n-m}. \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, aşağıdaki tanımı yapmak mümkündür.

Tanım 5 (Podlubny, 1998) m reel olmak üzere x^n ifadesinin m kez türevi:

$$(x^n)^{(m)} = \frac{n!}{(n-m)!}x^{n-m}.$$

Bu tanımın Gamma fonksiyonu cinsindeki ifadesi

$$\frac{d^m}{dx^m}x^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)}x^{n-m} \tag{1.2}$$

şeklindedir. n ve m nin farklı değerleri için aşağıdaki çıkarsamaları yapmak mümkündür.

Eğer $n = 1$ ve $m = \frac{1}{2}$ ise

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+1)} = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})}x^{\frac{1}{2}}.$$

Burada, klasik türevden farklı olarak x fonksiyonunun kesirli türevinin ne kadar sapma olabileceğini gördük.

Eğer $n = 0$ ve $m = \frac{1}{3}$ ise

$$\frac{d^{\frac{1}{3}}}{dx^{\frac{1}{3}}}(1) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-\frac{1}{3}+1)}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})}x^{-\frac{1}{3}}.$$

Burada, klasik türevden farklı olarak 1 fonksiyonunun kesirli türevinin sıfırdan farklı olduğunu görebiliriz. Bu açıklamalardan hareketle, farklı n ve m değerlerini kullanarak (1.2) denkleminden farklı $\frac{d^m}{dx^m}x^n$ ifadesinin farklı çıkarsamalarını yapmak mümkündür.

Şimdi de D ve D^{-1} işleçleri veya operatörleri arasındaki ilişkiyi görelim (Podlubny, 1998).

$$DD^{-1}x = D(\frac{x^2}{2}+c) = x$$

ve

$$D^{-1}Dx = D^{-1}1 = x + c$$

olur. Yani, D ve D^{-1} işleçleri değişmeli değildir. Ancak, $c = 0$ almakla değişme özelliği sağlanır. D^{-1} işleci

$$D^{-1}f(x) = \int_a^x f(t)dt$$

şeklinde tanımlanır. Dolayısıyla,

$$D^{-1}(D^{-1}f) = \int_a^x (\int_a^t f(r)dr)dt$$

ve nihayetinde

$$D^{-n}f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt$$

veya

$$D^{-n}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt$$

şeklinde tanımlanır. Buradan hareketle, bir fonksiyonunun α reel ve eğer $(n-1) < \alpha \leq n$ olmak üzere $D^{-\alpha}$ işleci aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 6 (Podlubny, 1998)

$$D^{-\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt. \tag{1.3}$$

Burada, $\Gamma()$ ifadesi sonradan tanımlayacağımız Gamma integrali ve fonksiyonudur. Şimdide farklı $f(x)$ fonksiyonlarının D^{α} kesirli türevleri nasıl alınır veya olur sorusuna yanıt vermeye çalışalım.

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}f(x),\ \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\sin(x),\ \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\cos(x),\ \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}e^x,\ \cdots .$$

Bu tip fonksiyonların kesirli türevlerini icra etmek için aşağıdaki elementer açılımları bilmek oldukça önemlidir.

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= \cos(x) + i\sin(x),\\
e^{-ix} &= \cos(x) - i\sin(x),\\
\sin(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},\\
\cos(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},\\
e^{x} &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots .
\end{aligned}
$$

Tanım 7 (Podlubny, 1998) Gamma integrali veya fonksiyonu

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 8 (Podlubny, 1998) Gamma integraline art arda kısmi integral uygulanırsa

$$\Gamma(n) \quad = (n-1)\Gamma(n-1)\cdots \quad = (n-1)!$$

olduğunu görmek kolayıdır.

Eğer $n = 0, 1, 2, 3...$ ise $\Gamma(-n)$

tanımsız olur. Diğer bir ifadeyle, $\Gamma(-n)$ düşey asimptotlara sahiptir. Buradan hareketle, şimdi de (1.3) ifadesini kullanarak D^α işlecini tanımlayalım.

Tanım 9 (Podlubny, 1998)

$$
\begin{aligned}
D^\alpha &= D^n(D^{-(n-\alpha)}),\\
&= D^n\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt\right),\\
&= \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}dt\right).
\end{aligned}
$$

Örnek 1 (Podlubny, 1998) $D^{\alpha}e^{x}$ ve $n = 1$ ise

$$\begin{aligned} D^{\alpha}e^{x} &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{a}^{x}(x-t)^{-\alpha}e^{t}dt\Big), \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\Big(\int_{a}^{x}(x-t)^{-\alpha}e^{t}dt\Big). \end{aligned}$$

1.2. Laplace Transformasyonu

Tanım 10 (Podlubny, 1998) Eksponansiyel mertebeli bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplace transformasyonu

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st}f(t)dt$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 11 (Podlubny, 1998) $F(t)$ ve $G(t)$ fonksiyonlarının konvulasyonu (convulation)

$$\begin{aligned} F * G &= \int f(x-t)g(t)dt \\ &= \int f(t)g(x-t)dt \\ &= G * F \end{aligned}$$

ile tanımlanır. Konvulasyon aynı zamanda değişmelidir.

Tanım 12 (Podlubny, 1998) Konvulasyonunun Laplace tranformasyonu

$$\mathcal{L}[F * G] = F(s)G(s).$$

Dolayısıyla,

$$F * G = \int_{a}^{x}(x-t)^{-\alpha}e^{t}dt$$

ise

$$F = t^{-\alpha},\ G = e^{t}.$$

Buradan,

$$\mathcal{L}[F] = \frac{(-\alpha)!}{s^{-\alpha+1}},\ \mathcal{L}[G] = \frac{1}{s-1} \text{ olup}$$
$$\mathcal{L}[\int_a^x (x-t)^{-\alpha} e^t dt] = \frac{(-\alpha)!1}{s^{-\alpha+1}(s-1)}.$$

Ters Laplace transformasyonu uygulanırsa

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{s^{\alpha-1}}{s-1}] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} e^t dt.$$

Tanım 13 (Podlubny, 1998) Kompleks düzlemde $\mathrm{Re}(z) > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{1.4}$$

(1.4) denkleminde $z = x + iy$ yazılırsa

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \Gamma(x+iy), \\ &= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1+iy} dt, \\ &= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} e^{iy\log t} dt, \\ &= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} [\cos(y\log(t)) + i\sin(y\log(t))] dt\end{aligned} \tag{1.5}$$

elde edilir. $t = \infty$ için

$$|\cos(y\log(t)) + i\sin(y\log(t))| = 1$$

sınırlıdır. Çünkü,

$$\frac{t^{x-1}[\cos(y\log(t)) + i\sin(y\log(t))]}{e^t}$$

ifadesi $t = \infty$ da sınırlıdır. Aynı şekilde, $t = 0$ için $\mathrm{Re}(z) > 1$ olması halinde (1.4) integrali yakınsaktır. Gamma fonksiyonunun sahip olduğu bazı özellikler

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Bu özelliğin ispatı art arda kısmi integral kullanılarak aşağıdaki gibi yapılır

(Podlubny, 1998).

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty e^{-t}t^z dt \\ &= -e^{-t}t^z|_0^\infty + z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \\ &= z\Gamma(z),\end{aligned}$$

kısmi interal uygulayarak bu muhakemeye devam edilirse $z!$ bulunur.

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= 1 \\ \Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1 = 1! \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2(1)! = 2! \\ &\vdots \\ \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!.\end{aligned}$$

Eğer $z = -n$ olursa $\Gamma(z)$ fonksiyonu $n = 0, 1, 2, ...$ için tanımsız olur. Gerçekten,

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t}t^{z-1} + \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \tag{1.6}$$

yazılabilir. Burada, (1.6) integralindeki ilk terim için e^{-t} exponansiyel fonksiyonun açılımını kullanalım. Yani,

$$e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!}$$

ifadesi kullanılır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} t^{z-1}dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{k+z-1}dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+z)}.\end{aligned}$$

Eğer $\mathrm{Re}(z) = x > 0$ ise $\mathrm{Re}(z+k) = x+n > 0$ ve $t^{z+k}(\cdots) = 0$ olur. Bu durum, bize bu son ifadenin z komplex değişkenine göre bir tam fonksiyon olduğunu söyler. Benzer olarak yukarıdaki (1.6) integralindeki ikinci terimi ele alalım. Bu ikinci terime $R(z)$

olsun. Yani,

$$\begin{aligned} R(z) &= \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \\ &= \int_1^\infty e^{(z-1)\log(t)-t}dt \end{aligned} \tag{1.7}$$

elde edilir.

$$e^{(z-1)\log(t)-t}$$

fonksiyonunda $t \geq 1$ olmak kaydıyla z ve t nin sürekli bir fonksiyonudur. Eğer $t = 1$ ise $\log 1 = 0$. Eğer $t \geq 1$ ise $\log(t) \geq 0$ olur. Dolayısıyla, (1.7) fonksiyonu veya integrali z nin bir tam fonksiyonudur. Şimdi kompleks düzlemde sınırlı kapalı bir D bölgesini ele alalım ve $x_0 = max_{z\in D} \operatorname{Re}(z)$ olsun. Bu halde,

$$\begin{aligned} |e^{-t}t^{z-1}| &= |e^{(z-1)\log(t)-t}| \\ &= |e^{(x-1)\log(t)-t}||e^{iy\log(t)}| \\ &= |e^{(x-1)\log(t)-t}| \leq e^{(x_0-1)\log(t)-t} \quad = e^{-t}t^{x_0-1} \end{aligned}$$

yazılır. Bu ise (1.7) integralinin D nin içinde düzgün yakınsak olduğunu ifade eder. $R(z)$ fonsiyonu D nin içinde analitik olduğundan integral işaretinin altındaki ifadenin türevi alınabilir. Kompleks düzlemdeki D bölgesinin keyfi seçiminden dolayı $R(z)$ fonksiyonu yukarıdaki özelliklere sahiptir. Yani, $R(z)$ tam bir fonksiyon olduğundan integral işareti altında türevlenebilir. Bu değerlendirmelerden sonra,

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{k+z} + \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{k+z} + \text{tam fonksiyon} \ldots \end{aligned} \tag{1.8}$$

Sonuç olarak, (1.8) görsel olarak incelendiğinde Gamma fonksiyonunun kutup noktaları $n = 0, 1, 2, \ldots$ olmak üzere $z = -n$ de oluşur. Yani, bu noktalar da Gamma fonksiyonu tanımsızdır.

Şimdi de, Gamma fonksiyonunun limit gösterimini verelim. Eğer $\operatorname{Re}(z) > 0$ ise

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} \tag{1.9}$$

ile gösterilir. Şimdi de (1.9) ifadesinin doğruluğunu gösterelim. Bu amaca varmak için

$$f_n(z) = \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{z-1} dt \tag{1.10}$$

fonksiyonunu ele alalım ve $\tau = \frac{t}{n}$ alınırsa

$$\begin{aligned} f_n(z) &= n^z \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1} d\tau \\ &= \frac{n^z}{z} n \int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \tau^z d\tau \\ &= \frac{n^z n!}{z(z+1)...(z+n-1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1} d\tau \\ &= \frac{n^z n!}{z(z+1)...(z+n-1)(z+n)} \end{aligned} \tag{1.11}$$

denklemi elde edilir. Çok iyi bilinen

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{t}{n})^n = e^{-t}$$

eksponansiyel fonksiyon özelliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_n(z) &= \lim_{n\to\infty} \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{z-1} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \end{aligned} \tag{1.12}$$

bulunur. (1.12) ifadesindeki integral limit değişiminin gerekçesi için (Podlubny, 1998) bakılabilir. $\mathrm{Re}(z) > 0$ olması halinde $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ifadesi yardımı ile $z \neq 0, -1, -2...$ ise aşağıdaki tanımlama yapılabilir. Yani, m pozitif bir tam sayı olmak üzere $-m < \mathrm{Re}(z) \leq -m+1$ ise

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)...(z+m-1)} \\ &= \frac{1}{z(z+1)...(z+m-1)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{z+m} n!}{(z+m)...(z+m+n)} \\ &= \frac{1}{z(z+1)...(z+m-1)} \lim_{n\to\infty} \frac{(n-m)^{z+m}(n-m)!}{(z+m)(z+m+1)...(z+n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)...(z+n)} \end{aligned} \tag{1.13}$$

yazılır.

1.3. Beta Fonksiyonu

Tanım 14 (Podlubny, 1998) Beta Fonksiyonu veya integrali $\mathrm{Re}(z) > 0$ ve $\mathrm{Re}(w) > 0$ olmak üzere

$$B(z,w) = \int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau \tag{1.14}$$

ile tanımlanır.

Şimdi Gamma Fonksiyonu ile Beta Fonksiyonu arasındaki ilişkiyi bulalım (Podlubny, 1998). Bunun için de

$$h_{z,w}(t) = \int_0^t \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau \tag{1.15}$$

integralini göz önüne alalım. Laplace transformasyonu uygulanırsa

$$H_{z,w}(s) = \frac{\Gamma(z)}{s^z}\frac{\Gamma(w)}{s^w} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}} \tag{1.16}$$

elde edilir. (1.16) denklemine ters Laplace uygulanırsa

$$h_{z,w}(t) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}t^{z+w-1} \tag{1.17}$$

bulunur. Eğer t=1 alınırsa

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \tag{1.18}$$

elde edilir. Konvolüsyon komutatif olduğundan dolayı

$$B(z,w) = B(w,z) \tag{1.19}$$

yazılır. Literatürde sık sık karşılaştığımız Gamma fonksiyonunun diğer bir özelliği ise

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \tag{1.20}$$

ile verilir.

1.4. Caputo Türev ve Laplace Transformasyonu

Tanım 15 (Podlubny, 1998) Caputo anlamında türev $\alpha > 0$ ve $t > 0$ olmak üzere

$$ {}_{a}^{C}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^n(\tau) d\tau \tag{1.21} $$

ile verilir.

(1.21) denklemine Laplace dönüşümü uygulanırsa aşağıdaki tanım elde edilir.

Tanım 16 (Podlubny, 1998) Eğer $(n-1) < \alpha \leq n$ ise

$$ \int_0^{\infty} e^{-st} \left({}_{0}^{C}D_t^{\alpha} f(t) \right) dt = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \tag{1.22} $$

ile tarif edilir.

1.5. Mittag-Leffer Fonksiyonları

Tanım 17 (Podlubny, 1998) Bir parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu

$$ E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \tag{1.23} $$

ile verilir.

Bu (1.23) formülü ilk olarak Mittag-Leffler tarafından çalışılmıştır. Kesirli analizde çok önemli bir yere sahip olan iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu (Agarwal, 1953) çalışmasında verilmiştir.

Tanım 18 (Podlubny, 1998) Eğer $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ ise iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu

$$ E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \tag{1.24} $$

ile verilir.

(1.24) denkleminde $\beta = 1$ alınırsa bir parametreli Mittag-Leffler denklemi elde edilir. Özel olarak, $\alpha = \beta = 1$ ise (1.24) denkleminden

$$\begin{aligned} E_{1,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \\ &= e^z \end{aligned} \tag{1.25}$$

elde edilir. (1.24) denkleminde $\alpha = 1$ ve $\beta = 2$ alınırsa

$$\begin{aligned} E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} \\ &= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \frac{e^z - 1}{z} \end{aligned} \tag{1.26}$$

elde edilir. Burada, (1.24) denkleminde $\alpha = 1$ ve $\beta = 3$ alınırsa

$$\begin{aligned} E_{1,3}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} \\ &= \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} \\ &= \frac{e^z - 1 - z}{z^2} \end{aligned} \tag{1.27}$$

elde edilir. Bu muhakemeye devam edilirse, genel olarak $\alpha = 1$ ve $\beta = m$ alınırsa

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left(e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right) \tag{1.28}$$

elde edilir. Benzer olarak, hiperbolik sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının Mittag-Leffler fonksiyonu

$$\begin{aligned} E_{2,1}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \\ &= \cosh(z) \end{aligned} \tag{1.29}$$

ve

$$\begin{aligned} E_{2,2}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} \\ &= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \frac{\sinh(z)}{z} \end{aligned} \tag{1.30}$$

ile verilir. Mertebesi n olan hiperbolik fonksiyonların Mittag-Leffler fonksiyonu cinsindeki ifadesi $r = 1, 2, ..., n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} h_r(z,n) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{nk+r-1}}{(nk+r-1)!} \\ &= z^{r-1} E_{n,r}(z^n) \end{aligned} \tag{1.31}$$

ile verilir. Benzer olarak, trigonometrik sinüs ve kosinüs ifadeleri için $r = 1, 2, ..., n$ alınırsa

$$\begin{aligned} k_r(z,n) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{nj+r-1}}{(nj+r-1)!} \\ &= z^{r-1} E_{n,r}(-z^n) \end{aligned} \tag{1.32}$$

ile verilir. Özel olarak, $\alpha = \frac{1}{2}$ ve $\beta = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} E_{1/2,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)} \\ &= e^{z^2} erfc(-z) \end{aligned} \tag{1.33}$$

elde edilir. Burada, $erfc(z)$

$$erfc(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt$$

integrali ile temsil edilir. İki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonunda $\beta = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} E_{\alpha,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \\ &\equiv E_{\alpha}(z) \end{aligned} \tag{1.34}$$

bir parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu elde edilir. Rasyonel mertebeli veya kesirli diferansiyel denklemleri çözerken (1.23) Mittag-Leffler fonksiyonunun özel bir hali olan

$$\begin{aligned} \epsilon_t(v, a) &= t^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(v + k + 1)} \\ &= t^v E_{1,v+1}(at) \end{aligned} \tag{1.35}$$

yazılır (Podlubny, 1998). İki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonunun özel halleri olan kesirli trigonometrik sinüs ve kosinüs fonksiyonları

$$\begin{aligned} Sc_{\alpha}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{(2-\alpha)n+1}}{\Gamma((2-\alpha)n + 2)} \\ &= zE_{2-\alpha,2}(-z^{2-\alpha}) \end{aligned} \tag{1.36}$$

ve

$$\begin{aligned} Cs_{\alpha}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{(2-\alpha)n}}{\Gamma((2-\alpha)n + 1)} \\ &= E_{2-\alpha,1}(-z^{2-\alpha}) \end{aligned} \tag{1.37}$$

ile verilir. Benzer olarak, iki parametreli (1.23) Mittag-Leffler fonksiyonunun kesirli trigonometrik sinüs ve kosinüs fonksiyonları

$$\begin{aligned} \sin_{\lambda,\eta}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{\Gamma(2\eta k + 2\eta - \lambda + 1)} \\ &= zE_{2\eta,2\eta-\lambda+1}(-z^2) \end{aligned} \tag{1.38}$$

ve

$$\cos_{\lambda,\eta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(2\eta k + \eta - \lambda + 1)} = E_{2\eta,\eta-\lambda+1}(-z^2) \tag{1.39}$$

ile verilir.

1.6. İki Parametreli Mittag-Leffler Fonksiyonunun Laplace Transformasyonu

Eğer $|z| < 1$ ise iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonunun Laplace Transformasyonu (Podlubny, 1998)

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(zt^{\alpha}) dt = \frac{1}{1-z} \tag{1.40}$$

ile verilir. Şimdi de aşağıdaki ifadenin Laplace dönüşümüne bakalım.

$$t^{\alpha k+\beta-1} E^{(k)}_{\alpha,\beta}(\pm z t^{\alpha}).$$

Burada,

$$E^{(k)}_{\alpha,\beta}(y) \equiv \frac{d^k}{dy^k} E_{\alpha,\beta}(y).$$

$\mathrm{Re}(p) > |a|^{1/\alpha}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} t^{\alpha k+\beta-1} E^{(k)}_{\alpha,\beta}(\pm a t^{\alpha}) dt = \frac{k! p^{\alpha-\beta}}{(p^{\alpha} \mp a)^{k+1}} \tag{1.41}$$

elde edilir. (1.41) denkleminde $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ ve $\mathrm{Re}(p) > a^2$ alınırsa

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} t^{\frac{k-1}{2}} E^{(k)}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\pm a\sqrt{t}) dt = \frac{k!}{(\sqrt{p} \mp a)^{k+1}} \tag{1.42}$$

elde edilir.

1.7. Mittag-Leffler Fonksiyonunun Türevleri

İki parametreli (1.23) serisinin Riemann-Lioville kesirli mertebeden türevi

$${}_0D_t^{\gamma}(t^{\alpha k+\beta-1} E^{(k)}_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha})) = t^{\alpha k+\beta-\gamma-1} E^{(k)}_{\alpha,\beta-\gamma}(\lambda t^{\alpha}) \tag{1.43}$$

ile verilir (Podlubny, 1998). Burada, γ reel sayısı keyfidir. (1.43) ifadesinde $k = 0$, $\lambda = 1$ ve γ reel sayısı tam sayı ve $m = 1, 2, 3, \ldots$ ise

$$(\frac{d}{dt})^m (t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^\alpha)) = t^{\beta-m-1} E_{\alpha,\beta-m}(t^\alpha) \tag{1.44}$$

elde edilir. Eğer m ve n doğal sayı olmak üzere $\alpha = \frac{m}{n}$ alınırsa (1.43) formülü ilginç özelliklere sahiptir. $m, n = 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere

$$(\frac{d}{dt})^m (t^{\beta-1} E_{m/n,\beta}(t^{m/n})) = t^{\beta-m-1} E_{m/n,\beta}(t^{m/n}) + t^{\beta-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{-\frac{m}{n}k}}{\Gamma(\beta - \frac{m}{n}k)} \tag{1.45}$$

elde edilir. $n = 1$ ve $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ olmak üzere $\frac{1}{\Gamma(-\nu)} = 0$ olduğu göz önüne alınırsa (1.45) denkleminden

$$(\frac{d}{dt})^m (t^{\beta-1} E_{m,\beta}(t^m)) = t^{\beta-1} E_{m,\beta}(t^m)) \tag{1.46}$$

elde edilir. Burada, $m = 1, 2, 3, \ldots$ ve $\beta = 0, 1, 2, \ldots, m$. (1.45) denkleminde $t = z^{\frac{n}{m}}$ alınır ve $m, n = 1, 2, 3, \ldots$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}(\frac{m}{n} z^{1-\frac{n}{m}} \frac{d}{dz})^m (z^{(\beta-1)n/m} E_{m/n,\beta}(z)) \\ = z^{(\beta-1)n/m} E_{m/n,\beta}(z) + t^{(\beta-1)n/m} \sum_{k=1}^{n} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \frac{m}{n}k)}\end{aligned} \tag{1.47}$$

elde edilir. (1.47) denkleminde $m = 1$ ve $n = 1, 2, 3 \ldots$ alınırsa

$$\frac{1}{n} \frac{d}{dz} (z^{(\beta-1)n} E_{1/n,\beta}(z)) = z^{\beta n-1} E_{1/n,\beta}(z) + z^{\beta n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \frac{k}{n})} \tag{1.48}$$

elde edilir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu tezde, kaotik bir davranış sergileyen Rabinovich-Fabrikant sistemi üzerine şimdiye kadar yapılan akademik çalışmalar ifade edilecektir. Fiziksel olayların geniş bir sınıfı Matematiksel modellerle tanımlanabilir. Basit lineer olmayan dinamik sistem ve parçalı lineer sistem bile kaos olarak bilinen tam olarak öngörülemeyen davranışlar sergileyebilir. Bilimsel literatürde kaos aktif bir araştırma alanı olan birleşik ve evrensel tanımları olmayan bir kavramdır. Kabaca, kaos: Fiziksel bir olayı veya durumu modelleyen bir sistemin başlangıç koşullarındaki küçük değişiklikler beklenmedik davranışları sergileyen ve öngörülemez olan karmaşık bir özellik veya evrenin oluşumundan önce var olduğu varsayılan biçimsiz bir madde olarakta izah edilebilir. Kaos, ilk olarak Lorenz tarafından çalışılmıştır (Lorenz, 1963). Kaos üzerine daha faza bilgi edinmek için (Alligood ve ark., 1997) çalışmasına bakılabilir.

Rabinovich-Fabrikant denklemleri, kaotik davranış sergileyen lineer olmayan diferansiyel denklemler sistemidir. Rabinovich-Fabrikant sistemindeki c ve d sistemin gelişimini kontrol eden parametrelerdir. c ve d belirli değerleri için sistem kaotik davranış sergiler ve parametrelerin diğer değerleri için de bir kararlı periyodik yörüngeye yakınsar (Rabinovich ve Fabrikant, 1979).

Rabinovich-Fabrikant sistemindeki kuadratik ve kübik terimlerin varlığı nedeniyle sistemin analiz edilmesinin zor olduğunu ve integral alınırken farklı adım boyutları kullanılarak aynı parametreler için farklı çekicilerin (attractors) elde edilebileceğini belirtmektedir (Danca ve Chen, 2004).

Ayrıca, yakın zamanda, Rabinovich-Fabrikant sisteminde gizli bir çekici (attractor) keşfedildi (Danca ve ark., 2017). Modülasyon kararsızlığından kaynaklanan sistemin stokastik doğası, denge dışı dağıtıcı ortamda bulunur (Samardzija ve Greller, 1998). Kesirli Routh-Hurwitz koşulları fraksiyonel Rabinovich-Fabrikant sistemindeki stabilite koşullarını ve koşulları incelemek için kullanıldı ve ayrıca, dikkate alınan Rabinovich-Fabrikant sisteminde kaosu kontrol etmek için lineer geri bildirim kontrolü elde edilmiştir (Ahmed ve ark., 2006). Adams-Boshforth–Moulton metodu kullanılarak Rabinovich-Fabrikant sistemindeki parametrelerin özel durumları için nümerik simülasyonlar yapıldı (Diethelm, 2004; Diethelm, 2004).

Kesirli mertebeden zaman türevi Rabinovich-Fabrikant (RF) kaotik sisteminin lokal kararlılığı, kesirli Routh-Hurwitz kararlılık kriteri kullanılarak analiz edildi ve geri bildirim kontrol yöntemi, dikkate alınan kesirli düzende kaosu kontrol etmek için kullanıldı. Adams – Boshforth – Moulton metodu kullanılarak gerçekleştirilen simülasyon sonuçları analiz edildi (Srivastava ve ark., 2014).

Ayrıca, farklı problemlerin değişik metotlarla çözümü için: Kompleks analizde lokal rezidü tanımını kullanarak değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin contour integralleri yardımıyla çözümü ve eigen fonksiyonların açılımları için (Tanriverdi, 2001; Tanriverdi ve Mcleod, 2007; Tanriverdi ve Mcleod, 2008; Tanriverdi, 2009; Tanriverdi, 2019), henüz tam olarak çözülemeyen Shapiro eşitsizliği ve ilk defa burada çalışılan ters Shapiro tipi eşitsizlik için (Tanriverdi, 2012), Lane-Emden denkleminin klasik bakış açısıyla çözümü için (Tanriverdi, 2017; Tanriverdi, 2019), Laplace dönüşüm metodu ile Fibonacci sayılarında Binet formunun elde edilmesi için (Tanriverdi, 2018), diferansiyel denklemlerin çözümünde ortaya çıkan özel tip integrallerin hesaplanması için (Tanriverdi, 2018), denklemlerin çözümünde trigonometrik fonksiyonlarla sıklıkla karşılaşılır ve dolayısıyla kosinüs gibi fonksiyonların asimtotik davranışı için (Merca ve Tanriverdi, 2013), diferansiyel denklemin çözüme sahip olma varlığı için atış metodu (Hastings ve McLeod, 2011; Tanrıverdi ve Mcleod, 2010), diferansiyel denklemlerin diferansiyel dönüşüm metodu ile hesaplanması için (Ağırağaç ve Tanriverdi, 2019; Biz, 2019), değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin iterasyon metodu ile çözümü için (Alıcı ve Tanriverdi, 2020), bir diferansiyel denklemin kendine benzer çözümlerin varlığının ispatı için asimtotik analiz metodu (Tanriverdi, 2021), sayılar teorisi ve diferansiyel denklemlerde uygulama alnına sahip Riemann zeta fonksiyonunun Riemann hipotezine ve Riemann zeta fonksiyonunun limiti için son derece özgün bir bakış açısıyla ele alınan ve ilk defa Tanriverdi tarafından geliştirilen metod için (Tanriverdi, 2019; Tanriverdi, 2021), bir diferansiyel denklemin Bernoulli alt-denklem metodu ile çözümü için (Başkonuş ve ark., 2021) çalışmalarına bakılabilir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu kısımda, kullanılan materyal ve yönteme değinilecektir. Ele alınan yöntem detaylarıyla izah edilmiştir.

3.1. Materyal

Rabinovic-Fabrikant modeli ile ilgili literatürde mevcut önceki çalışmalarda belirtildiği gibi daha önce yayımlanmış bilimsel makalelerden istifade edilmiştir. Bu çalışmalara arama motoru yardımıyla ulaşılmıştır.

3.2. Yöntem

Lineer olmayan diferansiyel denklemleri veya kesirli diferansiyel denklemleri çözmek için çeşitli metotlar mevcuttur. Bu metotlardan bir tanesi de otonom olmayan sistemlerin yaklaşık çözümünü Mittag-Leffler fonksiyonları türünden yazmaktır. Mittag-Leffler fonksiyonları içeren yaklaşık çözümleri elde etmek için Caputo kesirli türevlerin Laplace transformasyonu alınır. Ele alınan diferansiyel denklem sistem formatında değilse denkleme uygun dönüşümler yaparak sistemleştirilir. Yöntem özet olarak aşağıda ifade edilmiştir.

- 1. Adım: Ele alınan sistemin denge noktası(ları) bulunur.
- 2. Adım: Ele alınan sistemin sağ tarafı denge noktası(ları) civarında lineerize edilir.
- 3. Adım: Sistemin sağ tarafı denge noktası(ları) civarında lineerize edildikten sonara Caputo kesirli türevin Laplace tranformasyonu elde edilen yeni sisteme uygulanır.
- 4. Adım: Sistemde bilinmeyenler çözülür ve bilinmeyenler Mittag-Laffler formunda yazılır.
- 5. Adım: Ters Laplace transformasyonu uygulayarak ele alınan sistemin yaklaşık çözümü Mittag-Laffler fonksiyonları cinsinden yazılır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Rabinovic-Fabrikant modeli stokastik davranışı inceleleyen fiziksel bir modeldir ve bu model aşağıdaki sistem ile karekterize edilir.

$$\begin{aligned} \phi_1' &= \phi_2(\phi_3 - 1 + \phi_1^2) + a\phi_1 \\ \phi_2' &= \phi_1(3\phi_3 + 1 - \phi_1^2) + a\phi_2 \\ \phi_3' &= -2\phi_3(b + \phi_1\phi_2). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Burada, $a > 0$ ve $b > 0$ değerleri reeldir.

4.1. Rabinovich-Fabrikant Modelinin Analizi

(4.1) sistemi bazı a ve b değeleri için kaotik bir davranış sergileyebilir. Burada, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 fonksiyonları konum değişkenleridir. Eğer $a < b$ ise (4.1) sistemi dissipative bir davranış sergiler. Yani,

$$\nabla(\Phi(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \sum_{j=1}^{3} \frac{d}{d\phi_j}(\Phi_j(\phi_1, \phi_2, \phi_3)) = 2(a - b) < 0. \tag{4.2}$$

Dolayısıyla, (4.2) denkleminde Rabinovich-Fabrikant sisteminin b parametresine göre oldukça hassas olduğu görülmektedir. Yukarıdaki (4.1) modeline karşılık gelen kesirli sistemin formu aşağıdaki gibidir. Burada, $0 < \alpha < 1$ olmak üzere kesirli türev ise Caputo anlamındadır. $\phi_1(0) = -1.0$, $\phi_2(0) = 0$, $\phi_3(0) = 0.5$, $\alpha = 0.99$ kullanılması halinde kesirli sistem de kaotik bir davranış sergilemektedir.

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^\alpha \phi_1(t) &= \phi_2(\phi_3 - 1 + \phi_1^2) + a\phi_1 \\ {}_a^C D_t^\alpha \phi_2(t) &= \phi_1(3\phi_3 + 1 - \phi_1^2) + a\phi_2 \\ {}_a^C D_t^\alpha \phi_3(t) &= -2\phi_3(b + \phi_1\phi_2). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Burada, $i = 1, 2, 3$ için ϕ_i fonksiyonları yerine aynı başlangıç değer koşulları sağlamak şartıyla klasik notasyonlar olan $x(t)$, $y(t)$ ve $z(t)$ kullanılması halinde aşağıdaki kesirli sistem elde edilir.

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^\alpha x(t) &= y(z-1+x^2)+ax \\ {}_a^C D_t^\alpha y(t) &= x(3z+1-x^2)+ay \\ {}_a^C D_t^\alpha z(t) &= -2z(b+xy) \end{aligned} \tag{4.4}$$

burada, $a > 0$ ve $b > 0$. Bu sistemin denge noktaları

$$\begin{aligned} y(z-1+x^2)+ax &= 0 \\ x(3z+1-x^2)+ay &= 0 \\ -2z(b+xy) &= 0 \end{aligned}$$

sisteminin çözümüdür. Bu çözümler veya denge noktaları beş tanedir. Bu noktalar,

$$\begin{aligned} E_1 &= (0,0,0), \\ E_2 &= (-1.4797, 0.7434, 0.5422), \\ E_3 &= (1.4797, -0.7434, 0.5422), \\ E_4 &= (0.5182667, -2.12246, 0.94384), \\ E_5 &= (-0.5182667, 2.12246, 0.94384) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki (4.4) modeline karşılık gelen kesirli sistemin lineerleştirilmiş formu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} {}_a^C D_t^\alpha x(t) \\ {}_a^C D_t^\alpha y(t) \\ {}_a^C D_t^\alpha z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2x(t)y(t) & z(t)-1+x^2(t) & y(t) \\ z(t)+1-3x^2(t) & a & 3x(t) \\ -2z(t)y(t) & -2z(t)x(t) & -2(b+x(t)y(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

4.2. E_1 Noktası Civarındaki RF Modelinin Mittag-Leffler ile Çözümü

Bu (4.4) sisteminin $(0,0,0)$ denge noktasındaki lineerleştirilmiş matris formu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} {}_a^C D_t^\alpha x \\ {}_a^C D_t^\alpha y \\ {}_a^C D_t^\alpha z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

$-2b \neq 0$ veya

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^\alpha x &= ax - y \\ {}_a^C D_t^\alpha y &= x + ay \\ {}_a^C D_t^\alpha z &= -2bz. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Bu muhakemeden hareketle aşağıdaki teorem verelir.

Teorem 1 (4.4) sistemin $(0,0,0)$ denge noktası civarındaki Mittag-Leffler fonksiyonları cinsindeki çözümü (4.13), (4.15) ve (4.18) ile verilir.

İspat 1 Bu (4.7) sistemine (1.22) Caputo anlamında Laplace transformasyonu uygulanırsa

$$\begin{aligned} s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x(0) &= aX(s) - Y(s) \\ s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1}y(0) &= X(s) + aY(s) \\ s^\alpha Z(s) - s^{\alpha-1}z(0) &= -2bZ(s). \end{aligned}$$

Sistem (4.8) ifadesinden

$$\begin{aligned} (s^\alpha - a)X(s) + Y(s) &= s^{\alpha-1}x(0) \\ -X(s) + (s^\alpha - a)Y(s) &= s^{\alpha-1}y(0) \end{aligned} \tag{4.8}$$

$X(s)$ ifadesi yok edilerek $Y(s)$ aşağıdaki gibi bulunur.

$$Y(s)\left(1 + (s^\alpha - a)^2\right) = (s^\alpha - a)s^{\alpha-1}y(0) + s^{\alpha-1}x(0) \tag{4.9}$$

Bu (4.9) denkleminden

$$Y(s) = \frac{(s^\alpha - a)s^{\alpha-1}y(0) + s^{\alpha-1}x(0)}{s^{2\alpha} - 2s^\alpha a + a^2 + 1} \tag{4.10}$$

elde edilir. Burada, (4.10) denklemi (4.8) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned} X(s) = &-\frac{(s^\alpha - a)s^{\alpha-1}y(0)}{(s^\alpha - a)(1 + (s^\alpha - a)^2)} \\ &- \frac{s^{\alpha-1}x(0)}{(s^\alpha - a)(1 + (s^\alpha - a)^2)} + \frac{s^{\alpha-1}x(0)}{s^\alpha - a}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Ters Laplace dönüşümünü uygulamak için (4.11) denklemine gerekli cebirik işlemler yapılırsa

$$X(s) = -\frac{s^{\alpha-1}y(0)}{1+(s^\alpha-a)^2} - s^{\alpha-1}x(0)\left(\frac{1}{s^\alpha-a} - \frac{s^\alpha-a}{1+(s^\alpha-a)^2}\right) + \frac{s^{\alpha-1}x(0)}{s^\alpha-a},$$

$$X(s) = -\frac{s^{\alpha-1}y(0)}{1+(s^\alpha-a)^2} + s^{\alpha-1}x(0)\left(\frac{s^\alpha-a}{1+(s^\alpha-a)^2}\right),$$

$$X(s) = -y(0)\left(\frac{s^{\alpha-1}}{1+(s^\alpha-a)^2}\right) + s^{\alpha-1}x(0)\left(\frac{s^\alpha-a}{(s^\alpha-a)^2\left(1+\frac{1}{(s^\alpha-a)^2}\right)}\right),$$

$$X(s) = -y(0)\left(\frac{1}{s}\frac{s^\alpha}{1+(s^\alpha-a)^2}\right) + s^{\alpha-1}x(0)\left(\frac{1}{(s^\alpha-a)\left(1+\frac{1}{(s^\alpha-a)^2}\right)}\right),$$

$$X(s) = -y(0)\left(\frac{1}{s}\frac{s^\alpha-a+a}{1+(s^\alpha-a)^2}\right) + s^{\alpha-1}x(0)\left(\frac{1}{s^\alpha-a}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{(s^\alpha-a)^{2n}}\right)\right)$$

ve

$$X(s) = -y(0)\left(\frac{1}{s}\frac{s^\alpha-a}{1+(s^\alpha-a)^2} + \frac{a}{s}\frac{1}{1+(s^\alpha-a)^2}\right) + s^{\alpha-1}x(0)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(s^\alpha-a)^{2n+1}}\right)\right). \tag{4.12}$$

Burada, (4.12) denklemine ters Laplace dönüşümü ile birlikte (1.24) iki parametreli Mittag-Leffler formülü uygulanırsa $x(t)$ çözümü

$$x(t) = -y(0)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{(2k+1)\alpha}E^{(2k)}_{\alpha,\alpha+1}(at^\alpha)}{(2k)!} + a\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{(2k+2)\alpha}E^{(2k+1)}_{\alpha,\alpha+1}(at^\alpha)}{(2k+1)!}\Big) + x(0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{(2n)\alpha}E_{\alpha,1}(at^\alpha). \tag{4.13}$$

şeklinde bulunur. Son olarak, (4.10) denkleminden $Y(s)$ ifadesini ele alınıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{(s^{\alpha}-a)s^{\alpha-1}y(0)+s^{\alpha-1}x(0)}{1+(s^{\alpha}-a)^2} \\ &= \frac{(s^{\alpha}-a)s^{\alpha-1}y(0)}{1+(s^{\alpha}-a)^2}+\frac{s^{\alpha-1}x(0)}{1+(s^{\alpha}-a)^2} \end{aligned} \tag{4.14}$$

elde edilir. Bu (4.14) denklemi Mittag-Leffler formuna getirilirse

$$\begin{aligned} Y(s) &= s^{\alpha-1}y(0)\left(\frac{1}{(s^{\alpha}-a)\left(1+\frac{1}{(s^{\alpha}-a)^2}\right)}\right) \\ &+x(0)\left(\frac{1}{s}\frac{s^{\alpha}}{1+(s^{\alpha}-a)^2}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Ters Laplace ile birlikte (1.24) iki parametreli Mittag-Leffler formülü uygulanırsa $y(t)$ çözümü

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{(2n)\alpha}E_{\alpha,1}(at^{\alpha}) \\ &+x(0)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{(2k+1)\alpha}E^{(2k)}_{\alpha,\alpha+1}(at^{\alpha})}{(2k)!} \\ &+a\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{(2k+2)\alpha}E^{(2k+1)}_{\alpha,\alpha+1}(at^{\alpha})}{(2k+1)!}\Big) \end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir.

Üç bilinmeyenli (4.1) denkleminden $Z(s)$

$$Z(s) = \tfrac{s^{\alpha-1}z(0)}{s^{\alpha}+2b} \tag{4.16}$$

kolaylıkla elde edilir. (4.1) denklemi ters Laplace formuna getirilirse

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[Z(s)] &= \mathcal{L}^{-1}[\frac{s^{\alpha}z(0)}{s(s^{\alpha}+2b)}] \\ &= z(0)\mathcal{L}^{-1}[\frac{s^{\alpha}}{s(s^{\alpha}+2b)}] \end{aligned} \tag{4.17}$$

elde edilir. (4.17) denklemi ile birlikte (1.24) denklemindeki Mittag-Leffler formülü kullanılırsa $z(t)$ çözümü

$$z(t) = z(0)E_{\alpha,1}(-2bt^{\alpha}) \tag{4.18}$$

şeklinde bulunur.

Burada, $a = 0.87$ ve $b = 1.1$ alınırsa Rabinovich-Fabrikant sistemi kaotik bir davranış sergileyecektir. Bununla birlikte, $x(0) = -1.0$, $y(0) = 0.0$ ve $z(0) = 0.5$ olduğu göz önüne alınırsa, yeni çözüm (4.13), (4.15) ve (4.18) denklemlerinden

Sonuç 1

$$x(t) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{(2n)\alpha} E_{\alpha,1}(0.87t^{\alpha}), \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} y(t) = -\Big(& \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{(2k+1)\alpha} E^{(2k)}_{\alpha,\alpha+1}(0.87t^{\alpha})}{(2k)!} \\ & + 0.87 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{(2k+2)\alpha} E^{(2k+1)}_{\alpha,\alpha+1}(0.87t^{\alpha})}{(2k+1)!} \Big), \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$z(t) = 0.5E_{\alpha,1}(-2.2t^{\alpha})$$

olarak bulunur. Rabinovich-Fabrikant sisteminin kaotik davranışını irdelediğimizden dolayı denge noktalarındaki genel analiz yeriene spesifik analiz yapılacaktır. Bunun için de $a = 0.87$ ve $b = 1.1$ alarak işlemlere devam edilecektir.

4.3. E_2 Noktası Civarındaki RF Modelinin Mittag-Leffler ile Çözümü

Sistem (4.4), $E_2 = (-1.4797, 0.7434, 0.5422)$ denge noktasındaki Jacobian formu aşağıdaki gibidir.

$$J(E_2) = \begin{vmatrix} -1.33 & 1.7317 & 0.7434 \\ -3.9419 & 0.87 & -4.4391 \\ -0.8061 & 1.6046 & 0 \end{vmatrix}.$$

Denklem (4.5), $E_2 = (-1.4797, 0.7434, 0.5422)$ civarındaki formu

$$\begin{bmatrix} {}_a^C D^\alpha u(t) \\ {}_a^C D^\alpha v(t) \\ {}_a^C D^\alpha w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.33 & 1.7317 & 0.7434 \\ -3.9419 & 0.87 & -4.4391 \\ -0.8061 & 1.6046 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u + 1.4797 \\ v - 0.7434 \\ w - 0.5422 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan hareketle, $x(t) = u + 1.4797$, $y(t) = v - 0.7434$ ve $z(t) = w - 0.5422$ dönüşümleri yapılırsa E_2 civarındaki sistemin yeni matrissel formu

$$\begin{bmatrix} {}_a^C D^\alpha x(t) \\ {}_a^C D^\alpha y(t) \\ {}_a^C D^\alpha z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.33 & 1.7317 & 0.7434 \\ -3.9419 & 0.87 & -4.4391 \\ -0.8061 & 1.6046 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Buna denk olan sistem

$$\begin{aligned} {}_a^C D^\alpha x(t) &= (-1.33)x + (1.7317)y + (0.7434)z \\ {}_a^C D^\alpha y(t) &= (-3.9419)x + (0.87)y - (4.4391)z \\ {}_a^C D^\alpha z(t) &= (-0.8061)x + (1.6046)y. \end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 2 (4.4) sistemin $E_2 = (-1.4797, 0.7434, 0.5422)$ denge noktası civarındaki Mittag-Leffler fonksiyonları cinsindeki çözümü (4.21), (4.22) ve (4.23) ile verilir.

İspat 2 Bu sisteme, (1.22) Caputo anlamında Laplace transformasyonu uygulanırsa

$$\begin{aligned} s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x(0) &= -(1.33)X(s) + (1.7317)Y(s) + (0.7434)Z(s) \\ s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1}y(0) &= -(3.9419)X(s) + (0.87)Y(s) - (4.4391)Z(s) \\ s^\alpha Z(s) - s^{\alpha-1}z(0) &= -(0.8061)X(s) + (1.6046)Y(s). \end{aligned}$$

Burada, $x(0) = -1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0.5$ olarak seçilirse ve sistem düzenlenirse

$$\begin{aligned} X(s)(s^\alpha + 1.33) - Y(s)(1.7317) - Z(s)(0.7434) &= -s^{\alpha-1} \\ X(s)(3.9419) + Y(s)(s^\alpha - 0.87) + Z(s)(4.4391) &= 0 \\ X(s)(0.8061) - Y(s)(1.6046) + Z(s)s^\alpha &= \frac{s^{\alpha-1}}{2}. \end{aligned}$$

Cramer yöntemini kullanarak bu sistem $X(s)$, $Y(s)$ ve $Z(s)$ çözülürse

$$X(s)=\frac{\begin{vmatrix}-s^{\alpha-1} & -1.7317 & -0.7434\\ 0 & s^{\alpha}-0.87 & 4.4391\\ \frac{s^{\alpha-1}}{2} & -1.6046 & s^{\alpha}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s^{\alpha}+1.33 & -1.7317 & -0.7434\\ 3.9419 & s^{\alpha}-0.87 & 4.4391\\ 0.8061 & -1.6046 & s^{\alpha}\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{-11.29s^{\alpha-1}+1.2417s^{2\alpha-1}-s^{3\alpha-1}}{s^{3\alpha}+0.46s^{2\alpha}+13.3913s^{\alpha}+7.4577}$$

$$=\frac{-s^{\alpha-1}(s^{2\alpha}-1.2417s^{\alpha}+11.29)}{(s^{\alpha}+0.554729)(s^{2\alpha}-0.0947287s^{\alpha}+13.4439)}$$

$$=\frac{-0.890059s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729}-\frac{s^{\alpha-1}(0.109941)(s^{\alpha}-11.0821)}{s^{2\alpha}-0.0947287s^{\alpha}+13.4439}$$

$$=\frac{-0.890059s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729}-\frac{(0.109941)s^{\alpha-1}(s^{\alpha}-11.0821)}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}$$

$$=\frac{-0.890059s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729}-\frac{(0.109941)s^{\alpha-1}(s^{\alpha}-0.04736-11.03474)}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}$$

$$=\frac{-0.890059s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729}-\frac{(0.109941)s^{\alpha-1}(s^{\alpha}-0.04736)}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}+\frac{1.21317s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}$$

$$=\frac{-0.890059s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729}-\frac{(0.109941)s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}-0.04736)(1+\frac{(\sqrt{13.44166})^2}{(s^{\alpha}-0.04736)^2})}+1.21317\frac{1}{s}(\frac{s^{\alpha}-0.04736+0.04736}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}).$$

Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
X(s) = {} & \frac{-0.890059 s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729} \\
& - (0.109941)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}-0.04736)^{2k+1}}\right) \\
& + 1.21317(\frac{1}{s}\frac{s^{\alpha}-0.04736}{(s^{\alpha}-0.04736)^{2}+(\sqrt{13.44166})^{2}}) \\
& + 0.05745(\frac{1}{s}\frac{1}{(s^{\alpha}-0.04736)^{2}+(\sqrt{13.44166})^{2}}).
\end{aligned}
$$

Ters Laplace ile birlikte (1.24) iki parametreli Mittag-Leffler formülü uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
x(t) = {} & -0.890059 E_{\alpha,1}(-0.554729 t^{\alpha}) \\
& - (0.109941)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k)\alpha}E_{\alpha,1}^{(2k)}(0.04736 t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
& + 1.21317\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k+1)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k)}(0.04736 t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
& + 0.05745\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k+2)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k+1)}(0.04736 t^{\alpha})}{(2k+1)!}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
u(t) = {} & -1.4797 - 0.890059 E_{\alpha,1}(-0.554729 t^{\alpha}) \\
& - (0.109941)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k)\alpha}E_{\alpha,1}^{(2k)}(0.04736 t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
& + 1.21317\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k+1)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k)}(0.04736 t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
& + 0.05745\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k+2)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k+1)}(0.04736 t^{\alpha})}{(2k+1)!}\right)
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

$$Y(s)=\frac{\begin{vmatrix} s^{\alpha}+1.33 & -s^{\alpha-1} & -0.7434 \\ 3.9419 & 0 & 4.4391 \\ 0.8061 & \frac{s^{\alpha-1}}{2} & s^{\alpha}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^{\alpha}+1.33 & -1.7317 & -0.7434 \\ 3.9419 & s^{\alpha}-0.87 & 4.4391 \\ 0.8061 & -1.6046 & s^{\alpha}\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{1.72235s^{2\alpha-1}-7.99556s^{\alpha-1}}{s^{3\alpha}+0.46s^{2\alpha}+13.3913s^{\alpha}+7.4577}$$

$$=\frac{1.72235s^{\alpha-1}(s^{\alpha}-4.64224)}{(s^{\alpha}+0.554729)(s^{2\alpha}-0.0947287s^{\alpha}+13.4439)}$$

$$=\frac{-0.648427s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729}+\frac{s^{\alpha-1}(0.648427)(s^{\alpha}+2.00674)}{s^{2\alpha}-0.0947287s^{\alpha}+13.4439}$$

$$=\frac{-0.648427s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729}+\frac{s^{\alpha-1}(0.648427)(s^{\alpha}+2.00674)}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}$$

$$=\frac{-0.648427s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729}+\frac{s^{\alpha-1}(0.648427)(s^{\alpha}-0.04736+2.0541)}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}$$

$$=\frac{-0.648427s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729}+\frac{(0.648427)s^{\alpha-1}(s^{\alpha}-0.04736)}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}$$
$$+\frac{1.33193s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}$$

$$=\frac{-0.648427s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729}+\frac{(0.648427)s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}-0.04736)(1+\frac{(\sqrt{13.44166})^2}{(s^{\alpha}-0.04736)^2})}$$
$$+1.33193\frac{1}{s}(\frac{s^{\alpha}-0.04736+0.04736}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}).$$

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{-0.648427s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729} \\
&+ 0.648427\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}-0.04736)^{2k+1}}\right) \\
&+ 1.33193(\frac{1}{s}\frac{s^{\alpha}-0.04736}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}) \\
&+ 0.06308(\frac{1}{s}\frac{1}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}).
\end{aligned}$$

Ters Laplace ile birlikte (1.24) iki parametreli Mittag-Leffler formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
y(t) &= -0.648427E_{\alpha,1}(-0.554729t^{\alpha}) \\
&+ (0.648427)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k)\alpha}E_{\alpha,1}^{(2k)}(0.04736t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
&+ 1.33193\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k+1)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k)}(0.04736t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
&+ 0.06308\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k+2)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k+1)}(0.04736t^{\alpha})}{(2k+1)!}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
v(t) &= 0.7434 - 0.648427E_{\alpha,1}(-0.554729t^{\alpha}) \\
&+ (0.648427)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k)\alpha}E_{\alpha,1}^{(2k)}(0.04736t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
&+ 1.33193\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k+1)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k)}(0.04736t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
&+ 0.06308\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k+2)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k+1)}(0.04736t^{\alpha})}{(2k+1)!}\right).
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$Z(s) = \frac{\begin{vmatrix} s^{\alpha}+1.33 & -1.7317 & -s^{\alpha-1} \\ 3.9419 & s^{\alpha}-0.87 & 0 \\ 0.8061 & -1.6046 & \frac{s^{\alpha-1}}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^{\alpha}+1.33 & -1.7317 & -0.7434 \\ 3.9419 & s^{\alpha}-0.87 & 4.4391 \\ 0.8061 & -1.6046 & s^{\alpha} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{8.45841 s^{\alpha-1} + 1.0361 s^{2\alpha-1} + 0.5 s^{3\alpha-1}}{s^{3\alpha} + 0.46 s^{2\alpha} + 13.3913 s^{\alpha} + 7.4577}$$

$$= \frac{s^{\alpha-1}(0.5 s^{2\alpha} + 1.0361 s^{\alpha} + 8.45841)}{(s^{\alpha} + 0.554729)(s^{2\alpha} - 0.0947287 s^{\alpha} + 13.4439)}$$

$$= \frac{0.582253 s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + 0.554729} - \frac{s^{\alpha-1}(0.08225)(s^{\alpha} - 13.8218)}{s^{2\alpha} - 0.0947287 s^{\alpha} + 13.4439}$$

$$= \frac{0.582253 s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + 0.554729} - \frac{s^{\alpha-1}(0.08225)(s^{\alpha} - 13.8218)}{(s^{\alpha} - 0.04736)^2 + (\sqrt{13.44166})^2}$$

$$= \frac{0.582253 s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + 0.554729} - \frac{s^{\alpha-1}(0.08225)(s^{\alpha} - 0.04736 - 13.77444)}{(s^{\alpha} - 0.04736)^2 + (\sqrt{13.44166})^2}$$

$$= \frac{0.582253 s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + 0.554729} - \frac{(0.08225) s^{\alpha-1}(s^{\alpha} - 0.04736)}{(s^{\alpha} - 0.04736)^2 + (\sqrt{13.44166})^2}$$
$$+ \frac{1.13294 s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha} - 0.04736)^2 + (\sqrt{13.44166})^2}$$

$$= \frac{0.582253 s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + 0.554729} - \frac{(0.08225) s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha} - 0.04736)(1 + \frac{(\sqrt{13.44166})^2}{(s^{\alpha}-0.04736)^2})}$$
$$+ 1.13294 \frac{1}{s} \left(\frac{s^{\alpha} - 0.04736 + 0.04736}{(s^{\alpha} - 0.04736)^2 + (\sqrt{13.44166})^2} \right).$$

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
Z(s) &= \frac{0.582253s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729} \\
&- 0.08225\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}-0.04736)^{2k+1}}\right) \\
&+ 1.13294(\frac{1}{s}\frac{s^{\alpha}-0.04736}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}) \\
&+ 0.05365(\frac{1}{s}\frac{1}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}).
\end{aligned}$$

Ters Laplace ile birlikte (1.24) iki parametreli Mittag-Leffler formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
z(t) &= 0.582253E_{\alpha,1}(-0.554729t^{\alpha}) \\
&- (0.08225)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k)\alpha}E_{\alpha,1}^{(2k)}(0.04736t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
&+ 1.13294\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k+1)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k)}(0.04736t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
&+ 0.05365\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k+2)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k+1)}(0.04736t^{\alpha})}{(2k+1)!}\right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
w(t) &= 0.5422 + 0.582253E_{\alpha,1}(-0.554729t^{\alpha}) \\
&- (0.08225)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k)\alpha}E_{\alpha,1}^{(2k)}(0.04736t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
&+ 1.13294\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k+1)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k)}(0.04736t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
&+ 0.05365\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k+2)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k+1)}(0.04736t^{\alpha})}{(2k+1)!}\right).
\end{aligned} \tag{4.23}$$

4.4. E_3 Noktası Civarındaki RF Modelinin Mittag-Leffler ile Çözümü

Sistem (4.4), $E_3 = (1.4797, -0.7434, 0.5422)$ denge noktasındaki Jacobian formu aşağıdaki gibidir.

$$J(E_3) = \begin{vmatrix} -1.33 & 1.7317 & -0.7434 \\ -3.9419 & 0.87 & 4.4391 \\ 0.8061 & -1.6046 & 0 \end{vmatrix}$$

(4.5) denkleminin $E_3 = (1.4797, -0.7434, 0.5422)$ civarındaki formu

$$\begin{bmatrix} {}_a^C D^\alpha u(t) \\ {}_a^C D^\alpha v(t) \\ {}_a^C D^\alpha w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.33 & 1.7317 & -0.7434 \\ -3.9419 & 0.87 & 4.4391 \\ 0.8061 & -1.6046 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u - 1.4797 \\ v + 0.7434 \\ w - 0.5422 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Buradan hareketle, $x(t) = u - 1.4797$, $y(t) = v + 0.7434$ ve $z(t) = w - 0.5422$ dönüşümleri yapılırsa E_3 civarındaki sistemin yeni matrissel formu

$$\begin{bmatrix} {}_a^C D^\alpha x(t) \\ {}_a^C D^\alpha y(t) \\ {}_a^C D^\alpha z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.33 & 1.7317 & -0.7434 \\ -3.9419 & 0.87 & 4.4391 \\ 0.8061 & -1.6046 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Buna karşılık gelen sistem,

$$\begin{aligned} {}_a^C D^\alpha x(t) &= (-1.33)x + (1.7317)y - (0.7434)z \\ {}_a^C D^\alpha y(t) &= (-3.9419)x + (0.87)y + (4.4391)z \\ {}_a^C D^\alpha z(t) &= (0.8061)x - (1.6046)y \end{aligned}$$

Teorem 3 (4.4) sistemin $E_3 = (-1.4797, 0.7434, 0.5422)$ denge noktası civarındaki Mittag-Leffler fonksiyonları cinsindeki çözümü (4.24), (4.25) ve (4.26) ile verilir.

İspat 3 Bu sisteme, (1.22) Caputo anlamında Laplace transformasyonu uygulanırsa

$$\begin{aligned} s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x(0) &= -(1.33)X(s) + (1.7317)Y(s) - (0.7434)Z(s) \\ s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1}y(0) &= -(3.9419)X(s) + (0.87)Y(s) + (4.4391)Z(s) \\ s^\alpha Z(s) - s^{\alpha-1}z(0) &= (0.8061)X(s) - (1.6046)Y(s) \end{aligned}$$

Burada $x(0) = -1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0.5$ olarak seçilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$X(s)(s^{\alpha} + 1.33) - Y(s)(1.7317) + Z(s)(0.7434) = -s^{\alpha-1}$$
$$X(s)(3.9419) + Y(s)(s^{\alpha} - 0.87) - Z(s)(4.4391) = 0$$
$$-X(s)(0.8061) + Y(s)(1.6046) + Z(s)s^{\alpha} = \frac{s^{\alpha-1}}{2}$$

bulunur. Cramer yöntemi kullanılarak $X(s)$, $Y(s)$ ve $Z(s)$ çözülür.

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} -s^{\alpha-1} & -1.7317 & 0.7434 \\ 0 & s^{\alpha} - 0.87 & -4.4391 \\ \frac{s^{\alpha-1}}{2} & 1.6046 & s^{\alpha} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^{\alpha} + 1.33 & -1.7317 & 0.7434 \\ 3.9419 & s^{\alpha} - 0.87 & -4.4391 \\ -0.8061 & 1.6046 & s^{\alpha} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-2.95601s^{\alpha-1} + 0.4983s^{2\alpha-1} - s^{3\alpha-1}}{s^{3\alpha} + 0.46s^{2\alpha} + 13.3913s^{\alpha} + 7.4577}$$

$$= \frac{-s^{\alpha-1}(s^{2\alpha} - 0.4983s^{\alpha} + 2.95601)}{(s^{\alpha} + 0.554729)(s^{2\alpha} - 0.0947287s^{\alpha} + 13.4439)}$$

$$= \frac{-0.256455s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + 0.554729} - \frac{s^{\alpha-1}(0.743545)(s^{\alpha} - 1.19222)}{s^{2\alpha} - 0.0947287s^{\alpha} + 13.4439}$$

$$= \frac{-0.256455s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + 0.554729} - \frac{(0.743545)s^{\alpha-1}(s^{\alpha} - 1.19222)}{(s^{\alpha} - 0.04736)^2 + (\sqrt{13.44166})^2}$$

$$= \frac{-0.256455s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + 0.554729} - \frac{(0.743545)s^{\alpha-1}(s^{\alpha} - 0.04736 - 1.14486)}{(s^{\alpha} - 0.04736)^2 + (\sqrt{13.44166})^2}$$

$$= \frac{-0.256455s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + 0.554729} - \frac{(0.743545)s^{\alpha-1}(s^{\alpha} - 0.04736)}{(s^{\alpha} - 0.04736)^2 + (\sqrt{13.44166})^2} + \frac{0.85125s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha} - 0.04736)^2 + (\sqrt{13.44166})^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-0.256455 s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729} - \frac{(0.743545)s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}-0.04736)(1+\frac{(\sqrt{13.44166})^2}{(s^{\alpha}-0.04736)^2})} \\
&+ 0.85125\frac{1}{s}(\frac{s^{\alpha}-0.04736+0.04736}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}).
\end{aligned}
$$

Bu nedenle,

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \frac{-0.256455 s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729} \\
&- (0.743545)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}-0.04736)^{2k+1}}\right) \\
&+ 0.85125(\frac{1}{s}\frac{s^{\alpha}-0.04736}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}) \\
&+ 0.04031(\frac{1}{s}\frac{1}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}).
\end{aligned}
$$

Ters Laplace ile birlikte (1.24) iki parametreli Mittag-Leffler formülü uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
x(t) &= -0.256455 E_{\alpha,1}(-0.554729 t^{\alpha}) \\
&- (0.743545)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k)\alpha}E_{\alpha,1}^{(2k)}(0.04736t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
&+ 0.85125\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k+1)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k)}(0.04736t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
&+ 0.04031\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k+2)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k+1)}(0.04736t^{\alpha})}{(2k+1)!}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
u(t) &= 1.4797 - 0.256455 E_{\alpha,1}(-0.554729 t^{\alpha}) \\
&- (0.743545)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k)\alpha}E_{\alpha,1}^{(2k)}(0.04736t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
&+ 0.85125\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k+1)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k)}(0.04736t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
&+ 0.04031\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k+2)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k+1)}(0.04736t^{\alpha})}{(2k+1)!}\right).
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

Benzer olarak,

$$Y(s)=\frac{\begin{vmatrix} s^{\alpha}+1.33 & -s^{\alpha-1} & 0.7434 \\ 3.9419 & 0 & -4.4391 \\ -0.8061 & \frac{s^{\alpha-1}}{2} & s^{\alpha} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^{\alpha}+1.33 & -1.7317 & 0.7434 \\ 3.9419 & s^{\alpha}-0.87 & -4.4391 \\ -0.8061 & 1.6046 & s^{\alpha} \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{6.16145s^{2\alpha-1}+0.838847s^{\alpha-1}}{s^{3\alpha}+0.46s^{2\alpha}+13.3913s^{\alpha}+7.4577}$$

$$=\frac{6.16145s^{\alpha-1}(s^{\alpha}+0.136144)}{(s^{\alpha}+0.554729)(s^{2\alpha}-0.0947287s^{\alpha}+13.4439)}$$

$$=\frac{-0.186834s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729}+\frac{s^{\alpha-1}(0.186834)(s^{\alpha}+32.3288)}{s^{2\alpha}-0.0947287s^{\alpha}+13.4439}$$

$$=\frac{-0.186834s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729}+\frac{s^{\alpha-1}(0.186834)(s^{\alpha}+32.3288)}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}$$

$$=\frac{-0.186834s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729}+\frac{s^{\alpha-1}(0.186834)(s^{\alpha}-0.04736+32.37616)}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}$$

$$=\frac{-0.186834s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729}+\frac{(0.186834)s^{\alpha-1}(s^{\alpha}-0.04736)}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}$$
$$+\frac{6.04896s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}$$

$$=\frac{-0.186834s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729}+\frac{(0.186834)s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}-0.04736)(1+\frac{(\sqrt{13.44166})^2}{(s^{\alpha}-0.04736)^2})}$$
$$+6.04896\frac{1}{s}(\frac{s^{\alpha}-0.04736+0.04736}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}).$$

Bu nedenle,

$$
\begin{aligned}
Y(s) = {} & \frac{-0.186834 s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729} \\
& + 0.186834 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{13.44166})^{2k} \frac{s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}-0.04736)^{2k+1}} \right) \\
& + 6.04896 \left(\frac{1}{s} \frac{s^{\alpha}-0.04736}{(s^{\alpha}-0.04736)^2 + (\sqrt{13.44166})^2} \right) \\
& + 0.28647 \left(\frac{1}{s} \frac{1}{(s^{\alpha}-0.04736)^2 + (\sqrt{13.44166})^2} \right).
\end{aligned}
$$

Ters Laplace ile birlikte (1.24) iki parametreli Mittag-Leffler formülü uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
y(t) = {} & -0.186834 E_{\alpha,1}(-0.554729 t^{\alpha}) \\
& + (0.186834) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{13.44166})^{2k} \frac{t^{(2k)\alpha} E_{\alpha,1}^{(2k)}(0.04736 t^{\alpha})}{(2k)!} \right) \\
& + 6.04896 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{13.44166})^{2k} \frac{t^{(2k+1)\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k)}(0.04736 t^{\alpha})}{(2k)!} \right) \\
& + 0.28647 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{13.44166})^{2k} \frac{t^{(2k+2)\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k+1)}(0.04736 t^{\alpha})}{(2k+1)!} \right)
\end{aligned}
$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
v(t) = {} & -0.7434 - 0.186834 E_{\alpha,1}(-0.554729 t^{\alpha}) \\
& + (0.186834) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{13.44166})^{2k} \frac{t^{(2k)\alpha} E_{\alpha,1}^{(2k)}(0.04736 t^{\alpha})}{(2k)!} \right) \\
& + 6.04896 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{13.44166})^{2k} \frac{t^{(2k+1)\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k)}(0.04736 t^{\alpha})}{(2k)!} \right) \\
& + 0.28647 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{13.44166})^{2k} \frac{t^{(2k+2)\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k+1)}(0.04736 t^{\alpha})}{(2k+1)!} \right).
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

Benzer muhakemeyle,

$$Z(s)=\frac{\begin{vmatrix} s^{\alpha}+1.33 & -1.7317 & -s^{\alpha-1} \\ 3.9419 & s^{\alpha}-0.87 & 0 \\ -0.8061 & 1.6046 & \frac{s^{\alpha-1}}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^{\alpha}+1.33 & -1.7317 & 0.7434 \\ 3.9419 & s^{\alpha}-0.87 & -4.4391 \\ -0.8061 & 1.6046 & s^{\alpha} \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{-2.78932s^{\alpha-1}-0.5761s^{2\alpha-1}+0.5s^{3\alpha-1}}{s^{3\alpha}+0.46s^{2\alpha}+13.3913s^{\alpha}+7.4577}$$

$$=\frac{s^{\alpha-1}(0.5s^{2\alpha}-0.5761s^{\alpha}-2.78932)}{(s^{\alpha}+0.554729)(s^{2\alpha}-0.0947287s^{\alpha}+13.4439)}$$

$$=\frac{-0.167767s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729}+\frac{s^{\alpha-1}(0.667767)(s^{\alpha}-1.44125)}{s^{2\alpha}-0.0947287s^{\alpha}+13.4439}$$

$$=\frac{-0.167767s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729}+\frac{s^{\alpha-1}(0.667767)(s^{\alpha}-1.44125)}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}$$

$$=\frac{-0.167767s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729}+\frac{s^{\alpha-1}(0.667767)(s^{\alpha}-0.04736-1.39389)}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}$$

$$=\frac{-0.167767s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729}+\frac{(0.667767)s^{\alpha-1}(s^{\alpha}-0.04736)}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}$$
$$+\frac{0.93079s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}$$

$$=\frac{-0.167767s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729}+\frac{(0.667767)s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}-0.04736)(1+\frac{(\sqrt{13.44166})^2}{(s^{\alpha}-0.04736)^2})}$$
$$+0.93079\frac{1}{s}\left(\frac{s^{\alpha}-0.04736+0.04736}{(s^{\alpha}-0.04736)^2+(\sqrt{13.44166})^2}\right).$$

Bu nedenle,

$$
\begin{aligned}
Z(s) = & \frac{-0.167767 s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+0.554729} \\
& + (0.667767)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}-0.04736)^{2k+1}}\right) \\
& + 0.93079(\frac{1}{s}\frac{s^{\alpha}-0.04736}{(s^{\alpha}-0.04736)^{2}+(\sqrt{13.44166})^{2}}) \\
& + 0.04408(\frac{1}{s}\frac{1}{(s^{\alpha}-0.04736)^{2}+(\sqrt{13.44166})^{2}})
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ters Laplace ile birlikte (1.24) iki parametreli Mittag-Leffler formülü uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
z(t) = & -1.167767 E_{\alpha,1}(-0.554729 t^{\alpha}) \\
& + (0.667767)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k)\alpha}E_{\alpha,1}^{(2k)}(0.04736 t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
& + 0.93079\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k+1)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k)}(0.04736 t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
& + 0.04408\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k+2)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k+1)}(0.04736 t^{\alpha})}{(2k+1)!}\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
w(t) = & \, 0.5422 - 1.167767 E_{\alpha,1}(-0.554729 t^{\alpha}) \\
& + (0.667767)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k)\alpha}E_{\alpha,1}^{(2k)}(0.04736 t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
& + 0.93079\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k+1)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k)}(0.04736 t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
& + 0.04408\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(\sqrt{13.44166})^{2k}\frac{t^{(2k+2)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k+1)}(0.04736 t^{\alpha})}{(2k+1)!}\right)
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

elde edilir.

4.5. E_4 Noktası Civarındaki RF Modelinin Mittag-Leffler ile Çözümü

(4.4) sisteminin $E_4 = (0.5182667, -2.12246, 0.94384)$ denge noktasındaki Jacobian formu aşağıdaki gibidir.

$$J(E_4) = \begin{vmatrix} -1.33 & 0.21244 & -2.12246 \\ 3.02571 & 0.87 & 1.55480 \\ 4.00652 & -0.97832 & -3.17832 \end{vmatrix}.$$

(4.5) denkleminin $E_4 = (0.5182667, -2.12246, 0.94384)$ civarındaki formu

$$\begin{bmatrix} {}_a^C D^\alpha u(t) \\ {}_a^C D^\alpha v(t) \\ {}_a^C D^\alpha w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.33 & 0.21244 & -2.12246 \\ 3.02571 & 0.87 & 1.55480 \\ 4.00652 & -0.97832 & -3.17832 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u - 0.5182667 \\ v + 2.12246 \\ w - 0.94384 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan hareketle, $x(t) = u - 0.5182667$, $y(t) = v + 2.12246$ ve $z(t) = w - 0.94384$ dönüşümleri uygulanırsa E_4 civarındaki sistemin yeni matris formu

$$\begin{bmatrix} {}_a^C D^\alpha x(t) \\ {}_a^C D^\alpha y(t) \\ {}_a^C D^\alpha z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.33 & 0.21244 & -2.12246 \\ 3.02571 & 0.87 & 1.55480 \\ 4.00652 & -0.97832 & -3.17832 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Buna denk olan sistem

$${}_a^C D^\alpha x(t) = (-1.33)x + (0.21244)y - (2.12246)z$$
$${}_a^C D^\alpha y(t) = (3.02571)x + (0.87)y + (1.55480)z$$
$${}_a^C D^\alpha z(t) = (4.00652)x - (0.97832)y - (3.17832)z$$

Teorem 4 (4.4) sistemin $E_4 = (0.5182667, -2.12246, 0.94384)$ denge noktası civarındaki Mittag-Leffler fonksiyonları cinsindeki çözümü (4.27), (4.28) ve (4.29) ile verilir.

İspat 4 Bu sisteme, (1.22) Caputo anlamında Laplace transformasyonu uygulanırsa

$$s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x(0) = -(1.33)X(s) + (0.21244)Y(s) - (2.12246)Z(s)$$
$$s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1}y(0) = (3.02571)X(s) + (0.87)Y(s) + (1.55480)Z(s)$$
$$s^\alpha Z(s) - s^{\alpha-1}z(0) = (4.00652)X(s) - (0.97832)Y(s) - (3.17832)Z(s)$$

elde edilir. Burada, $x(0) = -1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0.5$ olarak seçilirse

$$X(s)(s^\alpha + 1.33) - Y(s)(0.21244) + Z(s)(2.12246) = -s^{\alpha-1}$$
$$-X(s)(3.02571) + Y(s)(s^\alpha - 0.87) - Z(s)(1.55480) = 0$$
$$-X(s)(4.00652) + Y(s)(0.97832) + Z(s)(s^\alpha + 3.17832) = \frac{s^{\alpha-1}}{2}$$

Cramer yöntemini kullanılarak $X(s)$, $Y(s)$ ve $Z(s)$ elde edilir.

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} -s^{\alpha-1} & -0.21244 & 2.12246 \\ 0 & s^\alpha - 0.87 & -1.55480 \\ \frac{s^{\alpha-1}}{2} & 0.97832 & s^\alpha + 3.17832 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^\alpha + 1.33 & -0.21244 & 2.12246 \\ -3.02571 & s^\alpha - 0.87 & -1.55480 \\ -4.00652 & 0.97832 & s^\alpha + 3.17832 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{2.33247s^{\alpha-1} - 3.36955s^{2\alpha-1} - s^{3\alpha-1}}{s^{3\alpha} + 3.63832s^{2\alpha} + 9.68692s^\alpha - 18.7018}$$

$$= \frac{-s^{\alpha-1}(s^{2\alpha} + 3.36955s^\alpha - 2.33247)}{(s^\alpha - 1.20485)(s^{2\alpha} + 4.84317s^\alpha + 15.5222)}$$

$$= \frac{-0.139374s^{\alpha-1}}{s^\alpha - 1.20485} - \frac{s^{\alpha-1}(0.860626)(s^\alpha + 4.33576)}{s^{2\alpha} + 4.84317s^\alpha + 15.5222}$$

$$= \frac{-0.139374s^{\alpha-1}}{s^\alpha - 1.20485} - \frac{(0.860626)s^{\alpha-1}(s^\alpha + 4.33576)}{(s^\alpha + 2.42158)^2 + (\sqrt{9.65815})^2}$$

$$= \frac{-0.139374s^{\alpha-1}}{s^\alpha - 1.20485} - \frac{(0.860626)s^{\alpha-1}(s^\alpha + 2.42158 + 1.91418)}{(s^\alpha + 2.42158)^2 + (\sqrt{9.65815})^2}$$

$$= \frac{-0.139374s^{\alpha-1}}{s^\alpha - 1.20485} - \frac{(0.860626)s^{\alpha-1}(s^\alpha + 2.42158)}{(s^\alpha + 2.42158)^2 + (\sqrt{9.65815})^2}$$
$$- \frac{1.64739s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + 2.42158)^2 + (\sqrt{9.65815})^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-0.139374 s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-1.20485} - \frac{(0.860626)s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}+2.42158)(1+\frac{(\sqrt{9.65815})^2}{(s^{\alpha}+2.42158)^2})} \\
&- 1.64739\frac{1}{s}(\frac{s^{\alpha}+2.42158-2.42158}{(s^{\alpha}+2.42158)^2+(\sqrt{9.65815})^2}).
\end{aligned}
$$

Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \frac{-0.139374 s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-1.20485} \\
&- 0.860626\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{9.65815})^{2k}\frac{s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}+2.42158)^{2k+1}}\right) \\
&- 1.64739(\frac{1}{s}\frac{s^{\alpha}+2.42158}{(s^{\alpha}+2.42158)^2+(\sqrt{9.65815})^2}) \\
&+ 3.98928(\frac{1}{s}\frac{1}{(s^{\alpha}+2.42158)^2+(\sqrt{9.65815})^2})
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ters Laplace ile birlikte iki parametreli Mittag-Leffler formülü (1.24) uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
x(t) &= -0.139374 E_{\alpha,1}(1.20485 t^{\alpha}) \\
&- 0.860626\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{9.65815})^{2k}\frac{t^{(2k)\alpha}E^{(2k)}_{\alpha,1}(-2.42158t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
&- 1.64739\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{9.65815})^{2k}\frac{t^{(2k+1)\alpha}E^{(2k)}_{\alpha,\alpha+1}(-2.42158t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
&+ 3.98928\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{9.65815})^{2k}\frac{t^{(2k+2)\alpha}E^{(2k+1)}_{\alpha,\alpha+1}(-2.42158t^{\alpha})}{(2k+1)!}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
u(t) &= 0.5182667 - 0.139374 E_{\alpha,1}(1.20485 t^{\alpha}) \\
&- 0.860626\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{9.65815})^{2k}\frac{t^{(2k)\alpha}E^{(2k)}_{\alpha,1}(-2.42158t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
&- 1.64739\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{9.65815})^{2k}\frac{t^{(2k+1)\alpha}E^{(2k)}_{\alpha,\alpha+1}(-2.42158t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
&+ 3.98928\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{9.65815})^{2k}\frac{t^{(2k+2)\alpha}E^{(2k+1)}_{\alpha,\alpha+1}(-2.42158t^{\alpha})}{(2k+1)!}\right).
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

Benzer olarak,

$$Y(s)=\frac{\begin{vmatrix} s^{\alpha}+1.33 & -s^{\alpha-1} & 2.12246 \\ -3.02571 & 0 & -1.55480 \\ -4.00652 & \frac{s^{\alpha-1}}{2} & s^{\alpha}+3.17832 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^{\alpha}+1.33 & -0.21244 & 2.12246 \\ -3.02571 & s^{\alpha}-0.87 & -1.55480 \\ -4.00652 & 0.97832 & s^{\alpha}+3.17832 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{-18.023s^{\alpha-1}-2.24831s^{2\alpha-1}}{s^{3\alpha}+3.63832s^{2\alpha}+9.68692s^{\alpha}-18.7018}$$

$$=\frac{-s^{\alpha-1}(2.24831s^{\alpha}+18.023)}{(s^{\alpha}-1.20485)(s^{2\alpha}+4.84317s^{\alpha}+15.5222)}$$

$$=\frac{-0.908928s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-1.20485}+\frac{s^{\alpha-1}(0.908928)(s^{\alpha}+3.57444)}{s^{2\alpha}+4.84317s^{\alpha}+15.5222}$$

$$=\frac{-0.908928s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-1.20485}+\frac{(0.908928)s^{\alpha-1}(s^{\alpha}+3.57444)}{(s^{\alpha}+2.42158)^2+(\sqrt{9.65815})^2}$$

$$=\frac{-0.908928s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-1.20485}+\frac{(0.908928)s^{\alpha-1}(s^{\alpha}+2.42158+1.15286)}{(s^{\alpha}+2.42158)^2+(\sqrt{9.65815})^2}$$

$$=\frac{-0.908928s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-1.20485}+\frac{(0.908928)s^{\alpha-1}(s^{\alpha}+2.42158)}{(s^{\alpha}+2.42158)^2+(\sqrt{9.65815})^2}$$
$$+\frac{1.04786s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}+2.42158)^2+(\sqrt{9.65815})^2}$$

$$=\frac{-0.908928s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-1.20485}+\frac{(0.908928)s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}+2.42158)(1+\frac{(\sqrt{9.65815})^2}{(s^{\alpha}+2.42158)^2})}$$
$$+1.04786\frac{1}{s}(\frac{s^{\alpha}+2.42158-2.42158}{(s^{\alpha}+2.42158)^2+(\sqrt{9.65815})^2}).$$

Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{-0.908928s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-1.20485} \\
&+ 0.908928\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(\sqrt{9.65815})^{2k}\frac{s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}+2.42158)^{2k+1}}\right) \\
&+ 1.04786(\frac{1}{s}\frac{s^{\alpha}+2.42158}{(s^{\alpha}+2.42158)^{2}+(\sqrt{9.65815})^{2}}) \\
&- 2.53747(\frac{1}{s}\frac{1}{(s^{\alpha}+2.42158)^{2}+(\sqrt{9.65815})^{2}})
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ters Laplace ile birlikte iki parametreli Mittag-Leffler fromülü (1.24) uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
y(t) &= -0.908928E_{\alpha,1}(1.20485t^{\alpha}) \\
&+ 0.908928\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(\sqrt{9.65815})^{2k}\frac{t^{(2k)\alpha}E_{\alpha,1}^{(2k)}(-2.42158t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
&+ 1.04786\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(\sqrt{9.65815})^{2k}\frac{t^{(2k+1)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k)}(-2.42158t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
&- 2.53747\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(\sqrt{9.65815})^{2k}\frac{t^{(2k+2)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k+1)}(-2.42158t^{\alpha})}{(2k+1)!}\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
v(t) &= -2.12246-0.908928E_{\alpha,1}(1.20485t^{\alpha}) \\
&+ 0.908928\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(\sqrt{9.65815})^{2k}\frac{t^{(2k)\alpha}E_{\alpha,1}^{(2k)}(-2.42158t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
&+ 1.04786\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(\sqrt{9.65815})^{2k}\frac{t^{(2k+1)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k)}(-2.42158t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
&- 2.53747\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(\sqrt{9.65815})^{2k}\frac{t^{(2k+2)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k+1)}(-2.42158t^{\alpha})}{(2k+1)!}\right).
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

Aynı şekilde,

$$Z(s)=\frac{\begin{vmatrix} s^{\alpha}+1.33 & -0.21244 & -s^{\alpha-1} \\ -3.02571 & s^{\alpha}-0.87 & 0 \\ -4.00652 & 0.97832 & \frac{s^{\alpha-1}}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^{\alpha}+1.33 & -0.21244 & 2.12246 \\ -3.02571 & s^{\alpha}-0.87 & -1.55480 \\ -4.00652 & 0.97832 & s^{\alpha}+3.17832 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{5.54584s^{\alpha-1}-3.77652s^{2\alpha-1}+0.5s^{3\alpha-1}}{s^{3\alpha}+3.63832s^{2\alpha}+9.68692s^{\alpha}-18.7018}$$

$$=\frac{s^{\alpha-1}(0.5s^{2\alpha}-3.77652s^{\alpha}+5.54584)}{(s^{\alpha}-1.20485)(s^{2\alpha}+4.84317s^{\alpha}+15.5222)}$$

$$=\frac{0.075475s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-1.20485}+\frac{s^{\alpha-1}(0.424525)(s^{\alpha}-8.55209)}{s^{2\alpha}+4.84317s^{\alpha}+15.5222}$$

$$=\frac{0.075475s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-1.20485}+\frac{(0.424525)s^{\alpha-1}(s^{\alpha}-8.55209)}{(s^{\alpha}+2.42158)^2+(\sqrt{9.65815})^2}$$

$$=\frac{0.075475s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-1.20485}+\frac{(0.424525)s^{\alpha-1}(s^{\alpha}+2.42158-10.97367)}{(s^{\alpha}+2.42158)^2+(\sqrt{9.65815})^2}$$

$$=\frac{0.075475s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-1.20485}+\frac{(0.424525)s^{\alpha-1}(s^{\alpha}+2.42158)}{(s^{\alpha}+2.42158)^2+(\sqrt{9.65815})^2}$$
$$-\frac{4.65859s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}+2.42158)^2+(\sqrt{9.65815})^2}$$

$$=\frac{0.075475s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-1.20485}+\frac{(0.424525)s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}+2.42158)(1+\frac{(\sqrt{9.65815})^2}{(s^{\alpha}+2.42158)^2})}$$
$$-4.65859\frac{1}{s}(\frac{s^{\alpha}+2.42158-2.42158}{(s^{\alpha}+2.42158)^2+(\sqrt{9.65815})^2}).$$

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} Z(s) &= \frac{0.075475 s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - 1.20485} \\ &+ 0.424525 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{9.65815})^{2k} \frac{s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha} + 2.42158)^{2k+1}} \right) \\ &- 4.65859 (\frac{1}{s} \frac{s^{\alpha} + 2.42158}{(s^{\alpha} + 2.42158)^2 + (\sqrt{9.65815})^2}) \\ &+ 11.28114 (\frac{1}{s} \frac{1}{(s^{\alpha} + 2.42158)^2 + (\sqrt{9.65815})^2}) \end{aligned}$$

elde edilir. Ters Laplace ile birlikte iki parametreli Mittag-Leffler fromülü (1.24) uygulanırsa

$$\begin{aligned} z(t) &= 0.075475 E_{\alpha,1}(1.20485 t^{\alpha}) \\ &+ 0.424525 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{9.65815})^{2k} \frac{t^{(2k)\alpha} E_{\alpha,1}^{(2k)}(-2.42158 t^{\alpha})}{(2k)!} \right) \\ &- 4.65859 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{9.65815})^{2k} \frac{t^{(2k+1)\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k)}(-2.42158 t^{\alpha})}{(2k)!} \right) \\ &+ 11.28114 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{9.65815})^{2k} \frac{t^{(2k+2)\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k+1)}(-2.42158 t^{\alpha})}{(2k+1)!} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} w(t) &= 0.94384 + 0.075475 E_{\alpha,1}(1.20485 t^{\alpha}) \\ &+ 0.424525 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{9.65815})^{2k} \frac{t^{(2k)\alpha} E_{\alpha,1}^{(2k)}(-2.42158 t^{\alpha})}{(2k)!} \right) \\ &- 4.65859 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{9.65815})^{2k} \frac{t^{(2k+1)\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k)}(-2.42158 t^{\alpha})}{(2k)!} \right) \\ &+ 11.28114 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{9.65815})^{2k} \frac{t^{(2k+2)\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k+1)}(-2.42158 t^{\alpha})}{(2k+1)!} \right). \end{aligned} \tag{4.29}$$

4.6. E_5 Noktası Civarındaki RF Modelinin Mittag-Leffler ile Çözümü

Sistem (4.4) nin $E_5 = (-0.5182667, 2.12246, 0.94384)$ denge noktasındaki Jacobian formu aşağıdaki gibidir.

$$J(E_5) = \begin{vmatrix} -1.33 & 0.21244 & 2.12246 \\ 3.02571 & 0.87 & -1.55480 \\ -4.00652 & 0.97832 & -1.22167 \end{vmatrix}$$

(4.5) denkleminin $E_5 = (-0.5182667, 2.12246, 0.94384)$ denge noktası civarındaki formu

$$\begin{bmatrix} {}_a^C D^\alpha u(t) \\ {}_a^C D^\alpha v(t) \\ {}_a^C D^\alpha w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.33 & 0.21244 & 2.12246 \\ 3.02571 & 0.87 & -1.55480 \\ -4.00652 & 0.97832 & -1.22167 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u + 0.5182667 \\ v - 2.12246 \\ w - 0.94384 \end{bmatrix}.$$

biçimindedir. Buradan hareketle, $x(t) = u + 0.5182667$, $y(t) = v - 2.12246$ ve $z(t) = w - 0.94384$ dönüşümleri yapılırsa E_5 civarındaki sistemin yeni matrissel formu

$$\begin{bmatrix} {}_a^C D^\alpha x(t) \\ {}_a^C D^\alpha y(t) \\ {}_a^C D^\alpha z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.33 & 0.21244 & 2.12246 \\ 3.02571 & 0.87 & -1.55480 \\ -4.00652 & 0.97832 & -1.22167 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buna denk olan sistem

$$\begin{aligned} {}_a^C D^\alpha x(t) &= -(1.33)x + (0.21244)y + (2.12246)z \\ {}_a^C D^\alpha y(t) &= (3.02571)x + (0.87)y - (1.55480)z \\ {}_a^C D^\alpha z(t) &= -(4.00652)x + (0.97832)y - (1.22167)z. \end{aligned}$$

Teorem 5 (4.4) sistemin $E_5 = (-0.5182667, 2.12246, 0.94384)$ denge noktası civarındaki Mittag-Leffler fonksiyonları cinsindeki çözümü (4.30), (4.31) ve (4.32) ile verilir.

İspat 5 Bu sisteme, (1.22) Caputo anlamında Laplace transformasyonu uygulanırsa

$$s^{\alpha}X(s) - s^{\alpha-1}x(0) = -(1.33)X(s) + (0.21244)Y(s) + (2.12246)Z(s)$$
$$s^{\alpha}Y(s) - s^{\alpha-1}y(0) = (3.02571)X(s) + (0.87)Y(s) - (1.55480)Z(s)$$
$$s^{\alpha}Z(s) - s^{\alpha-1}z(0) = -(4.00652)X(s) + (0.97832)Y(s) - (1.22167)Z(s)$$

Burada, $x(0) = -1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0.5$ olarak seçilir ve sistem düzenlenirse

$$X(s)(s^{\alpha} + 1.33) - Y(s)(0.21244) - Z(s)(2.12246) = -s^{\alpha-1}$$
$$-X(s)(3.02571) + Y(s)(s^{\alpha} - 0.87) + Z(s)(1.55480) = 0$$
$$X(s)(4.00652) - Y(s)(0.97832) + Z(s)(s^{\alpha} + 1.22167) = \frac{s^{\alpha-1}}{2}$$

elde edilir. Cramer yöntemi kullanılarak $X(s)$, $Y(s)$ ve $Z(s)$ bulunur.

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} -s^{\alpha-1} & -0.21244 & -2.12246 \\ 0 & s^{\alpha} - 0.87 & 1.55480 \\ \frac{s^{\alpha-1}}{2} & -0.97832 & s^{\alpha} + 1.22167 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^{\alpha} + 1.33 & -0.21244 & -2.12246 \\ -3.02571 & s^{\alpha} - 0.87 & 1.55480 \\ 4.00652 & -0.97832 & s^{\alpha} + 1.22167 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-1.54666s^{\alpha-1} + 0.70956s^{2\alpha-1} - s^{3\alpha-1}}{s^{3\alpha} + 1.68167s^{2\alpha} + 8.78686s^{\alpha} - 15.1801}$$

$$= \frac{-s^{\alpha-1}(s^{2\alpha} - 0.70956s^{\alpha} + 1.54666)}{(s^{\alpha} - 1.22812)(s^{2\alpha} + 2.90979s^{\alpha} + 12.3604)}$$

$$= \frac{-0.125185s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - 1.22812} - \frac{s^{\alpha-1}(0.874815)(s^{\alpha} + 0.00063)}{s^{2\alpha} + 2.90979s^{\alpha} + 12.3604}$$

$$= \frac{-0.125185s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - 1.22812} - \frac{(0.874815)s^{\alpha-1}(s^{\alpha} + 0.00063)}{(s^{\alpha} + 1.45489)^2 + (\sqrt{10.24369})^2}$$

$$= \frac{-0.125185s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - 1.22812} - \frac{(0.874815)s^{\alpha-1}(s^{\alpha} + 1.45489 - 1.45426)}{(s^{\alpha} + 1.45489)^2 + (\sqrt{10.24369})^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-0.125185s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-1.22812} - \frac{(0.874815)s^{\alpha-1}(s^{\alpha}+1.45489)}{(s^{\alpha}+1.45489)^2+(\sqrt{10.24369})^2} \\
&+ \frac{1.27276s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}+1.45489)^2+(\sqrt{10.24369})^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-0.125185s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-1.22812} - \frac{(0.874815)s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}+1.45489)(1+\frac{(\sqrt{10.24369})^2}{(s^{\alpha}+1.45489)^2})} \\
&+ 1.27276\frac{1}{s}(\frac{s^{\alpha}+1.45489-1.45489}{(s^{\alpha}+1.45489)^2+(\sqrt{10.24369})^2}).
\end{aligned}
$$

Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \frac{-0.125185s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-1.22812} \\
&- 0.874815\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{10.24369})^{2k}\frac{s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}+1.45489)^{2k+1}}\right) \\
&+ 1.27276(\frac{1}{s}\frac{s^{\alpha}+1.45489}{(s^{\alpha}+1.45489)^2+(\sqrt{10.24369})^2}) \\
&- 1.85172(\frac{1}{s}\frac{1}{(s^{\alpha}+1.45489)^2+(\sqrt{10.24369})^2})
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ters Laplace ile birlikte iki parametreli Mittag-Leffler fromülü (1.24) uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
x(t) &= -0.125185E_{\alpha,1}(1.22812t^{\alpha}) \\
&- 0.874815\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{10.24369})^{2k}\frac{t^{(2k)\alpha}E_{\alpha,1}^{(2k)}(-1.45489t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
&+ 1.27276\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{10.24369})^{2k}\frac{t^{(2k+1)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k)}(-1.45489t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
&- 1.85172\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{10.24369})^{2k}\frac{t^{(2k+2)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k+1)}(-1.45489t^{\alpha})}{(2k+1)!}\right).
\end{aligned}
$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
u(t) &= -0.5182667 - 0.125185E_{\alpha,1}(1.22812t^{\alpha}) \\
&- 0.874815\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(\sqrt{10.24369})^{2k}\frac{t^{(2k)\alpha}E_{\alpha,1}^{(2k)}(-1.45489t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
&+ 1.27276\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(\sqrt{10.24369})^{2k}\frac{t^{(2k+1)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k)}(-1.45489t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\
&- 1.85172\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}(\sqrt{10.24369})^{2k}\frac{t^{(2k+2)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k+1)}(-1.45489t^{\alpha})}{(2k+1)!}\right).
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

Benzer olarak,

$$
Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s^{\alpha}+1.33 & -s^{\alpha-1} & -2.12246 \\ -3.02571 & 0 & 1.55480 \\ 4.00652 & \frac{s^{\alpha-1}}{2} & s^{\alpha}+1.22167 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^{\alpha}+1.33 & -0.21244 & -2.12246 \\ -3.02571 & s^{\alpha}-0.87 & 1.55480 \\ 4.00652 & -0.97832 & s^{\alpha}+1.22167 \end{vmatrix}}
$$

$$
= \frac{-7.74872s^{\alpha-1} - 3.80311s^{2\alpha-1}}{s^{3\alpha} + 1.68167s^{2\alpha} + 8.78686s^{\alpha} - 15.1801}
$$

$$
= \frac{-s^{\alpha-1}(3.80311s^{\alpha} + 7.74872)}{(s^{\alpha} - 1.22812)(s^{2\alpha} + 2.90979s^{\alpha} + 12.3604)}
$$

$$
= \frac{-0.712029s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - 1.22812} + \frac{s^{\alpha-1}(0.712029)(s^{\alpha} - 1.20332)}{s^{2\alpha} + 2.90979s^{\alpha} + 12.3604}
$$

$$
= \frac{-0.712029s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - 1.22812} + \frac{(0.712029)s^{\alpha-1}(s^{\alpha} - 1.20332)}{(s^{\alpha} + 1.45489)^{2} + (\sqrt{10.24369})^{2}}
$$

$$
= \frac{-0.712029s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - 1.22812} + \frac{(0.712029)s^{\alpha-1}(s^{\alpha} + 1.45489 - 2.65821)}{(s^{\alpha} + 1.45489)^{2} + (\sqrt{10.24369})^{2}}
$$

$$= \frac{-0.712029 s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-1.22812} + \frac{(0.712029) s^{\alpha-1}(s^{\alpha}+1.45489)}{(s^{\alpha}+1.45489)^2+(\sqrt{10.24369})^2}$$
$$- \frac{1.89272 s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}+1.45489)^2+(\sqrt{10.24369})^2}$$

$$= \frac{-0.712029 s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-1.22812} + \frac{(0.712029) s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}+1.45489)(1+\frac{(\sqrt{10.24369})^2}{(s^{\alpha}+1.45489)^2})}$$
$$- 1.89272\frac{1}{s}(\frac{s^{\alpha}+1.45489-1.45489}{(s^{\alpha}+1.45489)^2+(\sqrt{10.24369})^2})$$

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{-0.712029 s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-1.22812} \\ &+ 0.712029\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{10.24369})^{2k}\frac{s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha}+1.45489)^{2k+1}}\right) \\ &- 1.89272(\frac{1}{s}\frac{s^{\alpha}+1.45489}{(s^{\alpha}+1.45489)^2+(\sqrt{10.24369})^2}) \\ &+ 2.75369(\frac{1}{s}\frac{1}{(s^{\alpha}+1.45489)^2+(\sqrt{10.24369})^2}) \end{aligned}$$

elde edilir. Ters Laplace ile birlikte iki parametreli Mittag-Leffler formülü (1.24) uygulanırsa

$$\begin{aligned} y(t) &= -0.712029 E_{\alpha,1}(1.22812 t^{\alpha}) \\ &+ 0.712029\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{10.24369})^{2k}\frac{t^{(2k)\alpha}E_{\alpha,1}^{(2k)}(-1.45489t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\ &- 1.89272\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{10.24369})^{2k}\frac{t^{(2k+1)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k)}(-1.45489t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\ &+ 2.75369\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{10.24369})^{2k}\frac{t^{(2k+2)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k+1)}(-1.45489t^{\alpha})}{(2k+1)!}\right). \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} v(t) &= 2.12246 - 0.712029E_{\alpha,1}(1.22812t^{\alpha}) \\ &+ 0.712029\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{10.24369})^{2k}\frac{t^{(2k)\alpha}E_{\alpha,1}^{(2k)}(-1.45489t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\ &- 1.89272\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{10.24369})^{2k}\frac{t^{(2k+1)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k)}(-1.45489t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\ &+ 2.75369\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{10.24369})^{2k}\frac{t^{(2k+2)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k+1)}(-1.45489t^{\alpha})}{(2k+1)!}\right) \end{aligned} \tag{4.31}$$

bulunur. Benzer muhakeme ile,

$$Z(s) = \frac{\begin{vmatrix} s^{\alpha}+1.33 & -0.21244 & -s^{\alpha-1} \\ -3.02571 & s^{\alpha}-0.87 & 0 \\ 4.00652 & -0.97832 & \frac{s^{\alpha-1}}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^{\alpha}+1.33 & -0.21244 & -2.12246 \\ -3.02571 & s^{\alpha}-0.87 & 1.55480 \\ 4.00652 & -0.97832 & s^{\alpha}+1.22167 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-7.34573s^{\alpha-1} + 4.23652s^{2\alpha-1} + 0.5s^{3\alpha-1}}{s^{3\alpha} + 1.68167s^{2\alpha} + 8.78686s^{\alpha} - 15.1801}$$

$$= \frac{s^{\alpha-1}(0.5s^{2\alpha} + 4.23652s^{\alpha} - 7.34573)}{(s^{\alpha} - 1.22812)(s^{2\alpha} + 2.90979s^{\alpha} + 12.3604)}$$

$$= \frac{-0.079613s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - 1.22812} + \frac{s^{\alpha-1}(0.579613)(s^{\alpha} + 8.93701)}{s^{2\alpha} + 2.90979s^{\alpha} + 12.3604}$$

$$= \frac{-0.079613s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - 1.22812} + \frac{(0.579613)s^{\alpha-1}(s^{\alpha} + 8.93701)}{(s^{\alpha} + 1.45489)^2 + (\sqrt{10.24369})^2}$$

$$= \frac{-0.079613s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - 1.22812} + \frac{(0.579613)s^{\alpha-1}(s^{\alpha} + 1.45489 + 7.48212)}{(s^{\alpha} + 1.45489)^2 + (\sqrt{10.24369})^2}$$

$$= \frac{-0.079613 s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - 1.22812} + \frac{(0.579613)s^{\alpha-1}(s^{\alpha} + 1.45489)}{(s^{\alpha} + 1.45489)^2 + (\sqrt{10.24369})^2}$$
$$+ \frac{4.33673 s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha} + 1.45489)^2 + (\sqrt{10.24369})^2}$$

$$= \frac{-0.079613 s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - 1.22812} + \frac{(0.579613)s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha} + 1.45489)(1 + \frac{(\sqrt{10.24369})^2}{(s^{\alpha}+1.45489)^2})}$$
$$+ 4.33673 \frac{1}{s}\left(\frac{s^{\alpha} + 1.45489 - 1.45489}{(s^{\alpha} + 1.45489)^2 + (\sqrt{10.24369})^2}\right).$$

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} Z(s) = {} & \frac{-0.079613 s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - 1.22812} \\ & + 0.579613 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{10.24369})^{2k} \frac{s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha} + 1.45489)^{2k+1}} \right) \\ & + 4.33673 \left(\frac{1}{s} \frac{s^{\alpha} + 1.45489}{(s^{\alpha} + 1.45489)^2 + (\sqrt{10.24369})^2}\right) \\ & - 6.30946 \left(\frac{1}{s} \frac{1}{(s^{\alpha} + 1.45489)^2 + (\sqrt{10.24369})^2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Ters Laplace ile birlikte (1.24) iki parametreli Mittag-Leffler formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned} z(t) = {} & -0.079613 E_{\alpha,1}(1.22812 t^{\alpha}) \\ & + 0.579613 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{10.24369})^{2k} \frac{t^{(2k)\alpha} E_{\alpha,1}^{(2k)}(-1.45489 t^{\alpha})}{(2k)!} \right) \\ & + 4.33673 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{10.24369})^{2k} \frac{t^{(2k+1)\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k)}(-1.45489 t^{\alpha})}{(2k)!} \right) \\ & - 6.30946 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{10.24369})^{2k} \frac{t^{(2k+2)\alpha} E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k+1)}(-1.45489 t^{\alpha})}{(2k+1)!} \right). \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} w(t) &= 0.94384 - 0.079613E_{\alpha,1}(1.22812t^{\alpha}) \\ &+ 0.579613\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{10.24369})^{2k}\frac{t^{(2k)\alpha}E_{\alpha,1}^{(2k)}(-1.45489t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\ &+ 4.33673\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{10.24369})^{2k}\frac{t^{(2k+1)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k)}(-1.45489t^{\alpha})}{(2k)!}\right) \\ &- 6.30946\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\sqrt{10.24369})^{2k}\frac{t^{(2k+2)\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}^{(2k+1)}(-1.45489t^{\alpha})}{(2k+1)!}\right). \end{aligned} \tag{4.32}$$

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Burada, Caputo anlamında Laplace transformasyon metodu ile Rabinovich-Fabrikant sistemini sağlayan Mittag-Leffler fonksiyonları cinsinde elde edilen yeni yaklaşık çözümler teoremler olarak ifade edilicektir. Burada çalıştığımız metodun diğer metodlara oranla artı ve eksileri kısaca karşılaştırılacaktır.

5.1. Sonuçlar

Bu kısımda ifade edilen teoremler Caputo anlamında Laplace transformasyon metodu uygulanarak Rabinovich-Fabrikant sistemini sağlayan denge noktaları civarındaki çözümler Mittag-Leffler fonksiyonları cinsinden formüle edilmiştir.

Teorem 6 (4.4) sistemin $E_1 = (0, 0, 0)$ denge noktası civarındaki Mittag-Leffler fonksiyonları cinsindeki çözümü (4.13), (4.15) ve (4.18) ile verilir.

Teorem 7 (4.4) sistemin $E_2 = (-1.4797, 0.7434, 0.5422)$ denge noktası civarındaki Mittag-Leffler fonksiyonları cinsindeki çözümü (4.21), (4.22) ve (4.23) ile verilir.

Teorem 8 (4.4) sistemin $E_3 = (-1.4797, 0.7434, 0.5422)$ denge noktası civarındaki Mittag-Leffler fonksiyonları cinsindeki çözümü (4.24), (4.25) ve (4.26) ile verilir.

Teorem 9 (4.4) sistemin $E_4 = (0.5182667, -2.12246, 0.94384)$ denge noktası civarındaki Mittag-Leffler fonksiyonları cinsindeki çözümü (4.27), (4.28) ve (4.29) ile verilir.

Teorem 10 (4.4) sistemin $E_5 = (-0.5182667, 2.12246, 0.94384)$ denge noktası civarındaki Mittag-Leffler fonksiyonları cinsindeki çözümü (4.30), (4.31) ve (4.32) ile verilir.

5.2. Öneriler

Caputo anlamında Laplace transformasyon metodu lineer olmayan kesirli Rabinovich-Fabrikant sistemine başarılı bir şekilde uygulandı. Bu metot klasik yarı analitik metotlara oranla uygulanışı bakımından entellektüel bilgi gerektirir. Bu metodun doğru uygulanması halinde güvenilir ve etkili sonuçlar bakımından oldukça yararlıdır. Yani, bu metod oldukça etkili ve güvenilirdir. Rabinovich-Fabrikant sistemi için Mittag-Leffler fonksiyonlarıyla elde edilen sonuçlar ilk defa bu tezde verilmiştir.

Ayrıca, Caputo anlamında Laplace transformasyon metodu, yarı analitik metotlara oranla lineer olmayan problemlere uygulanırken lineerleştirme, ayrıklaştırma ve perturbasyona gerek duymaz. Nonlineerliğin çok güçlü (strong) olması durumlarda lineerleştirme, ayrıklaştırma ve perturbasyona yöntemler yetersiz kalmaktadır. Bu durumda, Caputo anlamında Laplace transformasyon metodu oldukça önemlidir.

Bu metot, nümerik analizde çok sık kullanılan Euler ve Runge-Kutta metodu ile mukayese edildiğinde daha pratiktir. Çünkü, Euler ve Runge-Kutta metodları ayrıklaştırma ve hata analizi gerektirir ve daha fazla zaman alır.

Netice itibariyle, bu tezde ele alınan Caputo anlamında Laplace transformasyon metodu yaklaşık veya tam çözüm veren yarı analitik metodlar olarak bilinen Adomian ayrışım metodu, homotopi analiz metodu, homotopi perturbasyon metodu ve varyasyonel iterasyon metodu gibi bir çok metotla karşılaştırılabilir.

Bu metod yardımıyla elde edilen çözüm veya çözümlere karşılık gelen Mittag-Leffler fonksiyonlarını bulmak bazen oldukça zor olabilir.

KAYNAKLAR

AGARWAL, R. P., 1953. A Propos d'une note de M. Pierre Humbert. C.R. Acad. Sci. 236(21): 2031-2032.

AHMED, E., EL-SAYED, A. M. A., and EL-SAKA, H. A. A., 2006. On some Routh–Hurwitz conditions for fractional order differential equations and their applications in Lorenz, Rössler, Chua and Chen systems. Phys. Lett. A, 358:1–4.

ALICI, H., and TANRIVERDİ, T., 2020. General solution of the Schrödinger equation for some trigonometric potentials. Journal of Mathematical Chemistry, 58 (5):1041–1057.

ALICI, H., and TANRIVERDİ, T., 2020. General Solution of the Schrödinger Equation for Some Hyperbolic Potentials. Few-Body Systems, 61 (4): 1-11.

ALLIGOOD, K. T., SAUER, T. D. and YORKE J. A., 1997. Chaos: An Introduction to Dynamical Systems. Springer-Verlag, Berlin, 400p.

BAŞKONUŞ, H. M., MAHMUD, A. A., MUHAMAD, K. A., and TANRIVERDİ, T., 2021. Studying on Kudryashov-Sinelshchikov dynamical equation arising in mixtures liquid and gas bubbles. https://doi.org/10.2298/TSCI200331247B

BİZ, A., 2019. Kısmi diferansiyel denklemlerde diferansiyel dönüşüm metodu. Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Şanlıurfa, 62s.

DANCA, M. F., and CHEN, G., 2004. Birfurcation and Chaos in a Complex Model of Dissipative Medium. International Journal of Bifurcation and Chaos, 14 (10): 3409–3447.

DANCA, M. F., KUZNETSOV, N., and CHEN, G., 2017. Unusual dynamics and hidden attractors of the Rabinovich-Fabrikant system. Nonlinear Dynamics, 88 (1): 791–805.

DAVIS, H. T., 1962. Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations. Dover, New York, USA, 566p.

DEBNATH, L., 2005. Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. Birkhauser, Boston, MA, USA, 737p.

DIETHELM, K., and FORD, N. J., 2004. Multi-order fractional differential equations and their numerical solution. Appl. Math. Comput., 154: 621–640.

DIETHELM, K., FORD, N. J., and FREED, A.D., 2004. Detailed error analysis for a fractional Adams method. Numer. Algorithms 36:31–52.

HASTINGS, S. P., and MCLEOD, J. B., 2011. Classical Methods in Ordinary Differential Equations: With Applications to Boundary Value Problems (Vol. 129). American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA, 373p.

LOGAN, J. D., 1994. An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations. Wiley-Interscience, New York, USA, 397p.

LORENZ, E. N., 1963. Deterministic non-periodic flows. J. Atmos. Sci., 20 :130–141.

MERCA, M., and TANRIVERDİ, T., 2013. An asymptotic formula of cosine power sums. Le Matematiche, 68 (1): 131-136.

PODLUBNY, I., 1998. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Academic Press, New York, USA, 341p.

SAMARDZIJA, N., and GRELLER, L. D., 1998. Explosive route to chaos through a fractal torus in a generalized Lotka–Volterra model. Bull. Math. Biol., 50 : 465–491.

SRIVASTAVA, M., AGRAWAL, S. K., VISHAL, K., and DAS, S., 2014. Chaos control of fractional order Rabinovich–Fabrikant system and synchronization between chaotic and chaos controlled fractional order Rabinovich–Fabrikant system. Applied Mathematical Modelling, 38:3361–3372.

RABINOVICH, M. I., and FABRIKANT, A. L., 1979. Stochastic Self-Modulation of Waves in Nonequilibrium Media. Sov. Phys., JETP 50: 311

TANRIVERDİ, T., 2009. Differential equations with contour integrals. Integral Transforms and Special Functions, 20 (2): 119-125.

TANRIVERDİ, T., 2009. Contour integrals associated differential equations, Mathematical and Computer Modelling, 49 (3-4): 453-462.

TANRIVERDİ, T., 2012. Reformulation of Shapiro's inequality. International Mathematical Forum, 7 (43): 2125-2130.

TANRIVERDİ, T., 2012. Reverse Shapiro Type Inequality. Int. Journal of Math. Analysis, 6(38): 1871-1875.

TANRIVERDİ, T., 2017. Oscillating Solutions of the Lane-Emden Equation for Polytropic Indices m= 0 and 1. British J. Math. & Compute. Sci., 20(3): 1-5.

TANRIVERDİ, T., 2018. Evaluating Sine and Cosine Type Integrals. IJASM, 5(2): 11-13.

TANRIVERDİ, T., 2021. Existence of self-similar solutions to Smoluchowski's coagulation equation with product kernel. Turkish Journal of Mathematics, 44 (5): 1660-1672.

TANRIVERDİ, T., 2001. Boundary-value problems in ODE. University of Pittsburgh, Ph.D. Thesis, Pittsburgh, 100p.

TANRIVERDİ, T., 2018. An unnoticed way of obtaining the Binet form for Fibonacci numbers. New Trends in Mathematical Sciences, 6 (2): 97-101.

TANRIVERDİ, T., 2019. Notes on the Riemann zeta function. arXiv preprint arXiv:1902.06695 [math.GM].

TANRIVERDİ, T., 2021. The limit of the Riemann zeta function and its nontrivial zeros arXiv preprint arXiv:1902.06695 [math.GM].

TANRIVERDİ, T., 2019. Classical way of looking at the Lane-Emden equation. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat., 68 (1): 271-276.

TANRIVERDİ, T., 2019. A specific Sturm-Liouville differential equation. Thermal Science, 23(1): S47-S56.

TANRIVERDİ, T., 2019. Schrödinger equation with potential function vanishing exponentially fast. Journal of Taibah University for Science, 13 (1): 639–643.

TANRIVERDİ, T., and AĞIRAĞAÇ, N., 2018. Differential transform applied to certain ODE. Advances in Differential Equations and Control Processes, 19 (3): 213-235.

TANRIVERDİ, T., and MCLEOD, J. B., 2007. Generalization of the eigenvalues by contour integrals. Appl. Math. Comput., 189(2) : 1765-1773.

TANRIVERDİ, T., and MCLEOD, J. B., 2008. The analysis of contour integrals. Abstr. Appl. Anal., Article ID 765920, 12 pages.

TANRIVERDİ, T., and MCLEOD, J. B., 2010. The Fanno model for turbulent compressible flow. Journal of Differential Equations, 249(12): 2955-2963.

WHITHAM, G. B., 1974. Linear and Nonlinear Waves. Wiley, New York, USA, 636p.