T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU

Ayşe BİZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2019

T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU

Ayşe BİZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2019

Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ danışmanlığında, Ayşe BİZ'in hazırladığı **"Kısmi Diferansiyel Denklemlerde Diferansiyel Dönüşüm Metodu"** konulu bu çalışma 08/08/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

			İmza
Danışman	:	Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ	....
Üye	:	Doç. Dr. Ali AKGÜL	....
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MODANLI	....

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Doç. Dr. İsmail HİLALİ
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Ayşe BİZ

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ
Yıl: 2019, Sayfa: 62

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde temel kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde önceki çalışmalar ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde, diferansiyel dönüşüm metodu ve ilgili parametreler tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde,

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y)u + d(x,y)$$
$$uu_x + b(x,y)u_y = d(x,y)$$
$$a(x,y)u_x + uu_y = d(x,y)$$
$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = f(u)$$
$$u_{xx} + b(x,y)u_{yy} + c(x,y)u_x + d(x,y)u_y = h(x,y)$$

yapısına sahip lineer ve lineer olmayan birinci ve ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin klasik çözümleri veren formüllerin analoğu olan yeni formüller diferansiyel dönüşüm metodu ile verilmiştir. Son olarak, elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Diferansiyel denklemler, diferansiyel transform metodu, Taylor seri metodu

ABSTRACT

MSc Thesis

DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Ayşe BİZ

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Tanfer TANRIVERDİ
Year: 2019, Page: 62

This thesis contains five chapters. In the first chapter, basic concepts are given. In the second and third chapter, differential transform method related theory and previous works are introduced. In the fourth chapter,

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y)u + d(x,y)$$
$$uu_x + b(x,y)u_y = d(x,y)$$
$$a(x,y)u_x + uu_y = d(x,y)$$
$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = f(u)$$
$$u_{xx} + b(x,y)u_{yy} + c(x,y)u_x + d(x,y)u_y = h(x,y)$$

these specific first and second order linear and non linear partial differential equations are formulated by differential transform method. These specific formulas analogous to classical ones are tested by examples. Finally, results are evaluated.

KEY WORDS: Differential equations, differential transform method, Taylor series method

TEŞEKKÜR

Tez konusunun seçimi ve yürütülmesi konusundaki yardımları ve yakın ilgisinden dolayı tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ'ye, tez jürimde görev alan hocalarıma ve bana her zaman desteklerini esirgemeyen ailemdeki herkese ayrı ayrı teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Bu kısımda bilinen temel kavramlar ifade edilecektir.

Tanım 1 Bir bağımlı değişkenin bir veya birden fazla bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denklemlere diferansiyel denklem denir. Eğer bağımsız değişken bir tane ise denkleme bayağı diferansiyel denklem aksi halde denkleme kısmi diferansiyel denklem denir. Daha teknik bir ifade ile, $i = 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere x_i verilsin ve $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ise

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}) = 0$$

ifadesine n. meretebeden kısmi diferansiyel denklem denir.

$u = u(x.t)$ ise $\frac{\partial u}{\partial x} = f(x)$, $u_{tt} = cu_x$ veya $xu_t + t^2 = \sin(x)$ ifadeleri kısmi diferansiyel denklemlerdir.

İkinci mertebeden iki değişkenli kısmi diferansiyel denklemler sınıflandırmak mümkündür.

İkinci mertebeden

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

kısmi diferansiyel denkleminde

$B^2 - 4AC < 0$ ise eliptik,

$B^2 - 4AC = 0$ ise parabolik,

$B^2 - 4AC > 0$ ise hiperboliktir.

Tanım 2 Tek değişkenli bir fonksiyonun $x = x_0$ civarındaki Taylor açılımı

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

Eğer $x_0 = 0$ ise seriye Maclaurin açılımı olarak adlandirılır.

Tanım 3 İki değişkenli bir fonksiyonun $(x, y) = (x_0, y_0)$ civarındaki Taylor açılımı

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &+ \frac{f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2}{2!} \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

şeklindedir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölünde temel kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde önceki çalışmalar ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde, diferansiyel dönüşüm metodu ve ilgili parametreler tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde,

$$\begin{aligned} &a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y)u + d(x,y) \\ &uu_x + b(x,y)u_y = d(x,y) \\ &a(x,y)u_x + uu_y = d(x,y) \\ &a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = f(u) \\ &u_{xx} + b(x,y)u_{yy} + c(x,y)u_x + d(x,y)u_y = h(x,y) \end{aligned}$$

yapısına sahip lineer ve lineer olmayan birinci ve ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin klasik çözümleri veren formüllerin analoğu olan yeni formüller diferansiyel dönüşüm metodu ile verildi. Son olarak, elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Diferansiyel dönüşüm metodu lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlere kolaylıkla uygulanabilir. Bu metotla, gereksiz hesaplamalara girmeden tam çözümler kolaylıkla elde edilebilir. Matematik ve matematiksel fizik ve daha bir çok alanda problemlerin çoğu diferansiyel denklemler olarak formüle edilir. Birinci ve ikinci mertebeden veya daha yüksek mertebeden matematiksel fizikte birçok uygulama alanına sahip denklemler vardır. Bu denklemlerin değişik varyasyonu olan ve pratikte uygulamalara sahip olan ve şimdiye kadar Diferansiyel Dönüşüm Metodunun uygulanmadığı problemler ele alınarak irdelenecektir.

Diferansiyel denklemler teorisi doğada gerçek hayat problemlerini formüle eden en temel enstrümanlardan biridir. Ayrıca, matematik, mühendislik, mekanik, fizik ve diğer sosyal bilimlerde de yaygın bir kullanıma sahiptir. Sistem konumun değişim oranı ve konumu içeren bir denklem tarafından idare ediliyorsa sistemin modellemesi genellikle ya bayağı diferansiyel denklemler (BDD) ya da kısmi diferansiyel denklemler (KDD) ile ifade edilir. Bu diferansiyel denklemlerin uygulama alanları için kaynaklar oldukça zengindir. Bunlardan bir kaçı (Debnath, 1997; Logan, 1994; Whitham, 1974) olarak sıralanabilir.

Yarı analitik metot olan diferansiyel dönüşüm metodu ilk olarak (Zhou, 1986) tarafından elektrik devre analizindeki lineer ve lineer olmayan problemlere uygulanarak geliştirilmiştir. Literatürde "Differential Transform Method" olarak bilinmektedir. Bu metot kısmi diferansiyel denklemlerde ve bayağı diferansiyel denklemlerde sıklıkla kullanılmaktadır (Ayaz, 2004; Davis, 1962; Wazwaz,2006).

Ayrıca, bu tezde ifade edilen benzer problemlerin değişik metotlarla çözümü için (Tanriverdi, 2019; Tanriverdi ve Ağırağaç 2018; Tanriverdi, 2018; Tanriverdi, 2017; Tanriverdi ve Mcleod 2010; Tanriverdi, 2009; Tanriverdi ve Mcleod 2008; Tanriverdi ve Mcleod 2007) çalışmalarına bakılabilir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu kısımda, bayağı ve kısmi diferansiyel denklemlerin arzu edilen çözümlerini elde etmek için diferansiyel dönüşüm metodu ile ilgili bilinen teori kayıt altına alınacaktır. Literatürde bu konuda yazılmış kitap ve yayımlanmış makalelerden istifade yoluna gidilecektir.

3.1. Bir boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu

İlk olarak bir boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu tanımlanacaktır. Uygulamalar hariç aşağıdaki temel tanımlar ve teoremler (Zhou,1986; Chen ve Ho, 1996) kaynaklarından derlenmiştir.

Tanım 4 (Zhou, 1986)
$f(x)$ analitik ve tek degişkenli fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $F(k)$ olmak üzere;

$$F(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}f(x)\right]|_{x=x_0} \tag{3.1}$$

şeklindedir. $F(k)$'nın ters diferansiyel fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(x-x_0)^k F(k) \tag{3.2}$$

(2) eşitliginde (1) eşitligi yerine yazılarak

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^k}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}f(x)\right]|_{x=x_0} \tag{3.3}$$

(3) eşitligi elde edilir. $x_0 = 0$ için

$$F(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}f(x)\right]|_{x_0=0} \tag{3.4}$$

$$f(x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}f(x)\right]|_{x_0=0} \tag{3.5}$$

olur. $f(x)$ fonksiyonu ,

$$f(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k F(k)$$

ifadesi kalan terim olduğundan

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k F(k) \tag{3.6}$$

sonlu seri şeklinde de yazılabilir.

3.2. Bir boyutlu için temel teoremler

Diferansiyel dönüşüm metodunun uygulamaları için kullanılabilecek teoremler verilmiştir.

Teorem 1 (Zhou, 1986; Chen ve Ho, 1996)
λ sabit $y(x)$ analitik foksiyon ise $f(x) = \lambda y(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \lambda Y(k)$$

şeklindedır.

İspat 1 λ sabit ve $y(x)$ analitik fonksiyon $f(x) = \lambda y(x)$

$$F(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\lambda y(x)\right]|_{x=0} = \frac{1}{k!}\lambda\left[\frac{d^k}{dx^k}y(x)\right]|_{x=0}$$

$$F(k) = \lambda Y(k)$$

şeklinde bulunur.

Teorem 2 (Zhou, 1986; Chen ve Ho, 1996)
$y(x)$ ve $z(x)$ analitik fonksiyon ise $f(x) = y(x) \pm z(x)$ fonksiyonunu diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = Y(k) \pm Z(k)$$

şeklindedır.

İspat 2 $y(x)$ ve $z(x)$ analitik fonksiyon

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}(y(x) \pm z(x))\right]|_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}y(x)\right]|_{x=0} \pm \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}z(x)\right]|_{x=0} \\ F(k) &= Y(k) \pm Z(k) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3 (Zhou, 1986; Chen ve Ho, 1996)
$y(x)$ analitik fonksiyon ise $f(x) = \frac{dy(x)}{dx}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = (k+1)Y(k+1)$$

şeklindedır.

İspat 3 $y(x)$ analitik fonksiyon

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\frac{dy(x)}{dx}\right]|_{x=0} = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}y(x)\right]|_{x=0} \\ &= \frac{1(k+1)}{k!(k+1)}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}y(x)\right]|_{x=0} = (k+1)\frac{1}{(k+1)!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}y(x)\right]|_{x=0} \\ F(k) &= (k+1)Y(k+1) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4 (Zhou, 1986; Chen ve Ho, 1996)
$y(x)$ analitik foksiyon ise $f(x) = \frac{d^2y(x)}{dx^2}$ foksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = (k+1)(k+2)Y(k+2)$$

şeklindedır.

İspat 4 $y(x)$ analitik fonksiyon

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\frac{d^2y(x)}{dx^2}\right]|_{x=0} = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}}y(x)\right]|_{x=0} \\ F(k) &= \frac{1(k+1)(k+2)}{k!(k+1)(k+2)}\left[\frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}}y(x)\right]|_{x=0} \\ &= (k+1)(k+2)\frac{1}{(k+2)!}\left[\frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}}y(x)\right]|_{x=0} \end{aligned}$$

$$F(k) = (k+1)(k+2)Y(k+2)$$

şeklinde bulunur.

Teorem 5 (Zhou, 1986; Chen ve Ho, 1996)
$y(x)$ analitik fonksiyon ise $f(x) = \frac{d^n y(x)}{dx^n}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \frac{(k+n)!}{k!} Y(k+n)$$

şekindedir.

İspat 5 $y(x)$ analitik fonksiyon

$$\begin{aligned}
F(k) &= \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k d^n y(x)}{dx^k dx^n}\right]|_{x=0} = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k+n}}{dx^{k+n}} y(x)\right]|_{x=0} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k+n)}{k!(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k+n)}\left[\frac{d^{k+n}}{dx^{k+n}} y(x)\right]|_{x=0} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k+n)}{(k+n)!}\left[\frac{d^{k+n}}{dx^{k+n}} y(x)\right]|_{x=0} \\
F(k) &= (k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k+n)Y(k+n) \\
F(k) &= \frac{(k+n)!}{k!} Y(k+n)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 6 (Zhou, 1986; Chen ve Ho, 1996)
$y(x)$ ve $z(x)$ analitik fonksiyon ise $f(x) = y(x)z(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \sum_{r=0}^{k} Y(r)Z(k-r)$$

şeklindedir.

İspat 6 $y(x)$ ve $z(x)$ analitik fonksiyon
k=0 için

$$F(0) = \frac{1}{0!}\left[y(x)z(x)\right]|_{x=0} = Y(0)Z(0)$$

k=1 için

$$\begin{aligned} F(1) &= \frac{1}{1!}\frac{d}{dx}\left[y(x)z(x)\right]|_{x=0} = \left[y'(x)z(x)\right]|_{x=0} + \left[y(x)z'(x)\right]|_{x=0} \\ &= Y(1)Z(0) + Y(0)Z(1) \end{aligned}$$

$$F(k) = \sum_{r=0}^{k} Y(r)Z(k-r)$$

şeklinde bulunur.

Teorem 7 (Zhou, 1986; Chen ve Ho, 1996)

$y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ analitik fonksiyonlar ise $f(x) = y_1(x)y_2(x)y_3(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \sum_{k_2=0}^{k_3}\sum_{k_1=0}^{k_2} Y_1(k_1)Y_2(k_2-k_1)Y_3(k-k_2)$$

şeklindedır.

İspat 7 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ analitik fonksiyonlar

k=0 için

$$F(0) = \frac{1}{0!}\left[y_1(x)y_2(x)y_3(x)\right]|_{x=0} = Y_1(0)Y_2(0)Y_3(0)$$

k=1 için

$$\begin{aligned} F(1) &= \frac{1}{1!}\frac{d}{dx}\left[y_1(x)y_2(x)y_3(x)\right]|_{x=0} = \left[y_1'(x)y_2(x)y_3(x)\right]|_{x=0} \\ &\quad + \left[y_1(x)y_2'(x)y_3(x)\right]|_{x=0} + \left[y_1(x)y_2(x)y_3'(x)\right]|_{x=0} \\ &= Y_1(1)Y_2(0)Y_3(0) + Y_1(0)Y_2(1)Y_3(0) + Y_1(0)Y_2(0)Y_3(1) \end{aligned}$$

$$F(k) = \sum_{k_2=0}^{k_3}\sum_{k_1=0}^{k_2} Y_1(k_1)Y_2(k_2-k_1)Y_3(k-k_2)$$

şeklinde bulunur.

Teorem 8 (Zhou, 1986; Chen ve Ho, 1996)

$y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, . . . ,$y_n(x)$ analitik fonksiyonlar ise

$f(x) = y_1(x)y_2(x)y_3(x)\dots y_n(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$\begin{aligned} F(k) &= \sum_{k_{n-1}=0}^{k} \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \cdots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} Y_1(k_1)Y_2(k_2-k_1) \\ &\quad \dots Y_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2})Y_n(k-k_{n-1}) \end{aligned}$$

şeklindedır.

İspat 8 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)\dots y_n(x)$ analitik fonksiyonlar
k=0 için

$$F(0) = \frac{1}{0!}\left[y_1(x)y_2(x)\dots y_{(n-1)}(x)y_n(x)\right]|_{x=0} = Y_1(0)Y_2(0)\dots Y_{n-1}(0)Y_n(0)$$

k=1 için

$$\begin{aligned} F(1) &= \frac{1}{1!}\frac{d}{dx}\left[y_1(x)y_2(x)\dots y_{n-1}(x)y_n(x)\right] \\ &= \left[y_1'(x)y_2(x)\dots y_{n-1}(x)y_n(x)\right]|_{x=0} + \left[y_1(x)y_2'(x)\dots y_{n-1}(x)y_n(x)\right]|_{x=0} + \dots \\ &\quad + \left[y_1(x)y_2(x)...y_{n-1}'(x)y_n(x)\right]|_{x=0} + \left[y_1(x)y_2(x)\dots y_{n-1}(x)y_n'(x)\right]|_{x=0} \\ &= Y_1(1)Y_2(0)\dots Y_{n-1}(0)Y_n(0) + Y_1(0)Y_2(1) + \cdots + Y_{n-1}(0)Y_n(0) + Y_1(0) \\ &\quad Y_2(0)\dots Y_{n-1}(1)Y_n(0) + Y_1(0)Y_2(0)\dots Y_{n-1}(0)Y_n(1) \end{aligned}$$

k=2 için

$$\begin{aligned} F(2) &= Y_1(1)Y_2(1)Y_3(0)\dots Y_n(0) + Y_1(1)Y_2(0)Y_3(1) + \cdots + Y_n(0) + \\ &\quad \cdots + Y_1(1)Y_2(0)Y_3(0)\dots Y_n(0) + Y_1(0)Y_2(0)Y_3(0)\dots Y_n(1) + \\ &\quad Y_1(0)Y_2(1)Y_3(1)\dots Y_n(0) + Y_1(0)Y_2(1)Y_3(0)Y_4(1)\dots Y_n(0) + \\ &\quad \cdots + Y_1(0)Y_2(1)Y_3(0)\dots Y_n(1) + \cdots + Y_1(0)Y_2(0)Y_3(0)\dots Y_n(2) \end{aligned}$$

bu şekilde devam edilerek

$$\begin{aligned} F(k) &= \sum_{k_{n-1}=0}^{k} \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \cdots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} Y_1(k_1)Y_2(k_2-k_1)\dots \\ &\quad Y_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2})Y_n(k-k_{n-1}) \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 9 (Zhou, 1986; Chen ve Ho, 1996)

λ sabit ise $f(x) = e^{\lambda x}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$$

şeklindedır.

İspat 9 λ sabit

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}e^{\lambda x}\right]|_{x=0} = \frac{1}{k!}\lambda^k(\ln e)^k e^{(\lambda x)^k} \\ F(k) &= \frac{\lambda^k}{k!} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 10 (Zhou, 1986; Chen ve Ho, 1996)
$f(x)$ analitik fonksiyon λ sabit ise $f(x) = a^{\lambda x}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \frac{\lambda^k}{k!}(\ln a)^k$$

şeklindedir.

İspat 10 λ sabit $f(x)$ analitik fonksiyon

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}a^{\lambda x}\right]|_{x=0} = \frac{1}{k!}\lambda^k(\ln a)^k a^{(\lambda x)^k} = \frac{1}{k!}\lambda^k \\ F(k) &= \frac{\lambda^k}{k!}(\ln a)^k \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 11 (Zhou, 1986; Chen ve Ho, 1996)
$f(x)$ analitik fonksiyon λ sabit ise $f(x) = e^{\lambda x+b}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^b$$

şeklindedir.

İspat 11

$$F(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}e^{\lambda x+b}\right]|_{x=0} = \frac{1}{k!}\lambda^k(\ln e)^k e^b e^{(\lambda x)^k}$$

$$F(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^b$$

şeklinde bulunur.

Teorem 12 (Zhou, 1986; Chen ve Ho, 1996)
$f(x) = x^m$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat 12 $k < m$ için

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}x^m\right]|_{x=0} = \left[m(m-1)\dots(m-(k-1))x^{m-k}\right]|_{x=0} \\ &= \frac{0}{k!} = 0 \end{aligned}$$

$k > m$ için

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}x^m\right]|_{x=0} = [m(m-1)\dots(m-(m-1)0)]|_{x=0} \\ &= \frac{0}{k!} = 0 \end{aligned}$$

k=m için

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}x^m\right]|_{x=0} = [m(m-1)\dots(m-(m-1)x^{m-m})]|_{x=0} \\ &= \frac{m!}{k!} = \frac{m!}{m!} = 1 \end{aligned}$$

buradan

$$F(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 13 $f(x) = \sin(\omega x + \alpha)$ fonksiyonunun diferansiyel döönüşümü

$$F(k) = \frac{\omega^k}{k!}\sin\left(\frac{\pi k}{2} + \alpha\right)$$

şeklindedir.

İspat 13

$$F(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\sin(\omega x+\alpha)\right]|_{x=0}$$

k=0 için

$$F(0) = \frac{1}{0!}\left[\sin(\omega x+\alpha)\right]|_{x=0} = \frac{1}{0!}\sin\alpha = \sin\alpha$$

k=1 için

$$\begin{aligned} F(1) &= \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{dx}\sin(\omega x+\alpha)\right]|_{x=0} = \frac{1}{1!}\left[\omega\cos(\omega x+\alpha)\right]|_{x=0} = \omega\cos\alpha \\ &= \omega\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) \end{aligned}$$

k=2 için

$$\begin{aligned} F(2) &= \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{dx^2}\sin(\omega x+\alpha)\right]|_{x=0} = \frac{-1}{2!}\omega^2\sin(\alpha) \\ &= \frac{\omega^2}{2!}\sin\left(\frac{2\pi}{2}+\alpha\right) \end{aligned}$$

k=3 için

$$\begin{aligned} F(3) &= \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{dx^3}\sin(\omega x+\alpha)\right]|_{x=0} = \frac{-1}{3!}\omega^3\cos(\alpha) \\ &= \frac{\omega^3}{3!}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) \end{aligned}$$

bu şekilde devam edilerek ,

$$F(k) = \frac{\omega^k}{k!}\sin\left(\frac{\pi k}{2}+\alpha\right)$$

şeklinde bulunur.

Teorem 14 $f(x) = \cos(\omega x+\alpha)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \frac{\omega^k}{k!}\cos\left(\frac{\pi k}{2}+\alpha\right)$$

şeklindedir.

İspat 14 k=0 için

$$F(0) = \frac{1}{0!}\left[\cos(\omega x + \alpha)\right]|_{x=0} = \frac{1}{0!}\cos\alpha = \cos\alpha$$

$$F(1) = \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{dx}\cos(\omega x + \alpha)\right]|_{x=0} = \frac{-\omega}{1!}sin(\alpha) = \omega\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

k=2 için

$$F(2) = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{dx^2}\cos(\omega x + \alpha)\right]|_{x=0} = \frac{-\omega^2}{2!}\cos(\alpha) = \frac{\omega^2}{2!}\cos\left(\frac{2\pi}{2} + \alpha\right)$$

bu şekilde devam edilerek,

$$F(k) = \frac{\omega^k}{k!}\cos\left(\frac{\pi k}{2} + \alpha\right)$$

şeklinde bulunur.

Teorem 15 (Chen ve Ho, 1996)
$f(x) = \sinh(\lambda x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \begin{cases} 0, & k \text{ çift ise} \\ \frac{\lambda^k}{k!}, & k \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat 15

$$f(x) = \sinh(\lambda x) = \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2}$$

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\sinh(\lambda x)\right]|_{x=0} = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2}\right)\right]|_{x=0} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda^k}{k!} - \frac{(-\lambda)^k}{k!}\right] \end{aligned}$$

k tek ise

$$F(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$$

k çift ise

$$F(k) = 0$$

buradan

$$F(k) = \begin{cases} 0, & k \text{ çift ise} \\ \frac{\lambda^k}{k!}, & k \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 16 (Chen ve Ho, 1996)
$f(x) = \cosh(\lambda x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \begin{cases} 0, & k \text{ tek ise} \\ \frac{\lambda^k}{k!}, & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat 16

$$f(x) = \cosh(\lambda x) = \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2}$$

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\cosh(\lambda x)\right]|_{x=0} = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2}\right)\right]|_{x=0} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda^k}{k!} + \frac{(-\lambda)^k}{k!}\right] \end{aligned}$$

k çift ise

$$F(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$$

k tek ise

$$F(k) = 0$$

$$F(k) = \begin{cases} 0, & k \text{ tek ise} \\ \frac{\lambda^k}{k!}, & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

şeklinde bulunur.

3.3. İki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu

İki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu tanımlanacaktır. Uygulamalar hariç aşağıdaki temel tanımlar ve teoremler (Zhou, 1986; Chen ve Ho, 1996) kaynaklarından derlenmiştir.

Tanım 5 $f(x, y)$ analitik iki degişkenli fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $F(k, h)$ olmak üzere;

$$F(k,h) = \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h} f(x,y)}{\partial x^k \partial y^h}\right]|_{(}x = 0, y = 0) \tag{3.7}$$

seklindedir. $F(k, h)$'nin ters diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} F(k,h)x^k y^h \tag{3.8}$$

şeklindedir. (7) eşitligi (8) eşitliginde yerine yazılarak

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h} f(x,y)}{\partial x^k \partial y^h}\right] x^k y^h \tag{3.9}$$

(9) eşitligi elde edilir. $f(x, y)$ foksiyonu ,

$$f(x,y) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{h=n+1}^{\infty} F(k,h)x^k y^h$$

ifadesi kalan terim olduğundan

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{n} F(k,h)x^k y^h \tag{3.10}$$

sonlu seri şeklinde yazılabilir.

3.4. İki boyutlu için dönüşüm teoremleri

İki boyutlu diferansiyel dönüşüm için kullanılabilecek teoremler verilmiştir.

Teorem 17 (Zhou, 1986; Chen ve Ho, 1999)
$u(x, y), v(x, y)$ analitik fonksiyon ise $f(x, y) = u(x, y) \pm v(x, y)$ fonksiyonunu diferansiyel

dönüşümü

$$F(k,h) = U(k,h) \pm V(k,h)$$

şeklindedir.

İspat 17

$$\begin{aligned}
F(k,h) &= \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h} f(x,y)}{\partial x^k \partial y^h}\right]|_{(0,0)} \\
&= \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h} (u(x,y) \pm v(x,y))}{\partial x^k \partial y^h}\right]|_{(0,0)} \\
&= \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h} u(x,y)}{\partial x^k \partial y^h} \pm \frac{\partial^{k+h} v(x,y)}{\partial x^k \partial y^h}\right]|_{(0,0)} \\
&= \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h} u(x,y)}{\partial x^k \partial y^h}\right]|_{(0,0)} \pm \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h} v(x,y)}{\partial x^k \partial y^h}\right]|_{(0,0)} \\
F(k,h) &= U(k,h) \pm V(k,h)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 18 (Zhou, 1986; Chen ve Ho, 1999)
$u(x,y)$ analitik fonksiyon ve λ sabit ise $f(x,y) = \lambda u(x,y)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k,h) = \lambda U(k,h)$$

şeklindedir.

İspat 18

$$\begin{aligned}
F(k,h) &= \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h} f(x,y)}{\partial x^k \partial y^h}\right]|_{(0,0)} \\
&= \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h} \lambda u(x,y)}{\partial x^k \partial y^h}\right]|_{(0,0)} \\
&= \frac{\lambda}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h} u(x,y)}{\partial x^k \partial y^h}\right]|_{(0,0)} \\
F(k,h) &= \lambda U(k,h)
\end{aligned}$$

Teorem 19 (Zhou, 1986; Chen ve Ho, 1999)

$u(x,y)$ analitik fonksiyon ise $f(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k,h) = (k+1)U(k+1,h)$$

şeklindedir.

İspat 19

$$\begin{aligned} F(k,h) &= \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}}{\partial x^k \partial y^h}\right]|_{(0,0)} \\ &= \frac{(k+1)}{(k+1)!h!}\left[\frac{\partial^{k+h+1}u(x,y)}{\partial x^{k+1}\partial y^h}\right]|_{(0,0)} \\ F(k,h) &= (k+1)U(k+1,h)dir. \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 20 (Zhou, 1986; Chen ve Ho, 1999)
$v(x,y)$ analitik fonksiyon ise $f(x,y) = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k,h) = (h+1)V(k,h+1)$$

şeklindedir.

İspat 20

$$\begin{aligned} F(k,h) &= \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}}{\partial x^k \partial y^h}\right]|_{(0,0)} \\ &= \frac{(h+1)}{(h+1)!k!}\left[\frac{\partial^{k+h+1}u(x,y)}{\partial x^{k}\partial y^{h+1}}\right]|_{(0,0)} \\ F(k,h) &= (h+1)V(k,h+1)dir. \end{aligned}$$

Teorem 21 (Zhou, 1986; Chen ve Ho, 1999)
$u(x,y)$ analitik foksiyon ise $f(x,y) = \frac{\partial^{r+s}u(x,y)}{\partial x^r \partial y^s}$ fonksiyonunundiferansiyel dönüşümü

$$F(k,h) = (k+1)(k+2)\ldots(k+r)(h+1)(h+2)\ldots(h+s)U(k+r,h+s)$$

şeklindedir.

İspat 21

$$
\begin{aligned}
F(k,h) &= \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}\partial^{r+s}w(x,y)}{\partial x^k \partial y^h \partial x^r \partial y^s}\right]|_{(0,0)} \\
&= \Big[\frac{(k+1)(k+2)\dots(k+r)(h+1)(h+2)\dots(h+s)U(k+r,h+s)}{(k+r)!(h+s)!} \\
&\times \frac{\partial^{k+h+r+s}}{\partial x^{k+r}\partial y^{h+s}}\Big]|_{(0,0)} \\
&= (k+1)(k+2)\dots(k+r)(h+1)(h+2)\dots(h+s)U(k+r,h+s)
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur.

Teorem 22 (Zhou, 1986; Chen ve Ho, 1999)
$u(x,y), v(x,y)$ analitik fonksiyon ise $f(x,y) = u(x,y)v(x,y)$
fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$
F(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U(r,h-s)V(k-r,s)
$$

şeklindedir.

İspat 22

$$
\begin{aligned}
F(0,0) &= [u(x,y)v(x,y)]\,|_{(0,0)} = U(0,0)V(0,0) \\
F(1,0) &= \frac{1}{1!0!}\frac{\partial}{\partial x}[u(x,y)v(x,y)]\,|_{(0,0)} = \frac{1}{1!0!}[u_x v + v_x u]\,|_{(0,0)} \\
&= U(1,0)V(0,0) + V(1,0)U(0,0) \\
F(1,1) &= \frac{1}{1!1!}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}[u(x,y)v(x,y)]\,|_{(0,0)} \\
&= \frac{1}{1!1!}\left[u_{xy}v + u_x v_y + v_{xy}u + v_x u_y\right]|_{(0,0)} \\
&= U(1,0)V(0,0) + U(1,0)V(0,1) + V(1,1)U(0,0) + V(1,0)U(0,1) \\
F(2,0) &= \frac{1}{2!0!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[u(x,y)v(x,y)]\,|_{(0,0)} = [u_{xx}v + u_x v_x + v_{xx}u + v_x u_x]\,|_{(0,0)} \\
&= U(2,0)V(0,0) + U(1,0)V(1,0) + V(2,0)U(0,0) \\
F(2,1) &= \frac{1}{2!1!}\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}[u(x,y)v(x,y)]\,|_{(0,0)} \\
&= \left[u_{xxy}v + u_{xx}v_y + u_x v_{xy} + u_{xy}v_x + v_{xxy}u + v_{xx}u_y\right]|_{(0,0)} \\
&= U(2,1)V(0,0) + U(2,0)V(0,1) + U(1,1)V(1,0) \\
&\quad +V(2,1)U(0,0) + V(2,0)U(0,1) + U(1,0)V(1,1)
\end{aligned}
$$

$\vdots$

bu şekilde devam edilerek

$$F(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U(r,h-s)V(k-r,s)$$

şeklinde bulunur.

Teorem 23 (Ayaz, 2003)
$u(x,y), v(x,y), \omega(x,y)$ analitik fonksiyonlar ise
$f(x,y) = u(x,y)v(x,y)\omega(x,y)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{h-s} U(r,h-s-p)V(t,s)\Psi(k-r-t,p)$$

şeklindedir.

İspat 23

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= u(x,y)v(x,y)ise \\
F(k,h) &= \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U(r,h-s)V(k-r,s) \\
f(x,y) &= u(x,y)v(x,y)\omega(x,y)ise \\
F(k,h) &= \sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{h-s} U(r,h-s-p)V(t,s)\psi(k-r-t,p)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 24 (Zhou, 1986; Chen ve Ho, 1999)
$f(x,y) = x^m y^n$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k,h) = \delta(k-m,h-n) = \delta(k-m)\delta(h-n) = \begin{cases} 1, & k=m \text{ ve } h=n \\ 0, & k\neq m \text{ veya } h\neq n \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat 24 $k < m$ ve $h < n$ ise

$$
\begin{aligned}
F(k,h) &= \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^(k+h) x^m y^n}{\partial x^{k+h}}\right]|_{(0,0)} \\
&= \left[m(m-1)\ldots(m-(k-1))n(n-1)...(n-(h-1))x^{m-k}y^{n-h}\right]|_{(0,0)} \\
&= \frac{0}{k!h!} = 0
\end{aligned}
$$

$k > m$ ve $h > n$ ise

$$
\begin{aligned}
F(k,h) &= \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^(k+h) x^m y^n}{\partial x^{k+h}}\right]|_{(0,0)} \\
&= [m(m-1)\ldots(m-(m-1))n(n-1)...(n-(n-1))0]|_{(0,0)} \\
&= \frac{0}{k!h!} = 0
\end{aligned}
$$

$k = n$ ve $h = n$ ise

$$
\begin{aligned}
F(k,h) &= \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^(k+h) x^m y^n}{\partial x^{k+h}}\right]|_{(0,0)} \\
&= [m(m-1)\ldots(m-(m-1))n(n-1)\ldots(n-(n-1))x^{m-m}y^{n-n}]|_{(0,0)} \\
&= \frac{m!h!}{k!h!} = \frac{m!h!}{m!h!} = 1
\end{aligned}
$$

buradan

$$
F(k,h) = \delta(k-m, h-n) = \delta(k-m)\delta(h-n) = \begin{cases} 1, & k = m \text{ ve } h = n \\ 0, & k \neq m \text{ veya } h \neq n \end{cases}
$$

şeklinde bulunur.

Teorem 25 (Ayaz, 2003)
$u(x,y),\ v(x,y)$ analitik fonksiyon ise $f(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$
fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$
F(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(r+1)(k-r+1)U(r+1, h-s)V(k-r+1, s)
$$

şeklindedir.

İspat 25

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \Rightarrow F(k,h) = (k+1)U(k+1,h) \\
f(x,y) &= \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \Rightarrow F(k,h) = (k+1)V(k+1,h) \\
f(x,y) &= u(x,y)v(x,y) \Rightarrow F(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U(r,h-s)V(k-r,s) \\
f(x,y) &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \Rightarrow \\
F(k,h) &= \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(r+1)(k-r+1)U(r+1,h-s)V(k-r+1,s)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 26 (Ayaz, 2003)
$u(x,y)$, $v(x,y)$ analitik fonksiyon ise $f(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(s+1)(h-s+1)U(r,h-s+1)V(k-r,s+1)$$

şeklindedir.

İspat 26

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \Rightarrow F(k,h) = (h+1)U(k,h+1) \\
f(x,y) &= \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \Rightarrow F(k,h) = (h+1)V(k,h+1) \\
f(x,y) &= u(x,y)v(x,y) \Rightarrow F(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U(r,h-s)V(k-r,s) \\
f(x,y) &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \Rightarrow \\
F(k,h) &= \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(s+1)(h-s+1)U(r,h-s+1)V(k-r,s+1)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 27 (Ayaz, 2003)
$u(x,y)$, $v(x,y)$ analitik fonksiyon ise $f(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$

fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(h-s+1)(k-r+1)U(k-r+1,s)V(r,h-s+1)$$

şeklindedir.

İspat 27

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \Rightarrow F(k,h)=(k+1)U(k+1,h)\\
f(x,y) &= \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \Rightarrow F(k,h)=(h+1)V(k,h+1)\\
f(x,y) &= u(x,y)v(x,y) \Rightarrow F(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}U(r,h-s)V(k-r,s)\\
f(x,y) &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \Rightarrow\\
F(k,h) &= \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(h-s+1)(k-r+1)U(k-r+1,s)V(r,h-s+1)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 28 (Ayaz, 2003)

$u(x,y),\ v(x,y)\ ve\ \omega(x,y)$ analitik fonksiyonlar ise

$f(x,y)=u(x,y)\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\frac{\partial \omega(x,y)}{\partial x}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{h-s}(t+1)(k-r-t+1)U(r,h-s-p+1)V(t+1,s)\Psi(k-r-t+1,p)$$

şeklindedir.

İspat 28

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= u(x,y) \Rightarrow F(k,h)=U(k,h)\\
f(x,y) &= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \Rightarrow F(k,h)=(k+1)U(k+1,h)\\
f(x,y) &= \frac{\partial \omega(x,y)}{\partial y} \Rightarrow F(k,h)=(k+1)\omega(k+1,h)\\
F(k,h) &= \sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{h-s}(t+1)(k-r-t+1)U(r,h-s-p+1)V(t+1,s)\Psi(k-r-t+1,p)
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 29 (Ayaz, 2003)
$u(x,y)$, $v(x,y)$ ve $\omega(x,y)$ analitik fonksiyonlar ise $f(x,y) = u(x,y)v(x,y)\frac{\partial^2\omega(x,y)}{\partial x^2}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{h-s}(k-r-t+2)(k-r-t+1)U(r,h-s-p)V(t,s)\Psi(k-r-t+2,p)$$

dir.

İspat 29

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= u(x,y) \Rightarrow F(k,h) = U(k,h)\\
f(x,y) &= v(x,y) \Rightarrow F(k,h) = V(k,h)\\
f(x,y) &= \frac{\partial^2\omega(x,y)}{\partial x^2} \Rightarrow F(k,h) = (k+2)(k+1)\Psi(k+2,h)\\
f(x,y) &= u(x,y)v(x,y)\omega(x,y) \Rightarrow\\
F(k,h) &= \sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{h-s}(k-r-t+2)(k-r-t+1)U(r,h-s-p)V(t,s)\Psi(k-r-t+2,p)
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 30 $f(x,y) = x^m e^{at}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k,h) = \frac{a^h}{h!}\delta(k-m)$$

dir.

İspat 30

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^m ve f(y) = e^{at} \qquad olsun.\\
f(x) &= x^m \Rightarrow F(k) = \delta(k-m)\\
f(y) &= e^{at} \Rightarrow F(h) = \frac{a^h}{h!}\\
w(x,y) &= x^m e^{at} \Rightarrow W(k,h) = \frac{a^h}{h!}\delta(k-m)
\end{aligned}$$

Teorem 31 $f(x,y) = e^{y-x}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k,h) = \frac{1^h}{h!}\frac{(-1)^k}{k!}$$

dir.

İspat 31

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x} \qquad ve \qquad f(y) = e^{y} \qquad olsun. \\ f(x) &= e^{-x} \Rightarrow F(k) = \frac{(-1)^k}{k!} \\ f(y) &= e^{y} \Rightarrow F(h) = \frac{1^h}{h!} \\ f(x,y) &= e^{y-x} \Rightarrow F(k,h) = \frac{1^h}{h!}\frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

Teorem 32 (Ayaz, 2003)
$u(x,y), v(x,y)$ analitik fonksiyonlar ise $f(x,y) = u(x,y)\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2}$ fonksiyonunu diferansiyel dönüşümü

$$F(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+2)(k-r+1)U(r,h-s)V(k-r+2,s)$$

dir.

İspat 32

$$\begin{aligned} f(x,y) &= u(x,y) \text{ ise } F(k,h) = U(k,h) \\ f(x,y) &= \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} \Rightarrow F(k,h) = (k+2)(k+1)V(k+2,h) \\ f(x,y) &= u(x,y)v(x,y) \Rightarrow F(k,h) = W(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}U(r,h-s)V(k-r,h) \\ f(x,y) &= u(x,y)\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} \Rightarrow \\ F(k,h) &= \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+2)(k-r+1)U(r,h-s)V(k-r+2,h) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

3.5. m Boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu

m boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu tanımlanacaktır.

Tanım 6 $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)$ analitik ve m degişkenli fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $F(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_m)$ olmak üzere;

$$F(k_1,k_2,k_3,\ldots,k_m)=\frac{1}{k_1!k_2!k_3!\ldots k_m!}\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3+\cdots+k_m}w(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\partial x_3^{k_3}\ldots\partial x_m^{k_m}}\right]|_{(0,0,0,\ldots,0)} \tag{3.11}$$

şeklindedir. $F(k_1,k_2,k_3,\ldots,k_m)$ nin ters diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_3=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_m=0}^{\infty}F(k_1,k_2,k_3,\ldots,k_m)x_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3}\ldots x_m^{k_m} \tag{3.12}$$

şeklindedir. (15) eşitligi (16) eşitliginde yerine yazılarak,

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m) &= \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\sum_{k_3=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_m=0}^{\infty}\frac{1}{k_1!k_2!k_3!\ldots k_m!}\\ &\quad \left[\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3+\cdots+k_m}f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\partial x_3^{k_3}\ldots\partial x_m^{k_m}}\right]|_{(0,0,0,\ldots,0)}\end{aligned} \tag{3.13}$$

(17) eşitligi elde edilir. $f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m) &= \sum_{k_1=n+1}^{\infty}\sum_{k_2=n+1}^{\infty}\sum_{k_3=n+1}^{\infty}\cdots\sum_{k_m=n+1}^{\infty}F(k_1,k_2,k_3,\ldots,k_m)\\ &\quad x_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3}\ldots x_m^{k_m}\end{aligned}$$

ifadesi kalan terim olduğundan

$$f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_m)=\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n}\sum_{k_3=0}^{n}\cdots\sum_{k_m=0}^{n}F(k_1,k_2,k_3,\ldots,k_m)x_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3}\ldots x_m^{k_m} \tag{3.14}$$

sonlu seri şeklnde yazılabilir.

3.6. Üç boyut için dönüşüm teoremleri

Üç boyutlu diferansiyel dönüşüm için kullanılabilecek teoremler verilmiştir.

Teorem 33 (Ayaz, 2004)

$u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$ analitik fonksiyonlar ise $f(x,y,t) = u(x,y,t) \pm v(x,y,t)$

fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k,h,m) = U(k,h,m) \pm V(k,h,m)$$

dir.

İspat 33

$$\begin{aligned}
F(k,h,m) &= \frac{1}{k!h!m!}\left[\frac{\partial^{k+h+m} f(x,y,t)}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m}\right]|_{(0,0,0)} \\
&= \frac{1}{k!h!m!}\left[\frac{\partial^{k+h+m} (u(x,y,t) \pm v(x,y,t))}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m}\right]|_{(0,0,0)} \\
&= \frac{1}{k!h!m!}\left[\frac{\partial^{k+h+m} (u(x,y,t)}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m}\right]|_{(0,0,0)} \pm \frac{1}{k!h!m!}\left[\frac{\partial^{k+h+m} (v(x,y,t)}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m}\right]|_{(0,0,0)} \\
F(k,h,m) &= U(k,h,m) \pm V(k,h,m)
\end{aligned}$$

Teorem 34 (Ayaz, 2004)
$u(x,y,t)$ analitik fonksiyon ise $f(x,y,t) = \lambda u(x,y,t)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k,h) = \lambda U(k,h,m)$$

dir.

İspat 34

$$\begin{aligned}
F(k,h,m) &= \frac{1}{k!h!m!}\left[\frac{\partial^{k+h+m} f(x,y,t)}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m}\right]|_{(0,0,0)} \\
&= \frac{1}{k!h!m!}\left[\frac{\partial^{k+h+m} \lambda u(x,y,t)}{\partial x^k \partial y^h}\right]|_{(0,0,0)} \\
&= \frac{\lambda}{k!h!m!}\left[\frac{\partial^{k+h} u(x,y,t)}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m}\right]|_{(0,0,0)} \\
F(k,h,m) &= \lambda U(k,h,m)
\end{aligned}$$

Teorem 35 (Ayaz, 2004)
$u(x,y,t)$ analitik fonksiyon ise $w(x,y,t) = \frac{\partial u(x,y,m)}{\partial x}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$W(k,h,m) = (k+1)U(k+1,h,m)$$

dir.

İspat 35

$$\begin{aligned} F(k,h,m) &= \frac{1}{k!h!m!}\left[\frac{\frac{\partial^{k+h+m}\partial u(x,y,t)}{\partial x}}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m}\right]|_{(0,0)} \\ &= \frac{1}{k!h!m!}\left[\frac{\partial^{k+h+m}\partial u(x,y,t)}{\partial x^{k+1}\partial y^h \partial t^m}\right]|_{(0,0)} = \frac{(k+1)}{(k+1)!h!m!}\left[\frac{\partial^{k+h+m+1}u(x,y,t)}{\partial x^{k+1}\partial y^h \partial t^m}\right]|_{(0,0)} \\ F(k,h,m) &= (k+1)U(k+1,h,m) \end{aligned}$$

Teorem 36 (Ayaz, 2004)
$u(x,y,t)$ analitik fonksiyon ise $f(x,y,t) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$\begin{aligned} F(k,h,m) &= (k+1)(k+2)\ldots(k+r)(h+1)(h+2)\ldots(h+s)(m+1)(m+2)\ldots(m+p) \\ &\quad U(k+r,h+s,m+p) \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat 36

$$\begin{aligned} F(k,h,m) &= \frac{1}{k!h!m!}\left[\frac{\frac{\partial^{k+h+m}\partial u(x,y,t)}{\partial y}}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m}\right]|_{(0,0)} \\ &= \frac{1}{k!h!m!}\left[\frac{\partial^{k+h+m}\partial u(x,y,t)}{\partial x^k \partial y^{h+1} \partial t^m}\right]|_{(0,0)} \\ &= \frac{(h+1)}{(h+1)!h!m!}\left[\frac{\partial^{k+h+m+1}u(x,y,t)}{\partial x^k \partial y^{h+1} \partial t^m}\right]|_{(0,0)} \\ F(k,h,m) &= (h+1)U(k,h+1,m) \end{aligned}$$

Teorem 37 (Ayaz, 2004)
$u(x,y,t)$ analitik fonksiyon ise $f(x,y,t) = \frac{\partial^{r+s+p}u(x,y,t}{\partial x^r \partial y^s \partial t^p}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$\begin{aligned} F(k,h,m) &= (k+1)(k+2)\ldots(k+r)(h+1)(h+2)\ldots(h+s)(m+1)(m+2)\ldots(m+p) \\ &\quad U(k+r,h+s,m+p) \end{aligned}$$

dir.

İspat 37

$$
\begin{aligned}
f(x,y,t) &= \frac{\partial^{r+s+p}u(x,y,t}{\partial x^r \partial y^s \partial t^p} \Rightarrow F(k,h,m) = \left[\frac{\partial^{k+h+m} f(x,y,t)}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m}\right]|_{(0,0,0)} \\
F(k,h,m) &= \frac{1}{k!h!m!}\left[\frac{\partial^{k+h+m}}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m}\left[\frac{\partial^{r+s+p}u(x,y,t)}{\partial x^r \partial y^s \partial t^p}\right]\right]|_{(0,0,0)} \\
F(k,h,m) &= \frac{(k+1)(k+2)\dots(k+r)(h+1)(h+2)\dots(h+s)(m+1)(m+2)\dots(m+p)}{(k+r)!(h+s)!(m+p)!} \\
&\quad \left[\frac{\partial^{k+r+h+s+m+p}u(x,y,t)}{\partial x^{k+r}\partial y^{h+s}\partial t^{m+p}}\right]|_{(0,0,0)} \\
F(k,h,m) &= (k+1)(k+2)\dots(k+r)(h+1)(h+2)\dots(h+s)(m+1)(m+2)\dots(m+p) \\
&\quad U(k+r,h+s,m+p)
\end{aligned}
$$

Teorem 38 (Ayaz, 2004)
$u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$ analitik fonksiyonlar ise $f(x,y,t) = u(x,y,t)v(x,y,t)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k,h,m) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{m} U(r,h-s,m-p)V(k-r,s,p)$$

dir.

İspat 38

$$\begin{aligned}
f(x,y,t) &= u(x,y,t)v(x,y,t)\\
F(k,h,m) &= \frac{1}{k!h!m!}\left[\frac{\partial^{k+h+m}f(x,y,t)}{\partial x^k\partial y^h\partial t^m}\right]|_{(0,0,0)}\\
F(0,0,0) &= \frac{1}{0!0!0!}\left[u(x,y,t)v(x,y,t)\right]|_{(0,0,0)} = U(0,0,0)V(0,0,0)\\
F(1,0,0) &= \frac{1}{1!0!0!}\frac{\partial}{\partial x}\left[u(x,y,t)v(x,y,t)\right]|_{(0,0,0)} = [u_x v + v_x u]\\
&= U(1,0,0)V(0,0,0) + V(1,0,0)U(0,0,0)\\
F(1,1,0) &= \frac{1}{1!1!0!}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[u(x,y,t)v(x,y,t)\right]|_{(0,0,0)} = [u_{xy}v + u_x v_y + v_{xy}u + v_x u_y]\\
&= U(1,1,0)V(0,0,0) + U(1,0,0)V(0,1,0) + U(0,0,0)V(1,1,0) + U(0,1,0)V(1,0,0)\\
F(1,1,1) &= \frac{1}{1!1!1!}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial t}\left[u(x,y,t)v(x,y,t)\right]|_{(0,0,0)}\\
&= [u_{xyz}v + u_{xy}v_t + u_{xt}v_y + u_x v_{yt} + u_{xyt}v + u_t v_{xy} + u_{xt}v_y + u_x v_{yt}]\\
&= U(1,1,1)V(0,0,0) + U(1,1,0)V(0,0,1) + U(1,0,1)V(0,1,0) + U(1,0,0)V(0,1,1)\\
&\quad +U(1,1,1)V(0,0,0) + U(0,0,1)V(1,1,0) + U(1,0,1)V(0,1,0) + U(1,0,0)V(0,1,1)\\
F(2,0,0) &= \frac{1}{2!0!0!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[u(x,y,t)v(x,y,t)\right]|_{(0,0,0)} = [u_{xx}v + u_x v_x + uv_{xx}]\\
&= U(2,0,0)V(0,0,0) + U(1,0,0)V(1,0,0) + U(0,0,0)V(2,0,0)
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

bu şekilde devam edilerek $f(x,y,t) = u(x,y,t)v(x,y,t)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$F(k,h,m) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{m} U(r,h-s,m-p)V(k-r,s,p)$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 39 (Ayaz, 2004)
$u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$ analitik fonksiyonlar ise $f(x,y,t) = \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial y}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k,h,m) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{m}(k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1,s,p)V(r,h-s+1,m-p)$$

dir.

İspat 39

$$
\begin{aligned}
f(x,y,t) &= \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x} \Rightarrow F(k,h,m) = (k+1)U(k+1,h,m) \\
f(x,y,t) &= \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x} \Rightarrow F(k,h,m) = (k+1)U(k+1,h,m) \\
f(x,y,t) &= u(x,y,t)v(x,y,t) \Rightarrow F(k,h,m) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{m} U(r,h-s,m-p)V(k-r,s,p)
\end{aligned}
$$

formüllerinden yararlanılarak

$$
f(x,y,t) = \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial y}
$$

fonksiyonunu diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$
F(k,h,m) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{m} U(r,h-s,m-p)V(k-r,s,p)
$$

şeklinde ifade edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Burada, diferansiyel dönüşüm metodu aşağıdaki yapıya sahip lineer ve lineer olmayan birinci ve ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlere uygulanarak elde edilen yeni sonuçlar ifade edilmiştir

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y)u + d(x,y)$$

$$uu_x + b(x,y)u_y = d(x,y)$$

$$a(x,y)u_x + uu_y = d(x,y)$$

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = f(u)$$

$$u_{xx} + b(x,y)u_{yy} + c(x,y)u_x + d(x,y)u_y = h(x,y).$$

Ayrıca, klasik çözümleri veren formüllerin analoğu olan yeni formüller diferansiyel dönüşüm metodu ile verildi ve elde edilen sonuçlar örneklerle değerlendirilmiştir.

4.1. Bilinen bazı uygulamalar

Örnek 1

$$y' - y = 0, \; y(0) = 1$$

denklemini diferansiyel dönüşüm metodunu uygulayarak çözelim.

Çözüm 1 $y = e^x$ ifadesinin tam çözüm olduğu aşikardır. Şimdi de $y' - y = 0$ fonksiyonuna diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa (Ağırağaç, 2017; Tanriverdi ve Ağırağaç 2018)

$$(k+1)Y(k+1) - Y(k) = 0 \quad Y(k+1) = \frac{Y(k)}{k+1}$$

$k = 0$ için

$$Y(1) = \frac{Y(0)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$k = 1$ için

$$Y(2) = \frac{Y(1)}{2} = \frac{1}{2}$$

$k = 2$ için

$$Y(3) = \frac{Y(2)}{3} = \frac{1}{6}$$

$k = 3$ için

$$Y(4) = \frac{Y(3)}{4} = \frac{1}{24}$$

$$\vdots$$

şeklinde devam edilirse

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k \\ &= Y(0) + Y(1)x + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + y(4)x^4 + \ldots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \\ &= e^x,\ x \to \infty \text{ giderken,} \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2 (Ağırağaç, 2017; Tanriverdi ve Ağırağaç 2018)

$$y'' + 2y' - 8y = 0,\ y(0) = 1,\ y(1) = 0$$

verilen sınır deger problemini diferansiyel dönüşüm metodunu uygulayarak çözelim.

Çözüm 2 $y = \frac{1}{3}e^{-4x} + \frac{2}{3}e^{2x}$ verilen denklemin tam çözümü olduğunu görmek kolaydır.

$$y'' + 2y' - 8y = 0$$

diferansiyel denkleme diferansiyel dönüşüm metodu uygularsak

$$\begin{aligned} (k+2)(k+1)Y(k+2) + 2(k+1)Y(k+1) - 8Y(k) = 0 \\ Y(k+2) = \frac{-2(k+1)Y(k+1)}{(k+2)(k+1)} + \frac{8Y(k)}{(k+2)(k+1)} \end{aligned}$$

$k = 0$ için

$$Y(2) = \frac{-2Y(1)}{2} + \frac{8Y(0)}{2} = 4$$

$k = 1$ için

$$Y(3) = \frac{-4Y(2)}{6} + \frac{8Y(1)}{6} = \frac{-8}{3}$$

$k = 2$ için

$$Y(4) = \frac{-6Y(3)}{12} + \frac{8Y(2)}{12} = 4$$

$k = 3$ için

$$Y(5) = \frac{-8Y(4)}{20} + \frac{8Y(3)}{20} = \frac{-8}{3}$$

$$\vdots$$

şeklinde devam edilirse

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k \\
&= Y(0) + Y(1)x + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + Y(4)x^4 + Y(5)x^5 + \dots \\
&= 1 + 4x^2 - \frac{8}{3}x^3 + 4x^4 - \frac{8}{3}x^5 + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{3}\Big(1 + 2\Big) + \frac{1}{3}\Big(-4 + 4\Big)x + \frac{1}{3}\Big(\frac{16}{2} + \frac{8}{2}\Big)x^2 + \frac{1}{3}\Big(\frac{-64}{6} + \frac{16}{6}\Big)x^3 \\
&+ \frac{1}{3}\Big(\frac{256}{24} + \frac{32}{24}\Big)x^4 + \cdots \\
&= \frac{1}{3}\Big(1 - 4x + \frac{16}{2}x^2 - \frac{64}{6}x^3 + \dots\Big) \\
&+ \frac{2}{3}\Big(1 + 2x + 2x^2 + \frac{8x^3}{6} + \frac{16}{24}x^4 + \dots\Big),\ x \to \infty \text{ giderken,} \\
&= \frac{1}{3}e^{-4x} + \frac{2}{3}e^{2x}
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.2. Teoremler ve uygulamaları

Teorem 40 $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $d(x,y)$, $u(x,y)$, u_x ve u_y fonksiyonları analitik ve ayrıca $A(0,0) \neq 0$ olsun. Bu halde,

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y)u + d(x,y), \ u(x,0) = f(x)$$

kısmi diferansiyel denkleminin DTM ile $(k+1,h)$ inci terimi

$$\begin{aligned} U(k+1,h) = \frac{1}{(k+1)A(0,0)} \Big[& \sum_{r=0}^{k} \sum_{s=0}^{h} \Big[C(r,h-s)U(k-r,s) \\ & - B(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1) \Big] + D(k,h) \\ & - \sum_{r=0}^{k} \sum_{s=0}^{h-1} (k-r+1)A(r,h-s)U(k-r+1,s) \\ & - \sum_{r=1}^{k} (k-r+1)A(r,0)U(k-r+1,h) \Big] \end{aligned}$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla denkleminin DTM ile serisel çözümü

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k,h)x^k y^h$$

olur. Serisel olarak yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{h=0}^{n} U(k,h)x^k y^h \text{ ve } u(x,y) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{h=n+1}^{\infty} U(k,h)x^k y^h$$

biçimindedir.

İspat 40 $A(k,h)$, $B(k,h)$, $C(k,h)$, $D(k,h)$, $U(k,h)$, $(k+1)U(k+1,h)$ ve $(h+1)U(k,h+1)$ fonksiyonları sırasıyla $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $d(x,y)$, $u(x,y)$, u_x ve u_y fonksiyonlarının diferansiyel dönüşümü olsun. Bu halde,

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y)u + d(x,y)$$

denklemine diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa,

$$\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} A(r,h-s)(k-r+1)U(k-r+1,s)$$
$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} B(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1)$$
$$=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} C(r,h-s)U(k-r,s)+D(k,h)$$

şeklinde bulunur.

$$\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+1)A(r,h-s)U(k-r+1,s)$$
$$=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\Big[C(r,h-s)U(k-r,s)-B(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1)\Big]+D(k,h),$$

sol tarafta $s=h$ yazılırsa,

$$\sum_{r=0}^{k}(k-r+1)A(r,0)U(k-r+1,h)+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h-1}(k-r+1)A(r,h-s)U(k-r+1,s)$$
$$=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\Big[C(r,h-s)U(k-r,s)-B(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1)\Big]+D(k,h),$$

$$(k+1)A(0,0)U(k+1,h)+\sum_{r=1}^{k}(k-r+1)A(r,0)U(k-r+1,h)$$
$$=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\Big[C(r,h-s)U(k-r,s)-B(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1)\Big]$$
$$+D(k,h)-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h-1}(k-r+1)A(r,h-s)U(k-r+1,s),$$

$$U(k+1,h)=\frac{1}{(k+1)A(0,0)}\Big[\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}[C(r,h-s)U(k-r,s)$$
$$-B(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1)]+D(k,h)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h-1}(k-r+1)A(r,h-s)U(k-r+1,s)$$
$$-\sum_{r=1}^{k}(k-r+1)A(r,0)U(k-r+1,h)\Big]$$

elde edilir. Bu iterasyon formülü kullanılarak teorem ispatlanmış olur.

Örnek 3

$$u_x + u_y = 0,$$

kısmi diferansiyel denklemini $u(x,0) = 1$ başlangıç koşulu ile DTM yardımıyla çözelim.

Çözüm 3 $u = u(x,y)$ olmak üzere $u(x,y)$'nin diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k,h)$ olsun.$u_x + u_y = 0$ kısmi diferansiyel denkleminin diferansiyel dönüşümü

$$(k+1)U(k+1,h) + (h+1)U(k,h+1) = 0$$

olur.

$$U(k+1,h) = -\frac{h+1}{k+1}U(k,h+1)$$

$u(x,0) = 1$ başlangıç koşulunun diferansiyel dönüşümü

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

$U(1,0) = U(2,0) = U(3,0) = \cdots = 0$ olur.

$k = 0,1,2,3,\ldots$ ve $h = 0,1,2,3,\ldots$

değerleri sırasıyla dönüşüm denkleminde yerine yazılırsa

$k = 0,\ h = 0$ için $U(1,0) = -U(0,1) \Rightarrow U(0,1) = 0$

$k = 0,\ h = 1$ için $U(1,1) = -2U(0,2) \Rightarrow U(0,2) = 0$

$k = 0,\ h = 2$ için $U(1,2) = -3U(0,3) \Rightarrow U(0,3) = 0$

$k = 0,\ h = 3$ için $U(1,3) = -4U(0,4) \Rightarrow U(0,4) = 0$

$$k=1,\ h=0 \text{ için } U(2,0)=-\frac{1}{2}U(1,1) \Rightarrow U(1,1)=0$$

$$k=2,\ h=0 \text{ için } U(3,0)=-\frac{1}{3}U(2,1) \Rightarrow U(2,1)=0$$

olur.

$$U(x,y)=\sum_{k=0}^{y}\sum_{h=0}^{y}U(k,h)x^k y^h$$

$$=\sum_{k=0}^{y}x^k[U(k,0)+U(k,1)y+U(k,2)y^2+U(k,3)y^3+\cdots]$$

$$U(x,y) \quad = \quad [U(0,0)+U(0,1)y+U(0,2)y^2+U(0,3)y^3+\cdots]$$

$$+[U(1,0)x+U(1,1)xy+U(1,2)xy^2+U(1,3)xy^3+\cdots]$$

$$+[U(2,0)x^2+U(2,1)x^2y+U(2,2)x^2y^2+U(2,3)x^2y^3+\cdots]+\cdots$$

ifadesinde $U(0,0)=1$ diğer terimlerin katsayıları sıfır olduğundan $U(x,y)=1$ olarak bulunur.

Örnek 4

$$u_x+u_y=u$$

denklemini $u(x,0)=1$ başlangıç koşulu ile DTM yardımıyla çözelim.

Çözüm 4 $u=u(x,y)$ olmak üzere $u(x,y)$'nin diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k,h)$ olsun. $u_x+u_y=u$ kısmi diferansiyel denklemin diferansiyel dönüşümü

$$(k+1)U(k+1,h)+(h+1)U(k,h+1)=U(k,h)$$

$$U(k+1,h)=\frac{1}{k+1}U(k,h)-\frac{h+1}{k+1}U(k,h+1)$$

olur. $u(x,0)=1$ başlangıç koşuluna DTM uygulanırsa

U(k,0)=

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

$$U(1,0) = U(2,0) = U(3,0) = \cdots = 0$$

$k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ ve $h = 0, 1, 2, 3, \ldots$

değerleri sırasıyla yerine yazılırsa,

$k = 0,\ h = 0$ için $U(1,0) = U(0,0) - U(0,1) \Rightarrow U(0,1) = 1$

$k = 0,\ h = 1$ için $U(1,1) = U(0,1) - 2U(0,2) \Rightarrow U(0,2) = \dfrac{1}{2}$

$k = 0,\ h = 2$ için $U(1,2) = U(0,2) - 3U(0,3) \Rightarrow U(0,3) = \dfrac{1}{4}$

$k = 0,\ h = 3$ için $U(1,3) = U(0,3) - 4U(0,4) \Rightarrow U(0,4) = \dfrac{1}{24}$

$k = 1,\ h = 0$ için $U(2,0) = \dfrac{1}{2}U(1,0) - \dfrac{1}{2}U(1,1) \Rightarrow U(1,1) = 0$

$k = 1,\ h = 1$ için $U(2,1) = \dfrac{1}{2}U(1,1) - U(1,2) \Rightarrow U(1,2) = 0$

$k = 1,\ h = 2$ için $U(2,2) = \dfrac{1}{2}U(1,2) - \dfrac{3}{2}U(1,3) \Rightarrow U(1,3) = 0$

$k = 1,\ h = 3$ için $U(2,3) = \dfrac{1}{2}U(1,3) - 2U(1,4) \Rightarrow U(1,4) = 0$

$k = 2,\ h = 0$ için $U(3,0) = \dfrac{1}{3}U(2,0) - \dfrac{1}{3}U(2,1) \Rightarrow U(2,1) = 0$

$k = 2,\ h = 1$ için $U(3,1) = \dfrac{1}{3}U(2,1) - \dfrac{2}{3}U(2,2) \Rightarrow U(2,2) = 0$

$$k = 2,\ h = 2 \text{ için } U(3,2) = \frac{1}{3}U(2,2) - U(2,3) \Rightarrow U(2,3) = 0$$

olarak bulunur.

$$U(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U(k,h)x^k y^h$$

$$U(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \left[U(k,0) + U(k,1)y + U(k,2)y^2 + U(k,3)y^3 + \cdots\right]$$

$$U(x,y) = \left[U(0,0) + U(0,1)y + U(0,2)y^2 + U(0,3)y^3 + \cdots\right]$$

$$+ \left[U(1,0)x + U(1,1)xy + U(1,2)xy^2 + U(1,3)xy^3 + \cdots\right]$$

$$+ \left[U(2,0)x^2 + U(2,1)x^2y + U(2,2)x^2y^2 + U(2,3)x^2y^3 + \cdots\right] + \cdots$$

bulduğumuz değerleri yerine yazarsak,

$$U(x,y) = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{24}y^4 + \cdots$$

$$U(x,y) = e^y,\ y \to \infty \text{ giderken,}$$

olarak bulunur.

Teorem 41 $b(x,y)$, $d(x,y)$, $u(x,y)$, u_x ve u_y fonksiyonları analitik ve ayrıca $B(0,0) \neq 0$ olsun. Bu halde,

$$uu_x + b(x,y)u_y = d(x,y),\ u(x,0) = f(x)$$

kısmi diferansiyel denkleminin DTM ile (k,h+1) inci terimi

$$U(k,h+1) = \frac{1}{B(0,0)(h+1)}\Big[D(k,h) - \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U(r,h-s)(k-r+1)U(k-r+1,s)$$

$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=1}^{h} B(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1) - (h+1)\sum_{r=0}^{k-1} B(k-r,0)U(r,h+1)\Big]$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla denkleminin DTM ile serisel çözümü

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U(k,h)x^k y^h$$

olur. Serisel olarak yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{n} U(k,h)x^k y^h \text{ ve } u(x,y) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{h=n+1}^{\infty} U(k,h)x^k y^h$$

biçimindedir.

İspat 41 $B(k,h)$, $D(k,h)$, $U(k,h)$, $(k+1)U(k+1,h)$ ve $(h+1)U(k,h+1)$ fonksiyonları sırasıyla $b(x,y)$, $d(x,y)$, $u(x,y)$, u_x ve u_y fonksiyonlarının diferansiyel dönüşümü olsun. Bu halde,

$$uu_x + b(x,y)u_y = d(x,y)$$

denklemine diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned}&\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U(r,h-s)(k-r+1)U(k-r+1,s)\\ &+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} B(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1) = D(k,h)\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

$$\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}U(r,h-s)(k-r+1)U(k-r+1,s)$$
$$+\sum_{r=0}^{k}B(k-r,0)(h+1)U(r,h+1)$$
$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=1}^{h}B(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1)=D(k,h),$$

$$B(0,0)(h+1)U(k,h+1)+(h+1)\sum_{r=0}^{k-1}B(k-r,0)U(r,h+1)$$
$$=D(k,h)-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}U(r,h-s)(k-r+1)U(k-r+1,s)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=1}^{h}B(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1),$$

$$U(k,h+1)=\frac{1}{B(0,0)(h+1)}\Big[D(k,h)-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}U(r,h-s)(k-r+1)U(k-r+1,s)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=1}^{h}B(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1)-(h+1)\sum_{r=0}^{k-1}B(k-r,0)U(r,h+1)\Big]$$

elde edilir. Bu iterasyon formülü kullanılarak teorem ispatlanmış olur.

Teorem 42 $a(x,y)$, $d(x,y)$, $u(x,y)$, u_x ve u_y fonksiyonları analitik ve ayrıca $A(0,0)\neq 0$ olsun. Bu halde,

$$a(x,y)u_x+uu_y=d(x,y),\ u(x,0)=f(x)$$

kısmi diferansiyel denkleminin DTM ile (k+1,h) inci terimi,

$$U(k+1,h)=\frac{1}{(k+1)A(0,0)}\Big[D(k,h)-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}U(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1)$$

$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h-1}A(r,h-s)(k-r+1)U(k-r+1,s)-\sum_{r=1}^{k}(k-r+1)A(r,0)U(k-r+1,h)\Big]$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla denklemin DTM ile serisel çözümü

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U(k,h)x^k y^h$$

olur. Serisel olarak yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{n} U(k,h)x^k y^h \text{ ve } u(x,y) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{h=n+1}^{\infty} U(k,h)x^k y^h$$

biçimindedir.

İspat 42 $A(k,h)$, $D(k,h)$, $U(k,h)$, $(k+1)U(k+1,h)$ ve $(h+1)U(k,h+1)$ fonksiyonları sırasıyla $a(x,y)$, $d(x,y)$, $u(x,y)$, u_x ve u_y fonksiyonlarının diferansiyel dönüşümü olsun. Bu halde,

$$a(x,y)u_x + uu_y = d(x,y)$$

denklemine diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa,

$$\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} A(r,h-s)(k-r+1)U(k-r+1,s)$$

$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1) = D(k,h)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{k}(k-r+1)A(r,0)U(k-r+1,h) \\
&+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h-1} A(r,h-s)(k-r+1)U(k-r+1,s) \\
&= D(k,h) - \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1),
\end{aligned}$$

$$(k+1)A(0,0)U(k+1,h)+\sum_{r=1}^{k}(k-r+1)A(r,0)U(k-r+1,h)$$
$$=D(k,h)-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}U(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h-1}A(r,h-s)(k-r+1)U(k-r+1,s),$$
$$U(k+1,h)=\frac{1}{(k+1)A(0,0)}\Big[D(k,h)-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}U(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h-1}A(r,h-s)(k-r+1)U(k-r+1,s)-\sum_{r=1}^{k}(k-r+1)A(r,0)U(k-r+1,h)\Big]$$

elde edilir.Bu iterasyon formülü kullanılarak teorem ispatlanmış olur.

Örnek 5

$$uu_x+u_y=0$$

denklemini $u(x,0)=x$ başlangıç koşulu ile DTM yardımıyla çözelim.

Çözüm 5 $u=u(x,y)$ olmak üzere $u(x,y)$ fonksiyonunun DTM fonksiyonu $U(k,h)$ olsun. $uu_x+u_y=0$ kısmi diferansiyel denkleminin diferansiyel dönüşümü

$$\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+1)U(r,h-s)U(k-r+1,s)+(h+1)U(k,h+1)=0$$

$$U(k,h+1)=-\frac{1}{h+1}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+1)U(r,h-s)U(k-r+1,s)$$

olur.$u(x,0)=x$ başlangıç koşulunun diferansiyel dönüşümü

$$U(k,0)=\begin{cases}1, & k=1\\ 0, & k\neq 1\end{cases}$$

$$U(0,0)=U(2,0)=U(3,0)=\cdots=0$$

Dönüşüm denkleminde $k = 0$ ve $h = 0$ değerleri yazılırsa $U(0,1) = 0$ bulunur.

$k = 0$ ve $h = 1$ için

$$U(0,2) = -\frac{1}{2}\left[U(0,1)U(1,0) + U(0,0)U(1,1)\right] \Rightarrow U(0,2) = 0$$

$k = 1$ ve $h = 0$ için

$$U(1,1) = -\left[2(U(0,0)U(2,0)) + U(1,0)U(1,0)\right] \Rightarrow U(1,1) = -1$$

$k = 1$ ve $h = 1$ için

$$U(1,2) = -\frac{1}{2}\left[U(0,1)U(2,0)) + U(0,0)U(2,1) + U(1,1)U(1,0) + U(1,0)U(1,1)\right]$$

ise $U(1,2) = 1$

$k = 2$ ve $h = 0$ için

$$U(2,1) = -\left[3(U(0,0)U(3,0)) + 2(U(1,0)U(2,0))\right] \Rightarrow U(2,1) = 0$$

$k = 1$ ve $h = 2$ için $U(1,3) = 1$

olarak bulunur.

$$u(x,y) = \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} x^k y^h$$

$$u(x,y) = \left[U(0,0) + U(0,1)y + U(0,2)y^2 + U(0,3)y^3 + \cdots\right]$$

$$+ \left[U(1,0)x + U(1,1)xy + U(1,2)xy^2 + U(1,3)xy^3 + \cdots\right]$$

$$+ \left[U(2,0)x^2 + U(2,1)x^2y + U(2,2)x^2y^2 + U(2,3)x^2y^3 + \cdots\right] + \cdots$$

Bulunan değerler denklemde yerine yazılırsa,

$$u(x,y) = x - xy + xy^2 - xy^3 + \cdots$$

$$u(x,y) = x\left[1 - y + y^2 - y^3 + \cdots\right]$$

ise

$$u(x,y) = \frac{x}{1+y},\ y \to \infty \text{ giderken,}$$

olarak bulunur.

Teorem 43 $a(x,y)$, $b(x,y)$, $f(u)$, u_x ve u_y fonksiyonları analitik ve ayrıca $A(0,0) \neq 0$ olsun. Bu halde,

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = f(u),\ u(x,0) = f(x)$$

kısmi diferansiyel denkleminin DTM ile (k+1,h) inci terimi

$$\begin{aligned} U(k+1,h) = \frac{1}{(k+1)A(0,0)}\Bigg[&W(k,h) - \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} B(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1) \\ &- \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h-1}(k-r+1)A(r,h-s)U(k-r+1,s) \\ &- \sum_{r=1}^{k}(k-r+1)A(r,0)U(k-r+1,h)\Bigg] \end{aligned}$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla denklemin DTM ile serisel çözümü

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U(k,h)x^k y^h$$

olur. Serisel olarak yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{n} U(k,h)x^k y^h \text{ ve } u(x,y) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{h=n+1}^{\infty} U(k,h)x^k y^h$$

biçimindedir.

İspat 43 $A(k,h)$, $B(k,h)$, $W(k,h)$, $U(k,h)$, $(k+1)U(k+1,h)$ ve $(h+1)U(k,h+1)$ fonksiyonları sırasıyla $a(x,y)$, $b(x,y)$, $f(u)$, $u(x,y)$, u_x ve u_y fonksiyonlarının diferansiyel dönüşümü olsun. Bu halde,

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = f(u)$$

denklemine diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa

$$\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} A(r,h-s)(k-r+1)U(k-r+1,s)$$
$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} B(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1) = W(k,h)$$

elde edilir.

$$\sum_{r=0}^{k}(k-r+1)A(r,0)U(k-r+1,h) + \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h-1}(k-r+1)A(r,h-s)U(k-r+1,s)$$
$$= W(k,h) - \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} B(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1),$$

$$(k+1)A(0,0)U(k+1,h) + \sum_{r=1}^{k}(k-r+1)A(r,0)U(k-r+1,h)$$
$$= W(k,h) - \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} B(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h-1}(k-r+1)A(r,h-s)U(k-r+1,s),$$

$$U(k+1,h) = \frac{1}{(k+1)A(0,0)}\Big[W(k,h) - \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} B(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h-1}(k-r+1)A(r,h-s)U(k-r+1,s) - \sum_{r=1}^{k}(k-r+1)A(r,0)U(k-r+1,h)\Big]$$

elde edilir. Bu iterasyon formülü kullanılarak teorem ispatlanmış olur.

Örnek 6

$$u_x + u_y = u^2$$

denklemini $u(x,0) = 1$ başlangıç koşulu ile DTM yardımıyla çözelim.

Çözüm 6 $u = u(x,y)$ olmak üzere $u(x,y)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k,h)$ olsun. $u_x + u_y = u^2$ kısmi diferansiyel denkleminin Diferansiyel

Dönüşümü

$$(k+1)U(k+1,h)+(h+1)U(k,h+1)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}U(r,h-s)U(k-r,s)$$

şeklindedir.

$$U(k+1,h)=\frac{1}{k+1}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}U(r,h-s)U(k-r,s)-\frac{h+1}{k+1}U(k,h+1)$$

$u(x,0)=1$ başlangıç koşulunun Diferansiyel Döüşümü

$$U(k,0)=\begin{cases}1, & k=0\\ 0, & k\neq 0\end{cases}$$

dir.

$$U(0,0)=1,\ U(1,0)=U(2,0)=U(3,0)=...=0$$

$k=0,1,2,3,\ldots$ ve $h=0,1,2,3,\ldots$ değerleri dönüşüm denkleminde sırasıyla yerine yazılırsa,

$k=0$ ve $h=0$ için $U(1,0)=1-U(0,1)\Rightarrow U(0,1)=1$

$k=0$ ve $h=1$ için $U(0,2)=1$

$k=1$ ve $h=0$ için $U(1,1)=0$

Bulunan değerler yerine yazılırsa,

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U(k,h)x^k y^h$$

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}x^k\left[U(k,0)+U(k,1)y+U(k,2)y^2+U(k,3)y^3+\cdots\right]$$

$$u(x,y)=\left[U(0,0)+U(0,1)y+U(0,2)y^2+U(0,3)y^3+\cdots\right]$$

$$+\left[U(1,0)x + U(1,1)xy + U(1,2)xy^2 + U(1,3)xy^3 + \cdots\right]$$

$$+\left[U(2,0)x^2 + U(2,1)x^2y + U(2,2)x^2y^2 + U(2,3)x^2y^3 + \cdots\right] + \cdots$$

$$u(x,y) = 1 + y + y^2 + y^3 + \cdots = \frac{1}{1-y}$$

olarak bulunur.

Teorem 44 $b(x,y)$, $c(x,y)$, $d(x,y)$, $h(x,y)$, u_{xx}, u_{yy}, u_x, u_y fonksiyonları analitik olsun. Bu halde,

$$u_{xx} + b(x,y)u_{yy} + c(x,y)u_x + d(x,y)u_y = h(x,y),\ u(x,0) = f(x),\ u_y(x,0) = g(x)$$

kısmi diferansiyel denkleminin DTM ile $(k+2,h)$ inci terimi

$$\begin{aligned} U(k+2,h) = &\frac{1}{(k+1)(k+2)}\Big[H(k,h) \\ &- \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(h-s+2)(h-s+1)B(k-r,s)U(r,h-s+2) \\ &- \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}C(r,h-s)(k-r+1)U(k-r+1,s) \\ &- \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}D(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1)\Big] \end{aligned}$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla denklemin DTM ile serisel çözümü

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U(k,h)x^k y^h$$

olur. Serisel olarak yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{n}U(k,h)x^k y^h \text{ ve } u(x,y) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{h=n+1}^{\infty}U(k,h)x^k y^h$$

biçimindedir.

İspat 44 $B(k,h)$, $C(k,h)$, $D(k,h)$, $H(k,h)$, $(k+1)(k+2)U(k+2,h)$, $(h+1)(h+2)U(k,h+2)$, $(k+1)U(k+1,h)$ ve $(h+1)U(k,h+1)$ fonksiyonları sırasıyla $b(x,y)$, $c(k,h)$, $d(k,h)$, $h(x,y)$, u_{xx}, u_{yy}, u_x ve u_y fonksiyonlarının diferansiyel dönüşümü olsun. Bu halde,

$$u_{xx} + b(x,y)u_{yy} + c(x,y)u_x + d(x,y)u_y = h(x,y)$$

denklemine diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
&(k+1)(k+2)U(k+2,h) \\
&+ \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(h-s+2)(h-s+1)B(k-r,s)U(r,h-s+2) \\
&+ \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} C(r,h-s)(k-r+1)U(k-r+1,s) \\
&+ \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} D(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1) \\
&= H(k,h)
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
U(k+2,h) = {} & \frac{1}{(k+1)(k+2)}\Big[H(k,h) \\
&- \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(h-s+2)(h-s+1)B(k-r,s)U(r,h-s+2) \\
&+ \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} C(r,h-s)(k-r+1)U(k-r+1,s) \\
&+ \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} D(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1)\Big]
\end{aligned}$$

elde edilir.Bu iterasyon formülü kullanılarak teorem ispatlanmış olur.

Örnek 7

$$u_{xx} = \pi u_t,\ 0 \le t \le 1,\ 0 \le x \le 1$$

kısmi diferansiyel denklemini $u(0,t) = 0$, $u(x,0) = \cos(\pi x)$ başlangıç şartları ve $u(1,0) = 0$ sınır şartı altında DTM ile çözelim.

Çözüm 7 $u(x,y)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k,h)$ olmak üzere

$$(k+1)(k+2)U(k+2,h) = \pi(h+1)U(k,h+1)$$

$$U(k,h+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{\pi(h+1)}U(k+2,h)$$

$u(0,t) = 0$ ise $U(O,1) = U(0,2) = U(0,3) = U(0,4) = \cdots = U(0,h) = 0$

$u(x,0) = \cos \pi x$ başlangıç koşulunun Diferansiyel dönüşümü

$$U(k,0) = \begin{cases} 0, & \text{k tek ise} \\ \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}\pi^k}{k!}, & \text{k çift ise} \end{cases}$$

$$U(1,0) = U(3,0) = U(5,0) = \cdots = 0$$

$$U(0,0) = 1,\ U(2,0) = -\frac{\pi^2}{2!},\ U(4,0) = \frac{\pi^4}{4!},\ U(6,0) = -\frac{\pi^6}{6!}$$

elde edilir. $k = 0,1,2,3,\ldots$ ve $h = 0,1,2,3,\ldots$ değerleri denklemde yerine yazılırsa

$k = 0$ ve $h = 0$ için $U(0,1) = \frac{1.2}{\pi.1}U(2,0) = \frac{2}{\pi}(\frac{-\pi^2}{2!}) = -\pi$

$k = 1$ ve $h = 0$ için $U(1,1) = \frac{2.3}{\pi.1}U(3,0) = \frac{6}{\pi}0 = 0$

$k = 2$ ve $h = 0$ için $U(2,1) = \frac{3.4}{\pi.1}U(4,0) = \frac{3.4}{\pi}\frac{\pi^4}{4!} = \frac{\pi^3}{2!}$

$k = 3$ ve $h = 0$ için $U(3,1) = \frac{4.5}{\pi.1}U(5,0) = \frac{4.5}{\pi}0 = 0$

$k = 4$ ve $h = 0$ için $U(4,1) = \frac{5.6}{\pi.1}U(6,0) = \frac{5.6}{\pi}(\frac{-\pi^6}{6!}) = -\frac{\pi^5}{4!}$

bu şekilde devam edilirse,

$$U(k,1) = \begin{cases} 0, & \text{k tek ise} \\ \frac{(-1)^{\frac{k+2}{2}}\pi^{k+1}}{k!}, & \text{k çift ise} \end{cases}$$

eşitliği bulunur.

$$k = 0 \text{ ve } h = 1 \text{ için } U(0,2) = \frac{1.2}{\pi.2}U(2,1) = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^3}{2!} = \frac{\pi^2}{2!}$$

$$k = 1 \text{ ve } h = 1 \text{ için } U(1,2) = \frac{2.3}{\pi.2}U(3,1) = \frac{3}{\pi}0 = 0$$

$$k = 2 \text{ ve } h = 1 \text{ için } U(2,2) = \frac{3.4}{\pi.2}U(4,1) = \frac{3.4}{\pi.2}(\frac{-\pi^5}{4!}) = -\frac{\pi^4}{2!2!}$$

$$k = 3 \text{ ve } h = 1 \text{ için } U(3,2) = \frac{4.5}{\pi.2}U(5,1) = \frac{4.5}{\pi.2}.0 = 0$$

$$k = 4 \text{ ve } h = 1 \text{ için } U(4,2) = \frac{5.6}{\pi.2}U(6,1) = \frac{5.6}{\pi.2}\frac{\pi^7}{6!} = \frac{\pi^6}{2!4!}$$

$$k = 5 \text{ ve } h = 1 \text{ için } U(5,2) = \frac{6.7}{\pi.2}U(7,1) = \frac{6.7}{\pi.2}.0 = 0$$

$$k = 6 \text{ ve } h = 1 \text{ için } U(6,2) = \frac{7.8}{\pi.2}U(8,1) = \frac{7.8}{\pi.2}(\frac{-\pi^9}{8!}) = -\frac{\pi^8}{2!6!}$$

bu şekilde devam edilirse,

$$U(k,h) = \begin{cases} 0, & \text{k tek ise} \\ \frac{(-1)^h(-1)^{\frac{k}{2}}\pi^{k+h}}{k!.h!}, & \text{k çift ise} \end{cases}$$

eşitliği bulunur. Bulunan bu değerler denklemde yerine yazılırsa,

$$w(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U(k,h)x^k t^h$$

$$w(x,t) = 1 + x^2(\frac{-\pi^2}{2!} + \frac{\pi^3}{2!}t + \frac{-\pi^4}{2!2!} + \cdots)$$

$$+x^4(\frac{\pi^4}{4!} + \frac{-\pi^5}{4!}t + \frac{\pi^6}{2!4!} + \cdots)$$

$$+x^6(\frac{-\pi^6}{6!} + \frac{\pi^7}{6!}t + \frac{-\pi^8}{2!6!} + \cdots) + \cdots$$

$$w(x,t) = 1 + (\frac{-\pi^2 x^2}{2!} + \frac{\pi^3 x^2}{2!}t + \frac{-\pi^4 x^2}{2!2!} + \cdots)$$

$$+(\frac{\pi^4 x^4}{4!} + \frac{-\pi^5 x^4}{4!}t + \frac{\pi^6 x^4}{2!4!} + \cdots)$$

$$+(\frac{-\pi^6 x^6}{6!} + \frac{\pi^7 x^6}{6!}t + \frac{-\pi^8 x^6}{2!6!} + \cdots) + \cdots$$

denklemlerini düzenlersek

$$w(x,t) = e^{\pi t}\cos(\pi x)$$

olarak bulunur.

Örnek 8

$u_{tt} = u_{xx}$ Dalga Denklemini $0 < x < 1,\ 0 < t,\ u(x,0) = \sin(x)$ başlangıç şartları ve $u_t(x,0) = 0$ sınır şartı altında DTM ile çözelim.

Çözüm 8

$u_{tt} = u_{xx}$ Dalga Denkleminin her iki tarafına DTM uygulanırsa

$$(h+1)(h+2)U(k,h+2) = (k+1)(k+2)U(k+2,h)$$

olur.

$$U(k,h+2) = \frac{(k+1)(k+2)}{(h+1)(h+2)}U(k+2,h)$$

eşitliği elde edilir.Verilen dalga denkleminin başlangıç koşuluna DTM uygulanırsa,

$$u(x,0) = U(k,h),$$

$$U(k,0) = \frac{1}{k!}\sin(\frac{\pi k}{2}) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k!}, & \text{k tek ise} \\ 0, & \text{k çift ise} \end{cases}$$

eşitliği bulunur.

$$u_t(x,0) = U(k,1) = 0$$

elde edilir.Denklemde $k = 0,1,2,3,...$ ve $h = 0,1,2,3,...$ değerleri yerine yazılırsa;

$$k = 0 \text{ ve } h = 0 \text{ için } U(0,2) = \frac{1.2}{1.2}U(2,0) = \frac{1.2}{1.2}[\frac{1}{2!}\sin(\frac{2\pi}{2})] = 0$$

$$k = 1 \text{ ve } h = 0 \text{ için } U(1,2) = \frac{2.3}{1.2}U(3,0) = \frac{2.3}{1.2}[\frac{1}{3!}\sin(\frac{3\pi}{2})] = -\frac{2.3}{1.2}\frac{1}{3!} = -\frac{1}{1!2!}$$

$$k = 2 \text{ ve } h = 0 \text{ için } U(2,2) = \frac{3.4}{1.2}U(4,0) = \frac{3.4}{1.2}[\frac{1}{4!}\sin(\frac{4\pi}{2})] = 0$$

$$k = 3 \text{ ve } h = 0 \text{ için } U(3,2) = \frac{4.5}{1.2}U(5,0) = \frac{4.5}{1.2}[\frac{1}{5!}\sin(\frac{5\pi}{2})] = -\frac{4.5}{1.2}\frac{1}{5!} = \frac{1}{3!2!}$$

$$k = 4 \text{ ve } h = 0 \text{ için } U(4,2) = \frac{5.6}{1.2}U(6,0) = \frac{5.6}{1.2}[\frac{1}{6!}\sin(\frac{6\pi}{2})] = 0$$

$h = 1$ iken başlangıç şartından $U(k,1) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$k = 0 \text{ ve } h = 1 \text{ için } U(0,3) = \frac{1.2}{2.3}U(2,1) = 0$$

$$k = 1 \text{ ve } h = 1 \text{ için } U(1,3) = \frac{2.3}{2.3}U(3,1) = 0$$

$$k = 2 \text{ ve } h = 1 \text{ için } U(2,3) = \frac{3.4}{2.3}U(4,1) = 0$$

$$k = 3 \text{ ve } h = 1 \text{ için } U(3,3) = \frac{4.5}{2.3}U(5,1) = 0$$

$$k = 4 \text{ ve } h = 1 \text{ için } U(4,3) = \frac{5.6}{2.3}U(6,1) = 0$$

Şimdi $h = 2$ değeri için

$$k = 0 \text{ ve } h = 2 \text{ için } U(0,4) = \frac{1.2}{3.4}U(2,2) = \frac{1.2}{3.4}.0 = 0$$

$$k = 1 \text{ ve } h = 2 \text{ için } U(1,4) = \frac{2.3}{3.4}U(3,2) = \frac{2.3}{3.4}.\frac{1}{3!.2!} = \frac{1}{1!.4!}$$

$$k = 2 \text{ ve } h = 2 \text{ için } U(2,4) = \frac{3.4}{3.4}U(4,2) = \frac{3.4}{3.4}.0 = 0$$

$$k = 3 \text{ ve } h = 2 \text{ için } U(3,4) = \frac{4.5}{3.4}U(5,2) = \frac{4.5}{3.4}.\frac{-1}{3!.4!} = -\frac{1}{3!.4!}$$

$$k = 4 \text{ ve } h = 2 \text{ için } U(4,4) = \frac{5.6}{3.4}U(6,2) = \frac{4.5}{3.4}.0 = 0$$

değerleri elde edilir.Bu şekilde devam edilirse

$$U(k,h) = \begin{cases} 0, & \text{k çift ve h tek ise} \\ \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}(-1)^{\frac{h}{2}}}{k!.h!}, & \text{k tek ve h çift ise} \end{cases}$$

eşitliği bulunur. Bulunan bu değerler denklemde yerine yazılırsa,

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U(k,h)x^k t^h$$

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}(-1)^{\frac{h}{2}}}{k!h!}x^k t^h$$

$$u(x,t) = \left[\sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k!}x^k\right]\left[\sum_{h=0,2,4,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{h}{2}}}{h!}t^h\right]$$

$$u(x,t) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right]\left[\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(2h)!}t^{2h}\right]$$

$$u(x,t) = \sin(x)\cos(t)$$

olarak bulunur.

...

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Burada, diferansiyel dönüşüm metodu ile analizi yapılan lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler için elde edilen sonuçlar irdelenecektir. Farklı metotlara oranla çalışılan metodun artı ve eksileri ifade edilecektir.

5.1. Sonuçlar

Bu kısımda iafde edilen teoremler diferansiyel dönüşüm metodu ile formüle edilmiştir. Bu teoremler örneklerle test edilmiştir.

Teorem 45 $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $d(x,y)$, $u(x,y)$, u_x ve u_y fonksiyonları analitik ve ayrıca $A(0,0) \neq 0$ olsun. Bu halde,

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y)u + d(x,y),\ u(x,0) = f(x)$$

kısmi diferansiyel denkleminin DTM ile $(k+1,h)$ inci terimi

$$\begin{aligned} U(k+1,h) = \frac{1}{(k+1)A(0,0)}\Bigg[& \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\Big[C(r,h-s)U(k-r,s) \\ & - B(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1)\Big] + D(k,h) \\ & - \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h-1}(k-r+1)A(r,h-s)U(k-r+1,s) \\ & - \sum_{r=1}^{k}(k-r+1)A(r,0)U(k-r+1,h)\Bigg] \end{aligned}$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla denkleminin DTM ile serisel çözümü

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U(k,h)x^k y^h$$

olur. Serisel olarak yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{n}U(k,h)x^k y^h \text{ ve } u(x,y) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{h=n+1}^{\infty}U(k,h)x^k y^h$$

biçimindedir.

Teorem 46 $b(x,y)$, $d(x,y)$, $u(x,y)$, u_x ve u_y fonksiyonları analitik ve ayrıca $B(0,0) \neq 0$ olsun. Bu halde,

$$uu_x + b(x,y)u_y = d(x,y),\ u(x,0) = f(x)$$

kısmi diferansiyel denkleminin DTM ile (k,h+1) inci terimi

$$U(k,h+1) = \frac{1}{B(0,0)(h+1)}\Big[D(k,h) - \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U(r,h-s)(k-r+1)U(k-r+1,s)$$

$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=1}^{h} B(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1) - (h+1)\sum_{r=0}^{k-1} B(k-r,0)U(r,h+1)\Big]$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla denkleminin DTM ile serisel çözümü

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U(k,h)x^k y^h$$

olur. Serisel olarak yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{n} U(k,h)x^k y^h \text{ ve } u(x,y) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{h=n+1}^{\infty} U(k,h)x^k y^h$$

biçimindedir.

Teorem 47 $a(x,y)$, $d(x,y)$, $u(x,y)$, u_x ve u_y fonksiyonları analitik ve ayrıca $A(0,0) \neq 0$ olsun. Bu halde,

$$a(x,y)u_x + uu_y = d(x,y),\ u(x,0) = f(x)$$

kısmi diferansiyel denklemininin DTM ile (k+1,h) inci terimi,

$$U(k+1,h) = \frac{1}{(k+1)A(0,0)}\Big[D(k,h) - \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1)$$

$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h-1} A(r,h-s)(k-r+1)U(k-r+1,s) - \sum_{r=1}^{k}(k-r+1)A(r,0)U(k-r+1,h)\Big]$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla denklemin DTM ile serisel çözümü

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U(k,h)x^k y^h$$

olur. Serisel olarak yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{n} U(k,h)x^k y^h \text{ ve } u(x,y) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{h=n+1}^{\infty} U(k,h)x^k y^h$$

biçimindedir.

Teorem 48 $a(x,y)$, $b(x,y)$, $f(u)$, u_x ve u_y fonksiyonları analitik ve ayrıca $A(0,0) \neq 0$ olsun. Bu halde,

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = f(u), \; u(x,0) = f(x)$$

kısmi diferansiyel denkleminin DTM ile (k+1,h) inci terimi

$$\begin{aligned} U(k+1,h) = \frac{1}{(k+1)A(0,0)}\Big[& W(k,h) - \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} B(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1) \\ & - \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h-1}(k-r+1)A(r,h-s)U(k-r+1,s) \\ & - \sum_{r=1}^{k}(k-r+1)A(r,0)U(k-r+1,h)\Big] \end{aligned}$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla denklemin DTM ile serisel çözümü

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U(k,h)x^k y^h$$

olur. Serisel olarak yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{n} U(k,h)x^k y^h \text{ ve } u(x,y) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{h=n+1}^{\infty} U(k,h)x^k y^h$$

biçimindedir.

Teorem 49 $b(x,y)$, $c(x,y)$, $d(x,y)$, $h(x,y)$, u_{xx}, u_{yy}, u_x, u_y fonksiyonları analitik olsun. Bu halde

$$u_{xx} + b(x,y)u_{yy} + c(x,y)u_x + d(x,y)u_y = h(x,y), \; u(x,0) = f(x), \; u_y(x,0) = g(x)$$

kısmi diferansiyel denkleminin DTM ile $(k+2,h)$ inci terimi

$$U(k+2,h) = \frac{1}{(k+1)(k+2)}\Big[H(k,h)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(h-s+2)(h-s+1)B(k-r,s)U(r,h-s+2)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}C(r,h-s)(k-r+1)U(k-r+1,s)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}D(k-r,s)(h-s+1)U(r,h-s+1)\Big]$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla denklemin DTM ile serisel çözümü

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U(k,h)x^k y^h$$

olur. Serisel olarak yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{n}U(k,h)x^k y^h \text{ ve } u(x,y) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{h=n+1}^{\infty}U(k,h)x^k y^h$$

biçimindedir.

5.2. Öneriler

Diferansiyel dönüşüm metodu lineer ve lineer olmayan bazı diferansiyel denklemlere başarılı bir şekilde uygulandı. Bu metot klasik Taylor metoduna oranla daha az hesaplama ve zaman alır. Bu metodun güvenirliği ve hızlı sonuç vermesi bakımından oldukça yararlıdır. Bu metodun artısı, değişik örneklerle test edildi.

Ayrıca, diferansiyel dönüşüm metodu, klasik metotlarda olan lineer ve lineer olmayan problemlere uygulanırken lineerleştirme, ayrıklaştırma ve perturbasyona gerek duymaz. nonlineerliğin kuvvetli (strong) olması durumlarda lineerleştirme, ayrıklaştırma ve perturbasyona yöntemler yetersiz kalmaktadır. Bu durumda, dfiferansiyel dönüşüm metodu oldukça önemlidir.

Bu metot, indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu, Euler metot ve Runge-Kutta metoduna oranla daha etkili bir yöntemdir. Çünkü, indirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu uygulanabilirliği için denklemin değişkenlerine ayrılabilir olması gerekir. Euler metot ve Runge-Kutta metodunda ayrıklaştırma ve hata analizi gerektirir.

Son olarak, bu tezede çalışılan diferansiyel dönüşüm metodu; Adomian ayrışım yöntemi, Homotopi analiz yöntemi, homotopi perturbasyon yöntemi, ve varyasyonel iterasyon yöntemi, v.s. gibi yaklaşık veya tam çözüm veren yarı analitik metotları ile muklayese edilebilir.

KAYNAKLAR

AĞIRAĞAÇ, N., 2017. Diferansiyel Dönüşüm Metodunun Uygulamaları. Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Şanlıurfa, 42s.

AYAZ, F., 2003. On the two-dimensional differential transform method. Applied Mathematics and Computation, 143:361-374.

AYAZ, F., 2004. Solutions of the system of differential equations by differential transform method. Applied Mathematics and Computation, 147:547-567.

CHEN, C. K., and HO, S. H., 1996. Application of differential transformation to eigenvalue problems. Applied Mathematics and Computation, 79:179-188.

CHEN, C. K., and HO, S. H., 1999. Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform method. Applied Mathematics and Computation, 106:171-179.

DAVIS, H. T., 1962. Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations. Dover, New York, USA, 566p.

DEBNATH, L., 2005. Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. Birkhauser, Boston, MA, USA, 737p.

GÜNGÖR, Y., 2013. Diferensiyel Denklemlerin Diferensiyel Dönüşümler Yardımıyla Çözümü. Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul 115s.

LOGAN, J. D., 1994. An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations. Wiley-Interscience, New York, USA, 397p.

TANRIVERDİ, T. and MCLEOD, J. B., 2007. Generalization of the eigenvalues by contour integrals. Appl. Math. Comput., 189(2) : 1765-1773.

TANRIVERDİ, T. and MCLEOD, J. B., 2008. The analysis of contour integrals. Abstr. Appl. Anal., Article ID 765920, 12 pages.

TANRIVERDİ, T., 2009. Differential equations with contour integrals. Integral Transforms and Special Functions, 20 (2): 119-125.

TANRIVERDİ, T., 2009. Contour integrals associated differential equations, Mathematical and Computer Modelling, 49 (3-4): 453-462.

TANRIVERDİ, T. and MCLEOD, J. B., 2010. The Fanno model for turbulent compressible flow. Journal of Differential Equations, 249(12): 2955-2963.

TANRIVERDİ, T., 2017. Oscillating Solutions of the Lane-Emden Equation for Polytropic Indices m= 0 and 1. British J. Math. & Compute. Sci., 20(3): 1-5.

TANRIVERDİ, T., 2018. Evaluating Sine and Cosine Type Integrals. IJASM, 5(2): 11-13.

TANRIVERDİ, T. and AĞIRAĞAÇ, N., 2018. Differential Transform Applied to Certain ODE. Advances in Differential Equations and Control Processes, 19 (3): 213-235.

TANRIVERDİ, T., 2019. Classical way of looking at the Lane-Emden equation. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat., 68 (1): 271-276.

TANRIVERDİ, T., 2019. A Specific Sturm-Liouville Differential Equation. Thermal Science, 23(1): S47-S56.

TANRIVERDİ, T., 2019. Schrödinger equation with potential function vanishing exponentially fast. Journal of Taibah University for Science, 13 (1): 639–643.

ZHOU, J. K., 1986. Differential Transformation and Its Application for Electrical Circuits. Huazhong University Press, Wuhan, China.

WHITHAM, G. B., 1974. Linear and Nonlinear Waves, Wiley, New York, USA, 636p.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:** Ayşe BİZ
Uyruğu	**:** T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:** Şanlıurfa, 1984
E-mail	**:** abiz@harran.edu.tr

EĞİTİM

Derece		**Adı**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Şanlıurfa Kız Lisesi, Şanlıurfa	2001
Üniversite	:	Harran Üni. Matematik Böl., Şanlıurfa	2005
Yüksek Lisans	:	Harran Üni. Matematik Böl., Şanlıurfa	2019

UZMANLIK ALANI : Matematik

YABANCI DİLLER : İngilizce