T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

$[-1, 1]$ ARALIĞINDA BERNSTEIN-STANCU-SCHURER OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ VE YAKLAŞIM HIZI

İsmail GÜMER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2019

Doç. Dr. Aydın İZGİ danışmanlığında, İsmail GÜMER'in hazırladığı **"[-1,1] Aralığında Bernstein-Stancu-SchurerOperatörlerinin Yaklaşım Özellikleri ve Yaklaşım Hızı"**konulu bu çalışma 29/08/2019 tarihinde oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman : Doç. Dr. Aydın İZGİ ....

Üye :Doç.Dr.Kuddusi KAYADUMAN ....

Üye :Dr.Öğrt.Üyesi Mahmut MODANLI …………………

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Doç. Dr. İsmail HİLALİ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanıla özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

$[-1, 1]$ ARALIĞINDA BERNSTEIN-STANCU-SCHURER OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ VE YAKLAŞIM HIZI

İsmail GÜMER

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Aydın İZGİ
Yıl: 2019, Sayfa:46

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu bölümde ele alınan konu ve konu ile bağlantılı literatürdeki çalışmalardan kısaca söz edilmiştir. Aynı zamanda kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde Bernstein ,Stancu ve Schurer polinomlar ile ilgili yapılan çalışmalar kısaca bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde tezde kullanılacak materyal ve yöntemlerden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde ise**,** operatörümüz ile ilgili lineer pozitif operatörlerde kullanılan bazı yöntem ve hesaplamalar yapılmıştır, Maple bilgisayar programından faydalanarak operatörümüzle yapılan yaklaşım için bazı grafikler çizilmiş ve hata miktarları için nümerik değerler hesaplanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Bernnstein polinomları, Korovkin teoremi, yaklaşım, yaklaşım hızı.

ABSRACT

MasterThesis

APPROXIMATION PROPERTIES OF BERNSTEIN-STANCU-SCHURER OPERATORS AND RATE OF APPROXIMATION ON INTERVAL [-1,1]

İsmail GÜMER

Harran University
Graduate School of Natural andAppliedSciences
Department of Mathematic

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Aydın İZGİ
Year: 2019, Page:46

This thesis has four parts. The first part is about introduction. At this thesis, it is briefly mentioned about the subjects of this thesis and studies in the field of literature on the same subject. At the same time, this paper gave place to the basic definations and theorems used at this thesis. At the second part, it is shortly mentioned about studies made on polinoms of Bernstein, Stancu and Schurer. At the third part, it is mentioned about methods and materails used at the thesis. At fourth part some methods and calculations used in potitif lineer operators are made about our operator. By using Maple computer program, some graphs are drawed for estimation of our operator and calculated numeric values for error ammounts

KEY WORDS: Bernstein polynomial, Korovkin theorem, approximation, rate of approximation.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımın her aşamasında yönlendirmeleriyle desteğini esirgemeyen danışman hocam sayın Doç.Dr.Aydın İZGİ'ye ,Arş. Göv. Harun ÇİCEK'e ayrıca hayatım boyunca maddi manevi destekleyen babam İsa GÜMER'e ,annem Hedle GÜMER 'e ağabeylerim Abdullah ve Mehmet GÜMER'e ,kardeşim Halil GÜMER 'e ve tez yazım aşamasında desteğini esirgemeyen değerli arkadaşım Ömer Seyfettin YÜCEL 'e teşekkürü borç bilirim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

SİMGELER DİZİNİ

$G_{\boldsymbol{n}}(f;x)$	$G_{\boldsymbol{n}}$ tanımladığımız operatör
$C[a,b]$	$[a,b]$ deki sürekli fonksiyonlar uzayı
$\|.\|$	norm
$\omega(f;\delta)$	süreklilik modülü
$\rightrightarrows$	düzgün yakınsaması
$B_{\boldsymbol{n}}(f;x)$	Bernstein polinom dizisi

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinin amacı çözülmesi zor fonksiyonları daha kullanış hale getirmek için yine bir fonksiyon olan polinomlara ihtiyaç duyarız. Bu durumda yaklaşım teorisi kullanılır.

1885'te K. Weierstrass kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli herbir fonksiyonapolinomlar ile yaklaşılabileceğini göstermiştir.

Weierstrass teoreminin ilk ispatı anlaşılması zor ve karmaşık bir yapıdır. Bunu, daha anlaşılır bir yapıya dönüştürmek için bir çok ünlü matematikçi bu teorem üzerinde çalışmıştır.

1912 yılında Bernstein polinomlarını

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x)^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \qquad 0 \le x \le 1 \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bernstein polinomlarını 1962 yılında Schurer aşağıdaki şekilde modifiye ederek tanımlamıştır:

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{m+p} \binom{m+p}{k} (x)^k (1-x)^{m+p-k} f\left(\frac{k}{m}\right) \qquad 0 \le x \le 1 \tag{1.2}$$

1969 yılında Stancu Bernstein polinomlarını modifiye ederek

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x)^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right) \quad 0 \le \alpha \le \beta \tag{1.3}$$

şeklinde tanımlamıştı.

2011 yılında Ayşegül Çilo'nun İZGİ danışmanlığında başlayıp 2012 yılında tamamladığı yüksek lisans tezinde (sh.2) üzerinde çalıştığı operatör

$$\mathrm{C_n(f;x)} = \frac{1}{2^{\mathrm{n}}} \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}} (1+\mathrm{x})^{\mathrm{k}} (1-\mathrm{x})^{\mathrm{n-k}} \mathrm{f}\left(\frac{2\mathrm{k}}{\mathrm{n}} - 1\right) \quad -1 \le \mathrm{x} \le 1 \tag{1.4}$$

olarak tanımlanmıştır.

Bu çalışmada (1.4)'teki operatör aşağıdaki şekilde Schurer-Stancu tipinde modifiye edilmiştir :

$x \in [-1,1]$ve $0 \leq \alpha \leq \beta$ olmak üzere;

$$G_n(f;x) = \frac{1}{2^{n+p}} \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} (1+x)^k (1-x)^{n+p-k} f\left(2\frac{k+\alpha}{n+p+\beta} - 1\right) \quad (1.5)$$

modifikasyonunun yaklaşımını ve yaklaşım özelliklerini inceleyeceğiz. Tanımladığımız operatörün Korovkin(1953) teoremin şartlarını sağladığı incelenmiştir. Ayrıca süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı Lipschitz şartları sağlayan fonksiyonların yaklaşımı incelenmiştir. Yine Voronswkaja teoremini sağladığı gösterilmiştir. Ayrıca momentleri hesaplanmıştır.

1.1.Temel Kavramlar

Tanım 1.1.1

Lineer uzayda tanımlanmış dönüşümlere operatör denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 1.1.2 Lineer operatör

X ve Y aynı cisim üzerinde tanımlanmış lineer iki fonksiyon uzayı olsun.G ,X' den Y' ye tanımlanmış bir operatör olsun.Eğer $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$G(\alpha x + \beta y) = \alpha G(x) + \beta G(y)$$

koşulunu sağlıyorsa G operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 1.1.3 Operatörün pozitifliği

G operatörü $(X^+ = \{f \in X: f \geq 0\})$ X^+kümesinin her elemanı $(Y^+ = \{g \in Y: g \geq 0\})Y^+$ kümesinin bir elemanına eşliyorsa yani, f bir fonksiyon G bir operatör olmak üzere $f \geq 0$ $için$ $G(f;x) \geq 0$ sağlanıyorsa G operatörüne pozitif operatör denir. Hem lineerlik hem de pozitif şartını sağlayan operatörlere lineer pozitif operatörler denir.

Teorem 1.1.4

Lineer pozitif operatör monotondur. Yani ;

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow G(f;x) \leq G(g;x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat 1.1.4

G lineer pozitif operatör için, $G(X^{+}) \subset Y^{+}$sağlanır. Yani $f(x) \geq 0$ olduğundan $G(f;x) \geq 0$ olur. O halde her x için

$$f(x) \leq g(x)$$

olduğundan

$$g(x) - f(x) \geq 0$$

olur.

G operatörü pozitif olduğundan;

$$G(g(x) - f(x); x) \geq 0$$

olur. Goperatörü lineer olduğundan

$$G(g(x);x) - G(f(x);x) \geq 0 \quad \Rightarrow G(f(x);x) \leq G(g(x);x)$$

olur. İspat tamamlanmış olur (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Teorem 1.1.5

G lineer pozitif operatör olmak üzere, $|G(h)| \leq G(|h|)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat 1.1.5

Herhangi bir h fonksiyonu için ;

$$-|h| \leq h \leq |h|$$

dır.G operatörü lineer olduğundan dolayı monoton artandır.

O halde;

$$G(-|h|) \leq G(h) \leq G|(h)| \tag{1.6}$$

yazabiliriz.

G lineer olduğundan

$$G(-|h|) = -G(|h|)$$

dir. Elde edilen bu eşitlikte (1.6)'de yerine yazılırsa;

$$-G(|h|) \leq G(h) \leq G(|h|) \Rightarrow |G(h)| \leq G(|h|)$$

olur ki buda ispatı tamamlar (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 1.1.6

$X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{N}$ bir fonksiyon olsun, eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $x_{1,} x_2 \epsilon X$ noktaları için $|x_1 - x_2| < \delta$ olduğunda$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde yalnızca ε'na bağlı $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı var ise f fonksiyonu X kümesi üzerinde düzgün süreklidir (Musayev, Alp, Mustafayev ve Ekincioğlu, 2007).

Tanım 1.1.7

$Q = \{L: C[a.b] \to C[a,b]: L$ lineer pozitif operatör },
$\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ olsun. $L: \mathbb{N} \to Q$ şeklinde tanımlınan diziye lineer pozitif operatör dizisi adı verilir ve $(L_n) = (L_1, L_2, L_3, \dots\dots)$ile gösterilir.

Tanım 1.1.8

$f \in C[a,b]$olmak üzere $C[a,b]$ üzerinde tanımlı norm;

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \tag{1.7}$$

ile tanımlanır.

Tanım 1.1.9

$A \subset \mathbb{R}$, $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a\epsilon A$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $|x - a| < \delta$ olduğundan $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon)$sayısı var ise f fonksiyonu a noktasında süreklidir denir(Balcı, 2012).

Tanım 1.1.10

$X \subset \mathbb{R}$ ve X üzerinde tanımlı bütün fonksiyonların kümesi $F(X)$olsun. $d: \mathbb{N} \rightarrow F(X)$şeklinde tanımlı d fonksiyonuna bir fonksiyon dizisi denir. Terimler f_1, f_2, f_3 ile gösterilir. Dizi (f_n) ile gösterilir.

Tanım 1.1.11

$f_n: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonların dizisi olsun. Her bir $x \in [a.b]$ ve her $\varepsilon > 0$ için öyle bir n_0 vardır ki her $n > n_0$için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde n_0 varsa (f_n)dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır denir(Shevchuk , 1992).

Tanım 1.1.12

Her $x \in [a,b]$ve her $\varepsilon > 0$ için öyle bir n_0 vardır ki her $n > n_0$olduğunda ; $[f_n(x) - f(x)] < \varepsilon$ olacak şekilde n_0 varsa (f_n)dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir ve $f_n \rightrightarrows f$ ile gösterilir(Shevchuk , 1992).

Teorem 1.1.13

$x \epsilon [0,1]$, $0 \leq a_{k,n} \leq 1$ olduğunda

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(a_{k,n}) P_{k,n}(x)\,, \quad P_{k,n}(x) \geq 0 \tag{1.8}$$

pozitif operatör dizisinin $n \to \infty$ için $[0,1]$aralığında f fonksiyonu düzgün yakınsak olabilmesi için gerekli ve yeterli üç koşul vardır. H. Bohman bunları;

$$L_n(1;x) \ \rightrightarrows 1 \tag{1.9}$$

$$L_n(t;x) \ \rightrightarrows \ x \tag{1.10}$$

$$L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2 \tag{1.11}$$

şeklinde ifade etmiştir. Aşikadır ki Bohman'ın araştırdığı operatörlerin değeri f fonksiyonunun $[0,1]$aralığının dışındaki değerlerinden bağımsızdır.

P.P.Korovkin 1953’te, Bohman'ın koşullarının genel halde de geçerli olduğunu görmüş ve genel bir teorem ispatlamıştır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995; Korovkin,1953).

Teorem 1.1.14 (P.P Korovkin Teoremi):

Eğer L_n lineer pozitif dizisi $[a,b]$ aralığında (1.9), (1.10) ve (1.11) koşullarını sağlıyorsa o takdirde $C[a,b]$ uzayında olan ve tüm reel eksende sınırlı her hangi bir f fonksiyonu için $n \to \infty$ olduğunda;

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x), \qquad\qquad a \leq x \leq b$$

olur. Bu ifadeye eş değer olarak aşağıdaki gösterimler de kullanılır.

$$\|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a \leq x \leq b} |L_n(f;x) - f(x)| = 0$$

İspat 1.1.14

f fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğu için öyle bir $M > 0$ sayısı bulabilir ki; tüm x'ler için

$$|f(x)| \leq M \tag{1.12}$$

sağlanır.Kabul edelim ki, $f \in C[a,b]$ olsun. Sürekli fonksiyonların tanımı gereği $\forall\, \varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ bulabiliriz ki $t \in (-\infty, +\infty)$ve $x \in [a,b]$ için

$$|t-x| < \delta$$

olduğunda;

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \tag{1.13}$$

(1.13) eşitsizliği; $x, t \in [a,b]$ olduğundan f fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli olduğu için$x \epsilon [a,b]$, $t \notin [a,b]$ olduğunda ise f fonksiyonu a ve b noktalarında sırasıyla soldan ve sağdan sürekli bir fonksiyon olduğu için sağlanır.

Her $x \epsilon [a,b]$; $f(x) \leq M \quad M > 0$ için

$$|t-x| \geq \delta \Rightarrow \frac{|t-x|}{\delta} \geq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{|t-x|}{\delta} \leq \frac{|t-x|^2}{\delta^2}$$

$|t-x| \geq \delta$olduğunda ise (1.12) ve üçgen eşitsizliğinden;

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M \leq 2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2}$$

olur. O halde;

$|t-x| < \delta$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

$|t-x| \geq \delta$

için

$$|f(t)-f(x)| \leq 2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\forall\ t \in \mathbb{R}$ ve $x\epsilon\ [a,b]$ için

$$|f(t)-f(x)| < \varepsilon + 2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2} \tag{1.14}$$

dır. Şimdi (1.9), (1.10) ve (1.11) koşullarını gerçekleyen (L_n) lineer operatör dizisinin,

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(f)-\ f\|_{C[a,b]}=0$$

eşitliğini sağladığını göstermelidir. (L_n) operatörünün lineerliğinden;

$$\begin{aligned}|L_n(f(t);x)-\ f(x)| &= |L_n(f(t);x)-\ f(x)+L_n(f(x);x)-L_n(f(x);x)|\\ &= |L_n(f(t);x)-L_n(f(x);x)+L_n(f(x);x)-f(x)|\\ &= |L_n(f(t)-f(x);x)+f(x)L_n(\,1;x)-1|\end{aligned}$$

dır. Burada üçgen eşitsizliğini kullanılarak;

$$|L_n(f(t);x)-f(x)|\ \leq |L_n(f(t)-f(x);x)|+|f(x)||L_n(1;x)-1| \tag{1.15}$$

elde edilir.(1.9)' den

$$|L_nf(t)-\ f(x);x| \leq |L_n(|f(t)-f(x)|;x)|$$

şeklinde yazılır.Bu durumda (1.9)ve (1.12)' den dolayı (1.15) eşitsizliği;

$$|L_n(f(t);x)-f(x)| \leq L_n(|f(t)-f(x)|;x)+M|L_n(1;x)-1|$$

olarak yazılabilir.(L_n)monoton artan olduğundan (1.14)'den;

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \leq L_n\left(\left(\varepsilon + 2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2}\right);x\right) + M|L_n(1;x) - 1| \quad (1.16)$$

elde edilir. Öte yandan (L_n) lineer pozitif olduğu dikkate alınırsa;

$$L_n\left(\left(\varepsilon + 2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2}\right);x\right) = L_n(\varepsilon;x) + L_n\left(2M\frac{|t-x|^2}{\delta^2};x\right)$$
$$= \varepsilon L_n(1;x) + 2\frac{M}{\delta^2}L_n(t^2 - 2xt + x^2;x)$$
$$= \varepsilon L_n(1;x) + 2\frac{M}{\delta^2}\{L_n(t^2;x) - x^2 - x^2 + 2x^2 - 2x\,L_n(t;x) + x^2L_n(1;x)\}$$
$$= \varepsilon L_n(1;x) + 2\frac{M}{\delta^2}\{L_n(t^2;x) - x^2 + 2x^2 - 2x\,L_n(t;x) + x^2L_n(1;x) - x^2\}$$
$$= \varepsilon L_n(1;x) + 2\frac{M}{\delta^2}\{(L_n(t^2;x) - x^2) - 2x(L_n(t;x) - x) + x^2(L_n(1;x) - 1)\}$$

elde edilir. Bu ifadenin (1.16) da yerine yazılmasıyla;

$$|L_n(f(t) - f(x);x)| \leq \varepsilon L_n(1;x)$$

$$+2\frac{M}{\delta^2}\{(L_n(t^2;x) - x^2) - 2x(L_n(t;x) - x) + x^2(L_n(1;x) - 1) + M|L_n(1;x) - 1|\}$$

elde edilen bu ifade de $(1.9), (1.10)$ve(1.11) koşullarının kullanılmasıyla;

$$|L_n(f(t) - f(x);x)| \leq \varepsilon + \varepsilon 2\frac{M}{\delta^2} = \varepsilon\left(1 + 2\frac{M}{\delta^2}\right)$$

elde edilen bu ifadeyi her $\varepsilon' \geq 0$ için

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \leq \varepsilon'$$

sağlanır.Yani

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur(Hacısalihoğlu ve Hacıyev,1995).

Tanım 1.1.15

$f[a,b]$aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limiti var ve sonlu ise f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilir denir.

Bu değer $f^{'}(x_0)$ veya $\frac{df(x_0)}{dx}$ ile gösterilir.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f^{'}(x_0)$$

dir (Thomas,Finney, 1984).

Teorem 1.1.16

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli (a,b) aralığında türevlenebilir ve $f(a) = f(b)$olsun.Bu durumda $f^{'}(c) = 0$ olacak biçimde en az bir $c \in (a,b)$vardır(Musayev, Alp, Mustafayev ve Ekincioğlu, 2007).

Tanım 1.1.17

$(a,b) \subset \mathbb{R}$ aralığında$(n+1)$. mertebeden türevlenebilen $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve bir $x_0 \in (a,b)$ noktası verilmiş olsun.Bu durumda

$$f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

dır(Musayev, Alp, Mustafayev ve Ekincioğlu, 2007).

Tanım 1.1.18

S.Bernstein' in 1912 yılında bahsettiği Weierstrass yaklaşım teoremi polinomu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$0 \leq x \leq 1$olmak üzere bu polinom

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} \tag{1.17}$$

şeklindedir(Bernstein,1912).

Burada

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

dir.

(1.17) detanımlanan Bernstein operatörü için;

$$B_n(1;x) = 1 \tag{1.18}$$

$$B_n(t;x) = x \tag{1.19}$$

$$B_n(t^2;x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} \tag{1.20}$$

şartları sağlanır.

Tanım 1.1.19

$[a,b]$aralığında tanımlı f fonksiyonu verilsin. $[0,b-a]$ aralığında tanımlı

$$\omega(\delta) \coloneqq \omega(f,\delta) = \{sup|f(x_2) - f(x_1)|: |x_2 - x_1| \leq \delta, x_1, x_2 \in [a,b]\}$$

fonksiyonuna f' in süreklilik modülü denir (Shevchuk, 1992).

Teorem 1.1.20

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olsun. Bu durumda f fonksiyonunun sürekli modülü

1) $\lim_{\delta\to 0} \omega(\delta) = 0$

2) $0 < \delta_1 < \delta_2$ ise $\omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_2)$

3) $\omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$

4) $\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta), n \in Z^+$

5) $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t-x|)$

6) $\omega(f; |t-x|) \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right)\omega(f;\delta)$

özelliklerini sağlar(Altomare ve Campiti,1994).

Teorem 1.1.21 (Hölder eşitsizliği)

$1 < p < \infty$ ve q, p' nin eşleniği olsun. $a_1, a_2, \dots a_n$ ve $b_1, b_2, \dots b_n$ sayıları

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{n} |a_\mathrm{k} b_\mathrm{k}| \leq \left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{n} |a_\mathrm{k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\mathrm{j}=1}^{n} |b_\mathrm{k}|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$p = q = 2$ ise Cauchy-Schwartz-Bunyakovsky eşitsizliği denir.

Tanım 1.1.21 (Lipschitz sınıfı fonksiyonlar):

$0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere;

$$|f(t) - f(x)| \leq M|t-x|^\alpha$$

şartını sağlayan fonksiyonlar sınıfına Lipschitz sınıfı fonksiyonlar, M'ye de Lipschitz sabiti denir ve $f \in Lip_M(\alpha)$ile gösterilir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

1912 yılında Bernstein tarafından $x \in [0,1]$aralığında

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k}$$

şeklinde gösterilmiştir. $[0,1]$ aralığı üzerinde olan bir f fonksiyonuna yaklaşılabileceği ispatlanmıştır.

1932 yılında Voronswkaja tarafından $f \in C^2[-1,1]$ve f, f', f'' fonksiyonları $[0,1]$ aralığında sınırlı ise;

$$\lim_{n\to\infty} n\left(B_n(f;x) - f(x)\right) = \frac{-x(1-x)}{2} f''(x)$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmiştir.

1935 yılında T. Popoviciu tarafından $\omega(f;\delta)$ ile f fonkisyonunun süreklilik modülü gösterilmek üzere

$$|f(x) - B_n(f;x)| \le C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

olduğuna ispatlanmıştır.

H.Bohman 1951 yılında lineer pozitif operatör dizisinin sürekli bir fonksiyona yakınsaklığını $[0,1]$ aralığında incelemiştir. Bohman'ın tanımladığı operatör şöyledir.

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(a_{k,n})\,P_{k,n}, \qquad P_{k,n} \ge 0$$

Olarak tanımlanmıştır. 1912 yılından günümüze kadar Bernstein polinomunu bir çok genelleşmesi tanımlanmış ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Schurer tarafından 1962 yılında

$$L_{m,p}: C[0,p+1] \to C[0,1] m \in \mathbb{N} \text{ ve } f \in C[0,p+1]$$

$$L_{m,p}(f;x) = \sum_{k=0}^{m+p} f\left(\frac{k}{m}\right)\binom{m+p}{k}(x)^k(1-x)^{m+p-k}\ x \in [0,1]$$

1969 yılında Stancu tarafından α, β

$0 \leq \alpha \leq \beta$

koşulunu sağlayan pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$S_{n,\alpha,\beta}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)\binom{n}{k}(x)^k(1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlanan $S_{n,\alpha,\beta}: C[0,1] \to C[0,1]$ Bernstein-Stancu polinomudur. Bernstein-Stancu polinomlar dizisinin $[0,1]$ aralığında $0 \leq \alpha \leq \beta$ koşulunu sağlayan her α, β reel sayı için f sürekli fonksiyonuna düzgün olarak yaklaştığını göstermiştir. İZGİ danışmalığında 2011 yılında Ayşegül Çilo'nun 2012 yılında bitirdiği yüksek lisans tezinde çalıştığı operatör Schurer tipinde modifiye edilmiştir.

Çilo'nun çalıştığı bu operatör aşağıdaki şekildedir.

$$C_n(f;x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k(1-x)^{n-k} f\left(\frac{2k}{n}-1\right), -1 \leq x \leq 1$$

bu çalışmamızda aşağıdaki operatörü inceleyeceğiz.

$x \in [-1,1]$ ve $0 \leq \alpha \leq \beta$ olsun.

$$G_n(f;x) = \frac{1}{2^{n+P}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k} f\left(2\frac{k+\alpha}{n+p+\beta}-1\right)$$

şeklinde tanımlanmıştır

3.MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Materyal

Bu çalışmada akademik kitaplar, internet ve makaleler üzerinden yapılan araştırmalardan faydalanılmıştır.

3.2 Yöntem

Bernstein–Stancu-Schurer ile ilgili çalışmalar incelenmiş ve $G_n(f;x)$ operatörü diğer operatörlerle karşılaştırılmıştır. Elde edilen çalışmanın sonucunda grafik ve nümerik tablosu oluşturulmuştur.

Bu çalışmada elde edilen grafikler ve nümerik değerler hesaplanırken bilgisayar programı Maple kullanılmıştır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde tanımlamış olduğumuz $G_n(f;x)$ operatörün lineer pozitif olduğu veKorovkin teoremi şartlarını sağladığı gösterilmiştir.Ayrıca $G_n(f;x)$ operatörünün merkezi momentleri, yaklaşım hızı ve asimptotik yaklaşım hesaplanmıştır.

Tanım 4.1

Farz edelim ki $x \in [-1,1]$ ve $0 \leq \alpha \leq \beta$ olsun.

$$G_n(f;x) = \frac{1}{2^{n+P}} \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} (1+x)^k (1-x)^{n+p-k} f\left(2\frac{k+\alpha}{n+p+\beta} - 1\right)$$

olacak biçimde tanımlı lineer pozitif operatöre $G_n(f;x)$operatörü denir. $G_n(f;x)$ operatörünün lineer ve pozitif bir operatör olduğunu gösterelim.

Lineerlik:

Her $f, g \in [-1,1]$ ve her $a, b \in \mathbb{R}$ için,

$$G_n\left(\left(af(t) + bg(t)\right);x\right)$$

$$= \frac{1}{2^{n+P}} \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} (1+x)^k (1-x)^{n+p-k} (af)\left(2\frac{k+\alpha}{n+p+\beta} - 1\right)$$

$$+ \frac{1}{2^{n+p}} \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} (1+x)^k (1-x)^{n+p-k} (bg)\left(2\frac{k+\alpha}{n+p+\beta} - 1\right)$$

$$= a\frac{1}{2^{n+p}} \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} (1+x)^k (1-x)^{n+p-k} f\left(2\frac{k+\alpha}{n+p+\beta} - 1\right)$$

$$+ b\frac{1}{2^{n+p}} \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} (1+x)^k (1-x)^{n+p-k} g\left(2\frac{k+\alpha}{n+p+\beta} - 1\right)$$

$$= aG_n(f(t);x) + bG_n(g(t);x)$$

olur. O halde $G_n(f;x)$ lineer operatördür.

Pozitiflik:

$k,n \in \mathrm{N}$ için ve $x \in [-1,1]$ için

$$\frac{1}{2^{n+P}}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k} \geq 0$$

Olduğunda $f \geq 0$ ise $G_n(f;x) \geq 0$ olur. O halde $G_n(f;x)$ lineer pozitif bir operatördür.

Lemma 4.1.1

Her $x \in [-1,1]$ için(4.1)'de tanımladığımız operatör aşağıdaki sonuçları sağlar.

i$_1$) $G_n(1;x) = 1$

i$_2$) $G_n(t;x) \quad = x - \dfrac{\beta}{(n+p+\beta)}x + \dfrac{2\alpha-\beta}{(n+p+\beta)}$

i$_3$) $$G_n(t^2;x) \quad = x^2 - \frac{(1+2\beta)(n+p)+\beta^2}{(n+p+\beta)^2}x^2 + \frac{2(2\alpha-\beta)(n+p)}{(n+p+\beta)^2}x + \frac{n+p+(\beta-2\alpha)^2}{(n+p+\beta)^2}$$

i$_4$) $$G_n(t^3;x) = x^3 - \frac{3(1+\beta)(n+p)^2+(3\beta^2-2)(n+p)+\beta^3}{(n+p+\beta)^3}x^3 + \frac{-3(\beta-2\alpha)(n+p)^2-3(2\alpha-\beta)(n+p)}{(n+p+\beta)^3}x^2 + \frac{3(n+p)^2-(2-3\beta^2+12\alpha\beta)(n+p)}{(n+p+\beta)^3}x + \frac{6(n+p)^2\beta+3(2\alpha-\beta-4\alpha^2)(n+p)-12\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-\beta^3}{(n+p+\beta)^3}$$

İ$_5$) $$G_n(t^4;x) \quad = x^4 - \left(\frac{2(3-2\beta)(n+p)^3+(-11+6\beta^2)(n+p)^2}{(n+p+\beta)^4}\right.$$

$$+\ \frac{2(3+2\beta^3)(n+p)+\beta^4}{(n+p+\beta)^4}\Bigg)x^4$$

$$+\frac{-4\beta((n+p)^2-3(n+p)+2)n}{(n+p+\beta)^4}x^3$$

$$+\Bigg(\frac{6(1-4\alpha)(n+p)^3+2(27-12\alpha\beta+3\beta^2)(n+p)^2}{(n+p+\beta)^4}$$

$$-\frac{(6-4\alpha\beta+\beta^2)(n+p)}{(n+p+\beta)^4}\Bigg)x^2$$

$$+\Bigg(\frac{12(1-2\alpha)(n+p)^3+4(22-12\alpha^2-6\beta)(n+p)^2}{(n+p+\beta)^4}$$

$$-\frac{4(12-2\beta+12\alpha^2\beta-6\alpha\beta^2+\beta^3)(n+p)}{(n+p+\beta)^4}\Bigg)x$$

$$+\frac{-8(n+p)^3\alpha+(23-24\alpha\beta-24\alpha^2)(n+p)^2}{(n+p+\beta)^4}$$

$$-\frac{2(3+16\alpha^3+12\alpha\beta-3\beta^2)(n+p)}{(n+p+\beta)^4}$$

$$+\frac{-32\alpha^3\beta+24\alpha^2\beta^2-8\alpha\beta^3+\beta^4}{(n+p+\beta)^4}$$

İspat :

i_1)

$$G_n(1;x)\ =\ \frac{1}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+P}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\,1$$

$$(1+x+1-x)^{k+n+p-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}$$

$$2^{n+p}=\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}$$

$G_n(1;x)=\frac{1}{2^{n+p}}2^{n+p}=1$ elde edilir.

i_2)

$$G_n(t;x) = \frac{1}{2^{n+P}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\left(2\frac{(k+\alpha)}{(n+p+\beta)}-1\right)$$

$$= \frac{2}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\frac{(k+\alpha)}{(n+p+\beta)}-1$$

$$= \frac{2}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\frac{k}{(n+p+\beta)}$$

$$+\frac{2\alpha}{(n+p+\beta)}-1$$

$$= \frac{2(n+p)}{2^{n+p}(n+p+\beta)}\sum_{k=1}^{n+p}\binom{n+p}{k}\frac{k}{(n+p)}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}$$

$$+\frac{2\alpha}{(n+p+\beta)}-1$$

$$= \frac{(n+p)}{(n+p+\beta)}(1+x)+\frac{2\alpha}{(n+p+\beta)}-1$$

$$G_n(t;x) = x-\frac{\beta}{(n+p+\beta)}x+\frac{2\alpha-\beta}{(n+p+\beta)}$$

i_3)

$$G_n(t^2;x) = \frac{1}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\left(2\frac{(k+\alpha)}{(n+p+\beta)}-1\right)^2$$

$$= \frac{4}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\frac{(k+\alpha)^2}{(n+p+\beta)^2}$$

$$-\frac{4}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\frac{(k+\alpha)}{(n+p+\beta)}+1$$

$$= \frac{4}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\frac{(k^2+2k\alpha+\alpha^2)}{(n+p+\beta)^2}$$

$$-\frac{4(n+p)}{2^{n+p}(n+p+\beta)}\sum_{k=1}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\frac{k}{n+p}$$

$$-\frac{4\alpha}{(n+p+\beta)}+1$$

$$=\frac{4}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\frac{k^2}{(n+p+\beta)^2}$$

$$+\frac{8\alpha}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\frac{k}{(n+p+\beta)^2}$$

$$+\frac{4\alpha^2}{(n+p+\beta)^2}-\frac{2(n+p)}{(n+p+\beta)}(1+x)-\frac{4\alpha}{(n+p+\beta)}+1$$

$$=\frac{4}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\frac{k(k-1)+k}{(n+p+\beta)^2}$$

$$+\frac{4\alpha(n+p)}{(n+p+\beta)^2}(1+x)+\frac{4\alpha^2}{(n+p+\beta)^2}-\frac{2(n+p)}{(n+p+\beta)}(1+x)$$

$$-\frac{4\alpha}{(n+p+\beta)}+1$$

$$=\frac{(n+p)(n+p-1)}{(n+p+\beta)^2}(1+x)^2+\frac{2(n+p)}{(n+p+\beta)^2}(1+x)+$$

$$+\frac{4\alpha(n+p)}{(n+p+\beta)^2}(1+x)+\frac{4\alpha^2}{(n+p+\beta)^2}$$

$$-\frac{2(n+p)}{(n+p+\beta)}(1+x)-\frac{4\alpha}{(n+p+\beta)}+1$$

$$G_n(t^2;x)=x^2-\frac{(1+2\beta)(n+p)+\beta^2}{(n+p+\beta)^2}x^2+\frac{2(2\alpha-\beta)(n+p)}{(n+p+\beta)^2}x$$

$$+\frac{n+p+(\beta-2\alpha)^2}{(n+p+\beta)^2}$$

i$_4$)

$$G_n(t^3;x) = \frac{1}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\left(2\frac{(k+\alpha)}{(n+p+\beta)}-1\right)^3$$

$$=\frac{8}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\frac{(k+\alpha)^3}{(n+p+\beta)^3}$$

$$-\frac{12}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\frac{(k+\alpha)^2}{(n+p+\beta)^2}$$

$$+\frac{6}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\frac{(k+\alpha)}{(n+p+\beta)}-1$$

$$=\frac{8}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\left(\frac{(k^3+3k^2\alpha+3k\alpha^2+\alpha^3)}{(n+p+\beta)^3}\right)$$

$$-\frac{12}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\frac{(k^2+2k\alpha+\alpha^2)}{(n+p+\beta)^2}$$

$$+\frac{6}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\frac{k}{(n+p+\beta)}$$

$$+\frac{6\alpha}{(n+p+\beta)}-1$$

$$=\frac{8}{2^{n+p}(n+p+\beta)^3}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\ k^3$$

$$+\frac{24\alpha}{2^{n+p}(n+p+\beta)^3}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\ k^2$$

$$+\frac{24\alpha^2}{2^{n+p}(n+p+\beta)^3}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\ k$$

$$+\frac{8\alpha^3}{(n+p+\beta)^3}$$

$$-\frac{12}{2^{n+p}(n+p+\beta)^2}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\;k^2$$

$$-\frac{24\alpha}{2^{n+p}(n+p+\beta)^2}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\;k$$

$$-\frac{12\alpha^2}{(n+p+\beta)^2}$$

$$+\frac{6}{2^{n+p}(n+p+\beta)}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\,k$$

$$+\frac{6\alpha}{(n+p+\beta)}-1$$

$$=\frac{8}{2^{n+p}(n+p+\beta)^3}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}$$

$$\mathrm{x}(k(k-1)(k-2)+3k^2-2k)$$

$$+\frac{6\alpha(n+p)(n+p-1)}{(n+p+\beta)^3}\;(1+x)^2+\frac{12\alpha^2(n+p)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)$$

$$+\frac{8\alpha^3}{(n+p+\beta)^3}\;-\frac{3(n+p)(n+p-1)}{(n+p+\beta)^2}(1+x)^2$$

$$-\frac{12\alpha(n+p)}{(n+p+\beta)^2}\;(1+x)\qquad-\frac{12\alpha^2}{(n+p+\beta)^2}\;+\frac{3(n+p)}{(n+p+\beta)}(1+x)$$

$$+\frac{6\alpha}{(n+p+\beta)}-1$$

$$=\frac{8}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\;\frac{k(k-1)(k-2)}{(n+p+\beta)^3}$$

$$+\frac{6(n+p)(n+p-1)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)^2\;+\frac{12(n+p)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)$$

$$-\frac{8(n+p)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)\;+\frac{6\alpha(n+p)(n+p-1)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)^2$$

$$+\frac{12\alpha^2(n+p)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)\;+\frac{8\alpha^3}{(n+p+\beta)^3}$$

$$-\frac{3(n+p)(n+p-1)}{(n+p+\beta)^2}(1+x)^2-\frac{12\alpha(n+p)}{(n+p+\beta)^2}(1+x)$$

$$-\frac{12\alpha^2}{(n+p+\beta)^2}+\frac{3(n+p)}{(n+p+\beta)}(1+x)+\frac{6\alpha}{(n+p+\beta)}-1$$

$$=\frac{(n+p)(n+p-1)(n+p-2)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)^3$$

$$+\frac{6(n+p)(n+p-1)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)^2+\frac{12(n+p)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)$$

$$-\frac{8(n+p)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)+\frac{6\alpha(n+p)(n+p-1)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)^2$$

$$+\frac{12\alpha(n+p)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)+\frac{12.\alpha^2.(n+p)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)+\frac{8\alpha^3}{(n+p+\beta)^3}$$

$$-\frac{3(n+p)(n+p-1)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)^2-\frac{6n}{(n+p+\beta)^2}(1+x)$$

$$-\frac{12\alpha(n+p)}{(n+p+\beta)^2}(1+x)-\frac{12\alpha^2}{(n+p+\beta)^2}+\frac{3(n+p)}{(n+p+\beta)}(1+x)$$

$$+\frac{6\alpha}{(n+p+\beta)}-1$$

$$=x^3-\frac{3(1+\beta)(n+p)^2+(3\beta^2-2)(n+p)+\beta^3}{(n+p+\beta)^3}x^3$$

$$+\frac{-3(\beta-2\alpha)(n+p)^2-3(2\alpha-\beta)(n+p)}{(n+p+\beta)^3}x^2$$

$$+\frac{-3(n+p)^2+(2-3\beta^2+12\alpha\beta)(n+p)}{(n+p+\beta)^3}x$$

$$+\frac{6(n+p)^2\beta+3(2\alpha-\beta-4\alpha^2)(n+p)-12\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-\beta^3}{(n+p+\beta)^3}$$

$$G_n(t^3;x)=x^3-\frac{3(1+\beta)(n+p)^2+(3\beta^2-2)(n+p)+\beta^3}{(n+p+\beta)^3}x^3$$

$$+\frac{-3(\beta-2\alpha)(n+p)^2-3(2\alpha-\beta)(n+p)}{(n+p+\beta)^3}x^2$$

$$+\frac{-3(n+p)^2+(2-3\beta^2+12\alpha\beta)(n+p)}{(n+p+\beta)^3}x$$

$$+\frac{6(n+p)^2\beta+3(2\alpha-\beta-4\alpha^2)(n+p)-12\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-\beta^3}{(n+p+\beta)^3}$$

i_5)

$$G_n(t^4;x) = \frac{1}{2^{n+P}}\sum_{k=0}^{n+P}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\left(2\frac{(k+\alpha)}{(n+p+\beta)}-1\right)^4$$

$$=\frac{16}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\frac{(k+\alpha)^4}{(n+p+\beta)^4}$$

$$-\frac{32}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\frac{(k+\alpha)^3}{(n+p+\beta)^3}$$

$$+\frac{24}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\frac{(k+\alpha)^2}{(n+p+\beta)^2}$$

$$-\frac{8}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\frac{(k+\alpha)}{(n+p+\beta)}+1$$

$$=\frac{16}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}$$

$$\text{x}\left[\frac{(k^4+4k^3\alpha+6k^2\alpha^2+4k\alpha^3+\alpha^4)}{(n+p+\beta)^4}\right]$$

$$-\frac{32}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}$$

$$\text{x}\left[\frac{(k^3+3k^2\alpha+3k\alpha^2+\alpha^3)}{(n+p+\beta)^3}\right]$$

$$+\frac{24}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}\frac{(k^2+2k\alpha+\alpha^2)}{(n+p+\beta)^2}$$

$$-\frac{4(n+p)}{(n+p+\beta)}(1+x)-\frac{8\alpha}{(n+p+\beta)}+1$$

$$= \frac{16}{2^{n+p}} \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} (1+x)^k (1-x)^{n+p-k} \; \frac{k^4}{(n+p+\beta)^4}$$

$$+ \frac{8\alpha(n+p)(n+p-1)(n+p-2)}{(n+p+\beta)^4}(1+x)^3$$

$$+ \frac{24\alpha^2(n+p)(n+p-1)}{(n+p+\beta)^4}(1+x)^2 \;\; + \frac{32\alpha^3(n+p)}{(n+p+\beta)^4}(1+x)$$

$$+ \frac{16\alpha^4}{(n+p+\beta)^4} - \frac{4(n+p)(n+p-1)(n+p-2)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)^3$$

$$- \frac{24\alpha(n+p)(n+p-1)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)^2 - \frac{48\alpha^2(n+p)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)$$

$$- \frac{32.\alpha^3}{(n+p+\beta)^3} + \frac{6(n+p)(n+p-1)}{(n+p+\beta)^2}(1+x)^2$$

$$+ \frac{24\alpha(n+p)}{(n+p+\beta)^2}(1+x) \quad + \frac{24\alpha^2}{(n+p+\beta)^2} \quad - \frac{4(n+p)}{(n+p+\beta)}(1+x)$$

$$- \frac{8\alpha}{(n+p+\beta)} + 1$$

$$= \frac{16}{2^{n+p}} \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} (1+x)^k (1-x)^{n+p+-k}$$

$$\text{x} \left[\frac{k(k-1)(k-2)(k-3) + 6k^3 - 11k^2 + 6k}{(n+p+\beta)^4} \right]$$

$$+ \frac{8\alpha(n+p)(n+p-1)(n+p-2)}{(n+p+\beta)^4}(1+x)^3$$

$$+ \frac{24\alpha^2(n+p)(n+p-1)}{(n+p+\beta)^4}(1+x)^2 + \frac{32\alpha^3(n+p)}{(n+p+\beta)^4}(1+x)$$

$$+ \frac{16\alpha^4}{(n+p+\beta)^4} - \frac{4(n+p)(n+p-1)(n+p-2)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)^3$$

$$- \frac{24\alpha(n+p)(n+p-1)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)^2 - \frac{48\alpha^2(n+p)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)$$

$$- \frac{32.\alpha^3}{(n+p+\beta)^3} \quad + \frac{6(n+p)(n+p-1)}{(n+p+\beta)^2}(1+x)^2$$

$$+\frac{24\alpha(n+p)}{(n+p+\beta)^2}(1+x)+\frac{24\alpha^2}{(n+p+\beta)^2}-\frac{4(n+p)}{(n+p+\beta)}(1+x)$$

$$-\frac{8\alpha}{(n+p+\beta)}+1$$

$$=\frac{16}{2^{n+p}}\sum_{k=0}^{n+p}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k}$$

$$\text{x}\left[\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{(n+p+\beta)^4}\right]$$

$$+\frac{96(n+p)(n+p-1)(n+p-2)}{(n+p+\beta)^4}(1+x)^3$$

$$-\frac{44(n+p)(n+p-1)}{(n+p+\beta)^4}(1+x)^2+\frac{48(n+p)}{(n+p+\beta)^4}(1+x)$$

$$+\frac{8\alpha(n+p)(n+p-1)(n+p-2)}{(n+p+\beta)^4}(1+x)^3$$

$$+\frac{24\alpha^2(n+p)(n+p-1)}{(n+p+\beta)^4}(1+x)^2+\frac{32\alpha^3(n+p)}{(n+p+\beta)^4}(1+x)$$

$$+\frac{16\alpha^4}{(n+p+\beta)^4}-\frac{4(n+p)(n+p-1)(n+p-2)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)^3$$

$$-\frac{24\alpha(n+p)(n+p-1)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)^2-\frac{48\alpha^2(n+p)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)$$

$$-\frac{32.\alpha^3}{(n+p+\beta)^3}+\frac{6(n+p)(n+p-1)}{(n+p+\beta)^2}(1+x)^2$$

$$+\frac{24\alpha(n+p)}{(n+p+\beta)^2}(1+x)+\frac{24\alpha^2}{(n+p+\beta)^2}-\frac{4(n+p)}{(n+p+\beta)}(1+x)$$
$$-\frac{8\alpha}{(n+p+\beta)}+1$$

$$=\frac{(n+p)(n+p-1)(n+p-2)}{(n+p+\beta)^4}(1+x)^4$$

$$+\frac{96(n+p)(n+p-1)(n+p-2)}{(n+p+\beta)^4}(1+x)^3$$

$$- \frac{44(n+p)(n+p-1)}{(n+p+\beta)^4}(1+x)^2 + \frac{48(n+p)}{(n+p+\beta)^4}(1+x)$$

$$+ \frac{8\alpha(n+p)(n+p-1)(n+p-2)}{(n+p+\beta)^4}(1+x)^3$$

$$+ \frac{24\alpha^2(n+p)(n+p-1)}{(n+p+\beta)^4}(1+x)^2 + \frac{32\alpha^3(n+p)}{(n+p+\beta)^4}(1+x)$$

$$+ \frac{16\alpha^4}{(n+p+\beta)^4}$$

$$- \frac{4(n+p)(n+p-1)(n+p-2)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)^3$$

$$- \frac{24\alpha(n+p)(n+p-1)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)^2 - \frac{48\alpha^2(n+p)}{(n+p+\beta)^3}(1+x)$$

$$- \frac{32.\alpha^3}{(n+p+\beta)^3} + \frac{6(n+p)(n+p-1)}{(n+p+\beta)^2}(1+x)^2$$

$$+ \frac{24\alpha(n+p)}{(n+p+\beta)^2}(1+x) \quad + \frac{24\alpha^2}{(n+p+\beta)^2} - \frac{4(n+p)}{(n+p+\beta)}(1+x)$$

$$- \frac{8\alpha}{(n+p+\beta)} + 1$$

$$= x^4 - \left(\frac{2(3-2\beta)(n+p)^3 + (-11+6\beta^2)(n+p)^2}{(n+p+\beta)^4}\right.$$

$$\left. + \frac{2(3+2\beta^3)(n+p)+\beta^4}{(n+p+\beta)^4}\right)x^4$$

$$+ \frac{-4\beta((n+p)^2 - 3(n+p)+2)(n+p)}{(n+p+\beta)^4}x^3$$

$$+ \left(\frac{6(1-4\alpha)(n+p)^3 + 2(27-12\alpha\beta+3\beta^2)(n+p)^2}{(n+p+\beta)^4}\right.$$

$$\left. - \frac{(6-4\alpha\beta+\beta^2)(n+p)}{(n+p+\beta)^4}\right)x^2$$

$$+\left(\frac{12(1-2\alpha)(n+p)^3+4(22-12\alpha^2-6\beta)(n+p)^2}{(n+p+\beta)^4}\right.$$

$$\left.-\frac{4(12-2\beta+12\alpha^2\beta-6\alpha\beta^2+\beta^3)(n+p)}{(n+p+\beta)^4}\right)x$$

$$+\frac{-8(n+p)^3\alpha+(23-24\alpha\beta-24\alpha^2)(n+p)^2}{(n+p+\beta)^4}$$

$$-\frac{2(3+16\alpha^3+12\alpha\beta-3\beta^2)(n+p)}{(n+p+\beta)^4}$$

$$+\frac{-32\alpha^3\beta+24\alpha^2\beta^2-8\alpha\beta^3+\beta^4}{(n+p+\beta)^4}$$

$$G_n(t^4;x) = x^4-\left(\frac{2(3-2\beta)(n+p)^3+(-11+6\beta^2)(n+p)^2}{(n+p+\beta)^4}\right.$$

$$\left.+\ \frac{2(3+2\beta^3)(n+p)+\beta^4}{(n+p+\beta)^4}\right)x^4$$

$$+\frac{-4\beta((n+p)^2-3(n+p)+2)n}{(n+p+\beta)^4}x^3$$

$$+\left(\frac{6(1-4\alpha)(n+p)^3+2(27-12\alpha\beta+3\beta^2)(n+p)^2}{(n+p+\beta)^4}\right.$$

$$\left.-\frac{(6-4\alpha\beta+\beta^2)(n+p)}{(n+p+\beta)^4}\right)x^2$$

$$+\left(\frac{12(1-2\alpha)(n+p)^3+4(22-12\alpha^2-6\beta)(n+p)^2}{(n+p+\beta)^4}\right.$$

$$\left.-\frac{4(12-2\beta+12\alpha^2\beta-6\alpha\beta^2+\beta^3)(n+p)}{(n+p+\beta)^4}\right)x$$

$$+\frac{-8(n+p)^3\alpha+(23-24\alpha\beta-24\alpha^2)(n+p)^2}{(n+p+\beta)^4}$$

$$-\frac{2(3+16\alpha^3+12\alpha\beta-3\beta^2)(n+p)}{(n+p+\beta)^4}$$

$$+\frac{-32\alpha^3\beta+24\alpha^2\beta^2-8\alpha\beta^3+\beta^4}{(n+p+\beta)^4}$$

Teorem 4.1.1

$f \in C[-1,1]$ ve f bütün reel eksende sınırlı olsun o zaman;

$$\lim_{n\to\infty} \|G_n f - f\|_{C[-1,1]} = 0$$

dır.

İspat :

Korovkin teoreminden yararlanılarak $n \to \infty$ için

$$G_n(1;x) \rightrightarrows 1$$
$$G_n(t;x) \rightrightarrows x$$
$$G_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$$

olduğunu gösterip ispatı tamamlamış oluruz

$$\lim_{n\to\infty} \|G_n 1 - 1\|_{C[-1,1]} = 0$$

olduğu görünüyor. Bulduğumuz sonuçları yerine yazarsak

$$\|G_n t - x\|_{C[-1,1]} = \max_{-1\le x\le 1} \left| x - \frac{\beta}{(n+p+\beta)} x + \frac{2\alpha-\beta}{(n+p+\beta)} - x \right|$$

$$\max_{-1\le x\le 1} \left| - \frac{\beta}{(n+p+\beta)} x + \frac{2\alpha-\beta}{(n+p+\beta)} \right| = \left| \frac{2\alpha}{(n+p+\beta)} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2\alpha}{(n+p+\beta)} \right| \to 0$$

$$\|G_n t^2 - x^2\|_{C[-1,1]} = \max_{-1\le x\le 1} \left[\left| - \frac{(1+2\beta)(n+p)+\beta^2}{(n+p+\beta)^2} x^2 \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2(2\alpha-\beta)(n+p)}{(n++p+\beta)^2} x + \frac{n+p+(\beta-2\alpha)^2}{(n+p+\beta)^2} \right| \right]$$

$$= \left|\frac{-4\big((n+p+\alpha)\beta-\alpha^2\big)}{(n+p+\beta)^2}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\|G_n t^2 - x^2\|_{C[-1,1]} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-4\big((n+p+\alpha)\beta-\alpha^2\big)}{(n+p+\beta)^2}\right| = 0$$

Lemma 4.1.2

$G_n((t-x)^m;x)$, m= 0,1,2,… olmak üzere

İ$_1$) $G_n((t-x)^0;x) = 1$

İ$_2$) $G_n((t-x)^1;x) = -\dfrac{\beta}{(n+p+\beta)}x + \dfrac{2\alpha-\beta}{(n+p+\beta)}$

İ$_3$) $G_n((t-x)^2;x) = \dfrac{-n-p+\beta^2}{(n+p+\beta)^2}x^2 + \dfrac{2\beta^2-4\alpha\beta}{(n+p+\beta)^2}x + \dfrac{n+p+(\beta-2\alpha)^2}{(n+p+\beta)^2}$

İ$_4$) $G_n((t-x)^3;x) = \dfrac{(2+3\beta)(n+p)-\beta^3}{(n+p+\beta)^3}x^3$

$$+\frac{-3(n+p)^2\beta-3(2\alpha-\beta)(n+p)+6\alpha^2\beta^2-\beta^3}{(n+p+\beta)^3}x^2$$

$$+\left(\frac{(-2-6\alpha\beta-3\beta-12\alpha^2)(n+p)}{(n+p+\beta)^3}\right.$$

$$\left.+\frac{-3\beta^3+6\alpha\beta^2-12\alpha^2\beta}{(n+p+\beta)^3}\right)x$$

$$+\frac{6(n+p)^2\beta+3(2\alpha-\beta-4\alpha^2)(n+p)}{(n+p+\beta)^3}$$

$$+\frac{-12\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-\beta^3}{(n+p+\beta)^3}$$

İ$_5$) $G_n((t-x)^4;x) = \frac{3(n+p)^2-2(3+4\beta-3\beta^2)(n+p)+\beta^4}{(n+p+\beta)^4}x^4$

$$+\left(\frac{-8\alpha(n+p)^3+24(n+p)^2}{(n+p+\beta)^4}\right.$$

$$\left.+\frac{+4\beta(6\alpha-3\beta-2)(n+p)-8\alpha\beta^3+4\beta^4}{(n+p+\beta)^4}\right)x^3$$

$$+\left(\frac{-24\alpha(n+p)^3+2(31+3\alpha^2)n^2+4(2\beta-9+3\alpha^2\beta)(n+p)}{(n+p+\beta)^4}\right.$$

$$\left.+\frac{6\beta^4-24\alpha\beta^3+6\alpha^2\beta^2}{(n+p+\beta)^4}\right)x^2$$

$$+\left(\frac{-12(\beta+2\alpha)(n+p)^3+4(22-3\beta-6\alpha-6\beta^2)(n+p)^2}{(n+p+\beta)^4}\right.$$

$$-\frac{4(12-2\beta+6\alpha\beta-3\beta^2-12\alpha^2\beta)(n+p)}{(n+p+\beta)^4}$$

$$\left.+\frac{48\alpha^2\beta^2-24\alpha\beta^3+4\beta^4}{(n+p+\beta)^4}\right)x$$

$$+\frac{-8n^3\alpha-(23-24\alpha\beta-24\alpha^2)(n+p)^2}{(n+p+\beta)^4}$$

$$+\frac{-2(16\alpha^3+12\alpha\beta-3\beta^2)(n+p)}{(n+p+\beta)^4}$$

$$+\frac{24\alpha^2\beta^2-8\alpha\beta^3-32\alpha^3\beta+\beta^4}{(n+p+\beta)^4}$$

İspat :

İ$_1$) $G_n((t-x)^0;x)=G_n(1;x)$=1

İ$_2$) $G_n((t-x)^1;x)$=$G_n(t;x)$+$G_n(-x;x)$

$$= G_n(t;x) - xG_n(1;x)$$

$$= -\frac{\beta}{(n+p+\beta)}x + \frac{2\alpha-\beta}{(n+p+\beta)}$$

İ$_3$) $G_n((t-x)^2;x) = G_n\left((t^2-2xt+x^2);x\right)$

$$= G_n(t^2;x) - 2xG_n(t;x) + x^2G_n(1;x)$$

$$= x^2 - \frac{(1+2\beta)(n+p)+\beta^2}{(n+p+\beta)^2}x^2 + \frac{2(2\alpha-\beta)(n+p)}{(n+p+\beta)^2}x$$

$$+\frac{n+p+(\beta-2\alpha)^2}{(n+p+\beta)^2}$$

$$-2x\left(x - \frac{\beta}{(n+p+\beta)}x + \frac{2\alpha-\beta}{(n+p+\beta)}\right) + x^2$$

$$= \frac{-n-p+\beta^2}{(n+p+\beta)^2}x^2 + \frac{2\beta^2-4\alpha\beta}{(n+p+\beta)^2}x + \frac{n+(\beta-2\alpha)^2}{(n+p+\beta)^2}$$

İ$_4$) $G_n((t-x)^3;x) = G_n\left((t^3-3x^2t+3xt^2+t^3);x\right)$

$$= G_n(t^3;x) - 3xG_n(t^2;x) + 3x^2G_n(t;x) - x^3G_n(1;x)$$

$$= x^3 - \frac{3(1+\beta)(n+p)^2+(3\beta^2-2)(n+p)+\beta^3}{(n+p+\beta)^3}x^3$$

$$+\frac{6(1-n-p)(n+p)+3\alpha\beta}{(n+p+\beta)^3}x^2$$

$$+\frac{-3(3+4\alpha)(n+p)^2+3(2+\beta^2-4\alpha\beta)(n+p)}{(n+p+\beta)^3}x$$

$$+\frac{6(\alpha-1)(n+p)^2+(2-3\beta-12\alpha^2)(n+p)}{(n+p+\beta)^3}$$

$$+\frac{-12\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-\beta^3}{(n+p+\beta)^3}$$

$$-3x\left(x^2-\frac{(1+2\beta)(n+p)+\beta^2}{(n+p+\beta)^2}x^2\right.$$

$$\left.+\frac{2(2\alpha-\beta)n}{(n+p+\beta)^2}x+\frac{n+(\beta-2\alpha)^2}{(n+p+\beta)^2}\right)$$

$$+3x^2\left(x-\frac{\beta}{(n+p+\beta)}x+\frac{2\alpha-\beta}{(n+p+\beta)}\right)-x^3$$

$$=\frac{(2+3\beta)(n+p)-\beta^3}{(n+p+\beta)^3}x^3$$

$$+\frac{-3(n+p)^2\beta-3(2\alpha-\beta)(n+p)+6\alpha^2\beta^2-\beta^3}{(n+p+\beta)^3}x^2$$

$$+\left(\frac{(-2-6\alpha\beta-3\beta-12\alpha^2)(n+p)}{(n+p+\beta)^3}\right.$$

$$\left.+\frac{-3\beta^3+6\alpha\beta^2-12\alpha^2\beta}{(n+p+\beta)^3}\right)x$$

$$+\frac{6(n+p)^2\beta+3(2\alpha-\beta-4\alpha^2)(n+p)}{(n+p+\beta)^3}$$

$$+\frac{-12\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-\beta^3}{(n+p+\beta)^3}$$

İ_5) $G_n((t-x)^4;x) \quad = G_n\left((t^4-4t^3x+6t^2x^2-4tx^3+x^4);x\right)$

$$=G_n(t^4;x)-4xG_n(t^3;x)$$

$$+6x^2G_n(t^2;x)-4x^3G_n(t;x)+x^4G_n(1;x)$$

$$=x^4+\left(\frac{-2(3+2\beta)(n+p)^3}{(n+p+\beta)^4}\right.$$

$$+\frac{(11-6\beta^2)(n+p)^2-2(3+2\beta^3)(n+p)-\beta^4}{(n+p+\beta)^4}\Bigg)x^4$$

$$+\frac{-4(n+p)^3+12(n+p)^2\beta-8(n+p)\beta}{(n+p+\beta)^4}x^3$$

$$+\Bigg(\frac{6(1-4\alpha)(n+p)^3+2(27-12\alpha\beta+3\beta^2)(n+p)^2}{(n+p+\beta)^4}$$

$$+\frac{-6(1+\beta^2)(n+p)}{(n+p+\beta)^4}\Bigg)x^2$$

$$+\Bigg(\frac{12(\beta-2\alpha)(n+p)^3+8(11-3\beta-6\alpha^2)(n+p)^2}{(n+p+\beta)^4}$$

$$-\frac{4(12-2\beta+12\alpha^2\beta-6\alpha\beta^2+\beta^3)(n+p)}{(n+p+\beta)^4}\Bigg)x$$

$$+\frac{4(n+p)^3\beta-(25+24\alpha+24\alpha\beta+24\alpha^2)(n+p)^2}{(n+p+\beta)^4}$$

$$+\frac{2(37+24\alpha+3\beta^2)(n+p)}{(n+p+\beta)^4}$$

$$+\frac{-8\alpha(n+p)^3+(23-24\alpha^2-24\alpha\beta)(n+p)^2}{(n+p+\beta)^4}$$

$$+\frac{-6(3+16\alpha^3+12\alpha\beta-3\alpha\beta^2)n-32\alpha^3+24\alpha^2\beta^2}{(n+p+\beta)^4}$$

$$+\frac{-8\alpha\beta^3+\beta^4}{(n+p+\beta)^4}$$

$$-4x\Bigg(x^3-\frac{3(1+\beta)(n+p)^2+(3\beta^2-2)(n+p)+\beta^3}{(n+p+\beta)^3}x^3$$

$$+\frac{3(2\alpha-\beta)(n+p)^2+3(\beta-2\alpha)(n+p)}{(n+p+\beta)^3}x^2$$

$$+\frac{3(n+p)^2+(3\beta^2-12\alpha\beta-2)(n+p)}{(n+p+\beta)^3}x$$

$$+\frac{6(n+p)^2\beta+3(2\alpha-\beta-4\alpha^2)(n+p)-12\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-\beta^3}{(n+p+\beta)^3}$$

$$+6x^2\left(x^2-\frac{(1+2\beta)(n+p)+\beta^2}{(n+p+\beta)^2}x^2\right.$$

$$\left.+\frac{2(2\alpha-\beta)(n+p)}{(n+p+\beta)^2}x+\frac{n+p+(\beta-2\alpha)^2}{(n+p+\beta)^2}\right)$$

$$-4x^3\left(x-\frac{\beta}{(n+p+\beta)}x+\frac{2\alpha-\beta}{(n+p+\beta)}\right)+x^4$$

$$=\frac{3(n+p)^2-2(3+4\beta-3\beta^2)(n+p)+\beta^4}{(n+p+\beta)^4}x^4$$

$$+\left(\frac{-8\alpha(n+p)^3+24(n+p)^2}{(n+p+\beta)^4}\right.$$

$$\left.+\frac{4\beta(6\alpha-3\beta-2)(n+p)-8\alpha\beta^3+4\beta^4}{(n+p+\beta)^4}\right)x^3$$

$$+\left(\frac{-24\alpha(n+p)^3+2(31+3\alpha^2)(n+p)^2}{(n+p+\beta)^4}\right.$$

$$\left.+\frac{4(2\beta-9+3\alpha^2\beta)(n+p)+6\beta^4-24\alpha\beta^3+6\alpha^2\beta^2}{(n+p+\beta)^4}\right)x^2$$

$$+\left(\frac{-12(\beta+2\alpha)(n+p)^3+4(22-3\beta-6\alpha-6\beta^2)(n+p)^2}{(n+p+\beta)^4}\right.$$

$$-\frac{4(12-2\beta+6\alpha\beta-3\beta^2-12\alpha^2\beta)(n+p)}{(n+p+\beta)^4}$$

$$\left.+\frac{48\alpha^2\beta^2-24\alpha\beta^3+4\beta^4}{(n+p+\beta)^4}\right)x$$

$$+\frac{-8(n+p)^3\alpha-(23-24\alpha\beta-24\alpha^2)(n+p)^2}{(n+p+\beta)^4}$$

$$+\frac{-2(16\alpha^3+12\alpha\beta-3\beta^2)(n+p)}{(n+p+\beta)^4}$$

$$+\frac{24\alpha^2\beta^2-8\alpha\beta^3-32\alpha^3\beta+\beta^4}{(n+p+\beta)^4}$$

$$(n+p+\beta)G_n((t-x)^4;x)\leq\left(\frac{3(n+p)^2+\beta^2(n+p)+\beta^4}{(n+p+\beta)^3}x^4\right.$$

$$+\frac{+24(n+p)^2+24\alpha\beta(n+p)+4\beta^4}{(n+p+\beta)^3}x^3$$

$$+\left(\frac{+2(31+3\alpha^2)(n+p)^2}{(n+p+\beta)^3}\right.$$

$$\left.+\frac{4(2\beta+3\alpha^2\beta)(n+p)+6\beta^4+6\alpha^2\beta^2}{(n+p+\beta)^3}\right)x^2$$

$$+\left(\frac{88(n+p)^2+4(2\beta+3\beta^2+12\alpha^2\beta)(n+p)}{(n+p+\beta)^3}\right.$$

$$\left.+\frac{48\alpha^2\beta^2+4\beta^4}{(n+p+\beta)^3}\right)x \quad +\frac{(24\alpha\beta+24\alpha^2)(n+p)^2}{(n+p+\beta)^3}$$

$$+\frac{6\beta^2(n+p)+24\alpha^2\beta^2+\beta^4}{(n+p+\beta)^3}$$

Burada $\lim_{n\to\infty}(n+p+\beta)G_n((t-x)^4;x)=0$ olduğu görülür.

Teorem 4.1.3

$f\in C[-1,1]$ ve her $x\in[-1,1]$ için $|f(x)|\le M$

İse bu durumda

$$|G_{\boldsymbol{n}}(f;x)-f(x)|\le 2\omega\left(f,\sqrt{\frac{n+p+4\beta^2}{(n+p+\beta)^2}}\right)$$

İspat

$$|G_n(f;x)-f(x)|\le|G_n(f;x)-f(x)G_n(1;x)|$$

$$\le|G_n(f(t);x)-G_n(f(x);x)|$$

$$\le|G_n(f(t)-f(x);x)|$$

$$\le G_n(|f(t)-f(x)|;x)$$

$$|G_n(f;x)-f(x)|\le G_n\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)$$

$\omega(f,\delta)$ süreklilik modülünün özelliği kullanırsak

$$\leq \left(G_n(1;x) + \frac{1}{\delta} G_n(|t-x|;x)\right) \omega(f,\delta)$$

Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden

$$\leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{G_n((t-x)^2;x)}\right) \omega(f,\delta)$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{-n-p+\beta^2}{(n+p+\beta)^2}x^2 + \frac{2\beta^2-4\alpha\beta}{(n+p+\beta)^2}x + \frac{n+p+(\beta-2\alpha)^2}{(n+p+\beta)^2}}\right)$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{n+p+4\beta^2}{(n+p+\beta)^2}}\right)$$

$\delta = \sqrt{\frac{n+p+4\beta^2}{(n+p+\beta)^2}}$ kabul edersek

$$|G_n(f;x) - f(x)| \leq 2\omega\left(f; \sqrt{\frac{n+p+4\beta^2}{(n+p+\beta)^2}}\right).$$

Teorem 4.1.3

$f \in C^2[-1,1]$ ve f, f', f'' fonksiyonları $[-1,1]$ aralığında sınırlı ise butakdirde

$$\lim_{n\to\infty}(n+p+\beta)\left(G_n(f;x) - f(x)\right) = (-\beta x + 2\alpha - \beta^2)f'(x) + \frac{1-x^2}{2}f''(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

f fonksiyonunun$x$ noktasındaki Taylor açılımı;

$$f(t) = f(x) + \frac{1}{1!}f'(x)(t-x) + \frac{1}{2!}f''(x)(t-x)^2 + (t-x)^2\mu(t;x)$$

dir.

$$(t-x)^2\mu(t;x) = (t-x)^2\left(\frac{1}{3!}f'''(x)(t-x) + \frac{1}{4!}f^4(x)(t-x)^2 + \ldots\right)$$

$$G_n(f;x) - f(x) = G_n(f(t);x) - G_n(1;x)f(x)$$
$$= G_n\big((f;x) - f(x);x\big)$$
$$= G_n\big((t-x);x\big)f'(x) + \frac{1}{2}G_n((t-x)^2;x)f''(x) +$$
$$+G_n((t-x)^2\mu(t-x);x)$$
$$= \left(-\frac{\beta}{(n+p+\beta)}x + \frac{2\alpha-\beta}{(n+p+\beta)}\right)f'(x)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{-n+\beta^2}{(n+p+\beta)^2}x^2 + \frac{2\beta^2-4\alpha\beta}{(n+p+\beta)^2}x + \frac{n+(\beta-2\alpha)^2}{(n+p+\beta)^2}\right)f''(x)$$
$$+ G_n((t-x)^2\mu(t-x);x)$$

eşitliğin her iki tarafını $n+p+\beta$ çarpılırsa

$$(n+p+\beta)\big(G_n(f;x) - f(x)\big) = (-\beta x + 2\alpha - \beta)f'(x)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{-n-p+\beta^2}{(n+p+\beta)}x^2 + \frac{2\beta^2-4\alpha\beta}{(n+p+\beta)}x\right.$$
$$\left.+\frac{n+p+(\beta-2\alpha)^2}{(n+p+\beta)}\right)f''(x)$$
$$+(n+p+\beta)G_n((t-x)^2\mu(t-x);x)$$

$$\lim_{t\to x}\mu(t-x) = 0$$

olduğundan μ fonksiyonu sınırlıdır.

$$(n+p+\beta)\, G_n((t-x)^2\mu(t-x);x)$$
$$\le \sqrt{(n+p+\beta)G_n((t-x)^4;x)}\sqrt{(n+p+\beta)G_n(\mu(t-x)^2;x)}$$

dir.

Burada lemma 4.1.2 deki ispat $(n+p+\beta)G_n((t-x)^4;x)$= 0 olduğu gösterilmiştir.

Böylece istenilen sonuç elde edilmiştir:

$$\lim_{n\to\infty}(n+p+\beta)\left(G_n(f;x) - f(x)\right) = (-\beta x + 2\alpha - \beta^2)f'(x) + \frac{1-x^2}{2}f''(x)$$

Teorem

f fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlıyorsa, bu takdirde

$$\|G_n(f;x)-f(x)\|_{C[-1,1]} \leq M\left(\frac{n+p+4\beta^2}{(n+p+\beta)^2}\right)^{\alpha/2}$$

İspat:

$G_n(1;x)=1$ olduğundan ve bu operatörün lineerliğinden

$$|G_n(f;x)-f(x)| = |G_n(f;x)-f(x)G_n(1;x)|$$

$$= |G_n(f;x)-G_n(f(x);x)|$$

$$\leq |G_n(f(t)-f(x);x)|\text{dır.}$$

f fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağladığından

$|f(t)-f(x)| \leq M|t-x|^{\alpha}$dır. Bu durumda

$|G_n(f;x)-f(x)| \leq (G_n M|t-x|^{\alpha};x)$

Hölder eşitsizliğinden

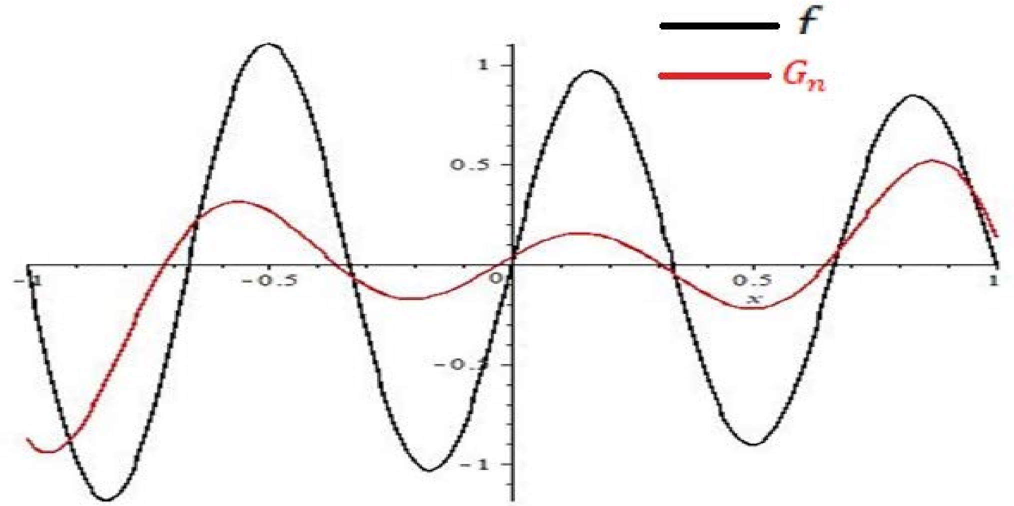
$$\leq MG_n((t-x)^2;x)^{\alpha/2}.G_n(1;x)^{\alpha/2}$$

$=MG_n((t-x)^2;x)^{\alpha/2}$

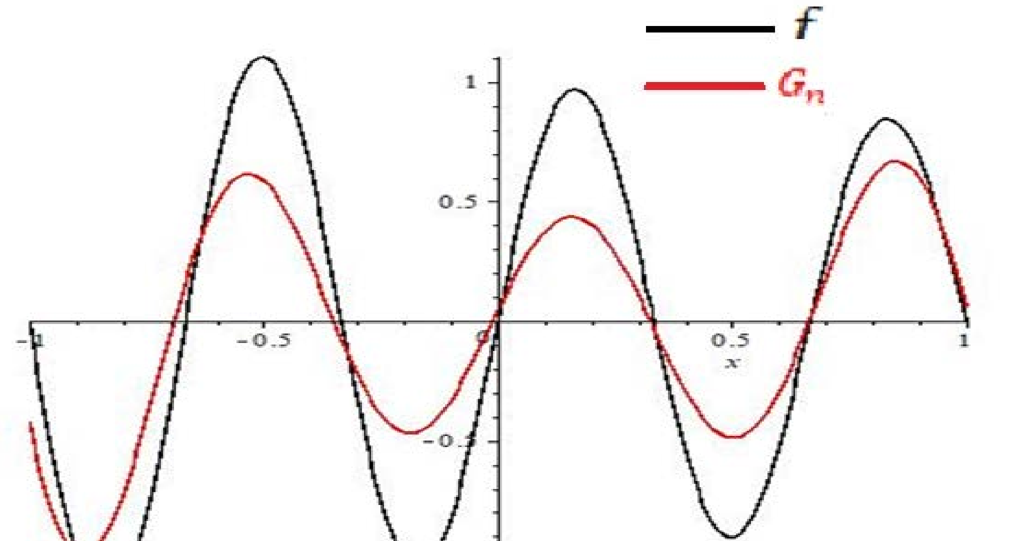
$$\leq\ M\left(\frac{-n-p+\beta^2}{(n+p+\beta)^2}x^2+\frac{2\beta^2-4\alpha\beta}{(n+p+\beta)^2}x+\frac{n+p+(\beta-2\alpha)^2}{(n+p+\beta)^2}\right)^{\alpha/2}$$

$$\leq\ M\left(\frac{n+p+4\beta^2}{(n+p+\beta)^2}\right)^{\alpha/2}$$

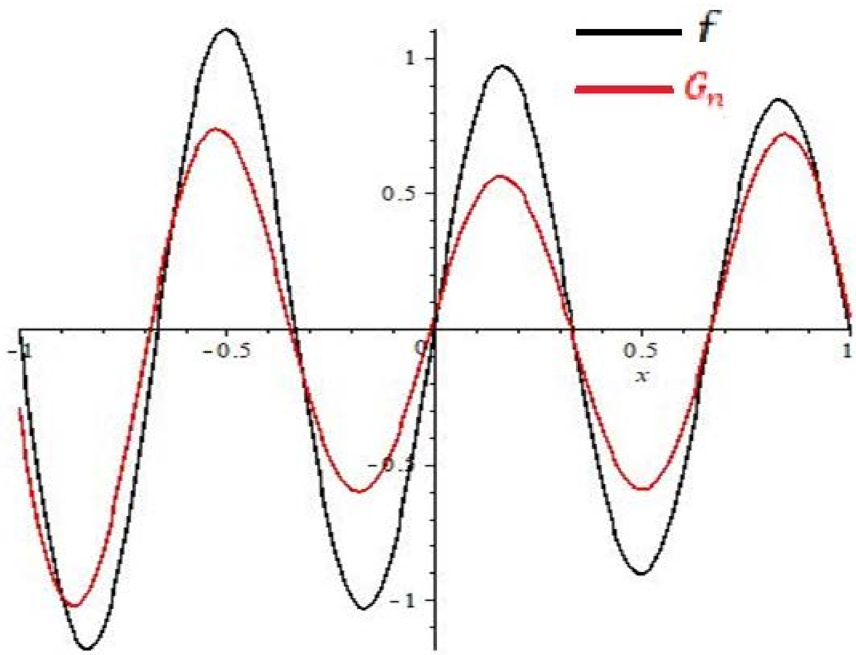
olarak bulunur.



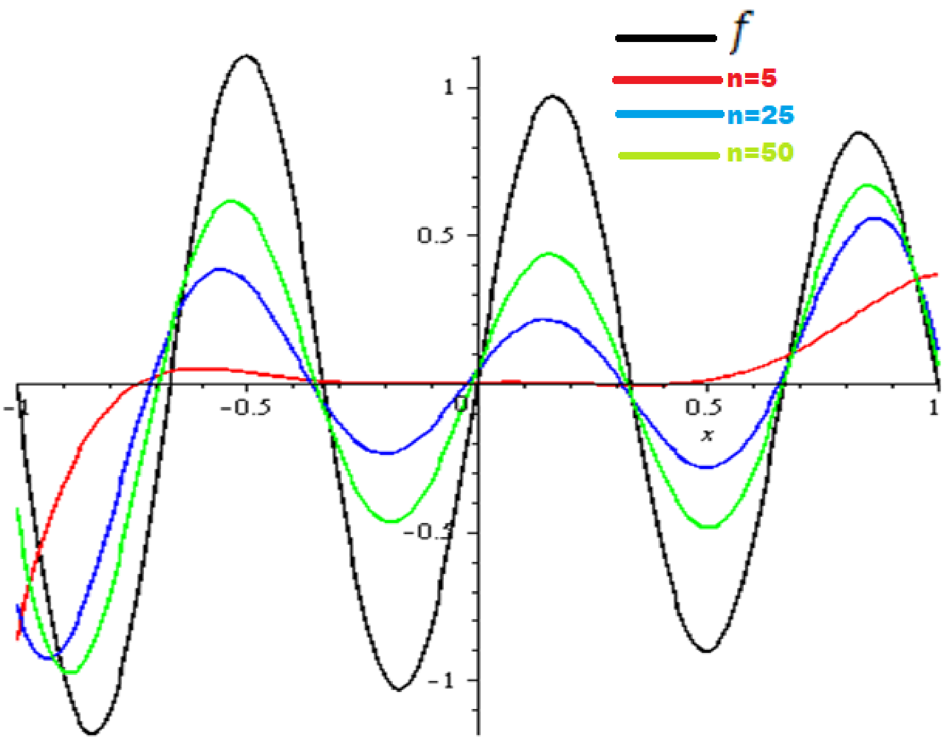
Şekil 4.1.n=20 $p = 2, \alpha = 1, \beta = 1{,}2$ için $G_n(f; x)$operatörünün $f(x) = (5 + x^2)\sin(1 + x^2)$ fonksiyonuna yaklaşım grafiği.



Şekil 4.2. n=50 $p = 2, \alpha = 1, \beta = 1{,}2$ için $G_n(f; x)$operatörünün $f(x) = (5 + x^2)\sin(1 + x^2)$fonksiyonuna yaklaşım grafiği.



Şekil 4.3. n=75 $p = 2, \alpha = 1, \beta = 1{,}2$ için $G_n(f; x)$ operatörünün $f(x) = (5 + x^2)\sin(1 + x^2)$fonksiyonuna yaklaşım grafiği.



Şekil 4.4. $G_n(f; x)$operatörünün $f(x) = (5 + x^2)\sin(1 + x^2)$ fonksiyonuna yaklaşım grafiği

Çizelge 4.1. Farklı n ve x değerleri için $G_n(f;x)$operatörünün $f(x) = (5 + x^2)\sin(1 + x^2)$ fonksiyonuna yaklaşımı için hesaplanan nümerik değerler tablosu

n \ x	-0,5	0,2	0,5	0,8	0,9	0,95
20	0.838180	0.779184	0.683269	0.378303	0.176704	0.002638
50	0.518194	0.511859	0.416449	0.208656	0.080094	0.008515
75	0.386961	0.391106	0.311114	0.150975	0.150975	0.007424
150	0.218109	0.226941	0.175947	0.082264	0.027688	0.004749
500	0.071418	0.076196	0.057889	0.026273	0.008365	0.001676
900	0.040356	0.043285	0.032751	0.014774	0.004651	0.000960

5.SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada operatörünün her $f, g \in [-1,1]$ ve her $a, b \in \mathbb{R}$ için,

$G_n\left(\left(af(t) + bg(t)\right); x\right)$ lineerlik ve $k, n \in$ N için ve $x \in [-1,1]$ için

$$\frac{1}{2^{n+p}}\binom{n+p}{k}(1+x)^k(1-x)^{n+p-k} \geq 0$$

olduğundan $f \geq 0$ ise $G_n(f; x) \geq 0$ olur. Buna göre $G_n(f; x)$ lineer pozitif bir operatörü gösterilmiştir. $f \in \mathrm{C}[-1,1]$ ve f bütün reel eksende sınırlı olsun o zaman;

$$\lim_{n\to\infty} \|G_n f - f\|_{\mathrm{C}[-1,1]} = 0$$

Korovkin şartları ispatlanmıştır.$G_n((t-x)^m; x)m$= 0,1,2..... olmak üzere merkezi momentleri hesaplanmıştır. $f \in C[-1,1]$ ve her $x \in [-1,1]$ için $|f(x)| \leq M$

ise bu durumda

$$|G_n(f; x) - f(x)| \leq 2\omega\left(f, \sqrt{\frac{n+p+4\beta^2}{(n+p+\beta)^2}}\right)$$

süreklilik modülü hesaplanmıştır. $f \in C^2[-1,1]$ve f, f', f''fonksiyonları$[-1,1]$ aralığında sınırlı ise bu, takdirde

$$\lim_{n\to\infty}(n+p+\beta)\left(G_n(f; x) - f(x)\right) = (-\beta x + 2\alpha - \beta^2)f'(x) + \frac{1-x^2}{2}f''(x)$$

eşitliği sağlanır.f fonksiyonu Lipschitz koşulu

$$\|G_n(f; x) - f(x)\|_{C[-1,1]} = M\left(\frac{n+p+4\beta^2}{(n+p+\beta)^2}\right)^{\alpha/2}$$

hesaplanmıştır.

5.2. Öneriler

Çalışmamızda kullandığımız operatör, a,p ve b değerleri arasındaki fark arttıkçaSchurer-Stancu operatörü daha güzel yaklaşmaktadır. a, p ve$b$ değerleri farkı az olursa Schurer-Stancu operatörüile operatörümüz denk olmaktadır.Daha güzel yaklaşım elde etmek için a, p ve b değerlerini değiştirerek incelemek gerekir.

KAYNAKLAR

ALTOMARE, F., and CAMPITI, M., 1994. Korovkin-type Approximation Theoryan its Applications. De Gruyter Series Studies in Mathematics, Berlin –New York , 640s.

BALCI, M., 2012 Reel Analiz, Balcı Yayınları , Ankara 144s.

BERNSTEIN, S. N., 1912-1913. Demonstration du Theoreme de Weierstrass Fondee Sur le Calcul Des Probabilities. Commun. Soc. Math. Kharkow, 13(2):1-2.

HACISALİHOĞLU, H., and HACIYEV, A., 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, A.Ü.F.F Döner Sermaye İşletme Yayınları, Ankara, 94s.

KOROVKİN, P.P. , 1953 On Comvergense of linear positive operators in the space of continuous functions. Dokl Akad Nauk SSSR, 90(961-4):324-337.

MUSAYEV, B., ALP, M., MUSTAFAYEV, N., EKİNCİOĞLU, İ. 2007. Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz1, Ankara,362s.

SHEVCHUK, I.A., 1992. Approximation by Polynomialsand Tracers of Functions Continuous on a Segment Naukova Dymka, Kiev, 324s.

STANCU, D. D., 1968. Approximation of Functionby a New Class of Polynomial Operators. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 13(8):1173-1194.

THOMAS, G.B., Finney, R.L., 1984. " Calculusand Analytic Geometry", Addison-Wesley Publishing Company, Boston, 1142s.

WEIERSTRASS, K., 1885. Über Die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willküricher 55 Funktionen Einer Reelen Veranderlichen, Sitzungsberichte Der Akademiezu, 2(1):633-639.

BAYRAKTAR,M.,2006.Fonksiyonel Analiz,Gazi kitapevi,253,Ankara.

SCHURER., F., 1962. Linear positive operators in approximation theory, Tech. Rewp., Mathematical Institute Delft Universty of Technology.

ÇİLO , A., 2012. [-1,1] Aralığında Bernstein polinomlarının yaklaşım özelikleri ve yaklaşım Hızı. Yüksek lisans tezi Harran Üniversitesi Fen Bilimleri ensitüsü, Şanlıurfa, 55s.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: İsmail GÜMER
Uyruğu	: T.C
Doğum Yeri ve Tarihi	: AKÇAKALE 1989
e-mail	:ismailgumer@gmail.com

EĞİTİM

Derece	**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:Süleyman Demirel çok programlı lisesi Harran Ş.URFA	2006
Üniversite	: Erzincan Üniversitesi Erzincan	2012
Yüksek Lisans	: Harran Üniversitesi, Şanlıurfa	2019

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2016-2017	Harran Anadolu imamhatip lisesi	Stajyer öğretmenlik
2017-2019	Adnan Menderes Anadolu lisesi(devam)	öğretmenlik