T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

ÜÇGENSEL BÖLGEDE İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEİN-KANTOROVİCH OPERATÖRÜ İLE YAKLAŞIM

Reşat ASLAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2020

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Doktora Tezi

ÜÇGENSEL BÖLGEDE İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEİN-KANTOROVİCH OPERATÖRÜ İLE YAKLAŞIM

Reşat Aslan

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Aydın İZGİ
Yıl: 2020, Sayfa: 54

Bu tez çalışmasında, üçgensel bir bölge üzerinde iki değişkenli Bernstein-Kantorovich tipindeki operatörü tanımlayarak bu operatörün yaklaşım hızını, kısmi ve tam süreklilik modüllerini kullanarak hesapladık. Daha sonra, bu operatör için Voronovskaja tip asimtotik yaklaşımını elde ettik. Ardından, bu operatör için lokal yaklaşım özelliklerini ve Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar içinde yaklaşımını inceledik. Ayrıca, üçgensel bölge üzerinde tanımlamış olduğumuz Bernstein-Kantorovich tipindeki operatör için GBS tip operatörü tanımladık ve bu operatörün bazı yaklaşım özelliklerini araştırdık. Son olarak, yukarıda bahsedilen operatörlerin bazı fonksiyonlara yaklaşım hızları grafiklerle karşılaştırılmış ve bu yaklaşımın hata tahminleri nümerik tablolar ile verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Lineer pozitif operatörler, Süreklilik modülü, Bernstein-Kantorovich tip operatör, Voronovskaja tip asimtotik teorem, B-süreklilik ve B-differensiyellenebilirlik, Peetre's K-fonksiyoneli.

ABSTRACT

PhD Thesis

APPROXIMATION BY BIVARIATE BERNSTEIN-KANTOROVICH OPERATORS ON THE TRIANGULAR DOMAIN

Reşat Aslan

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Aydın İZGİ
Year: 2020, Page: 54

In this thesis, by defining the bivariate Bernstein-Kantorovich type operator on a triangular domain, we calculated the rate of convergence of this operator by using of the partial and complete modulus of continuity. Then, we obtained the Voronovskaja type asymptotic approximation for this operator. Next, for this operator we examined the local approximation properties and the approximation for functions on the Lipschitz class. Additionally, we have defined the GBS type operator of bivariate Bernstein-Kantorovich type operator on the triangular domain and investigated some approximation properties of this operator. Finally, the rate of convergence of the above mentioned operators to some functions are compared with the graphics and the error estimates of this approximation are given by numerical tables.

KEYWORDS: Linear positive operators, Modulus of continuity, Bernstein-Kantorovich type operator, Voronovskaja type asymptotic theorem, B-continuous and B-differentiable, Peetre's K-functional.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımız boyunca desteklerini esirgemeyen, engin bilgileriyle beni bilgilendiren çok kıymetli ve saygıdeğer hocam Prof. Dr. Aydın İZGİ'ye, tez çalışmam süresince kaktılarını esirgemeyen tez izleme komitesi üyeleri sayın hocalarım Prof. Dr. Kuddusi KAYADUMAN ve Prof. Dr. Sevilay KIRCI SERENBAY'a, LATEX programı ile tez yazım aşamasında hertürlü sorularıma cevap veren ve bu anlamda bana ciddi katkısı olan sayın Doç. Dr. Haydar ALICI hocama ve son olarak bana her koşulda destek olan çok değerli eşim Pınar Aslan ve ağabeyim Doç. Dr. Ferhat ASLAN ve diğer aile bireylerimede teşekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{N}^+$	Pozitif doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$:=$	Tanım olarak eşittir
(a, b)	Açık aralık
$[a, b]$	Kapalı aralık
$P[a, b]$	$\mathbb{R}$'nin kompakt altkümeleri üzerindeki polinomlar uzayı
$\|\|\|\|$	Norm fonksiyonu
$(A, \|\|\|\|)$	A Lineer uzayı üzerindeki normlu uzay
$B_n^f(x)$	Bernstein polinom dizisi
$U_n(f; x, y)$	İki değişkenli Kantorovich Operatör dizisi
$R_n(f; x, y)$	Δ üzerinde tanımlı iki değişkenli Bernstein-Kantorovich tipindeki Operatör dizisi
$P_n(f; x, y)$	Δ üzerinde tanımlı iki değişkenli GBS tipli Bernstein-Kantorovich Operatör dizisi
$Df(x)$	f fonksiyonunun x noktasındaki türevi
$\{f_n\}$	Fonksiyonlar dizisi
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı bütün sürekli ve reel değerli fonksiyonlar uzayı
$f_n \rightrightarrows f$	f_n dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaklığı
$\omega(f; \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
Δ	$\{(x, y) : -1 \leq x, y \leq 1, x + y \leq 0\}$ şeklinde tanımlı üçgensel bölge
$C(\Delta)$	Δ üzerinde sürekli ve $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı sınırlı fonksiyonlar uzayı
$C^1(\Delta)$	Δ üzerindeki birinci mertebeden türevlenebilir sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayı
$C^2(\Delta)$	Δ üzerindeki ikinci mertebeden türevlenebilir sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayı
$C_b(\Delta)$	Δ üzerinde tanımlı tüm sürekli ve sınırlı Bögel fonksiyon uzayı
$\varpi(f, \delta_1, \delta_2)$	f fonksiyonunun tam süreklilik modülü
$D_b f(x, y)$	Bögel-Differensiyellenebilir fonksiyon
$\omega_{mixed}(f; \delta_1, \delta_2)$	Pürüzsüzlük karma modülü
$Lip_\alpha(\beta, \gamma)$	α değişkenine göre Lipschitz sınıfı
$K_{mixed}(f; a_1, a_2)$	Karma K-fonksiyoneli
$D_B^{p,q} f$	$p = 0, 1...i, q = 0, 1...j$ için f fonksiyonunun karma kısmi türevi
$K_2(f, \delta)$	$f \in C(\Delta)$ için Peetre's K-fonksiyoneli
$\overset{*}{\omega}_2(g, \sqrt{\delta})$	İkinci mertebeden süreklilik modülü

Kısaltmalar	**Açıklama**
GBS	(Generalized Boolean Sum) Genelleştirilmiş Boolean Toplamı

1. GİRİŞ

19. yüzyılın sonlarında ortaya çıkan ve henüz matematiğin dinamik bir dalı olarak ifade edilen yaklaşımlar teorisi, fonksiyonlar teorisinin en çok uygulama alanı olan dallarından bir tanesi olarak nitelendirilebilir. Bu dalın asıl amacı; fonksiyonlar uzayındaki elemanları belirli bir noktada veya normda bu uzayın bir alt uzayının veya başka bir uzayın elemanlarından oluşturulmuş dizilerin limitleri şeklinde gösterimlerini bulmaktır diyebiliriz. Bu durumda bu diziler, verilen uzayın elemanlarını yaklaştırır veya bu elemanlarla yaklaşır denir ve dolayısıyla yaklaşma problemi çözülür. Tabi ki bu durumda yaklaşan dizinin elemanlarının iyi özellikleri olması gerekir. Çünkü amaç, ”pürüzlü” elemanlara ”iyi” elemanlarla yaklaşmaktır. Bu tür özellikleri iyi olan elemanlara örnek olarak trigonometrik polinomlar, cebirsel polinomlar, tam fonksiyonlar (tüm düzlemde analitik olan fonksiyonlar), sonsuz basamaktan differansiyellenebilen fonksiyonları verebiliriz. Bu ve benzeri elemanlar yaklaşma probleminin çözümünde yer alabilir, fakat genelde fonksiyonları yaklaştıran en basit yapılar lineer pozitif operatörlerin yardımıyla tanımlanabildiğinden son altmış yıldır yaklaşımlar teorisinde lineer pozitif operatörler önemli bir yer tutar. Bu operatörler pozitif fonksiyonları pozitif fonksiyonlara dönüştürdüklerinden dolayı monoton operatörlerdir. Bu özellik pozitif operatörler için önemli eşitsizlikler ispatlamaya imkan verir (Haciyev ve Hacisalihoğlu, 1995). Yaklaşımlar teorisi aslında fonksiyonel analizle ilgili bir konu olup bu teorinin amacı daha çok nitelikleri az bilinen bir fonksiyona özellikleri iyi bilinen başka fonksiyonlarla yaklaşılarak daha basit şekilde hesaplanabilmesine yardımcı olmaktır. 19. yüzyıldan günümüze birçok matematikçi, çalışılması zor olan bir fonksiyona, nitelikleri daha iyi bilinen yani çalışılması daha kolay olan, örneğin polinomlar gibi, daha basit yapıda olan fonksiyonlarla yaklaşabilir miyiz ve bu yaklaşımı en iyi nasıl sağlarız sorularına cevap aramışlardır. Bu fikirden yola çıkarak 1885 yılında 70 yaşında olan Alman Matematikçi Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, sonlu bir aralıkta sürekli her fonksiyona aynı aralıkta yakınsayan bir polinom dizisinin varlığı ile ilgili teoremi iddia ve ispat etmiştir (Pinkus, 2000). Ayrıca Weierstrass’ın bu ünlü teoremi aynı tarihlerde birbirlerinden bağımsız olarak isveçli matematikçiler olan Mittag-Leffler ve Phragmen tarafından bir gazetede dört sayfaya yayılan bir dipnot olarak yayınlanmıştır. Bu çalışmalardan hareketle, Bernstein (1912) çalışmasında çeşitli operatörler ve bu operatörlerin genellemelerini incelemiştir. Bernstein (1912)’nin çalışmasından ilham alan

ve her ne kadar bu polinomların grafiklere uygulanabilirliği yarım yüzyıl sonra anlaşılsada günümüzde Bezier eğrileri olarak bilinen çalışma 1962'de Renault otomobil firmasında gövdeleri tasarlamak için kullanılan Fransız mühendis Pierre Bezier tarafından yaygın olarak kullanılmıştır. Ancak bu eğrilerin üzerine yapılan çalışma ilk olarak 1959'da matematikçi Paul de Casteljau tarafından, başka bir Fransız otomobil üreticisi olan Citroen'de Bezier eğrilerini değerlendirmek için sayısal olarak kararlı bir yöntem olan Casteljau'nun algoritması kullanılarak geliştirilmiştir. Başka bir matematikçi Bohman (1951) tarafından ise: toplam şeklindeki lineer pozitif operatör dizisinin $[0, 1]$ aralığında sürekli olan fonksiyona yaklaşması ile ilgili problemi incelemiş ardından Rus matematikçi Pavel Korovkin, Bohman (1951)'nın koşullarını genel halde de sağlayan genel bir teorem ispatlanmıştır (Korovkin, 1953). Bu teorem, ciddi bir uygulama potansiyeline sahip olduğu için matematik ile ilgili araştırmalarda önemli bir rol almaya başlamıştır ve Korovkin (1953)'nin çalışmasından sonra pozitif ve doğrusal operatör dizileri tarafından verilen doğrusal yaklaşım yöntemlerinin incelenmesi, yaklaşım teorisinin köklü bir parçası haline gelmiştir. Böylece 20. yüzyılda fonksiyonlara lineer pozitif operatörlerle yaklaşım önemli bir araştırma ve uygulama alanı haline ulaşmıştır. Özellikle bu uygulamalı araştırma konularından bazılarını şu şekilde sıralayabiliriz: uygulamalı matematik alanları, mühendislik, bilgisayar destekli geometrik tasarım, plastik cerrahi, diş tedavisinde pürüzsüz protez ve implantların yapımı, sayısal analiz ve differansiyel denklemlerin çözümü vb. çalışmalar üzerine olmuştur. Yaklaşım teorisi ayrıca yaklaşımla ortaya çıkan hatanın boyutunu ve özelliklerini de inceler ve yaklaşımlar genellikle yüksek dereceli terimlerin düştüğü güç serisi açılımları ile elde edilir. Polinomların yaklaşımı ve eğri çizgileri gibi yaklaşım üzerine odaklanan klasik yaklaşım teorisi, uygulamalı matematikte de temel bir araştırma alanıdır. Yaklaşımlar teorisi, kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde, görüntü işlemede ve veri analizinden başka birçok disiplinde de önemli bir rol oynar. Örneğin; havacılık ve otomobil endüstrilerinde geometrik modelleme için şeritler, radyal temel fonksiyonlar ve değişmez uzaylar üzerinde yaklaşım yaygın olarak uygulanmaktadır. Ayrıca yaklaşımlar teorisinin büyük ölçekte tabanlar kullanılarak bilimsel hesaplamada da çok güçlü araçlar olduğu kanıtlanmıştır. İnşaat Mühendisliği alanında kullanılan dinamik sistemlerin ve sinyal sınıflandırmalarının tanımlanması ve kontrolündeki problemlerin çözümünde, termografik görüntüleme metodu ile bina ve köprü gibi yapıların depreme karşı dayanıklıklarını ve enerji verimliliklerinin incelenmesinde çok değişkenli Kantorovich operatörleri aracılığıyla yaklaşım son yılların popüler olan yeni uygulamalarındandır. Bu çalışmaların bazılarına Bordaro ve Mantellini (2010, 2011); Cluni ve ark. (2015) aracılığıyla ulaşılabilir. Ayrıca son zamanlarda, aralıklı yaklaşım teknikleri, yüksek boyutlarda büyük verilerle hesaplanmasında çok popüler hale gelmiştir. Yaklaşım teorisi aynı zamanda kuramsal matematikteki pekçok araştırma konusu ile güçlü bir bağa sahiptir. Örneğin; aralıklar teorisi kombinasyonlarında klasik problemlerin incelenmesi, Atiyah-Singer endeksini hesaplanabilmesi ve Stanley'nin sihirli kareler hakkındaki varsayımını kutu eğriler yöntemi ile çözülmesi şeklinde sıralanabilir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

”Her bir elemanın bir topolojik uzayın içerisinde yoğun olan bir alt uzayının elemanlarından oluşturulan dizinin yakınsadığı nokta şeklinde ifade edilebilir” gerçeğinden yola çıkan Alman Matematikçi Karl-Weiertrass f, $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$W_n(f;x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n(t-x)^2}{2}} f(t)dt, \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

ile tanımlı $W_n(f;x)$ fonksiyon dizisinin söz konusu fonksiyona $\mathbb{R}$ üzerinde noktasal, kapalı ve sınırlı aralıklar üzerindede düzgün yakınsak olduğunu göstermiştir. Yani $\mathbb{R}$ ’nin kompakt altkümeleri üzerindeki polinomlar uzayı $P[a,b]$ nin $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayının $C[a,b]$’de yoğun olduğunu göstermiş ve kompakt kümeler üzerinde sürekli olan her f fonksiyonu için bir $P_n(x)$ polinomlar dizisine (düzgün) yaklaşılabileceğini ifade ve ispat etmiştir (Weirstrass, 1885).

Bu teoremin ispatı topolojik metodlara dayandığından bazı matematikçiler için bu ispat biraz karışık ve uzun bulunmuştur. 1912 yılında Rus Matematikçi S.N.Bernstein, Weirstrass (1885)’de yukarıda tanımlamış olduğu polinom dizisinin nasıl olacağı üzerinde çalışmalar yapmış ve toplamsal biçimde bir polinomlar dizisini

$$B_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlamıştır. Bernstein kendi adıyla anılan bu polinomlarla $[0,1]$ aralığında tanımlı ve sürekli fonsiyonuna yaklaşılabileceğini ispatlamıştır (Bernstein, 1912). Bernstein’nın ispatından sonra Kantorovich (1930) ise $[0,1]$ aralığındaki integrallenebilir f fonksiyonları için

$$K_n(f;x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt,$$

şeklinde tanımlı K_n operatörlerini tanımlamış ve günümüzde bu operatörler Kantorovich operatörleri olarak anılmaktadır. I. Chlodowsky, Bernstein polinom dizilerini sonsuza genişleyen aralıklar üzerinde

$$C_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} f(\frac{k}{n}b_n) \qquad 0 \le x \le b_n$$

biçiminde tanımlamış ve yakınsaklık özelliklerini incelemiştir (Chlodowsky, 1937). Yukarıdaki denklemde $\{b_n\}$ dizisi; $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$ koşulunu sağlayan bir pozitif reel sayıların artan dizisidir. $C_n(f;x)$ operatörlerine literatürde Bernstein-Chlodowsky polinomları adı verilir. Bernstein (1912)'in çalışmasından sonra farklı mekan ve zamanda; başka bir matematikçi Bohman (1951) tarafından, toplam şeklindeki lineer pozitif operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli olan fonksiyonuna yaklaşması ile ilgili problemini incelemiştir ve ardından Pavel Korovkin 1953 yılındaki çalışmasında ise, lineer pozitif operatörlerin sonlu aralıkta sürekli bir fonksiyona yaklaşımıyla ilgili bu alana yön veren önemli teoremler ortaya koymuş ve genel bir teorem ispatlamış ve göstermiştir ki Bohman (1951)'ın koşulları genel haldede sağlanır (Haciyev ve Hacisalihoğlu, 1995). V.A. Baskakov ise, $[0,\infty)$ aralığında sürekli olan ve $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} < \infty$ koşulunu sağlayan f fonksiyonuna yakınsayan

$$V_n(f;x) = (1+x)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{x}{1+x}\right)^k f(\frac{k}{n})$$

ile tanımlı $\{V_n\}$ operatör dizisini tanımlamış ve bu dizinin yakınsaklık özelliklerini incelemiştir (Baskakov, 1957). Literatürde bu operatörlere Baskakov operatörleri denir. Üçgensel bir A bölgesi üzerinde iki değişkenli Bernstein polinomlarıda Stancu (1963) tarafından

$g : A \to \mathbb{R}$ olmak üzere, $A = \{(x,y) : x+y \leq 1, 0 \leq x, y \leq 1\}$

$$S_n(g;x,y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} j_{n,k,l}(x,y) g\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}\right) \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlamıştır. Yukarıdaki eşitlikte verilen $j_{n,k,l}(x,y)$ ifadesi

$$j_{n,k,l}(x,y) = \binom{n}{k}\binom{n-k}{l} x^k y^l (1-x-y)^{n-k-l}$$

'dir. Pop ve Farcas (2009)'daki çalışmasında ise iki değişkenli Kantorovich operatörlerinin yaklaşım özelliklerini, iki değişenkenli Bernstein operatörlerinden esinlenerek

$$U_m(f;x,y) = (m+1)^2 \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{m-k} b_{m,k,l}(x,y) \times \int_{\frac{k}{m+1}}^{\frac{k+1}{m+1}} \int_{\frac{l}{m+1}}^{\frac{l+1}{m+1}} f(s,t)dsdt \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlamışlardır ve bu operatörlerin yaklaşım özelliklerini detaylıca incelemişlerdir. Derriennic (1985) tarafından aşağıdaki şekilde üçgensel bir T bölgesi üzerinde integral fonksiyonları ile tanımlı çok değişkenli Bernstein polinomlarının ve Lp uzaylarındaki türevlerinin yakınsaklık durumunu incelemiştir.

$$T=\left\{X=(x_1,x_2,...,x_l)|x_i\geq 0, i=1,2...,l;\sum_{i=1}^{l}x_i\leq 1\right\}$$

tanımlı T bölgesi, $\mathbb{R}^l$de bir üçgensel bölge olmak üzere integrallenebilen f fonksiyonu için $n.$ mertebeden modifiye edilmiş Bernstein polinomlarını

$$M_nf(X)=\int_T\frac{(n+l)!}{n!}\sum_{|h|\leq n}p_{nh}(X)p_{nh}(U)$$

biçiminde tanımlamıştır. Yukarıdaki polinomda $p_{nh}(X)$ ifadesi

$$p_{nh}(X)=\frac{n!}{h!(n-|h|)!}X^h(1-|X|)^{n-|h|}$$

$$|h|=\sum_{i=1}^{l}h_i,\quad h!=h_1!.h_2!...h_l!,\quad |X|=\sum_{i=1}^{l}x_i,\quad X^h=x_1^{h_1}.x_2^{h_2}...x_l^{h_l}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Song (1995)'de ki çalışmasında üçgensel bir bölge üzerinde Bernstein-Kantorovich operatörlerinin yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Ulrich ve Mircea (2000)'de ki çalışmalarında ise Kantorovich polinomlarının asimptotik yaklaşımlarını incelemişlerdir. Kivinukk ve Metsmagi (2011)'de ki araştırmalarındada Kantorovich polinomlarını sınırlı salınımlı fonksiyonlar için yaklaşım özellikleri incelemiştir. 2011 yılında ise İZGİ'nin danışmanlığında başlayıp 2012 yılında bitirdiği Yüksek Lisans tez çalışmasında Çilo, $[-1,1]$ aralığında Bernstein operatörlerini

$$A_n(f;x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}(1+x)^k(1-x)^{n-k}f(\frac{2k}{n}-1)$$

biçiminde tanımlamış ve bu operatörlerin yaklaşım özelliklerini incelemiştir (Çilo, 2012). İki değişkenli operatörler ile en çok bilinen çalışma, Volkov (1957)'un yapmış olduğu "On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variable" isimli çalışmadır. Üçgensel bir bölge üzerinde iki değişkenli Bernstein-Stancu-Chlodowsky operatörlerinin yaklaşım özellikleride Tuncer ve Aral (2013) tarafından araştırılmıştır.

Lineer pozitif operatörler teorisinde birçok operatörün modifikasyonu ve genelleştirmesi üzerine çalışmalar yapılmış, fonksiyonların tanımlı olduğu uzaylar, bölgeler değiştirilmiş ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Son yılların popüler genelleştirilmelerinden biride operatörlerin q ve (p,q)-analogları yani kuantum ve post-kuantum analogları üzerine olmuştur. q-operatörlerle ilgili ilk öncü çalışmalar Lupaş (1987)'de ve Phillips (1996)'da, q-ya dayalı genelleştirilmiş Bernstein polinomlarının yaklaşım özelliklerinin araştırılması üzerine olmuştur. Daha sonra, Oruç ve Tuncer (2002) tarafından q-Bernstein polinomlarının yakınsaklığı ve onların iterasyonu, Aral (2008)'da genelleştirilmiş Szász–Mirakyan operatörlerinin q-analogları ve Aslan ve Izgi (2020) tarafından ise modifiye edilmiş q-Bernstein operatörlerinin bazı yaklaşım sonuçları üzerine çalışmalar yapılmıştır. Yaklaşım teorisine yeni bir süreç katan post-kuantum-kalkülüs ile ilgili çalışma ilk defa Mursaleen ve ark. (2015)'de Bernstein polinomlarının (p,q)-analogları yani post-kuantum analogları üzerine yapılmıştır. Bu çalışmadan ilham alınarak birçok operatörün (p,q)-analogları üzerine çalışmalarda yapılmıştır. Örneğin; iki değişkenli (p,q)-Bernstein operatörlerinin yaklaşım özelliklerini Karaisa (2016)'da, (p,q)-lupaş-schurer operatörlerinin bazı yaklaşım özelliklerinin araştırılması Kanat ve Sofyalıoglu (2018)'de ve King tip (p,q)-Szász-Mirakjan-Kantorovich operatörlerinin yaklaşımlarının hata tahminleri ise Mursaleen ve ark. (2019) tarafından yapılmıştır.

2.1. $R_n(f;x,y)$ operatörünün tanımlanması

Bu tez çalışmasında ise yukarıda bahsi geçen birçok çalışma detaylıca incelenmiş olup bu çalışmalardan faydalanarak yeni bir operatör ortaya konulmuştur. Şimdi bu yeni operatörümüzü aşağıdaki şekilde tanımlayalım ve kabul edelim ki;

$\Delta := \{(x,y) : -1 \leq x, y \leq 1, x+y \leq 0\}$ üçgensel bölgesi şeklinde tanımlansın ve $C(\Delta)$ uzayı ise; Δ üzerindeki sürekli ve $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ üzerindeki sınırlı fonksiyonlar uzayı olarak verilsin. $f \in C(\Delta)$ olmak üzere, $C(\Delta)$ uzayı üzerinde aşağıda tanımlanan norm ile birlikte bir lineer normlu uzaydır.

$$\|f\|_{C(\Delta)} = \max_{x,y\in\Delta} |f(x,y)|$$

$(x,y) \in \Delta$ ve $f \in C(\Delta)$ olmak üzere; iki değişkenli Bernstein-Kantorovich tip operatör

$$R_n(f;x,y) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y) \int\limits_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} \int\limits_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} f(s,t)dsdt \qquad (2.4)$$

biçiminde tanımlanmıştır. (2.4)'de $\nu_{n,k,l}(x,y)$ ifadesi

$$\nu_{n,k,l}(x,y) = \binom{n}{k}\binom{n-k}{l}\left(\frac{1+x}{2}\right)^k\left(\frac{1+y}{2}\right)^l\left(1-\frac{1+x}{2}-\frac{1+y}{2}\right)^{n-k-l}$$

şeklinde verilmiştir.

2.2. Temel Kavramlar

Bu bölüm içerisinde tez için kullanılacak tanımlar, teoremler ayrıca lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklığı, Korovkin teoreminin ifadesi ve ispatı verilecektir.

Tanım 2.1 *$X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in X$ olsun. $\forall \epsilon > 0$ için $x \in X$ için $|x-a| < \delta$ iken $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\epsilon)$ sayısı varsa, f fonksiyonuna a noktasında süreklidir denir (Balci, 1997).*

Tanım 2.2 *$X \subset \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ olarak tanımlanmış olsun, $\forall \epsilon > 0$ için $|a_1 - a_2| < \delta$ ise $|f(a_1) - f(a_2)| < \epsilon$ olacak şekilde $\forall\, a_1, a_2 \in X$ noktaları için yalnızca ϵ'na bağlı bir δ sayısı varsa, f fonksiyonuna X kümesi üzerinde düzgün süreklidir denir (Balci, 1997).*

Tanım 2.3 *$A \neq \varnothing$ bir küme ve F reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $A'ya$ F üzerinde bir lineer uzay veya vektör uzayı denir.*

$A, +$ işlemine göre değişmeli bir gruptur.Yani,

$B1)$ $\forall u, v \in A$ için $u + v \in A'dır$ (kapalılık özelliği).

$B2)$ $\forall u, v, \in A$ için $u + (v + z) = (u + v) + z$ dir (birleşme özelliği).

$B3)$ $\forall x \in A$ için $u + (-u) = (-u) + u = 0$ olacak şekilde $(-u) \in A$ vardır (ters elemanın varlığı).

$B4)$ $\forall u \in A$ için $u + 0 = 0 + u$ olacak şekilde $0 \in A$ vardır (özdeş elemanın varlığı).

$B5)$ $\forall u, v \in A$ için $u + v = u + v$ dir (değişme özelliği).

$\forall\, u, v \in A$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

$C1)$ $\alpha.u \in A' dır$ *(skalerle çarpmaya göre kapalılık).*

$C2)$ $(\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$ *dir.*

$C3)$ $\alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$ *dir.*

$C4)$ $(\alpha.\beta).u = \alpha.(\beta.u)$ *dir.*

$C5)$ $1.u = u$ *dir. (1, F 'nin birim elemanıdır) (Bayraktar, 2006).*

Tanım 2.4 *A lineer uzayı F cismi üzerinde tanımlanış olsun. $\|\|: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x'deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için*

$A1)\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$A2)\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|(\alpha \in F)$

$A3)\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(üçgen eşitsizliği)*

şartları sağlanıyorsa $\|\|$ fonksiyonuna A üzerinde norm denir ve $(A, \|\|)$ ile gösterilir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.5 *$X \neq \varnothing$ ve $X \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : X \to \mathbb{R}$ olarak tanımlanmış olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $|f(x)| \leq M, M > 0$ şeklinde bir $M \in \mathbb{R}$ değeri var ise, f fonksiyonuna X kümesinde sınırlıdır denir (Musayev ve ark., 2006).*

Tanım 2.6 *$(a, b) \subset \mathbb{R}$ tanımlansın ve $f{:}(a, b) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $x, t \in (c, d)$ olmak üzere $\lim\limits_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = A(x)$ sonlu limiti mevcut ise, bu $A(x)$ değerine f fonksiyonunun x noktasındaki türevi denir ve $f'(x)$ veya $Df(x)$ ile gösterilir. Bu durumda f fonksiyonu x noktasında $türevlenebilirdir$ veya $türevlidir$ denir (Musayev ve ark., 2006).*

Tanım 2.7 *X ve Y iki vektör uzayı olsun. X'den alınan bir f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonunu karşılık getiren kurala "$operatör$" denir (Haciyev ve Hacisalihoğlu, 1995).*

Tanım 2.8 *U, V iki lineer uzay ve F bir cisim olmak üzere, $T : U \to V$ operatörü, $\forall x, y \in U$ ve $\alpha, \beta \in F$ için $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$ şartını sağlıyor ise T ye $lineer$ $operatör$ denir (Bayraktar, 2006).*

Tanım 2.9 *X uzayında tanımlanmış T lineer operatörü bu uzayda tanımlı herhangi bir pozitif g fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyorsa T operatörüne "$lineer\ pozitif$ $operatör$" denir. Yani; $g(x) \geq 0$ olduğunda $T(g;x) \geq 0$ olur. Benzer şekilde,$\forall x \in \mathbb{R}$ için $g(x) < 0$ olduğunda $-g(x) > 0$ olur. T lineer pozitif operatör olduğunda, $g(x) < 0$ için $0 < T(-g;x) = -T(g;x)$ sağlanır. Dolayısıyla $g(x) < 0$ için $T(g;x) < 0$ elde edilir (Haciyev ve Hacisalihoğlu, 1995).*

Önerme 2.10 *Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani; $f \geq h$ için $T(f;x) \geq T(h;x)$ eşitsizliği sağlanır.*

İspat. Kabul edelim ki f, h fonksiyonları X uzayında tanımlı ve $f \geq h$ olsun. Bu durumda $f-h \geq 0$ olur. T operatörünün pozitiflik özelliğini kullanarak; $T(f-h;x) \geq 0$ yazılabilir. Ayrıca T operatörünün lineerlik özelliğinden; $T(f;x) - T(h;x) \geq 0$ olur. Yani $f \geq h$ için $T(f;x) \geq T(h;x)$ olduğu görülür ki bu da T operatörünün monoton artan olması demektir anlamına gelir (Haciyev ve Hacisalihoğlu, 1995). □

Önerme 2.11 *L bir lineer pozitif operatör olmak üzere, L operatörü için*

$|L(h;x)| \leq L(|h|;x)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat. X lineer uzayı üzerinde tanımlı herhangi bir h fonksiyonu için $-|h| \leq h \leq |h|$ dir. Önerme 2.10 dan ve L operatörünün monotonluğundan $L(-|h|;x) \leq L(h;x) \leq L(|h|;x)$ eşitsizliği yazılabilir. L operatörü lineer olduğundan; $-L(|h|;x) \leq L(h;x) \leq L(|h|;x)$ elde edilir böylece ispat tamamlanır (Haciyev ve Hacisalihoğlu, 1995). □

Tanım 2.12 *Lineer L operatörü X uzayından Y uzayına dönüşüm yapıyorsa ve*

$$\|L(f;x)\|_Y \leq C\,\|f\|_X$$

eşitliğini gerçekliyorsa o taktirde L operatörüne "sınırlı operatör" denir (Haciyev ve Hacisalihoğlu, 1995).

Teorem 2.13 *X ve Y normlu uzaylar, $D(L) \subset X$ olmak üzere L, $D(L)$ den Y uzayına lineer bir operatör olsun. Bu durumda,* *(i) L operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter koşul, L operatörünün sınırlı olmasıdır.*

(ii) L operatörü bir tek noktada sürekli ise, her noktada süreklidir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.14 *$C[a,b]$ uzayı, $[a,b]$ sonlu aralığı üzerinde tanımlı bütün sürekli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının uzayını göstersin. Bu uzay üzerindeki norm $\|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ şeklinde gösterilir (Haciyev ve Hacisalihoğlu, 1995).*

Tanım 2.15 *$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonların bir dizisi olarak verilmiş olsun. Herbir $x \in [a,b]$ ve verilen $\epsilon > 0$ için öyle bir n_0 vardır ki $\forall n > n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ olacak şekilde n_0 varsa f_n dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır denir (Shevchuk, 1992).*

Tanım 2.16 *g_n dizisi g fonksiyonuna düzgün yakınsaktır gerek ve yeter şart $\forall\epsilon > 0$ için en az bir n_0 vardır öyleki $\forall n > n_0$ ve $\forall x \in [a,b]$ için $|g_n(x) - g(x)| < \epsilon$ 'dur ve $g_n \rightrightarrows g$ ile gösterilir (Shevchuk, 1992).*

Tanım 2.17 *f, $[a,b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $\delta > 0$ için $\omega(\delta) := sup\{|f(x_2) - f(x_1)| : |x_2 - x_1| \leq \delta, x_{1,} x_2 \in [a,b]\}$ biçiminde tanımlanan fonksiyona, f fonksiyonunun süreklilik modülü denir (Shevchuk, 1992).*

Teorem 2.18 *f, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olsun. O halde f fonksiyonunun süreklilik modülü olan $\omega(\delta)$,*

$a)\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(\delta) = 0$

$b)$ $0 < \delta_1 < \delta_2$ *ise* $\omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_2)$

$c)$ $\omega(\delta_1 + \delta_2) = \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$

$d)$ $\omega(m\delta) \leq m\omega(\delta), m \in \mathbb{Z}^+$

$e)$ $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t-x|)$

$f)$ $\omega(f; |t-x|) \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right)\omega(f;\delta)$

özelliklerini sağlar (Altomare ve Campiti, 1994).

Teorem 2.19 *$f \in C[a,b]$ ve bütün reel eksen üzerinde*

$$|f(x)| \le M_f \tag{2.5}$$

şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. Eğer L_n lineer pozitif operatör dizisi $[a,b]$ aralığı üzerinde

$$\begin{aligned} &i)\ L_n(1;x) \rightrightarrows 1 && n \to \infty \\ &ii)\ L_n(t;x) \rightrightarrows\ x && n \to \infty \\ &iii) L_n(t^2;x) \rightrightarrows\ x^2 && n \to \infty \end{aligned}$$

şartlarını sağlıyorsa bu durumda L_n operatör dizisi $[a,b]$ üzerinde $L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$ dir. Farklı bir şekilde ifade edecek olursak; $\|L_n f - f\|_{C[a,b]} \to 0 \quad (n \to \infty)$ veya buna eşdeğer olan

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} |L_n(f;x) - f(x)| = 0$$

Olur.

İspat. Kabul edelim ki $f \in C[a,b]$ olsun. Sürekli fonksiyonların tanımı kullanılarak her pozitif ϵ sayısına karşılık öyle bir δ sayısı bulunabilir ki, $|t-x| < \delta$ iken

$$|f(t) - f(x)| < \epsilon \tag{2.6}$$

sağlanır. (2.5)'den $|f(t) - f(x)| < |f(t)| + |f(x)| \le 2M_f$ yazılabilir. Diğer taraftan $|t-x| \ge \delta$ iken $\frac{|t-x|}{\delta} \ge 1$'den $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \ge 1$ sağlanır. Böylece aşağıdaki

$$|f(t) - f(x)| \le 2M_f \le 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \tag{2.7}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $\forall x \in [a,b]$ için (2.6) ve (2.7) 'deki eşitsizliklerden

$$|f(t) - f(x)| < \epsilon + 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \tag{2.8}$$

elde edilir. Şimdi $i), ii), iii)$ şartlarını sağlayan L_n lineer pozitif operatör dizisinin $\lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} |L_n(f;x) - f(x)| = 0$ eşitliğinin sağladığının gösterilmesi gerekmektedir. Lineerlik özelliğinden

$$\begin{aligned} |L_n(f(t);x) - f(x)| &= |L_n(f(t);x) - f(x) + L_n(f(x);x) - L_n(f(x);x)| \\ &= |L_n(f(t);x) - L_n(f(x);x) + L_n(f(x);x) - f(x)| \\ &= |L_n(f(t) - f(x);x) + f(x)(L_n(1;x) - 1)| \end{aligned}$$

dir. Yukarıdaki eşitlikle üçgen eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \leq |L_n(f(t) - f(x);x)| + |f(x)||L_n(1;x) - 1)| \qquad (2.9)$$

kolayca elde edilir. Lineer pozitif operatörlerin özelliklerinden ve $\forall\ a \in \mathbb{R}$ için $a \leq |a|$ özelliğini kullanarak $|L_n(f(t)-f(x));x)| \leq L_n(|f(t)-f(x)|;x)$ yazılabilir. (2.5) ifadesi gözönüne alınarak (2.9) eşitsizliği aşağdaki

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x);x|) + M_f|L_n(1;x) - 1)|$$

şekile dönüşecektir. L_n monoton artan olduğundan $(2.9)'$dan

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \leq L_n(\epsilon + 2M_f\frac{(t-x)^2}{\delta^2};x) + M_f|L_n(1;x) - 1)| \qquad (2.10)$$

elde edilir. Diğer yandan L_n'in lineer pozitif olduğu dikkate alınarak;

$$L_n(\epsilon + 2M_f\tfrac{(t-x)^2}{\delta^2};x) = L_n(\epsilon;x) + L_n(2M_f\tfrac{(t-x)^2}{\delta^2};x)$$

$$= \epsilon L_n(1;x) + \tfrac{2M_f}{\delta^2}L_n(t^2 - 2xt + x^2;x)$$

$$= \epsilon L_n(1;x) + \tfrac{2M_f}{\delta^2}\left[L_n(t^2;x) - x^2 - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t;x) + x^2L_n(1;x)\right]$$

$$= \epsilon L_n(1;x) + \tfrac{2M_f}{\delta^2}\left[L_n(t^2;x) - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t;x) + x^2L_n(1;x) - x^2\right]$$

$$= \quad \epsilon L_n(1;x) \quad + \quad \tfrac{2M_f}{\delta^2}\left[(L_n(t^2;x) - x^2) + 2x(x - L_n(t;x)) + x^2(L_n(1;x) - 1)\right]$$

yazılabilir. Bu son ifadenin (2.10)'da yerine yazılmasıyla

$$\epsilon L_n(1;x) + \frac{2M_f}{\delta^2}\Big[(L_n(t^2;x) - x^2) + 2x(x - L_n(t;x)) + x^2(L_n(1;x) - 1)\Big] \qquad (2.11)$$

elde edilir. $i), ii), iii)$ koşulları (2.11) eşitliğinde kullanılırsa; $\forall\epsilon\prime > 0$ için

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \leq \epsilon\prime$$

eşitsizliği sağlanır. O halde $\lim\limits_{n\to\infty} \|L_nf - f\|_{C[a,b]} = 0$ elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur (Korovkin, 1953). $\square$

Teorem 2.20 *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. Öyle bir P_n polinom dizisi vardır ki $\forall n > n_0$ için $|P_n(x) - P(x)| < \epsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır (Weirstrass, 1885).*

Teorem 2.21 *T_n lineer pozitif operatör dizisi $\mathbb{R}^2$ sınırlı olmak üzere. Bir X kompakt kümesi için*

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(1;x,y) - 1\|_{C(X)} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \|T_n((t-x);x,y)\|_{C(X)} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \|T_n((v-y);x,y)\|_{C(X)} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \left\|T_n(t^2+v^2;x,y) - (x^2+y^2)\right\|_{C(X)} = 0$$

koşulları sağlanıyor ise, $\forall f \in C(X)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(f;x,y) - f(x,y)\|_{C(X)} = 0$$

eşitliği gerçeklenir (Volkov, 1957).

Tanım 2.22 *f ve h,n≥1iin; $x = 0$ noktasında $n-$inci mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar ve P_n ise $n-$inci mertebeden bir polinom olsun.*

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$$

olmak üzere;

$$f(x) = P_n(x) + x^n h(x)$$

eşitliği yazılabilir ise P_n polinomuna $x = 0$ noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen Taylor polinomu denir (Musayev ve ark., 2006).

Tanım 2.23 *f, a noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun.*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k$$

serisine f fonksiyonu tarafından a noktasında üretilen Taylor serisi denir (Musayev ve ark., 2006).

Tanım 2.24 *Kabul edelim ki $p, q > 1$ sayıları*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

şartını sağlasın. O halde $\forall\ (\alpha_k) \in l_p$, $\forall\ (\beta_k) \in l_q$ dizileri için;

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k \beta_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir. Özel halde $p = q = 2$ seçilirse bu eşitsizliğe de Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky eşitsizliği denir (Musayev ve ark., 2006).

Teorem 2.25 *Bir f fonksiyonu $[0,1]$ kapalı aralığında sınırlı ve $x \in [0,1]$ noktasında ikinci mertebeden sürekli türeve sahip ise*

$$\lim_{n\to\infty} n\left[B_n(f;x) - f(x)\right] = \frac{1}{2}x(1-x)f''(x)$$

eşitliği sağlanır (Voronovskaja, 1932).

Tanım 2.26 *f fonksiyonu $I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı olsun. $\exists\, M > 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ öyleki her $x_1, x_2 \in I$ için,*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M\,|x_1 - x_2|^a$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu $a.mertebeden$ Lipschitz koşulunu sağlıyor denir (Haciyev ve Hacisalihoğlu, 1995).

Tanım 2.27 *(x_n) ve (y_n) dizilerinin limitleri sırasıyla x_0 ve y_0 olsun. Eğer*

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|y_n-y_0|}{|x_n-x_0|} = 0$ veya $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x_n-x_0|}{|y_n-y_0|} = \infty$ ise (y_n) (x_n)'den daha hızlı yakınsar denir (Brezinski, 2001).

Tanım 2.28 *h Δ bölgesi üzerinde tanımlı ve sürekli bir fonksiyon ve δ_1,δ_2 birer pozitif sayı olmak üzere,*

$$\varpi(h,\delta_1,\delta_2) = \sup\left\{|h(t,s) - h(x,y)| : (t,s),(x,y) \in \Delta, \quad |t-x| \leq \delta_1, |s-y| \leq \delta_2\right\}$$

fonksiyonuna h fonksiyonunun tam süreklilik modülü denir. (Anastassiou ve Gal, 2012).

Tanım 2.29 *h Δ bölgesi üzerinde tanımlı ve sürekli bir fonksiyon ve $\delta > 0$ olmak üzere*

$$\omega_1(h,\delta) = \sup\left\{|h(x_1,y) - h(x_2,y)| : y \in [-1,1], |x_1 - x_2| \leq \delta, \delta > 0\right\}$$

$$\omega_2(h,\delta) = \sup\left\{|h(x,y_1) - h(x,y_2)| : x \in [-1,1], |y_1 - y_2| \leq \delta, \delta > 0\right\}$$

fonksiyonlarına sırasıyla h fonksiyonunun x ve y değişkenlerine göre kısmi süreklilik modülleri denir (Anastassiou ve Gal, 2012).

Tanım 2.30 *h, Δ bölgesi üzerinde tanımlı ve reel değerli fonksiyon olsun. h fonksiyonunun karma fark denklemi olarak verilen*

$$\phi_{(t_0,s_0)}h(x,y) = h(x,y) - h(x,s_0) - h(t_0,y) + h(t_0,s_0)$$

eşitliği $\forall(x,y),(t_0,s_0) \in \Delta$ için eğer

$$\lim_{(t_0,s_0)\to(x,y)} \phi_{(t_0,s_0)}h(x,y) = 0$$

eşitliği sağlıyorsa, h fonksiyonuna $(t_0,s_0) \in \Delta$ noktasında Bögel-sürekli fonksiyon denir (Bögel, 1934).

Tanım 2.31 *h, Δ bölgesi üzerinde tanımlı ve reel değerli fonksiyon olsun. h fonksiyonu $\forall(x,y),(t_0,s_0) \in \Delta$ için*

$$\lim_{(t_0,s_0)\to(x,y)} \frac{\phi_{(t_0,s_0)}h(x,y)}{(t_0-x)(s_0-y)} = D_b h(x,y) < \infty$$

eşitliğini sağlıyorsa h fonksiyonuna $(t_0,s_0) \in \Delta$ noktasında Bögel-Differansiyellenebilirdir denir ve $D_b h(x,y)$ ile gösterilir (Bögel, 1934).

Tanım 2.32 *h fonksiyonu Δ üzerinde tanımlı sürekli ve sınırlı bögel uzayının bir elemanı olmak üzere $\forall(x,y),(t_0,s_0) \in \Delta$ ve herhangi $\delta_1,\delta_2 \in \mathbb{R}^+$ için*

$$\omega_{mixed}(h;\delta_1,\delta_2) := \sup\left\{\left|\phi_{(t_0,s_0)}h(x,y)\right| : |x-t_0| < \delta_1, |y-s_0| < \delta_2\right\} \tag{2.12}$$

eşitliğine h fonksiyonunun pürüzsüzlük karma modülü denir ve ayrıca ω_{mixed} fonksiyonu her $\lambda_1,\lambda_2 \geq 0$ için

$$\omega_{mixed}(h;\lambda_1\delta_1,\lambda_2\delta_2) \leq (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\,\omega_{mixed}(h;\delta_1,\delta_2)$$

eşitsizliğini sağlar (Anastassiou ve Gal, 2012).

Tanım 2.33 *$h \in C(\Delta)$ ve $\forall(x,y),(t,s) \in \Delta$ ve $\beta,\gamma \in (0,1]$ için*

$$Lip_\alpha(\beta,\gamma) = \left\{h \in C(\Delta) : W_n\left(|h(t,s)-h(x,y)|;x,y\right) \leq \alpha\ |t-x|^\beta\,|s-y|^\gamma\right\} \tag{2.13}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfına $W_n(h;x,y)$ operatörünün Lipschitz sınıfı fonksiyonları denir. (Badea, 1995).

Tanım 2.34 *$f \in C_b(\Delta)$ olmak üzere, $\forall(t_0,s_0),(x,y) \in \Delta$ için f fonksiyonunun karma kısmi türevleri;*

$$D_x f(t_0,s_0) := D_B^{1,0}(f;t_0,s_0) = \lim_{x\to t_0} \frac{\Delta_x f\{(t_0,x);s_0\}}{x-t_0}$$

ve

$$D_y f(t_0,s_0) := D_B^{0,1}(f;t_0,s_0) = \lim_{y\to s_0} \frac{\Delta_y f\{t_0;(y,s_0)\}}{y-s_0}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\Delta_x f\{(t_0,x);s_0\} = f(x,s_0) - f(t_0,s_0)$ ve $\Delta_y f\{t_0;(y,s_0)\} = f(t_0,y) - f(t_0,s_0)$ dır. Benzer şekilde 2. mertebeden karma kısmi türevleride

$$D_x D_y f(t_0,s_0) := D_B^{1,0} D_B^{0,1}(f;t_0,s_0) = \lim_{x\to t_0} \frac{\Delta_x (D_y f)\{(t_0,x);s_0\}}{x-t_0}$$

şeklinde tanımlanır (Badea ve Cottin, 1990).

Tanım 2.35 *$f \in C_b(\Delta)$ olmak üzere, $h_1 \in C_B^{2,0}$, $h_2 \in C_B^{0,2}$, $g \in C_B^{2,2}$ için*

$$K_{mixed}(f;a_1,a_2) = \inf_{h_1,h_2,g} \Big\{ \|f-h_1-h_2-g\|_\infty + a_1 \left\|D_B^{2,0} h_1\right\|_\infty + a_2 \left\|D_B^{0,2} h_2\right\|_\infty + a_1 a_2 \left\|D_B^{2,2} g\right\|_\infty \Big\}$$

ifadesine f fonksiyonunun Karma K-Fonksiyoneli denir yukarıdaki eşitlikte $i,j = 0,1,2$ için $C_B^{i,j}$ fonksiyon uzayı $C_b(\Delta)$ uzayına aittir (Badea ve Cottin, 1990).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde (2.4)'de tanımlamış olduğumuz iki değişkenli $R_n(f;x,y)$ operatörünün öncelikle lineer ve pozitif olduğu gösterilecek ardından test fonksiyonları kullanılarak (2.4) operatörü ile ilgili bazı lemma ve teoremler verilecek ve ispatlanacaktır. Daha sonra (2.4) operatörü için sırasıyla merkezi momentler, düzgün yakınsaklığı, yaklaşım hızı ve ardından Lipschitz sınıflarındaki yaklaşımı hesaplanacaktır. Ayrıca (2.4) operatörü için Voronovskaja tip asimtotik yaklaşımı ile ilgili teorem verilip ispatlanacak ve (2.4) operatörünün lokal yaklaşım özellikleri incelenecektir. Son olarak (2.4) operatörünün GBS tip operatörü inşaa edilecek olup, inşaa edilen bu GBS tip operatör ile ilgili teoremler ispatlanacak ve Peetres K- fonksiyoneli yardımı ile de yaklaşım hızı ve ayrıca Lipschitz sınıflarındaki yaklaşımı hesaplanacaktır.

Öncelikle Δ üçgensel bölgesi üzerinde daha önceden (2.4)'de tanımlamış olduğumuz iki değişkenli $R_n(f;x,y)$ operatörünün lineer ve pozitif olduğunu gösterelim.

Lineerlik;

$\forall\, f,g \in C(\Delta)$ ve $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ için;

$$
\begin{aligned}
& R_n(\alpha f(s,t)+\beta g(s,t);x,y) \\
&= \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y) \int\limits_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} \int\limits_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} (\alpha f(s,t)+\beta g(s,t);x,y)dsdt \\
&= \alpha \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y) \int\limits_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} \int\limits_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} f(s,t)dsdt \\
&+ \beta \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y) \int\limits_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} \int\limits_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} g(s,t)dsdt \\
&= \alpha R_n(f;x,y)+\beta R_n(g;x,y)
\end{aligned}
$$

olduğundan $R_n(f;x,y)$ operatörü lineerdir.

Pozitiflik;

$\forall\, k,l,n \in \mathbb{Z}$ ve $(x,y) \in \Delta$ için;

$$\nu_{n,k,l}(x,y) = \binom{n}{k}\binom{n-k}{l}\left(\frac{1+x}{2}\right)^k\left(\frac{1+y}{2}\right)^l\left(1-\frac{1+x}{2}-\frac{1+y}{2}\right)^{n-k-l} \geq 0$$

dır. Eğer $f(s,t) \geq 0$ ise

$$\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} f(s,t)dsdt \geq 0$$

olacağından $R_n(f;x,y)$ operatörü pozitiftir.

3.1. $R_n(f;x,y)$ operatörü ile ilgili bazı lemma ve teoremler

Lemma 3.1 $r_{u,v} : \Delta \to \mathbb{R}, r_{u,v}(x,y) = x^u y^v$ *olsun,* $u,v = 0,1,2,3,4$ *için*

1) $\displaystyle\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} r_{0,0}(s,t)dsdt = \left[\frac{4}{(n+1)^2}\right]$

2) $\displaystyle\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} r_{1,0}(s,t)dsdt = \left[\frac{8k+4}{(n+1)^3} - \frac{4}{(n+1)^2}\right]$

3) $\displaystyle\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} r_{0,1}(s,t)dsdt = \left[\frac{8l+4}{(n+1)^3} - \frac{4}{(n+1)^2}\right]$

4) $\displaystyle\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} r_{2,0}(s,t)dsdt = \left[\frac{16k^2+16k+\frac{16}{3}}{(n+1)^4} - \frac{16k+8}{(n+1)^3} + \frac{4}{(n+1)^2}\right]$

5) $\displaystyle\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} r_{0,2}(s,t)dsdt = \left[\frac{16l^2+16l+\frac{16}{3}}{(n+1)^4} - \frac{16l+8}{(n+1)^3} + \frac{4}{(n+1)^2}\right]$

6) $\displaystyle\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} r_{3,0}(s,t)dsdt = \Big[\frac{32k^3+48k^2+32k+8}{(n+1)^5} - \frac{48k^2+48k+16}{(n+1)^4}$

$\displaystyle+\frac{24k+12}{(n+1)^3} - \frac{4}{(n+1)^2}\Big]$

7) $\displaystyle\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} r_{0,3}(s,t)dsdt = \Big[\frac{32l^3+48l^2+32l+8}{(n+1)^5} - \frac{48l^2+48l+16}{(n+1)^4}$

$\displaystyle+\frac{24l+12}{(n+1)^3} - \frac{4}{(n+1)^2}\Big]$

$$8)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} r_{4,0}(s,t)dsdt = \Big[\tfrac{64k^4+128k^3+128k^2+64k+\frac{64}{5}}{(n+1)^6}$$

$$-\tfrac{128k^3+192k^2+128k+32}{(n+1)^5}+\tfrac{96k^2+96k+32}{(n+1)^4}-\tfrac{32k+16}{(n+1)^3}+\tfrac{4}{(n+1)^2}\Big]$$

$$9)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} r_{0,4}(s,t)dsdt = \Big[\tfrac{64l^4+128l^3+128l^2+64l+\frac{64}{5}}{(n+1)^6}$$

$$-\tfrac{128l^3+192l^2+128l+32}{(n+1)^5}+\tfrac{96l^2+96l+32}{(n+1)^4}-\tfrac{32l+16}{(n+1)^3}+\tfrac{4}{(n+1)^2}\Big]$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. $r_{u,v} : \Delta \to \mathbb{R}, r_{u,v}(x,y) = x^u y^v$, ve $u,v = 0,1,2,3,4$ için sırasıyla yukarıdaki integralleri hesaplayalım.

$$1)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} r_{0,0}(s,t)dsdt = \int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} 1dsdt$$

$$= \left[(2\frac{k+1}{n+1}-1)-(2\frac{k}{n+1}-1)\right]$$

$$\left[(2\frac{l+1}{n+1}-1)-(2\frac{l}{n+1}-1)\right]$$

$$= \left[\frac{4}{(n+1)^2}\right]$$

$$2)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} r_{1,0}(s,t)dsdt = \int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} sdsdt$$

$$= \frac{1}{2}\left[(2\frac{k+1}{n+1}-1)^2-(2\frac{k}{n+1}-1)^2\right]$$

$$= \left[\frac{8k+4}{(n+1)^3}-\frac{4}{(n+1)^2}\right]$$

Benzer şekilde

$$3)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} r_{0,1}(s,t)dsdt = \left[\frac{8l+4}{(n+1)^3}-\frac{4}{(n+1)^2}\right]$$

elde edilir.

$$4)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} r_{2,0}(s,t)dsdt = \int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} s^2dsdt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\left[(2\frac{k+1}{n+1}-1)^3-(2\frac{k}{n+1}-1)^3\right]\\
&= \frac{1}{3}\left[(2\frac{k+1}{n+1}-1)-(2\frac{k}{n+1}-1)\right]\Bigg[(2\frac{k+1}{n+1}-1)^2\\
&-(2\frac{k+1}{n+1}-1)(2\frac{k}{n+1}-1)+(2\frac{k}{n+1}-1)^2\Bigg]\\
&= \left[\frac{16k^2+16k+\frac{16}{3}}{(n+1)^4}-\frac{16k+8}{(n+1)^3}+\frac{4}{(n+1)^2}\right]
\end{aligned}
$$

Aynı şekilde

$$
5)\int\limits_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int\limits_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} r_{0,2}(s,t)dsdt = \left[\frac{16l^2+16l+\frac{16}{3}}{(n+1)^4}-\frac{16l+8}{(n+1)^3}+\frac{4}{(n+1)^2}\right]
$$

sonucuna ulaşırız.

$$
\begin{aligned}
6)\int\limits_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int\limits_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} r_{3,0}(s,t)dsdt &= \int\limits_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int\limits_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} s^3dsdt\\
&= \frac{1}{4}\left[(2\frac{k+1}{n+1}-1)^4-(2\frac{k}{n+1}-1)^4\right]\\
&= \frac{1}{4}\Bigg(\left[(2\frac{k+1}{n+1}-1)^2-(2\frac{k}{n+1}-1)^2\right]\\
&\left[(2\frac{k+1}{n+1}-1)^2+(2\frac{k}{n+1}-1)^2\right]\Bigg)\\
&= \Bigg[\frac{32k^3+48k^2+32k+8}{(n+1)^5}-\frac{48k^2+48k+16}{(n+1)^4}\\
&+\frac{24k+12}{(n+1)^3}-\frac{4}{(n+1)^2}\Bigg]
\end{aligned}
$$

Benzer yol izlenerek,

$$
\begin{aligned}
7)\int\limits_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int\limits_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} r_{0,3}(s,t)dsdt &= \int\limits_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int\limits_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} t^3dsdt\\
&= \Bigg[\frac{32l^3+48l^2+32l+8}{(n+1)^5}-\frac{48l^2+48l+16}{(n+1)^4}\\
&+\frac{24l+12}{(n+1)^3}-\frac{4}{(n+1)^2}\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$8)\int\limits_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int\limits_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} r_{4,0}(s,t)dsdt = \int\limits_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int\limits_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} s^4 dsdt$$
$$= \frac{1}{5}\left[(2\frac{k+1}{n+1}-1)^5-(2\frac{k}{n+1}-1)^5\right]$$
$$= \frac{1}{5}\left[(2\frac{k+1}{n+1}-1)-(2\frac{k}{n+1}-1)\right]\left[(2\frac{k+1}{n+1}-1)^4\right.$$
$$+(2\frac{k+1}{n+1}-1)^3(2\frac{k}{n+1}-1)+(2\frac{k+1}{n+1}-1)^2(2\frac{k}{n+1}-1)^2$$
$$\left.+(2\frac{k+1}{n+1}-1)(2\frac{k}{n+1}-1)^3+(2\frac{k}{n+1}-1)^4\right]$$
$$= \left[\frac{64k^4+128k^3+128k^2+64k+\frac{64}{5}}{(n+1)^6}\right.$$
$$-\frac{128k^3+192k^2+128k+32}{(n+1)^5}$$
$$\left.+\frac{96k^2+96k+32}{(n+1)^4}-\frac{32k+16}{(n+1)^3}+\frac{4}{(n+1)^2}\right]$$

Ve son olarak benzer işlemlerden,

$$9)\int\limits_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int\limits_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} r_{0,4}(s,t)dsdt = \left[\frac{64l^4+128l^3+128l^2+64l+\frac{64}{5}}{(n+1)^6}\right.$$
$$-\frac{128l^3+192l^2+128l+32}{(n+1)^5}+\frac{96l^2+96l+32}{(n+1)^4}$$
$$\left.-\frac{32l+16}{(n+1)^3}+\frac{4}{(n+1)^2}\right]$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Lemma 3.2 *$r_{u,v}:\Delta\to\mathbb{R}, r_{u,v}(x,y)=x^uy^v$ olarak tanımlansın. $x,y\in\Delta$ ve $u,v\in\mathbb{N}_0$ olmak üzere (2.4) operatörü için*

$1)R_n(r_{0,0};x,y)=1$

$2)R_n(r_{1,0};x,y)=x\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$3)R_n(r_{0,1};x,y)=y\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$4)R_n(r_{2,0};x,y)=x^2\left(1-\frac{3n+1}{(n+1)^2}\right)+\frac{n+\frac{1}{3}}{(n+1)^2}$

$5)R_n(r_{0,2};x,y)=y^2\left(1-\frac{3n+1}{(n+1)^2}\right)+\frac{n+\frac{1}{3}}{(n+1)^2}$

$6)R_n(r_{3,0};x,y)=x^3\left(1-\frac{6n^2+n+1}{(n+1)^3}\right)+x\left(\frac{3n^2-n}{(n+1)^3}\right)$

$$7)R_n(r_{0,3};x,y)=y^3\left(1-\tfrac{6n^2+n+1}{(n+1)^3}\right)+y\left(\tfrac{3n^2-n}{(n+1)^3}\right)$$

$$8)R_n(r_{4,0};x,y)=x^4\left(1-\tfrac{10n^3-5n^2+10n+1}{(n+1)^4}\right)+x^2\left(\tfrac{6n^3+60n^2-30n}{(n+1)^4}\right)$$
$$+\left(\tfrac{39n^2-36n+\frac{1}{5}}{(n+1)^4}\right)$$

$$9)R_n(r_{0,4};x,y)=y^4\left(1-\tfrac{10n^3-5n^2+10n+1}{(n+1)^4}\right)+y^2\left(\tfrac{6n^3+60n^2-30n}{(n+1)^4}\right)$$
$$+\left(\tfrac{39n^2-36n+\frac{1}{5}}{(n+1)^4}\right)$$ *eşitsizlikleri sağlanır.*

İspat.

$$1)R_n(r_{0,0};x,y)=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)\left(\frac{2}{n+1}\right)^2=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)=1$$

elde edilir. Şimdide

$$2)R_n(r_{1,0};x,y)=x(\frac{n}{n+1})$$

olduğunu görelim. Lemma 3.1 yardımıyla daha önceden hesapladığımız

$$\int\limits_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int\limits_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1}r_{1,0}(s,t)dsdt=\left(\frac{8k+4}{(n+1)^3}-\frac{4}{(n+1)^2}\right)$$

eşitliğini gözönüne alırsak,

$$R_n(r_{1,0};x,y)=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)\int\limits_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int\limits_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1}r_{1,0}(s,t)dsdt$$
$$=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)\int\limits_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int\limits_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1}sdsdt$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)\left(\frac{8k+4}{(n+1)^3}-\frac{4}{(n+1)^2}\right)\\
&= \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)\frac{4}{(n+1)^2}\left(\frac{2k+1}{n+1}-1\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)\frac{2k}{n+1}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)\\
&- \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)\\
&= \frac{2n}{n+1}\frac{1+x}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)+\frac{1}{n+1}-1\\
&= x(\frac{n}{n+1})
\end{aligned}
$$

elde edilir. Benzer işlemler uygulayarak

$$3)R_n(r_{0,1};x,y) = y(\frac{n}{n+1})$$

olduğuda görülür. Şimdide,

$$4)R_n(r_{2,0};x,y) = x^2\left(1-\frac{3n+1}{(n+1)^2}\right)+\frac{n+\frac{1}{3}}{(n+1)^2}$$

olduğunu görelim. Lemma 3.1 yardımıyla

$$\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} r_{2,0}(s,t)dsdt = \left(\frac{16k^2+16k+\frac{16}{3}}{(n+1)^4}-\frac{16k+8}{(n+1)^3}+\frac{4}{(n+1)^2}\right)$$

eşitliği kullanarak, $R_n(r_{2,0};x,y)$ ifadesini elde etmeye çalışalım.

$$
\begin{aligned}
R_n(r_{2,0};x,y) &= \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} r_{2,0}(s,t)dsdt\\
&= \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)\int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} s^2dsdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)\left(\frac{16k^2+16k+\frac{16}{3}}{(n+1)^4} - \frac{16k+8}{(n+1)^3} + \frac{4}{(n+1)^2}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)\left(\frac{4k^2+4k+\frac{4}{3}}{(n+1)^2} - \frac{4k+2}{n+1} + 1\right)\\
&= \frac{4}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)k^2 + \frac{4}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)k\\
&- \frac{4}{3(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y) - \frac{4}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)k\\
&- \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y) + \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)\\
&= x^2\left(1 - \frac{3n+1}{(n+1)^2}\right) + \frac{n+\frac{1}{3}}{(n+1)^2}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Aynı işlemler vasıtasıyla,

$$
5) R_n(r_{0,2};x,y) = y^2\left(1 - \frac{3n+1}{(n+1)^2}\right) + \frac{n+\frac{1}{3}}{(n+1)^2}
$$

eşitliğinede ulaşılır. Aynı şekilde

$$
6) R_n(r_{3,0};x,y) = x^3\left(1 - \frac{6n^2+n+1}{(n+1)^3}\right) + x\left(\frac{3n^2-n}{(n+1)^3}\right)
$$

olduğunu hesaplayalım.

$$
\begin{aligned}
R_n(r_{3,0};x,y) &= \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y) \int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} r_{3,0}(s,t)\,dsdt\\
&= \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y) \int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} s^3\,dsdt\\
&= \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)\left(\frac{32k^3+48k^2+32k+8}{(n+1)^5}\right.\\
&\left. -\frac{48k^2+32k+8}{(n+1)^4} + \frac{24k+12}{(n+1)^3} - \frac{4}{(n+1)^2}\right)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)\left(\frac{8k^3+12k^2+2}{(n+1)^3} - \frac{12k^2+8k+2}{(n+1)^2} + \frac{6k+3}{n+1} - 1\right)$$
$$= \frac{4}{(n+1)^3}\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)2k^3 + \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)3k^2\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)\right) - \frac{4}{(n+1)^2}\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)3k^2 + \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)2k\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)\right) + \frac{3}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)(2k+1) - 1$$
$$= \frac{4}{(n+1)^3}\left(2\sum_{k=2}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)\left[k(k-1)k-2) + 3k(k-1) + k\right]\right.$$
$$\left.+3\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)[k(k-1)+k] + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)\right)$$
$$-\frac{4}{(n+1)^2}\left(3\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)[k(k-1)+k] + 2\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)k\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)\right) + \frac{3}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)(2k+1) - 1$$
$$= x^3\left(1 - \frac{6n^2+n+1}{(n+1)^3}\right) + x\left(\frac{3n^2-n}{(n+1)^3}\right)$$

Benzer işlem basamaklarını izleyerek

$$7) R_n(r_{0,3};x,y) = y^3\left(1 - \frac{6n^2+n+1}{(n+1)^3}\right) + y\left(\frac{3n^2-n}{(n+1)^3}\right)$$

eşitliğide hesaplanır. Şimdide,

$8) R_n(r_{4,0};x,y) \;=\; x^4\left(1 - \frac{10n^3-5n^2+10n+1}{(n+1)^4}\right) + x^2\left(\frac{6n^3+60n^2-30n}{(n+1)^4}\right) + \left(\frac{39n^2-36n+\frac{1}{5}}{(n+1)^4}\right)$
olduğunu görelim.

$$R_n(r_{4,0};x,y) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y) \int\limits_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} \int\limits_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} r_{4,0}(s,t)\,dsdt$$
$$= \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y) \int\limits_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} \int\limits_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} s^4\,dsdt$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)\left(\frac{64k^4+128k^3+128k^2+64k+\frac{64}{5}}{(n+1)^6}\right.\\
&-\left.\frac{128k^3+192k^2+128k+32}{(n+1)^5}+\frac{96k^2+96k+32}{(n+1)^4}-\frac{32k+16}{(n+1)^3}+\frac{4}{(n+1)^2}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)\left(\frac{16k^4+32k^3+32k^2+16k+\frac{16}{5}}{(n+1)^4}\right.\\
&-\left.\frac{32k^3+48k^2+32k+8}{(n+1)^3}+\frac{24k^2+24k+8}{(n+1)^2}-\frac{8k+4}{n+1}+1\right)\\
&= \frac{4}{(n+1)^2}\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)\frac{4k^4}{(n+1)^2}+\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)\frac{8k^3}{(n+1)^2}\right.\\
&+\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)\frac{8k^2}{(n+1)^2}+\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)\frac{4k+\frac{4}{5}}{(n+1)^2}\\
&-\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)\frac{8k^3}{n+1}-\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)\frac{12k^2}{n+1}\\
&-\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)\frac{8k}{n+1}+1+6\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)k^2\\
&\left.+6\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)k+2\right)-\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)\frac{8k+4}{n+1}+1\\
&= \frac{4}{(n+1)^2}\left(4\sum_{k=3}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)[\frac{k(k-1)k-2)(k-3)+6k(k-1)(k-2)}{(n+1)^2}\right.\\
&+\frac{29k(k-1)+23k}{(n+1)^2}]+8\sum_{k=2}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)\frac{k(k-1)(k-2)+3k(k-1)+k}{(n+1)^2}\\
&+8\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)\frac{k(k-1)+k}{(n+1)^2}+\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)\frac{4k+\frac{4}{5}}{(n+1)^2}\\
&-8\sum_{k=2}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)\frac{k(k-1)(k-2)+3k(k-1)+k}{n+1}\\
&-12\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)\frac{k(k-1)+k}{n+1}-8\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)\frac{k}{n+1}+1\\
&\left.+6\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)k(k-1)+6\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)k+2\right)\\
&-\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\nu_{n,k,l}(x,y)\frac{8k+4}{n+1}+1\\
&= x^4\left(1-\frac{10n^3-5n^2+10n+1}{(n+1)^4}\right)+x^2\left(\frac{6n^3+60n^2-30n}{(n+1)^4}\right)\\
&+\left(\frac{39n^2-36n+\frac{1}{5}}{(n+1)^4}\right)
\end{aligned}
$$

Aynı metod ile

$9)R_n(r_{0,4};x,y) = y^4\left(1-\frac{10n^3-5n^2+10n+1}{(n+1)^4}\right)+y^2\left(\frac{6n^3+60n^2-30n}{(n+1)^4}\right)+\left(\frac{39n^2-36n+\frac{1}{5}}{(n+1)^4}\right)$
eşitliğinede ulaşırız. □

Lemma 3.3 $(x,y)\in\Delta$, $k_{u,v}:\Delta\to\mathbb{R}$, *ve* $k_{u,v}=(s-x)^u(t-y)^v$, $u,v\in\mathbb{N}_0$ *olsun. (2.4) ile tanımlanan operatör için aşağıda verilen merkezi momentler sağlanır.*

$1)R_n(k_{0,0};x,y)=1$

$2)R_n(k_{1,0};x,y)=-\frac{x}{n+1}$

$3)R_n(k_{0,1};x,y)=-\frac{y}{n+1}$

$4)R_n(k_{2,0};x,y)=\frac{x^2(1-n)+n+\frac{1}{3}}{(n+1)^2}$

$5)R_n(k_{0,2};x,y)=\frac{y^2(1-n)+n+\frac{1}{3}}{(n+1)^2}$

$6)R_n(k_{4,0};x,y)=x^4\left(\frac{3n^2-20n+1}{(n+1)^4}\right)+x^2\left(\frac{66n^2-16n+2}{(n+1)^4}\right)+\left(\frac{39n^2-36n+\frac{1}{5}}{(n+1)^4}\right)$

$7)R_n(k_{0,4};x,y)=y^4\left(\frac{3n^2-20n+1}{(n+1)^4}\right)+y^2\left(\frac{66n^2-16n+2}{(n+1)^4}\right)+\left(\frac{39n^2-36n+\frac{1}{5}}{(n+1)^4}\right)$

İspat. $(x,y)\in\Delta$ ve $k_{u,v}:\Delta\to\mathbb{R}$, $k_{u,v}=(s-x)^u(t-y)^v$, $u,v\in\mathbb{N}_0$ için, operatörün lineerlik özelliğinden ve sırasıyla Lemma 3.2'deki sonuçlardan faydalanarak

$$1)R_n(k_{0,0};x,y)=R_n(1;x,y)=1$$

olduğu görülür.

$$\begin{aligned}2)R_n(k_{1,0};x,y)&=R_n((s-x);x,y)\\&=R_n(s;x,y)-xR_n(1;x,y)\\&=x\left(\frac{n}{n+1}\right)-1=-\frac{x}{n+1}\end{aligned}$$

Aynı işlem basamaklarından

$$3)R_n(k_{0,1};x,y)=-\frac{y}{n+1}$$

olduğu görülür. $4)R_n(k_{2,0};x,y)$ için

$$\begin{aligned}R_n(k_{2,0};x,y)&=R_n((s-x)^2;x,y)\\&=R_n(s^2;x,y)-2xR_n(s;x,y)+x^2R_n(1;x,y)\\&=\frac{x^2(1-n)+n+\frac{1}{3}}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer işlemlerle

$$5)R_n(k_{0,2};x,y) = \frac{y^2(1-n)+n+\frac{1}{3}}{(n+1)^2}$$

sonucuda bulunur. $6)R_n(k_{4,0};x,y)$ için

$$\begin{aligned}
R_n(k_{4,0};x,y) &= R_n((s-x)^4;x,y) \\
&= R_n(s^4;x,y) - 4xR_n(s^3;x,y) + 6x^2R_n(s^2;x,y) \\
&- 4x^3R_n(s;x,y) - x^4R_n(1;x,y) \\
&= x^4\left(\frac{3n^2-20n+1}{(n+1)^4}\right) + x^2\left(\frac{66n^2-16n+2}{(n+1)^4}\right) \\
&+ \left(\frac{39n^2-36n+\frac{1}{5}}{(n+1)^4}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir ve aynı yol izleyerek,

$$7)R_n(k_{0,4};x,y) = y^4\left(\frac{3n^2-20n+1}{(n+1)^4}\right) + y^2\left(\frac{66n^2-16n+2}{(n+1)^4}\right) + \left(\frac{39n^2-36n+\frac{1}{5}}{(n+1)^4}\right)$$

sonucunada ulaşılır. Bu da ispatı tamamlar. □

Lemma 3.4 *Δ üçgensel bölgesi üzerinde (2.4) ile tanımlı operatör için aşağıdaki limitler sağlanır.*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} nR_n((s-x);x,y) = -x$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} nR_n((t-y);x,y) = -y$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} nR_n((s-x)^2;x,y) = 1-x^2$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} nR_n((t-y)^2;x,y) = 1-y^2$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} nR_n((s-x)(t-y);x,y) = -(xy+x+y+1)$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2R_n((s-x)^4;x,y) = 3(x^4+22x^2+13)$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2R_n((t-y)^4;x,y) = 3(y^4+22y^2+13)$

İspat. Lemma 3.3'de elde ettiğimiz merkezi momentlerinden faydalanarak istenen sonuca ulaşılır. □

3.2. $R_n(f;x,y)$ operatörünün düzgün yakınsaklığı

Teorem 3.5 *$f \in C(\Delta)$ için $R_n f$ operatörü f fonksiyonuna düzgün yakınsar.*

İspat. Volkov (1957)'de tanımlanan teorem gereği; $n \to \infty$, ve $(x,y) \in \Delta$ için aşağıdaki sonuçlara ulaşmamız gerekiyor.

$$i) \lim_{n\to\infty} \|R_n(1;x,y) - 1\|_{C(\Delta)} \to 0$$

$$ii) \lim_{n\to\infty} \|R_n(s;x,y) - x\|_{C(\Delta)} \to 0, \lim_{n\to\infty} \|R_n(t;x,y) - y\|_{C(\Delta)} \to 0$$

$$iii) \lim_{n\to\infty} \left\|R_n(s^2+t^2;x,y) - (x^2+y^2)\right\|_{C(\Delta)} \to 0$$

Lemma 3.2 'den aşağıdaki ilk sonuca kolayca ulaşılır.

$$i) \lim_{n\to\infty} \|R_n(1;x,y) - 1\|_{C(\Delta)} \to 0$$

$$\|R_n(s;x,y) - x\|_{C(\Delta)} = \max_{-1\le x\le 1} |R_n(s;x,y) - x| = \max_{-1\le x\le 1} \left|\frac{nx}{n+1} - x\right| \le \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \to 0 \Rightarrow ii) \lim_{n\to\infty} \|R_n(s;x,y) - x\|_{C(\Delta)} \to 0$$

Aynı yolu izleyerek,

$$\lim_{n\to\infty} \|R_n(t;x,y) - y\|_{C(\Delta)} \to 0$$

sonucuna ulaşırız.

$$\|R_n(s^2+t^2;x,y) - (x^2+y^2)\|_{C(\Delta)}$$

$$= \max_{-1\le x,y\le 1} \left|R_n(s^2+t^2;x,y) - (x^2+y^2)\right|$$

$$= \max_{-1\le x,y\le 1} \left|(x^2+y^2)\left(1 - \tfrac{3n+1}{(n+1)^2}\right) + \tfrac{n+\frac{1}{3}}{(n+1)^2} - (x^2+y^2)\right|$$

$$\le \frac{n+\frac{1}{3}}{(n+1)^2}$$

iii) $\lim_{n\to\infty} \|R_n(s^2+t^2;x,y) - (x^2+y^2)\|_{C(\Delta)} \le \lim_{n\to\infty} \frac{n+\frac{1}{3}}{(n+1)^2} \to 0$

dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} \|R_n f - f\|_{C(\Delta)} \to 0$$

'dır □

3.3. $R_n(f;x,y)$ operatörünün yaklaşım hızının hesaplanması

Teorem 3.6 *$f \in C(\Delta)$ olmak üzere (2.4) ile tanımlı operatör için*

$$\left|R_n(f;u,v)-f(u,v)\right| \leq 4\varpi(f,\frac{1}{\sqrt{n+1}},\frac{1}{\sqrt{n+1}})$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Bir önceki bölümde tanımlamış olduğumuz tam süreklilik modülü özelliklerinden yararlanarak

$$\begin{aligned}\left|f(s,t)-f(u,v)\right| &\leq \varpi(f,\left|s-u\right|,\left|t-v\right|)\\ &\leq \varpi(f,\delta_1,\delta_2)\left(1+\frac{\left|s-u\right|}{\delta_1}\right)\left(1+\frac{\left|t-v\right|}{\delta_2}\right)\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafına R_n operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\left|R_n(f;u,v)-f(u,v)\right| &= \left|R_n(f(s,t);u,v)-R_n(f(u,v);u,v)\right|\\ &= \left|R_n(f(s,t)-f(u,v));u,v)\right|\\ &\leq R_n(\left|f(s,t)-f(u,v)\right|;u,v)\end{aligned}$$

$$\leq \varpi(f,\delta_1,\delta_2)\left(1+\frac{1}{\delta_1}R_n(\left|s-x\right|;u,v)\right)\left(1+\frac{1}{\delta_2}R_n(\left|t-y\right|;u,v)\right)$$

Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky eşitsizliğinden faydalanarak

$$\leq \varpi(f,\delta_1,\delta_2)\left(1+\frac{1}{\delta_1}\sqrt{R_n((s-u)^2;u,v)}\right)\left(1+\frac{1}{\delta_2}\sqrt{R_n((t-v)^2;u,v)}\right)$$

elde edilir. Lemma 3.3'den ve $\delta_1=\delta_2=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, seçilerek

$$\left|R_n(f;u,v)-f(u,v)\right| \leq 4\varpi(f,\frac{1}{\sqrt{n+1}},\frac{1}{\sqrt{n+1}})$$

sonucuna ulaşılır ve buda ispatı tamamlar. □

Teorem 3.7 *$f \in C(\Delta)$ için, (2.4)'de tanımlamış olduğumuz operatörümüz için*

$$\left|R_n(f;u,v)-f(u,v)\right| \leq 2\left(\omega_1(f,\frac{1}{\sqrt{n+1}})+\omega_2(f,\frac{1}{\sqrt{n+1}})\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Bir önceki bölümde özellikleri verilen kısmi süreklilik modülü yardımı ile

$$\begin{aligned}|R_n(f;u,v)-f(u,v)| &\leq |R_n(f(t,s))-f(u,v)| \\ &\leq R_n(|f(t,s)-f(u,v)|\,;u,v)+R_n(|f(t,y)-f(u,v)|\,;x,y) \\ &\leq R_n(\omega_2(f,\delta_2)\left(1+\frac{|s-v|}{\delta_2};u,v\right)R_n(\omega_1(f,\delta_1)\left(1+\frac{|t-u|}{\delta_1};u,v\right) \\ &\leq \omega_2(f,\delta_2)\left(1+\frac{1}{\delta_2}R_n(|s-v|\,;u,v)\right)+\omega_1(f,\delta_1)\left(1+\frac{1}{\delta_1}R_n(|t-u|\,;u,v)\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki son eşitsizliğe Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky eşitsizliği uygulanırsa

$$\leq \omega_2(f,\delta_2)\left(1+\frac{1}{\delta_2}\sqrt{R_n((s-v)^2;u,v)}\right)+\omega_1(f,\delta_1)\left(1+\frac{1}{\delta_1}\sqrt{R_n((t-u)^2;u,v)}\right)$$

elde edilir ve son olarak lemma 3.3'de elde ettiğimiz sonuçlar yardımıyla ve özel olarak $\delta_1=\delta_2=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ seçilirse,

$$|R_n(f;u,v)-f(u,v)|\leq 2\left(\omega_1(f,\frac{1}{\sqrt{n+1}})+\omega_2(f,\frac{1}{\sqrt{n+1}})\right)$$

eşitsizliği elde edilir ve buda ispatımızı tamamlanır. □

Teorem 3.8 *$f\in Lip_\alpha(\beta,\gamma)$ olmak üzere (2.4) ile tanımlanmış operatör için*

$$|\,R_n(f;u,v)-f(u,v)|\leq \alpha\,\Pi_{n,2}(u)^{\frac{\beta}{2}}\Psi_{n,2}(v)^{\frac{\gamma}{2}}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. (2.4) ile verilen operatörden ve (2.12) tanımından,

$$\begin{aligned}|\,R_n(f;u,v)-f(u,v)| &\leq R_n\left(|f(t,s)-f(u,v)|\,;u,v\right) \\ &\leq \alpha R_n\left(|t-u|^\beta\,|s-v|^\gamma\,;u,v\right) \\ &= \alpha R_n(|t-u|^\beta\,;u,v)R_n\left(|s-v|^\gamma\,;u,v\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son ifadeye Hölder eşitsizliğinde (p_1,q_1) ve (p_2,q_2) ifadelerinin yerine sırasıyla $\left(\frac{2}{\beta},\frac{2}{2-\beta}\right),\left(\frac{2}{\gamma},\frac{2}{2-\gamma}\right)$ ifadelerini uygularsak

$$\begin{aligned}|\,R_n(f;u,v)-f(u,v)| &\leq \alpha\left(R_n\left((t-u)^2;u,v\right)^{\frac{\beta}{2}}R_n\left(r_{0,0};u,v\right)^{\frac{2-\beta}{2}}\right. \\ &\quad\left.\times R_n\left((s-v)^2;u,v\right)^{\frac{\gamma}{2}}R_n\left(r_{0,0};u,v\right)^{\frac{2-\gamma}{2}}\right) \\ &\leq \alpha\,\Pi_{n,2}(u)^{\frac{\beta}{2}}\Psi_{n,2}(v)^{\frac{\gamma}{2}}\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yukarıdaki eşitsizlikte $\Pi_{n,2}(u) = R_n\left((t-u)^2; u, v\right)$ ve $\Psi_{n,2}(v) = R_n\left((s-v)^2; u, v\right)$ biçiminde tanımlanmıştır. Son olarak Lemma 3.2 ve Lemma 3.3'deki sonuçlardan yararlanarak ispatımızı tamamlarız. □

Teorem 3.9 *$f \in C^1(\Delta)$, $(x, y) \in \Delta$ olmak üzere, (2.4) ile tanımlanan operatör için*

$$| R_n(f; x, y) - f(x, y)| \leq \left\| f_x' \right\| \sqrt{\Pi_{n,2}(x)} + \left\| f_y' \right\| \sqrt{\Psi_{n,2}(y)}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Kabul edelimki $(x, y) \in \Delta$ için bir sabit nokta olsun o halde Taylor formülünden

$$f(t, s) - f(x, y) = \int_x^t f_u'(u, s)du + \int_y^s f_v'(x, v)dv$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan yukarıdaki eşitliğin her tarafına $R_n(.; x, y)$ operatörünü uygularsak,

$$| R_n(f; x, y) - f(x, y)| \leq R_n(\int_x^t f_u'(u, s)du; x, y) + R_n(\int_y^s f_v'(x, v)dv; x, y)$$

eşitsizliği elde ederiz.Buradan

$$\left| \int_x^t f_u'(u, s)du \right| \leq \left\| f_x' \right\| |t - x| \text{ ve } \left| \int_y^s f_v'(x, v)dv \right| \leq \left\| f_y' \right\| |s - y|$$

eşitsizliklerinden yararlanarak,

$$| R_n(f; x, y) - f(x, y)| \leq \left\| f_x' \right\| R_n(|t - x|; x, y) + \left\| f_y' \right\| R_n(|s - y|; x, y)$$

ulaşılır. Bu son eşitsizliğe Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky eşitsizliğide uygulanırsa

$$\begin{aligned} | R_n(f; x, y) - f(x, y)| &\leq \left\| f_x' \right\| R_n((t - x)^2; x, y)^{\frac{1}{2}} R_n(r_{0,0}; x, y)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left\| f_y' \right\| R_n((s - y)^2; x, y)^{\frac{1}{2}} R_n(r_{0,0}; x, y)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left\| f_x' \right\| \sqrt{\Pi_{n,2}(x)} + \left\| f_y' \right\| \sqrt{\Psi_{n,2}(y)} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır ve buda ispatı tamamlar. □

3.4. $R_n(f;x,y)$ operatörü için Voronovskaja tip asimtotik yaklaşım

Teorem 3.10 *$f \in C^2(\Delta)$ olmak üzere, $(x,y) \in \Delta$ için, (2.4) ile tanımlı operatör*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n(R_n(f(s,t);x,y) - f(x,y)) &= (-x)f'_x(x,y) + (-y)f'_y(x,y) \\ &+ (-xy - x - y - 1)f''_{xy}(x,y) \\ &+ (\frac{1-x^2}{2})f''_{xx}(x,y) + (\frac{1-y^2}{2})f''_{yy}(x,y)\end{aligned}$$

eşitliğini sağlar.

İspat. Voronovskaja (1932)'deki teoremden; $(x,y) \in \Delta$ için, f fonksiyonunun Taylor açılımından faydalanarak,

$$\begin{aligned}f(s,t) &= f(x,y) + f'_x(x,y)(s-x) + f'_y(x,y)(t-y) \\ &+ \frac{1}{2}\left\{f''_{xx}(x,y)(s-x)^2 + 2f''_{xy}(x,y)(s-x)(t-y) + f''_{yy}(x,y)(t-y)^2\right\} \\ &+ \theta_1(s,t;x,y)(s-x)^2 + \theta_2(s,t;x,y)(t-y)^2 \qquad (3.1)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $\theta_1(s,t;x,y), \theta_2(s,t;x,y) \in C(\Delta)$ için $(s,t) \to (x,y)$ iken $\theta_1(s,t;x,y) \to 0$ ve $\theta_2(s,t;x,y) \to 0$' dır. Dolayısıyla θ_1, θ_2 sınırlıdır. Eşitliğin her iki tarafına $R_n(.;x,y)$ operatörü uygulanırsa,

$$R_n(f(s,t);x,y)) = f(x,y) + f'_x(x,y)R_n((s-x);x,y) + f'_y(x,y)R_n((t-y);x,y)$$

$$\begin{aligned}&+ \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} f''_{xx}(x,y)R_n((s-x)^2;x,y) + 2f''_{xy}(x,y)R_n((s-x)(t-y);x,y) \\ +f''_{yy}(x,y)R_n((t-y)^2;x,y \end{array}\right\} \\ &+ R_n(\theta_1(s,t;x,y)(s-x)^2 + \theta_2(s,t;x,y)(t-y)^2;x,y) \qquad (3.2)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra (3.2) eşitliğinin son kısmına Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky eşitsizliğini uygular ve (2.4) ile tanımlı operatörün lineerliğini de kullanırsak,

$$\begin{aligned}&\left|R_n(\theta_1(s,t;x,y)(s-x)^2 + \theta_2(s,t;x,y)(t-y)^2;x,y)\right| \\ &\leq \sqrt{R_n(\theta_1^2(s,t;x,y)(s-x)^4;x,y)} + \sqrt{R_n(\theta_2^2(s,t;x,y)(t-y)^4;x,y)} \\ &\leq \left\{\sqrt{R_n(\theta_1^2(s,t;x,y);x,y)}\sqrt{R_n((s-x)^4;x,y)}\right. \\ &\left.+\sqrt{R_n(\theta_2^2(s,t;x,y);x,y)}\sqrt{R_n((t-y)^4;x,y)}\right\}\end{aligned}$$

$\theta_1(s,t;x,y), \theta_2(s,t;x,y) \in C(\Delta)$ ve $(s,t) \to (x,y)$ iken $\theta_1(s,t;x,y) \to 0$ ve $\theta_2(s,t;x,y) \to 0$ elde edilir. Dolayısıyla;

$$\lim_{n\to\infty} R_n(\theta_1^2(s,t;x,y);x,y) = 0$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} R_n(\theta_2^2(s,t;x,y);x,y) = 0$$

sonuçlarına ulaşılır ve yani Δ üzerinde düzgündür diyebiliriz. Lemma 3.3'den

$R_n((s-x)^4;x,y) = O(\frac{1}{n^2})$ ve $R_n((t-y)^4;x,y) = O(\frac{1}{n^2})$ elde edilir. Buradan $n \to \infty$ için Lemma 3.3'den

$$n\left[R_n(\theta_1(s,t;x,y)(s-x)^2 + \theta_2(s,t;x,y)(t-y)^2;x,y)\right] \to 0 \tag{3.3}$$

Sonuç olarak (3.3) denklemi ve Lemma 3.3'den

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n(R_n(f(s,t);x,y) - f(x,y)) &= (-x)f'_x(x,y) + (-y)f'_y(x,y)\\ &+ (-xy-x-y-1)f''_{xy}(x,y)\\ &+ (\frac{1-x^2}{2})f''_{xx}(x,y) + (\frac{1-y^2}{2})f''_{yy}(x,y)\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Bu da ispatımızı tamamlar. □

3.5. $R_n(f;x,y)$ operatörü için lokal yaklaşım özellikleri

$C^2(\Delta) := \{g \in C(\Delta) : g_{xx}, g_{xy}, g_{yx}, g_{yy} \in C(\Delta)\}$ şeklinde tanımlansın. Bu uzay üzerindeki norm

$$\|g\|_{C^2(\Delta)} = \|g\|_{C(\Delta)} + \sum_{j=1}^{2}\left(\left\|\frac{\partial_j g}{\partial x_j}\right\|_{C(\Delta)} + \left\|\frac{\partial_j g}{\partial y_j}\right\|_{C(\Delta)}\right)$$

ile tanımlanır. Ayrıca $g \in C(\Delta)$ ve $\delta > 0$ için K-Peetres's fonksiyonelide

$$K_2(g,\delta) = \inf\left\{\|g-h\|_{C(\Delta)} + \delta\,\|h\|_{C^2(\Delta)} : h \in C^2(\Delta)\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan $D > 0$ mutlak sabiti için

$$K_2(g,\delta) \le D\overset{*}{\omega}_2(g,\sqrt{\delta}) \tag{3.4}$$

eşitsizliği sağlanır (Berens ve Xu, 1991).Yukarıdaki son eşitsizlikte $\overset{*}{\omega}_2(g,\sqrt{\delta})$, iki değişkenli durum için ikinci mertebeden süreklilik modülünü gösterir.

Teorem 3.11 *$f \in C(\Delta)$ olmak üzere (2.4)'de tanımlanan operatör için*

$$|R_n(f;x,y) - f(x,y)| \leq N \left\{ \overset{*}{\omega}_2(f; \frac{\sqrt{A_n(x,y)}}{2} + \min\{1, A_n\} \|f\|_{C(\Delta)} \right\} + \omega(f; \chi_n(x,y))$$

eşitsizliği sağlanır. Yukarıda $\chi_n(x,y) = \sqrt{(x\frac{n}{n+1} - x)^2 + (y\frac{n}{n+1} - y)^2}$,

$A_n(x,y) = \left(\Pi_{n,2}^2(x) + \Psi_{n,2}^2(y) + \chi_n^2(x,y) \right)$ *ve* $N > 0$ *dır.*

İspat. İlk olarak,

$$\hat{R}_n(f;x,y) = R_n(f;x,y) - f(x\frac{n}{n+1}, y\frac{n}{n+1}) + f(x,y) \tag{3.5}$$

olacak şekilde bir yardımcı fonksiyon tanımlayalım. Lemma 3.2'den

$$\hat{R}_n(r_{1,0};x,y) = x \,,\, \hat{R}_n(r_{0,1};x,y) = y \tag{3.6}$$

$$\hat{R}_n((s-x);x,y) = 0 \,,\, \hat{R}_n((t-y);x,y) = 0 \tag{3.7}$$

eşitliklerine ulaşırız. $h \in C^2(\Delta)$ ve $(x,y) \in \Delta$ için Taylor açılımı kullanılırsa

$$h(s,t) - h(x,y) = h(s,y) - h(x,y) + h(s,t) - h(s,y) \tag{3.8}$$

$$= \frac{\partial h(x,y)}{\partial x}(s-x) + \int_x^s (s-u)\frac{\partial^2 h(u,y)}{\partial^2 u}du + \frac{\partial h(x,y)}{\partial y}(t-y) + \int_y^t (t-v)\frac{\partial^2 h(x,v)}{\partial^2 v}dv$$

elde edilir. Bu son eşitliğin iki tarafınada (3.5)'te tanımlanan yardımcı fonksiyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\hat{R}_n(h;x,y) - h(x,y) &= \hat{R}_n\left(\int_x^s (s-u)\frac{\partial^2 h(u,y)}{\partial^2 u}du; x,y \right) \\
&+ \hat{R}_n\left(\int_y^t (t-v)\frac{\partial^2 h(x,v)}{\partial^2 v}dv; x,y \right) \\
&= R_n\left(\int_x^s (s-u)\frac{\partial^2 h(u,y)}{\partial^2 u}du; x,y \right) \\
&- \int_x^{x\frac{n}{n+1}} \left(x\frac{n}{n+1} - u \right) \frac{\partial^2 h(u,y)}{\partial^2 u}du \\
&+ R_n\left(\int_y^t (t-v)\frac{\partial^2 h(x,v)}{\partial^2 v}dv; x,y \right) \\
&- \int_y^{y\frac{n}{n+1}} \left(y\frac{n}{n+1} - v \right) \frac{\partial^2 h(x,v)}{\partial^2 v}dv
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
|R_n(h;x,y)-h(x,y)| \leq\; & R_n\left(\left|\int_x^s |s-u|\left|\frac{\partial^2 h(u,y)}{\partial^2 u}\right| du\right|;x,y\right) \\
& + \left|\int_x^{x\frac{n}{n+1}} \left|x\frac{n}{n+1}-u\right|\left|\frac{\partial^2 h(u,y)}{\partial^2 u}\right| du\right| \\
& + R_n\left(\left|\int_y^t |t-v|\left|\frac{\partial^2 h(x,v)}{\partial^2 v}\right| dv\right|;x,y\right) \\
& + \left|\int_y^{y\frac{n}{n+1}} \left|y\frac{n}{n+1}-v\right|\left|\frac{\partial^2 h(x,v)}{\partial^2 v}\right| dv\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \leq \left\{R_n((s-x)^2;x,y)+(x\frac{n}{n+1}-x)^2+R_n((t-y)^2;x,y)+(y\frac{n}{n+1}-y)^2\right\} \times \|h\|_{C^2(\Delta)} \\
& \leq \left(\delta_1^2(x)+\delta_2^2(x)+\chi_n^2(x,y)\right)\|h\|_{C^2(\Delta)} \\
& = A_n(x,y)\|h\|_{C^2(\Delta)} \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Son eşitlikten ve Lemma 3.3'den

$$
\left|\hat{R}_n(f;x,y)\right| \leq |R_n(f;x,y)| + \left|f(x\frac{n}{n+1},y\frac{n}{n+1})\right| + |f(x,y)| \leq 3\|f\| \qquad (3.10)
$$

elde edilir. Buradan, herhangi $h \in C^2(\Delta)$ için (3.9) ve (3.10)'dan

$$
\begin{aligned}
|R_n(f;x,y)-f(x,y)| \leq\; & \left|\hat{R}_n(f-h;x,y)\right| + \left|\hat{R}_n(h;x,y)-h(x,y)\right| \\
& + |h(x,y)-f(x,y| + \left|f(x\frac{n}{n+1},y\frac{n}{n+1})-f(x,y)\right| \\
& \leq 4\|f-h\| + |R_n(h;x,y)-h(x,y)| \\
& + \left|f(x\frac{n}{n+1},y\frac{n}{n+1})-f(x,y)\right| \\
\leq\; & \left(4\|f-h\| + A_n(x,y)\|h\|_{C^2(\Delta)}\right) + \omega(f;\chi_n(x,y)) \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

sonucuca ulaşırız. Son olarak her $h \in C^2(\Delta)$ için (3.11)'deki eşitsizliğin infimumu ve (3.4)'deki eşitsizlikten,

$$
|R_n(f;x,y)-f(x,y)| \leq 4K_2(f;\frac{A_n(x,y)}{4}) + \omega(f;\chi_n(x,y))
$$

sonucuna ulaşırız ve ispat tamamlanır.

□

3.6. $R_n(f;x,y)$ operatörünün GBS tiplisi olan $P_n(f;x,y)$ operatörünün inşaası

Bir fonksiyonun Bögel uzayındaki sürekliliği ve differansiyellenebilirliği ilk olarak K. Bögel tarafından Bögel (1934, 1935) yıllarındaki çalışmalarında bahsedilmiş ve bu fonksiyoları sırasıyla B-süreklillik ve B-differensiyellenebilir olarak tanımlanmıştır. Son yıllarda, lineer pozitif operatörlerinin GBS (Generalized Boolean Sum) Genelleştirilmiş Boolean Toplamı şekline dönüştürüp ve bu operatörlerinin incelenmesi yaklaşımlar teorisi için popüler hale gelmiştir. GBS (Generalized Boolean Sum) yani Genelleştirilmiş Boolean Toplamı şeklindeki operatörler ilk olarak Badea ve ark. (1988); Badea ve Cottin (1990) çalışmalarında kullanılmıştır. Bu çalışmalarda Yaklaşımlar teorisinde iyi bilinen Korovkin teoremini Bögel-sürekli fonksiyonlar için geliştirmişlerdir. Dobrescu ve Matei (1966)'da ki çalışmasında ise sınırlı aralıkta herhangi bir B-sürekli fonksiyonuna iki değişkenli GBS tip Bernstein polinomları ile yaklaşılabileceğini göstermişlerdir. Ayrıca Agrawal ve ark. (2016)'da ki araştırmada ise Polya dağılımına dayalı iki değişkenli GBS tip Lupaş-Durrmeyer operatörlerinin yaklaşım derecesini incelemişlerdir.

Bu çalışmalardan esinlenen bazı başka araştırmacılarda B-süreklillik ve B-differansiyellenebilirlik tanımlarını kullanarak iki değişkenli pozitif lineer GBS operatörlerin yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir. GBS ile ilgili birçok makale örneği mevcuttur bunlardan tezimizde yararlanmış olduğumuz birkaçına (Barbosu ve Pop, 2008; Barsan ve Braica, 2011; Deshwal ve ark., 2017; Goyal ve ark., 2017; Ruchi ve ark., 2018). şeklinde sıralanabilir. Yukarıda referans olarak verilen çalışmaların neticesinde bizde bu bölüm içerisinde Δ üçgensel bölgesi üzerinde GBS tipli iki değişkenli Bernstein-Kantorovich operatörünü daha önceden Δ üçgensel bölgesi üzerinde tanımladığımız (2.4) operatörünün yaklaşım sonuçlarını dikkate alarak GBS tip operatörü aşağıdaki şekilde tanımladık.

$$P_n(f;x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y)\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \times \int\limits_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1}\int\limits_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} M_{t_0,s_0}(x,y)ds_0dt_0 \qquad (3.12)$$

Burada $\nu_{n,k,l}(x,y)$ ve $M_{t_0,s_0}(x,y)$

$$\nu_{n,k,l}(x,y) = \binom{n}{k}\binom{n-k}{l}\left(\frac{1+x}{2}\right)^k\left(\frac{1+y}{2}\right)^l\left(1-\frac{1+x}{2}-\frac{1+y}{2}\right)^{n-k-l}$$

$$M_{t_0,s_0}(x,y) = [f(x,s_0) + f(t_0,y) - f(t_0,s_0)]$$

şeklinde tanımlanır. Bir sonraki bölümlerde (3.12)'de tanımladığımız operatör için, pürüzsüzlük karma modülü yardımıyla yaklaşım hızını ve Lipschitz sınıfları tanımınıda kullanarak lokal yaklaşım özellikleri ile ilgili olan teoremler verilecektir.

3.7. $P_n(f;x,y)$ operatörü için yaklaşım hızının hesaplanması

Teorem 3.12 *$\forall f \in C_b(\Delta)$, $(x,y) \in \Delta$ için (3.12) ile verilen operatör için*

$$| P_n(f;x,y) - f(x,y)| \leq 4\, \omega_{mixed}\,(f;\delta_1(n),\delta_2(n))$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ' dir.

İspat. Öncelikle kabul edelim ki $C_b(\Delta)$, Δ üçgensel bölgesi üzerindeki tüm Bögel-sürekli fonksiyonların uzayı olsun. $C(\Delta) \subset C_b(\Delta)$ dır (Bögel, 1962). (2.12)'de verilen pürüzsüzlük karma modülünün özelliğinden faydalanarak,

$$\phi_{(t_0,s_0)} f(x,y) = f(x,s_0) + f(t_0,y) - f(t_0,s_0)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğe (3.12) ile tanımlı operatör uygulanırsa

$$P_n(f;x,y) - f(x,y) = -R_n(\phi_{(t_0,s_0)} f(x,y);x,y)$$

elde edilir. Son eşitliğe Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} |P_n(f;x,y) - f(x,y)| &\leq R_n(\left|\phi_{(t_0,s_0)} f(x,y)\right|;x,y) \\ &\leq \Big(R_n(r_{0,0}) + \delta_1^{-1}\sqrt{R_n\left((t_0-x)^2;x,y\right)} + \delta_2^{-1}\sqrt{R_n\left((s_0-y)^2;x,y\right)} \\ &\quad + \frac{1}{\delta_1\delta_2}\sqrt{R_n\left((t_0-x)^2;x,y\right) R_n\left((s_0-y)^2;x,y\right)}\Big)\, \omega_{mixed}\,(f;\delta_1(n),\delta_2(n)) \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Lemma 3.2 ve Lemma 3.3'den

$$|P_n(f;x,y) - f(x,y)| \leq R_n(\left|\phi_{(t_0,s_0)} f(x,y)\right|;x,y)$$

$\leq \quad \left(1 + \delta_1^{-1}\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \delta_2^{-1}\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \delta_1^{-1}\delta_2^{-1}\sqrt{\frac{1}{n+1}\frac{1}{n+1}}\right) \omega_{mixed}\,(f;\delta_1(n),\delta_2(n))$ sonucuna ulaşılır. Yukarıdaki eşitsizlikte $\delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, seçilirse ispatımız tamamlanır.

□

Teorem 3.13 *$\forall f \in C_b(\Delta)$, $(x,y) \in \Delta$ olmak üzere, (3.12) ile tanımlı operatör için*

$$| P_n(f;x,y) - f(x,y)| \leq 2K_{mixed}\left(f;\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+1}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $h_1 \in C_B^{2,0}$ için, Taylor açılımını kullanarak

$$h_1(s,t) = h_1(x,y) + (s-x)D_B^{1,0}h_1(x,y) + \int_x^s (s-v)D_B^{2,0}h_1(v,y)dv$$

eşitliğini yazabiliriz. Bögel (1962) ’den, GBS operatörünün lineerlik özelliğini kullanırsak

$$P_n(h_1;x,y) = h_1(x,y) + P_n\left(\int_x^s (s-v)D_B^{2,0}h_1(v,y)dv;x,y\right)$$

elde edilir. (3.12) tanımı ve Lemma 3.3’den,

$$\begin{aligned}
|P_n(h_1;x,y) - h_1(x,y)| &= R_n\left(\int_x^s (s-v)\left[D_B^{2,0}h_1(v,y) - D_B^{2,0}h_1(v,k)\right]dv;x,y\right)\\
&\leq R_n\left(\left|\int_x^s |s-v|\left|D_B^{2,0}h_1(v,y) - D_B^{2,0}h_1(v,k)\right|dv;x,y\right|\right)\\
&\leq \frac{1}{2}\left\|D_B^{2,0}h_1\right\| R_n\left((s-x)^2;x,y\right)\\
&\leq \frac{1}{2(n+1)}\left\|D_B^{2,0}h_1\right\|
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekildeki hesaplamalarla $h_2 \in C_B^{0,2}$ için,

$$\begin{aligned}
|P_n(h_2;x,y) - h_2(x,y)| &\leq \frac{1}{2}\left\|D_B^{0,2}h_2\right\| R_n\left((t-y)^2;x,y\right)\\
&\leq \frac{1}{2(n+1)}\left\|D_B^{0,2}h_2\right\|
\end{aligned}$$

sonucunada ulaşılır. Benzer şekilde, $g \in C_B^{2,2}$ için

$$\begin{aligned}
g(s,t) &= g(x,y) + (s-x)D_B^{1,0}g(x,y) + (t-y)D_B^{0,1}g(x,y) \\
&+ \int_x^s (t-y)(s-v)D_B^{2,1}g(v,y)dv \\
&+ (s-x)(t-y)D_B^{1,1}g(x,y) \\
&+ \int_x^s (s-v)D_B^{2,0}g(v,y)dv + \int_y^t (t-u)D_B^{0,2}g(x,u)du \\
&+ \int_y^t (s-x)(t-u)D_B^{1,2}g(x,u)du \\
&+ \int_x^s\int_y^t (s-v)(t-u)D_B^{2,2}g(v,u)dudv
\end{aligned}$$

eşitliğini yazarsak $P_n((s-x);x,y) = P_n((t-y);x,y) = 0$ elde edilir. Buradanda

$$\begin{aligned}
&| \ P_n(g;x.y) - g(x,y)| \\
&\leq \left| R_n\left(\int_x^s\int_y^t (s-v)(t-u)D_B^{2,2}g(v,u)dudv;x,y\right)\right| \\
&\leq R_n\left(\left|\int_x^s\int_y^t (s-v)(t-u)D_B^{2,2}g(v,u)dudv\right|;x,y\right) \\
&\leq R_n\left(\int_x^s\int_y^t |s-v|\,|(t-u)|\,\left|D_B^{2,2}g(v,u)\right|dudv;x,y\right) \\
&\leq \frac{1}{4}\left\|D_B^{2,2}g\right\|_\infty R_n\left((s-x)^2(t-y)^2;x,y\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Son eşitsizlikte

$$R_n\left((s-x)^2(t-y)^2;x,y\right) = R_n\left((s-x)^2;x,y\right)R_n\left((t-y)^2;x,y\right) \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

ifadeleri yerine yazılırsa,

$$| \ P_n(g;x.y) - g(x,y)| \leq \frac{1}{4(n+1)^2}\left\|D_B^{2,2}g\right\|_\infty$$

sonucu elde edilir. Son olarak $f \in C_b(\Delta)$ için yukarıda elde ettiğimiz tüm sonuçlar birleştirilirse,

$$
\begin{aligned}
&| P_n(f;x,y) - f(x,y)| \\
&\le |(f-h_1-h_2-g)(x,y)| + |(h_1 - P_n h_1)(x,y)| + |(h_2 - P_n h_2)(x,y)| \\
&+ |(g - P_n g)(x,y)| + |P_n((f-h_1-h_2-g);x,y)| \\
&\le 2\left\|f-h_1-h_2-g\right\|_\infty + \frac{1}{2(n+1)}\left\|D_B^{2,0}h_1\right\| \\
&\frac{1}{2(n+1)}\left\|D_B^{0,2}h_2\right\| + \frac{1}{4(n+1)^2}\left\|D_B^{2,2}g\right\|_\infty
\end{aligned}
$$

elde edilir, ve $h_1 \in C_B^{2,0}$, $h_2 \in C_B^{0,2}$, $g \in C_B^{2,2}$ için her taraftan infimum değelerini alırsak bu da ispatı tamamlar. □

Teorem 3.14 $g \in Lip_\alpha(\beta,\gamma)$ *olmak üzere (3.12) ile tanımlı operatör için*

$$
| P_n(g;u,v) - g(u,v)| \le \alpha\, \Pi_{n,2}(u)^{\frac{\beta}{2}} \Psi_{n,2}(v)^{\frac{\gamma}{2}}
$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. (3.12) tanımı ve B-sürekli fonksiyoları için Lipschitz sınıfları kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
| P_n(g;u,v) - g(u,v)| &\le R_n\left(\left|\phi_{(t_0,s_0)} g(u,v)\right|; u,v\right) \\
&\le \alpha R_n\left(|t_0-u|^\beta |s_0-v|^\gamma; u,v\right) \\
&= \alpha R_n\left(|t_0-u|^\beta; u,v\right) R_n\left(|s_0-v|^\gamma; u,v\right)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir, Bu ifadeye Hölder eşitsizliğindeki (p_1,q_1) ve (p_2,q_2) ifadelerinin yerine sırasıyla $\left(\frac{2}{\beta},\frac{2}{2-\beta}\right)$, $\left(\frac{2}{\gamma},\frac{2}{2-\gamma}\right)$ ifadelerini uygularsak ve ayrıca Lemma 3.2 ve Lemma 3.3'den faydalanarak

$$
\begin{aligned}
| P_n(g;u,v) - g(u,v)| &\le \alpha\Bigg(R_n\left((t_0-u)^2;u,v\right)^{\frac{\beta}{2}} R_n\left(r_{0,0};u,v\right)^{\frac{2-\beta}{2}} \\
&\times R_n\left((s_0-v)^2;u,v\right)^{\frac{\gamma}{2}} R_n\left(r_{0,0};u,v\right)^{\frac{2-\gamma}{2}}\Bigg) \\
&\le \alpha\, \Pi_{n,2}(u)^{\frac{\beta}{2}} \Psi_{n,2}(v)^{\frac{\gamma}{2}}
\end{aligned}
$$

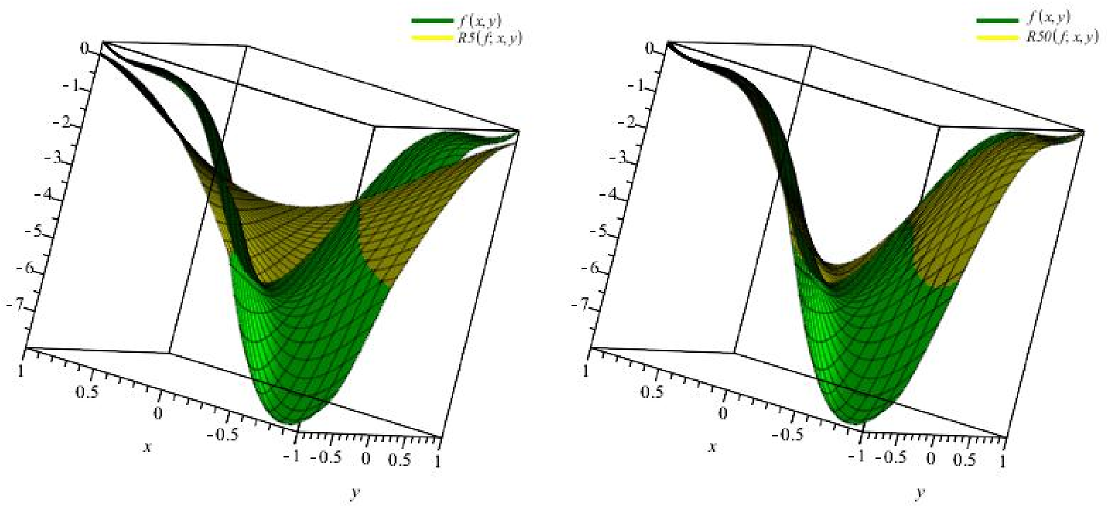
sonucunu elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar. □

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. $R_n(f;x,y)$ ile $P_n(f;x,y)$ operatörlerinin bazı fonksiyonlara yaklaşım hızlarının grafik ve tablolarla karşılaştırılması

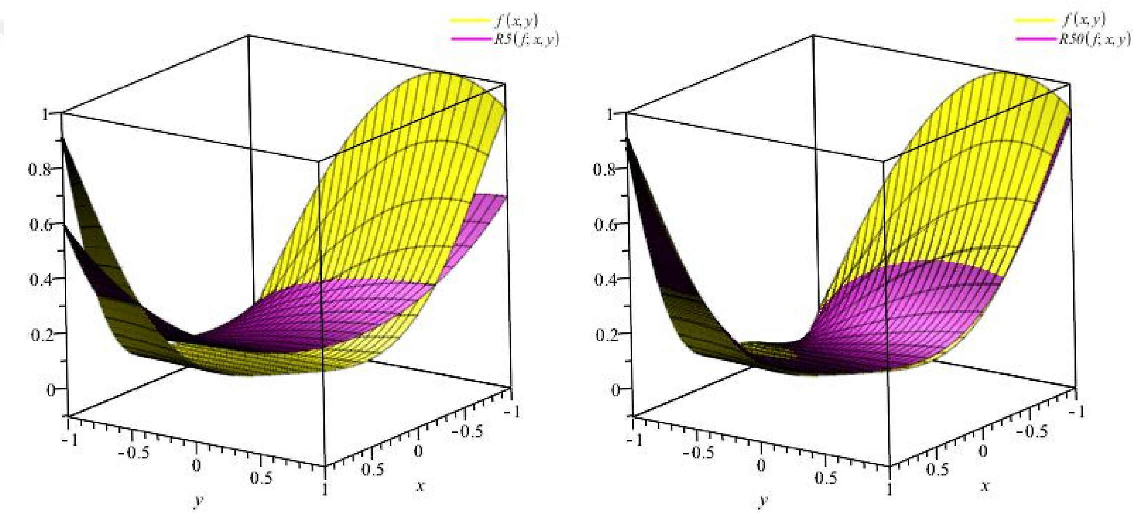
Bu bölüm içerisinde $\Delta := \{(x,y) : -1 \leq x, y \leq 1, x+y \leq 0\}$ üçgensel bölgesi üzerinde (2.4) ve (3.12)'de tanımladığımız operatörlerinin bazı fonksiyonlara yaklaşımları örnekler verilerek detaylıca yorumlanmış, grafik çizimleri ve hata tahminleri nümerik değer tabloları Maple yazılım programı yardımı ile elde edilmiştir.

Örnek 4.1 *Şekil 4.1.'de (Sarı) ile gösterilen Δ üçgensel bölgesi üzerinde (2.4) ile tanımlı operatör her $(x,y) \in \Delta$ için sırasıyla $n = 5, 50$ değerleri kullanılarak (Yeşil) ile gösterilen $f(x,y) = 3\sin(x+y)^5 - 5\cos(x-y)^3$ fonksiyonuna yaklaşımının grafiği verilmiştir. Şekil 4.1.'den aşikardır ki; n değeri arttıkça (2.4) operatörünün $f(x,y)$ fonksiyonuna yaklaşımı dahada artmaktadır yani yaklaşım iyiye gitmektedir. Ayrıca Tablo 4.1.'de ise $n = 5, 25, 125, 250$ ve farklı $(x,y) \in \Delta$ değerleri için, (2.4) operatörünün $f(x,y) = 3\sin(x+y)^5 - 5\cos(x-y)^3$ fonksiyonuna yaklaşımının hata tahmin değerleri verilmiştir. Tablo 4.1.'i referans alırsak, n değerleri arttıkça (2.4) operatörünün $f(x,y)$ fonksiyonuna yaklaşımının hata tahmin değerleri iyice azalmaktadır diyebiliriz.*



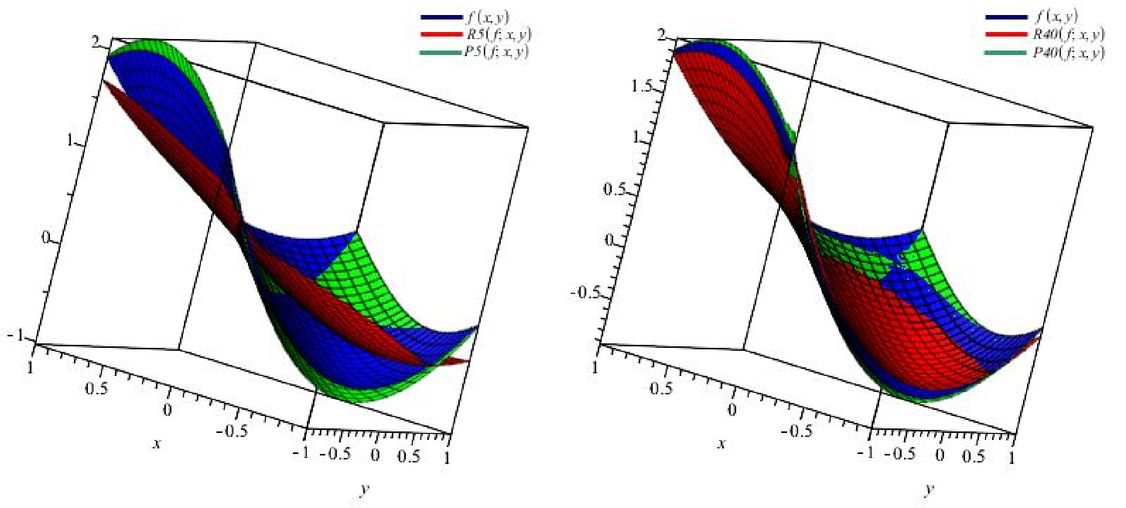
Şekil 4.1. $f(x,y) = 3\sin(x+y)^5 - 5\cos(x-y)^3$ fonksiyonuna (2.4) ile tanımlı operatörünün $n = 5, 50$ değerleri için yaklaşımının grafiği.

Örnek 4.2 *Şekil 4.2.'de (Mor) ile gösterilen Δ üçgensel bölgesi üzerinde (2.4) ile tanımlı operatör her $(x, y) \in \Delta$ için sırasıyla $n = 5, 50$ değerleri kullanılarak (Sarı) ile gösterilen $f(x, y) = x^3 \sin(x - y)$ fonksiyonuna yaklaşımının grafiği verilmiştir. Şekil 4.2.'den görülürki; n değeri arttıkça (2.4) operatörünün $f(x, y)$ fonksiyonuna yaklaşımı iyiye gitmektedir. Ayrıca Tablo 4.2.'de sırasıyla $n = 5, 25, 125$ değerleri için (2.4) operatörünün $f(x, y) = x^3 \sin(x - y)$ fonksiyonuna yaklaşımının hata tahmin nümerik değerleri hesaplanmıştır. Buradan açıkca görülür ki daha küçük (x, y) değerleri için n değeri arttıkça yaklaşımda ki hata tahmin değeri küçülmektedir.*



Şekil 4.2. $f(x, y) = x^3 \sin(x - y)$ fonksiyonuna (2.4) ile tanımlı operatörünün $n = 5, 50$ değerleri için yaklaşımının grafiği.

Örnek 4.3 *Şekil 4.3.'de (Kırmızı) ile gösterilen Δ üçgensel bölgesi üzerinde tanımlı olan (2.4) ve (Yeşil) ile gösterilen GBS tip (3.12) operatörlerinin her $(x, y) \in \Delta$ ve $n = 5, 40$ değerleri için (Mavi) ile gösterilen $f(x, y) = x^2 - \sin(y - x)$ fonksiyonuna yaklaşımlarının grafiği verilmiştir. Şekil 4.3.'den aşikardırki; n değeri arttıkça GBS tip (3.12) operatörü (2.4) operatörüne göre $f(x, y)$ fonksiyonuna daha iyi yaklaşım sergilemektedir. Ayrıca Tablo 4.3.'de farklı (x, y) ve $n = 500$ değerleri için (2.4) ve (3.12) operatörlerinin $f(x, y)$ fonksiyonuna yaklaşımlarının hata tahmin değerleri elde edilmiştir. Tablo 4.3.'den açıkça her $(x, y) \in \Delta$ için (3.12) operatörün $f(x, y)$ fonksiyonuna yaklaşımının hata tahmin değerleri, (2.4) operatörünün $f(x, y)$ fonksiyonuna yaklaşımının hata tahmin değerlerinden daha küçük olduğu görülür. Yani daha iyi yaklaşım sonuçları vermektedir.*



Şekil 4.3. $f(x, y) = x^2 - \sin(y - x)$ fonksiyonuna (2.4) ile (3.12) tanımlı operatörlerin $n = 5, 40$ değerleri için yaklaşımının grafiği.

Çizelge 4.1. $f(x, y) = 3\sin(x + y)^5 - 5\cos(x - y)^3$ fonksiyonu için (2.4) ile tanımlı operatörünün farklı n ve (x, y) değerleri kullanılarak yaklaşımının hata tahminleri nümerik değerleri tablosu.

(x, y)	$n = 5$	$n = 25$	$n = 125$	$n = 250$
$(-0.1, -0.1)$	1.99342301	0.80800223	0.20210506	0.10427423
$(-0.5, -0.3)$	1.32812648	0.43903527	0.10114575	0.05154992
$(-0.1, -0.9)$	0.46485159	0.19177431	0.04600548	0.02355847
$(1, -1)$	0.33068302	0.15076510	0.03613600	0.01840450
$(-0.9, 0.9)$	0.30603976	0.00841899	0.00689241	0.00384924

Çizelge 4.2. $f(x, y) = x^3 \sin(x - y)$ fonksiyonu için (2.4) ile tanımlı operatörünün farklı n ve (x, y) değerleri için yaklaşımının hata tahminleri nümerik değerleri tablosu.

(x, y)	$n = 5$	$n = 25$	$n = 125$
$(0.095, -0.095)$	0.080565	0.010006	0.001126
$(0.05, -0.05)$	0.077840	0.008023	0.000554
$(-0.025, 0.025)$	0.077027	0.007437	0.000424
$(-0.01, -0.01)$	0.076414	0.007196	0.000361
$(-0.01, -0.099)$	0.074421	0.006830	0.000325

Çizelge 4.3. $f(x,y) = x^2 - \sin(y-x)$ fonksiyonu için (3.12) ve (2.4) ile tanımlı operatörlerinin $n = 500$ ve farklı (x,y) değerleri için yaklaşımının hata tahminleri nümerik değerleri tablosu.

(x,y)	$\lvert R_{500}(f;x,y) - f(x,y)\rvert$	$\lvert P_{500}(f;x,y) - f(x,y)\rvert$
$(0.01, -0.01)$	0.00373539672	0.00007801713
$(-0.02, 0.02)$	0.00444218352	0.00015595725
$(0.03, -0.04)$	0.00313838356	0.00026983045
$(-0.03, -0.05)$	0.00373219945	0.00007189246
$(0.05, -0.05)$	0.00276456558	0.00038854967
$(0.06, -0.06)$	0.00251728506	0.00046541592
$(-0.07, -0.05)$	0.00414246641	0.00006892313
$(-0.07, -0.07)$	0.00391506974	0.00000000012
$(0.08, -0.08)$	0.00202380312	0.00061769752
$(0.09, -0.09)$	0.00177541194	0.00069296224

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu tez çalışmasında, $\Delta := \{(x,y) : -1 \leq x, y \leq 1, x+y \leq 0\}$ üçgensel bölgesi üzerinde $(x,y) \in \Delta$ ve $f \in C(\Delta)$ için (2.4)'de verilmiş olan iki değişkenli Bernstein-Kantorovich operatörü

$$R_n(f;x,y) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \nu_{n,k,l}(x,y) \int_{2\frac{k}{n+1}-1}^{2\frac{k+1}{n+1}-1} \int_{2\frac{l}{n+1}-1}^{2\frac{l+1}{n+1}-1} f(s,t)dsdt$$

şeklinde tanımlanmıştır. Yukarıdaki denklemde

$$\nu_{n,k,l}(x,y) = \binom{n}{k}\binom{n-k}{l}\left(\frac{1+x}{2}\right)^k \left(\frac{1+y}{2}\right)^l \left(1-\frac{1+x}{2}-\frac{1+y}{2}\right)^{n-k-l}$$

şeklinde tanımlanır. Öncelikle (2.4) operatörünün lineer ve pozitif olduğu gösterilmiştir. Ardından sırasıyla $1, s, t, s^2, t^2, s^3, t^3, s^4, t^4$ test fonksiyonlarının (2.4) operatörü altındaki görüntüleri hesaplanmıştır. (2.4) operatörü için 4. mertebeye kadar merkezi momentler hesaplanmıştır. Volkov (1957) tarafından verilen teorem gereği; (2.4) operatörünün bir f fonksiyonuna yaklaşımının düzgün olacağı ispatlanmış, tam ve kısmi süreklilik modülleri yardımları aracılığıyla yaklaşım hızı hesaplanmıştır. Ayrıca Voronovskaja tip asimtotik yaklaşım ile ilgili teorem ispatı ile birlikte verilmiş ve lipschitz sınıflarında ki yaklaşımıda incelenmiştir. Daha sonra (2.4) operatörü için Peetre's K-fonksiyoneli ve ikinci mertebeden iki değişkenli durum için verilen süreklilik modülü yardımı ile de lokal yaklaşım hızı hesaplanmıştır. (2.4) operatörü için (3.12)'de GBS tip operatör inşaa edilmiş ve bu inşaa edilen operatörün karma süreklilik modülü yardımı aracılığıylada yaklaşım hızı hesaplanmış ve Lipschitz sınıfları yaklaşımıda verilmiştir. Tezin son kısmında ise Maple yazılım programı yardımıyla Δ bölgesi üzerinde tanımlı ve grafikte sari renk ile gösterilen (2.4) operatörü için Örnek 4.1'de her $(x,y) \in \Delta$ için sırasıyla $n = 5, 50$ değerleri kullanılarak grafikte yeşil renk olarak verilen $f(x,y) = 3\sin(x+y)^5 - 5\cos(x-y)^3$ fonksiyonuna yaklaşımının grafiği Şekil 4.1.'de çizilmiştir. Tablo 4.1.'de ise farklı $n \in \mathbb{N}^+$ ve $(x,y) \in \Delta$ değerleri için, $f(x,y) = 3\sin(x+y)^5 - 5\cos(x-y)^3$ ile Δ üçgensel bölgesi üzerinde tanımlı (2.4) operatörü arasındaki hata tahmin değerleri verilmiştir. Örnek 4.2'de ise mor renk olarak tanımlamış olduğumuz (2.4) operatörünün sarı renk ile gösterilen $f(x,y) = x^3\sin(x-y)$ fonksiyona yaklaşımının grafiği $n = 5, 50$

değerleri için Şekil 4.2.'de çizilmiştir. Tablo 4.2.'de ise sırasıyla $n = 5, 25, 125$ değerleri için (2.4) operatörünün $f(x, y) = x^3 \sin(x - y)$ fonksiyonuna yaklaşımının hata tahmin değerleri hesaplanmıştır. Örnek 4.3'de ise; $n = 5, 40$ değerleri için kırmızı renk ile verilen (2.4) operatörü ile yeşil renk ile verilen (2.4) operatörünün GBS tiplisinin (3.12) mavi renk ile gösterilen $f(x, y) = x^2 - \sin(y - x)$ fonksiyonuna yaklaşımları Şekil 4.3.'de karşılaştırılmıştır. Ayrıca Tablo 4.3.'de ise farklı (x, y) ve $n = 500$ değerleri için (2.4) operatörü ile (3.12) operatörlerinin $f(x, y) = x^2 - \sin(y - x)$ fonksiyonuna yaklaşım hızlarının hata tahmin değerleri kıyaslanmıştır.

5.2. Öneriler

Bu tez çalışmasında, $\Delta := \{(x, y) : -1 \leq x, y \leq 1, x + y \leq 0\}$ üçgensel bölgesi üzerinde tanımlamış olduğumuz iki değişkenli Bernstein-Kantorovich tipindeki operatör için ilerleyen çalışmalarda farklı uzaylarda örneğin; ağırlıklı veya Lp uzaylarında ki yaklaşım özellikleri araştırılabilir. İki değişkenli Bernstein-Kantorovich tipindeki operatör için son yılların popüler genelleştirilmelerinden biri olan q ve $(p, q)-$analogları, yani kuantum ve post-kuantum analogları tanımlanarak bu operatörlerin yaklaşım özellikleri detaylıca incelebilir. Ayrıca daha güçlü yazılım programları farklı fonksiyonlar için denenerek hata tahmin değerlerini çok daha küçük değerlere indirebilmemiz mümkündür.

KAYNAKLAR

ACAR, T., and ARAL, A., 2013. Approximation properties of two dimensional Bernstein-Stancu-Chlodowsky operators. Le Matematiche, 68.2: 15-31.

ACU, A. M., ACAR, T., MURARU, C. V., and RADU, V. A., 2018. Some approximation properties by a class of bivariate operators. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 42.16: 5551-5565.

AGRANTİNİ, O., 2011. Statistical convergence of a non-positive approximation process. Chaos Solitons Fractals, 44: 977-981.

AGRAWAL, P. N., ISPIR, N., and KAJLA, A., 2016. GBS operators of Lupaş–Durrmeyer type based on Pólya distribution. Results in Mathematics, 69.3-4: 397-418.

AGRAWAL, P. N., ISPIR, N., and SIDHARTH, M., 2018. Quantitative Estimates of Generalized Boolean Sum Operators of Blending Type. Numerical Functional Analysis and Optimization, 39.3: 295-307.

ALTOMARE, F., and CAMPİTİ, M., 1994. Korovkin-type Approximation Theory and its Applications. Walter de Gruyter.

ANASTASSIOU, G. A., and GAL, S. G., 2012. Approximation theory: moduli of continuity and global smoothness preservation. Springer Science and Business Media.

ARAL, A., 2008. A Generalization of Szász–Mirakyan Operators Based on q-integers. Mathematical and Computer Modelling, 47(9-10), 1052-1062.

ASLAN, R., and IZGI, A., 2020. Some approximation results on modified q-Bernstein operators. Journal of Mathematical Analysis. 11(1), 58-70.

BADEA, C., BADEA, I., and GONSKA, H. H., 1988. Notes on degree of approximation of B-Continuous and B-Differentiable functions.

BADEA, C., and COTTIN, C., 1990. Korovkin-type theorems for generalized boolean sum operators. In: Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, p. 51-67.

BADEA, C., 1995. K-functionals and moduli of smoothness of functions defined on compact metric spaces. Computers and Mathematics with Applications, 30.3-6: 23-31.

BALCI, M., 1997. Matematik Analiz: cilt 1. Balcı yayınları.

BĂRBOSU, D., and POP, O. T., 2008. A note on the GBS Bernstein's approximation formula. Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series, 35: 1-6.

BARSAN, I., BRAICA, P., and FARCAS, M., 2011. About approximation of B-continuous functions of several variables by generalized Boolean sum operators of Bernstein type on a simplex. Creat. Math. Inform, 20.1: 20-23.

BASKAKOV, V. A., 1957. An example of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions. Dokl. Akad. Nauk, 113, 249-251.

BASKAKOV, V. A., 1961. On a Construction of Converging Sequences of Linear Positive Operators and Studies of Modern Problems of Constructive Theory of Functions. Moscow, 314-318.

BAYRAKTAR, M., 2006. Fonksiyonel Analiz Ders Kitabı. Gazi Kitabevi, Ankara, 320s.

BERENS, H., and XU, Y., 1991. K-moduli, moduli of smoothness, and Bernstein polynomials on a simplex. Indagationes Mathematicae, 2.4: 411-421.

BERNSTEIN, S., 1912. Démo istration du th'eorème de weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. Сообщенія Харьковскаго математическаго общества, 13(1):1–2.
BOHMAN, H., 1951. On approximation of continuous and of analytic functions. Arkiv för Matematik, 2.1: 43-56.
BARDARO, C., and MANTELLINI, I., 2010. Voronovskaya formulae for Kantorovich type generalized sampling series. Int. J. Pure Appl. Math, 62.3: 247-262.
BARDARO, C., and MANTELLINI, I., 2011. Asymptotic formulae for multivariate Kantorovich type generalized sampling series. Acta Mathematica Sinica, English Series, 27.7: 1247-1258
BÖGEL, K., 1934. Mehrdimensionale Differentiation von Funktionen mehrerer reeller Veränderlichen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 170: 197-217.
BÖGEL, K., 1935. Über mehrdimensionale Differentiation, Integration und beschränkte Variation. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 173: 5-30.
BÖGEL, K., 1962. Über die mehrdimensionale Differentiation. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 65: 45-71.
BREZINSKI, C., 2001. Convergence acceleration during the 20th century. Numerical Analysis: Historical Developments in the 20th Century, 113-133.
CHLODOWSKY, I., 1937. Sur le developpment des fonctions definies dans un interval infini en series de polynomes de M.S. Bernstein. Compositio Math. 4, 380-393.
CLUNI, F., COSTARELLI, D., MINOTTI, A. M., and VINTI, G., 2015. Applications of Approximation Theory to thermographic images in earthquake engineering. PAMM, 15.1:663-664.
COTTIN, C., 1990. Mixed K-functionals: A measure of smoothness for blending-type approximation. Mathematische Zeitschrift, 204.1: 69-83.
ÇİLO, A., 2012. [-1,1] aralığında Bernstein polinomlarının yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızı/In [-1,1] ranges Bernstein polynomials approach properties and approach speed. MSc Thesis, Harran Üniversitesi.
DEO, N., and BHARDWAJ, N., 2010. Some approximation theorems for multivariate bernstein operators. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 34:1023–1034.
DERRIENNIC, M. M., 1985. On multivariate approximation by Bernstein-type polynomials. Journal of approximation theory, 45.2: 155-166.
DESHWAL, S., ISPIR, N., and AGRAWAL, P. N., 2017. Bivariate operators of bernstein kantorovich type on a triangle. Appl Math Inf Sci, 11(2):423–432.
DEVORE, R. A., and LORENTZ, G G., 1993. Constructive approximation. Springer Science and Business Media.
DITZIAN, Z., and ZHOU, X., 1993. Optimal approximation class for multivariate Bernstein operators. Pacific Journal of Mathematics, 158.1: 93-120.
DITZIAN, Z., and TOTIK, V., 2012. Moduli of smoothness. Springer Science and Business Media, 2012.
DOBRESCU, E., and MATEI, I., 1966. The approximation by Bernstein type polynomials of bidimensionally continuous functions. Univ. Timisoara Ser. Sti. Mat.-Fiz, 4: 85-90.
GADJIEV, A. D., 1974. The convergence problem for a sequence of positive linear Operators on unbounded sets and theorems analogous to that of P.P.Korovkin. Soviet Math. Dokl., 15(5):1433-1436.
GADJIEV, A. D., 1976. On P.P. Korovkin type theorems. Math. Zametki, 20(5):781-786, Math. Notes, 20(5):996-998.
GAL, S. G., 2002. Shape-preserving bivariate polynomial approximation in C

([−1,1]×[−1,1]). Approximation Theory and its Applications, 18.1: 26-33.
GOYAL, M., KAJLA, A., AGRAWAL, P. N., and ARACI, S., 2017. Approximation by bivariate bernstein-durrmeyer operators on a triangle. Appl Math Inf Sci, 11(3):693–702.
GUPTA, V., and AGARWAL, R. P., 2014. Convergence estimates in approximation theory. Cham: Springer.
HACISALİHOĞLU, H., ve HACIYEV, A., 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, AÜFF Döner Sermaya İşletmesi Yayınları, 100.
IZGI, A., and BUYUKYAZICI, I., 2003. Approximation in boundless interval and order of approximation. Kastamonu Egitim dergisi, 11.2: 451-460.
IZGI, A., and BUYUKYAZICI, I., 2006. On a generalization of Bernstein-Chlodovsky polynomials for two variables. In: Int. Math. Forum, p. 1001-1015.
IZGI, A., 2012. Approximation by a Class of New Type Bernstein Polynomials of one and two Variables. Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 8.5: 55-71.
KANAT, K., and SOFYALIOGLU, M., 2018. Some approximation results for (p,q)-lupas-schurer operators. Filomat. 32(1).
KANTOROVICH, L. V., 1930. Sur certain développements suivant les polynômes de la forme de s. Bernstein, I, II, CR Acad. URSS, 563:568.
KARAİSA, A., 2016. On the approximation properties of bivariate (p,q)-Bernstein operators. arXiv:1601.05250.
KINGSLEY, E. H., 1951. Bernstein polynomials for functions of two variables of class $C(k)$.Proc. Am. Math. Soc. 2:64–71.
KIVINUKK, A., and METSMÄGI, T., 2011. Approximation in variation by the Kantorovich operators. Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, 60.4: 201.
KOROVKIN, P. P., 1953. On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. Dokl. Akad. Nauk SSSR, volume 90, pages 961–964.
KREYSZIG, E., 1978. Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley and Sons, Canada.
LUPAS, L., and LUPAS, A., 1987. Polynomials of binomial type and approximation operators. Studia Univ. Babes-Bolyai, Mathematica, 32.4: 61-69.
MURSALEEN, M., KHURSHEED, J. A., KHAN, A., 2015. On (p,q)-analogue of bernstein operators. Appl. Math. Comput., 266, 874-882.
MURSALEEN, M., NAAZ, A., KHAN, A., 2019. Improved approximation and error estimations by king type (p, q)-szász-mirakjan kantorovich operators. Appl. Math. Comput., 348, 175-185.
MUSAYEV, B., ALP, M., MUSTAFAYEV, N., 2006. Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz1. Tekağaç Eylül Yayıncılık.
ORUÇ, H, and TUNCER, N, 2002. On the Convergence and Iterates of q-Bernstein Polynomials. Journal of Approximation Theory, 117(2), 301-313.
ÖZARSLAN, M. A., and DUMAN, O., 2016. Smoothness properties of modified Bernstein-Kantorovich operators. Numerical Functional Analysis and Optimization, 37(1), 92-105.
PALTANEA, R., 2012. Approximation theory using positive linear operators. Springer Science and Business Media.
PHILLIPS, G. M., 1996. Bernstein polynomials based on the q-integers. Annals of numerical Mathematics, 4: 511-518.
PINKUS, A., 2000. Weierstrass and approximation theory. J. Approx Theory, 107:1-66.
POP, O. T., and FARCAS, M. D., 2009. About the bivariate operators of kantorovich type.

Acta Math. Univ. Comenianae, 78.1: 43-52.
POP, O. T., 2009. Approximation of B-continuous and B-differentiable functions by GBS operators defined by infinite sum. J. Inequal. Pure Appl. Math, 10.1: 1-17.
POP, O. T., 2011. The approximation of bivariate functions by bivariate operators and GBS operators. Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., 40.1: 64-79.
RAZI, Q., 1989. Approximation of a function by Kantorovich type operators. Matematički Vesnik, 41.106: 183-192.
RUCHI, R., BAXHAKU, B., and AGRAWAL, P. N., 2018. GBS operators of bivariate Bernstein-Durrmeyer–type on a triangle. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 41.7: 2673-2683.
SAHAI, A., 2011. an iterative reduced-bias algorithm for a dual-fusion variant of Bernstein's operator. International Journal of Math. Arch, 2.3: 331-334.
SAUER, T., 1994. The genuine Bernstein-Durrmeyer operator on a simplex. Results in mathematics, 26.1-2: 99-130.
SHEVCHUK, I. A., 1992. Approximation by Polynomials and Traces of Functions Continuous on a Segment. Naukova Dymka, Kiev, 324s.
SHISHA, O., and MOND, B., 1968. The degree of convergence of sequences of linear positive operators. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 60.4: 1196.
SIDHARTH, M., ISPIR, N., and AGRAWAL, P. N., 2015. GBS operators of Bernstein–Schurer–Kantorovich type based on q-integers. Applied Mathematics and Computation, 269: 558-568.
SONG, L., 1995. Bernstein-Kantorovich operators on a simplex. Approximation Theory and its Applications, 11.3: 11-21.
STANCU, D. D., 1963. A method for obtaining polynomials of bernstein type of two variables.The American Mathematical Monthly, 70(3):260.
STANCU, D. D., 1964. The remainder of certain linear approximation formulas in two variables. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series B: Numerical Analysis, 1.1: 137-163.
TOTIK, V., 1984. Uniform approximation by positive operators on infinite intervals. Analysis Mathematica, 10.2: 163-182.
ULRICH, A., 1998. Asymptotic approximation with Kantorovich polynomial. Approximation Theory and its Applications, 14.3: 106-116.
ULRICH, A., and MIRCEA, I., 2000. Asymptotic expansion of the multivariate Bernstein polynomials on a simplex. Approximation Theory and its Applications, 16.3: 85-93.
VOLKOV, V.I., 1957. On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables. In: Doklady Akademii Nauk., volume 115, No.1, pp 17-19. Russian Academy of Sciences.
VORONOVSKAJA, E., 1932. Determination de la forme asymptotique d'approximation des funstions par les polynomes de M.Bernstein. CR. Acad. Sci. URSS, 79: 79-85.
WEIERSTRASS, K., 1885. Über die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willkürlicher Funktionen Einer Reelen Veränderlichen. Sitzungberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 2: 633-639.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Reşat ASLAN
Uyruğu	: T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	: Şanlıurfa, 29.06.1983
e-mail	: resat63@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Murat Lisesi, Şanlıurfa	2002
Üniversite	:	Akdeniz Üniversitesi, Antalya	2008
Yüksek Lisans	:	Harran Üniversitesi, Şanlıurfa	2014
Doktora	:	Harran Üniversitesi, Şanlıurfa	2020

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2008 – 2009	Osmangazi Ortaokulu	Ücretli Matematik Öğretmeni
2010 – 2011	Osmangazi Anadolu Lisesi	Ücretli Matematik Öğretmeni
2012 – Devam	T.C. Çalışma ve İş Kurumu	İş ve Meslek Danışmanı

YABANCI DİLLER

Dil	**Seviye**	**Alınan Kurum**
İngilizce	72.5 (İyi)	ÖSYM
Almanca	B-2 (İyi)	Frei Üniversitesi / Berlin-Almanya
Hollandaca (Flemenkçe)	B-2 (İyi)	Radboud Üniversitesi / Nijmegen-Hollanda

YAYINLAR

Ulusal ve uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

1. ASLAN REŞAT, İZGİ AYDIN (2020). Some approximation results on modified q-Bernstein operators. Journal of Mathematical Analysis. 11(1), 58-70.

2. ASLAN REŞAT, İZGİ AYDIN (2020). Ağırlıklı uzaylarda q-Szasz-Kantorovich-Chlodowsky operatörlerinin yaklaşımları. Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi. 36(1), 138-150.

3. ASLAN REŞAT, HARUN ÇİÇEK, İZGİ AYDIN (2020). On gbs operators of bivariate modified Gamma operators. Journal of Advanced Mathematical Studies. 13(2), 133-141.

4. ASLAN REŞAT, İZGİ AYDIN (2020). Some approximation results by bivariate Bernstein-Kantorovich operators on a triangular domain. (Submitted)

5. ASLAN REŞAT, İZGİ AYDIN (2020). On approximation results for modified (p, q)-Bernstein operators. (Submitted)

Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında (proceedings) basılan bildiriler

1. ASLAN REŞAT, İZGİ AYDIN (2018). Approximation by bivariate Bernstein-Kantorovich operators on a triangular domain. 2nd International Conference on Pure and Applied Mathematics, Van, Turkey.

2. ASLAN REŞAT, İZGİ AYDIN, ÇİÇEK HARUN (2017). Some approximation properties of Szasz-Kantorovich-Chlodowsky operators based on q-integer. International Conference on Mathematics and Mathematics Education, Şanlıurfa, Turkey.

3. ÇİÇEK HARUN, İZGİ AYDIN, ASLAN REŞAT (2017). Approximation by modified Bernstein-Chlodowsky operators on weighted spaces. International Conference on Mathematics and Mathematics Education, Şanlıurfa, Turkey.