

**T.C  
HARRAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**İKİ BOYUTLU HÜCRESEL DÖNÜŞÜMLER**

**Mihriban İLHANLI BİRGÜL**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ŞANLIURFA**

**2018**

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah YILDIRIM danışmanlığında, Mihriban İLHANLI BİRGÜL'ün hazırladığı “İki Boyutlu Hücresel Dönüşümler” konulu bu çalışma 22/06/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Abdullah YILDIRIM .....

Üye : Prof. Dr. Sadık KELEŞ .....

Üye : Doç. Dr. Mehmet GÜLBAHAR .....

**Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.**

**Prof. Dr. Halil Murat ALĞIN**

**Enstitü Müdürü**

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

# İÇİNDEKİLER

Sayfa No

|   |     |
|---|-----|
| ÖZET .....  | i   |
| ABSTRACT .....  | ii  |
| TEŞEKKÜR .....  | iii |
| ŞEKİLLER DİZİNİ .....   | iv  |
| ÇİZELGELER DİZİNİ .....   | v   |
| 1. GİRİŞ .....  | 1   |
| 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR .....  | 2   |
| 3. MATERYAL ve YÖNTEM .....   | 4   |
| 3.1. Materyal .....   | 4   |
| 3.1.1. Pascal üçgeni ve hücresele otomata (CA) .....                                | 4   |
| 3.1.2. Ana kavramlar .....  | 5   |
| 3.2. Yöntem .....   | 8   |
| 3.2.1. 2-Boyutlu hücresele otomata (CA) .....                                       | 8   |
| 3.2.2. 2D CA'ların temsili matrislerinin elde edilişi .....                         | 12  |
| 3.2.3. Verilen keyfi bir R kuralı 2D CA'ların temsili matrislerinin bulunması ..... | 13  |
| 3.2.3.1. 170 Kuralının temsili matrislerinin bulunması .....                        | 19  |
| 3.2.3.2. 170N Kuralı ile üretilen sonlu 2D CA'nın temsili matrisi .....             | 19  |
| 3.2.3.3. 170P Kuralı ile üretilen sonlu 2D CA'nın temsili matrisi .....             | 24  |
| 3.3. Mamogramlarda Kanserli Hücreler .....  | 33  |
| 3.4. Mamogram Üzerinde Görüntü İşleme .....   | 34  |
| 3.4.1. Seçici ortalama yöntemleri ile yumuşatma .....                               | 34  |
| 3.4.2. Kenar tanımlama .....  | 35  |
| 3.4.3. Sağ ve sol göğsün karşılaştırılması .....                                    | 37  |
| 3.4.4. Doku çözümlemesi .....   | 37  |
| 4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA .....  | 39  |
| 4.1. $Z_3$ Cismi Üzerinde 2D CA'ların Temsili Matrislerinin Elde Edilişi .....      | 39  |
| 4.2. Kural 2460 Tarafından Üretilen Temsili Matrislerinin Elde Edilişi .....        | 39  |
| 4.3. 2460N Kuralı İle Üretilen Sonlu 2D CA'nın Temsili Matrisi .....                | 45  |
| 4.4. 2460P Kuralı İle Üretilen Sonlu 2D CA'nın Temsili Matrisi .....                | 47  |
| 5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER .....   | 51  |
| 5.1. Sonuçlar .....   | 51  |
| 5.2. Öneriler .....   | 51  |
| KAYNAKLAR .....   | 52  |
| ÖZGEÇMİŞ .....  | 54  |

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### İKİ BOYUTLU HÜCRESEL DÖNÜŞÜMLER

Mihriban İLHANLI BİRGÜL

Harran Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Abdullah YILDIRIM  
Yıl: 2018, Sayfa: 53

Bu çalışma 4 bölümden oluşmuştur. Giriş bölümünde Hücresel Dönüşümler ile ilgili bilgiler verilmiş, yapılan çalışmalara değinilmiştir. Birinci bölümde; diğer bölümlerde kullanılacak bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde;  $Z_2$  Cismi Üzerinde 2-Boyutlu Hücresel Dönüşümler (2D CA), 170 Kuralının Temsili Matrisinin Bulunması, 170N Kuralı İle Üretilen Sonlu 2D CA'nın Temsili Matrisi, 170P Kuralı İle Üretilen Sonlu 2D CA'nın Temsili Matrisi, üçüncü bölümde; Mamogram Görüntülerindeki Kansersiz Hücrelerin Sınıflandırılması, Mamogram Üzerinde Görüntü İşleme, dördüncü bölümde;  $Z_3$  Cismi Üzerinde 2D CA'ların Temsili Matrislerinin Elde Edilişi, Kural 2460 Tarafından Üretilen Temsili Matrislerinin Elde Edilişi, 2460N Kuralı İle Üretilen Sonlu 2D CA'nın Temsili Matrisi, 2460P Kuralı İle Üretilen Sonlu 2D CA'nın Temsili Matrisi incelenmiş ve bunlarla ilgili karakterizasyonlar verilmiştir.

**ANAHTAR KELİMELEER:** Hücresel Otomat, 2D CA Konfigürasyonu, 2D CA' ların Temsili Matrisleri, 170 Kuralının Temsili Matrisi, 2460 Kuralının Temsili Matrisi,

## **ABSTRACT**

**MSc Thesis**

### **TWO – DIMENSIONAL CELLUAR TRANSFORMATIONS**

**Mihriban İLHANLI BİRGÜL**

**Harran University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics**

**Supervisor : Assist. Prof. Dr. Abdullah YILDIRIM  
Year: 2018, Page: 53**

This study is composed of 4 chapters. In the introduction, information on Cellular Transformations is given, and the studies carried out are mentioned. In the first chapter; some basic definitions and theorems to be used in other sections have been included. In the second chapter; 2-Dimensional Cellular Transformations (2D CA) on  $Z_2$  Body, Finding the Representation Matrix of 170 Rules, Representative Matrix of Finite 2D CA Produced with 170N Rule, Representative Matrix of Finite 2D CA Produced with 170P Rule, Classification of Cancer Cells in Mammograms, Image Processing on Mammograms, in the fourth chapter; Obtaining of Representative Matrices of 2D CAs on  $Z_3$  Body, Obtaining of Representative Matrices Produced by Rule 2460, Representative Matrix of Finite 2D CA Produced by 2460N Rule, Representative Matrix of Finite 2D CA Produced by 2460P Rule and related characterizations are given .

**KEYWORDS:** Cellular Auto mata, 2D CA Configuration, 2D CA's Representative Matrices, Matrix of Representation of 170 Rules, Representation Matrix of 2460,

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans danışmanlığını üstlenip, bilgi ve tecrübeleriyle destek veren saygıdeğer hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Abdullah YILDIRIM' a saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Yüksek Lisans tez çalışmalarım sırasında beni yalnız bırakmayıp desteklerini esirgemeyen canım eşim Engin BİRGÜL'e teşekkür ederim.



## ŞEKİLLER DİZİNİ

|   | <b>Sayfa No</b> |
|---|-----------------|
| Şekil 3.1. Pascal üçgeninin adımları .....  | 4               |
| Şekil 3.2. Pascal üçgeninin ilk 128 sırası .....  | 5               |
| Şekil 3.3. Komşuluklar.....   | 34              |
| Şekil 3.4. Yönel yumuşatma projesi .....  | 35              |
| Şekil 3.5. Mamogram üzerindeki bir grup pikselin yoğunluk değerleri .....   | 36              |
| Şekil 3.6. Sağ ve sol göğsün karşılaştırılma anında görülen farklılık örneği .....  | 37              |
| Şekil 3.7. Bir mamogram kesiti üzerindeki doku örneği .....   | 38              |
| Şekil 3.8. a) Orijinal mamogram doku parçası, b) Yapay sinir ağı algılama çıktısı, c) Bulanık mantık algılama çıktısı ..... | 38              |



## ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

|  |    |
|--|----|
| Çizelge 3.1. Komşuluklara göre kural numaraları .....                | 8  |
| Çizelge 3.2. Kural 170 .....   | 19 |
| Çizelge 3.3. 3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon ..... | 20 |
| Çizelge 3.4. 4x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon ..... | 21 |
| Çizelge 3.5. 3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon ..... | 24 |
| Çizelge 3.6. 4x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon ..... | 26 |
| Çizelge 3.7. 3x4 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon ..... | 29 |
| Çizelge 4.1. Kural 2460N .....                                       | 40 |
| Çizelge 4.2. Kural 2460 .....  | 40 |
| Çizelge 4.3. 3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon ..... | 45 |
| Çizelge 4.4. 3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon ..... | 47 |
| Çizelge 4.5. 2x2 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon ..... | 49 |





## 1. GİRİŞ

Hücresele otomata (cellular automata) ifadesi ilk başta kulağa farklı gelse de prensipte kolay, pratikte olayların yada belirlenen konuların hücreler şeklinde bölünmesi ve beraberinde her bir hücrenin, yanındaki farklı hücrelerin durumuna bağılı olarak gelecekteki durumunun belirlenmesine yarayan yöntemdir. Hücresele otomatonlara aynı zamanda “homojen oluşumlar” veya “hücresele yararlı diziler” de denir.

1930’lu yılların başında bilgisayarların ana çalışma unsurlarını öne çıkaran Alan M. Turing adına hitaben otomatın anlamı evrensel turing makinesi ile ortaya çıkmıştır. Günümüzde hücresele otomata, fizik, kimya, biyolojiden, uçak ve gemi dizaynındaki hesaplanabilir sıvı dinamiklerine, tıpta kanser hücrelerinin davranışlarının incelenmesinde, sosyolojiden, coğrafyaya ve şehir planlanmasına kadar pek çok bilim ve teknolojiye önemli bir modelleme ve benzetim aracı olarak kullanılmaktadır.

## 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

CA teorisi ilk olarak Ulam ve John von Neumann (1966) tarafından incelenmiştir. John von Neumann (1966), bir CA'nın evrensel olabileceğini ve tasarlanmış bir CA'nın herhangi bir hesaplamayla yeniden yapılandırılabilirliğini göstermiştir. Hedlund (1969), sadece matematiksel bir bakışla CA'yı sistematik olarak incelemiştir. İncelemeler sonucu CA'nın kullanım alanlarının simülasyonlar, gaz davranışları, orman yangını yayılımı, trafik akışları ne tip olduğu anlaşılmıştır.

Diğer taraftan iki boyutlu CA (2D CA) henüz çok iyi incelenmemiştir. Packard ve Wolfram (1985), 5 komşuluklu CA'ya bağlı olarak iki boyutlu CA üzerinde bazı gözlemlerde bulunmuşlardır. Pries (1986), polinom cebirlerinin benzer bir türüne dayanarak grup özelliklerini açıklamak için bir boyutlu CA'yı incelemiştir.

Son yıllarda CA'lar farklı amaçlar için birçok bilim dalında genişçe inceleniyor. Das ve ark. (1993), matris cebirlerinin yardımıyla bir boyutlu CA'nın karakterizasyonunu genişletmekle lineer CA'nın teoriksel analizi için yeni bir yöntem takdim etmekle birlikte CA'nın analizini farklı olarak polinom cebirlerine dayandırmışlardır. Bu yeni yöntem aynı zamanda hybrid CA ile ilgilenerek bir CA'nın matris karakterizasyonunun formülize edilmesini ortaya çıkarmıştır.

Khan ve ark. (1997),  $Z_2$  cismi üzerinde bütün en yakın komşuluklu 2D CA lineer dönüşümlerini incelemek için bir çözüm yolu geliştirmekle beraber ayrıca iki boyutlu periyodik sınırlı dokuz komşuluklu lineer CA'ların karakterizasyonu ile ilgilenmişlerdir.

Şimdiye kadar yapılan çalışmaların hepsinde  $Z_2$  cismi üzerinde 2D CA'lar incelenmiştir. Ne yazık ki  $Z_3$  cismi üzerinde 2D CA henüz çok iyi incelenmemiştir. Şiap ve ark. (2009),  $Z_3$  cismi üzerinde bazı özel kurallarla 2D CA'ların karakterizasyonları ile ilgili bir çalışmayı bildiri olarak sunarak bu çalışmada 2460N ve 2460P özel kurallarının periyodik ve sıfır sınır şart altında bazı karakterizasyonlarını incelemiştir. Akın ve ark. (2009),  $Z_3$  cismi üzerinde

CA'ların özel bir hybrid dönüşümünün karakterizasyonunun en genel halini vermişlerdir.

Şiap ve ark. (2009),  $Z_3$  cismi üzerinde 2460N kuralı ile üretilen 2D CA'ların ön görüntüsü altında verilen herhangi bir konfigürasyonun Garden of Eden (GOE) sayısını elde etmişlerdir. John von Neumann ve Stanislaw Ulam, HO'yu daha sonradan bulmuşlardır.



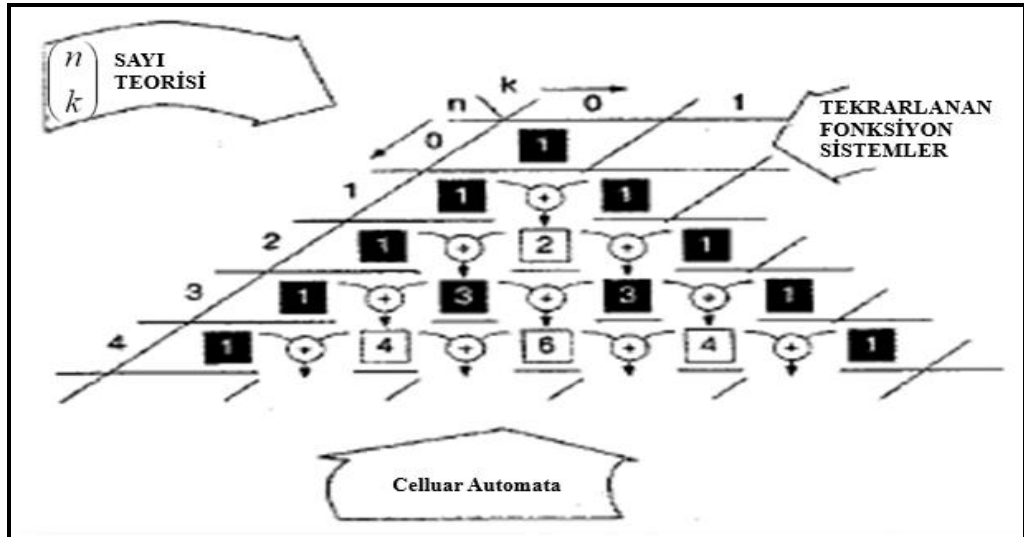
### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

#### 3.1. Materyal

Çalışmanın ana materyalini başta Pascal üçgeni ve hücreli otomata oluşturmakla beraber; mamogramlarda kanserli hücreler ve bu kanserli hücrelerin pascal üçgeni ve hücreli otomatalardan elde edilen görüntü ve verileri de oluşturmaktadır.

##### 3.1.1. Pascal üçgeni ve hücreli otomata (CA)

Birçok matematiksel araştırmanın temeli, Pascal Üçgeninde bulunan geometrik model ve temel sayı teorisi arasındaki ilişkiye dayanmaktadır. Fraktal şekillerin tanımlanması, hücreli otomata kurallarının oluşturulması gibi konularda da pascal üçgeninden yararlanılmaktadır. Pascal üçgeni ile fraktal yapı ve hücreli otomata arasındaki ilişki, Pascal üçgeninin genel yapısını gösteren aşağıda yer alan Şekil 3.1’de verilmektedir.

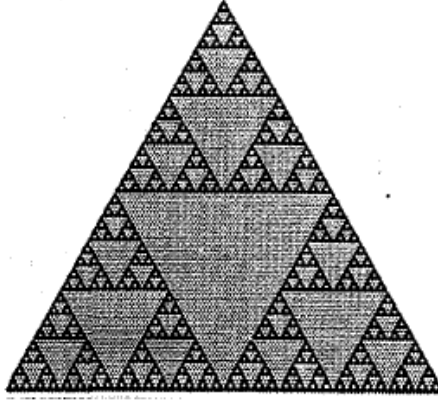


Şekil 3.1. Pascal üçgeninin adımları (Rietman, 1992)

Pascal üçgeninin adımları olarak nitelendirilen Şekil 3.1. incelendiğinde;

- Bütün tek girişleri siyah,
- Bütün çift girişleri beyaz boyayarak,

Sierpinski contasıyla yakından ilişkili geometrik bir model elde edilir. Bu şekildeki ilk 5 sıra Sierpinski modeli formasyonunun başlangıcını göstermektedir. Şekildeki ilk siyah hücreler Sierpinski modelindeki üçgenleri ifade etmektedir. Aşağıda yer alan Şekil 3.2.'de ise modelin ilk 128 sırası verilmiştir. Sıraların sayısı artırıldıkça Sierpinski üçgeninin detayları geometrik modelde daha görülebilir olmaktadır.



Şekil 3.2. Pascal üçgeninin ilk 128 sırası (Rietman, 1992)

Bu gözlem hücresel otomataya bağlantı sağlamaktadır. Bu Pascal üçgenine başka bir yaklaşım olarak kabul edilebilir ve Pascal üçgenindeki bölünebilirlik modelinin gelişimi hücresel otomata ile açıklanabilir.

Bu tezimizde  $Z_2$  üzerinde 2D CA'ların çalışılmış olan karakterizasyonları incelenerek elde edilen sonuçlar  $Z_3$  cismi için genelleştirilecektir. Şimdi bir yerel kural yardımıyla üretilen bir boyutlu CA'nın ana kavramlarını verelim.

### 3.1.2. Ana kavramlar

$Z_m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$  Halkası verilsin.  $x = (x_n)_{n=-\infty}^{n=\infty}$  iki taraflı sonsuz bir dizi

olsun. Bu şekildeki dizilerin uzayı  $Z_m^z$  ile gösterilir. Yarıçapı  $r$  olan  $f$  lokal kuralı

$f : Z_m^{2r+1} \rightarrow Z_m$  olmak üzere  $f(x_{-r}, \dots, x_r) = \left( \sum_{i=-r}^{i=r} a_i x_i \right) \pmod{m}$  ile tanımlansın. Bu

$f$  lokal kuralı ile üretilen  $F : Z_m^z \rightarrow Z_m^z$  dönüşümüne toplamsal (additive) CA denir.

Bu dönüşüm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$Fx = (y_n)_{n=-\infty}^{n=\infty}, \quad y_n = f(x_{n-r}, \dots, x_{n+r}) = \left( \sum_{i=-r}^{i=r} a_i x_{n+i} \right) \pmod{m}$$

Şimdi de 2D CA'ya giriş yapmadan önce bir boyutlu CA üzerinde kısa bir bilgi verelim.  $Z_2$  üzerinde tanımlanan bir boyutlu CA yapısı her birinin değerini 0 veya 1 olarak kabul edilen hücre veya blokların bir örgüsü olarak düşünülebilir.

Eğer  $r = 1$  kabul edilirse, bu durumda bir hücrenin bir sonraki durumu kendisine ve her iki komşusuna bağlı olarak düşünülebilir. Hücreler yalnız yerel komşuluğa bağlı belirleyici kurallara göre ayrık zaman dilimlerinde gelişme gösterir.

Matematiksel olarak  $i$ . hücrenin bir sonraki geçiş durumu  $(i-1)$ .,  $i$ . ve  $(i+1)$ . olarak hücrelerin hali hazırdaki durumunun bir fonksiyonu olarak temsil edilebilir.  $f$  yerel kuralı ile üretilen bir CA  $q_i(t+1) = f(q_{i-1}(t), q_i(t), q_{i+1}(t))$  olarak verilir (Khan ve ark., 1997).

**3.1.2.1. Tanım:** Eğer sonlu 2D CA konfigürasyonun  $m$  satır ve  $n$  sütunlardan oluşan bütün hücrelerine aynı kural uygulanırsa o zaman CA' ya tekdüze veya düzenli CA denir (Khan ve ark., 1997).

**3.1.2.2. Tanım:** Eğer sonlu bir 2D CA konfigürasyonunun farklı hücrelerine farklı kurallar uygulanırsa bu CA' ya hybrid (melez) CA denir (Khan ve ark., 1997).

**3.1.2.3. Tanım:** En yakın kenar hücreleri 0 olan 2D CA'ya sıfır sınır şartlı (null boundary condition) CA'lar denir ve bu durum kısaca N ile gösterilir (Khan ve ark., 1997).

**3.1.2.4. Tanım:** En yakın kenardaki hücreleri birbiri ile bitişik olan 2D CA'ya periyodik sınır şartlı (periodic boundary condition) CA'lar denir ve bu durum kısaca P ile gösterilir (Khan ve ark., 1997).

**3.1.2.5. Tanım:**  $A \neq \emptyset$  bir küme ve  $(A, \Delta)$  da bir ikili işlem olsun.  $(A, \Delta)$  cebirsel yapısına aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir grup denir.

i.  $\Delta$ ,  $A$ 'da bir ikili işlemdir.

ii.  $\Delta$ , işleminin  $A$ 'da birleşme özelliği vardır. Yani;  $\forall a, b \in A$  için

$$a\Delta(b\Delta c) = (a\Delta b)\Delta c$$

iii.  $\Delta$ , işleminin  $A$ 'da birim elemanı vardır. Yani;  $\forall a \in A$  için  $a\Delta e = e\Delta a = a$  olacak şekilde  $\exists e \in A$  vardır.

iv.  $\Delta$ , işlemine göre  $A$ 'daki her elemanın tersi vardır. Yani;  $\forall a \in A$  için  $a\Delta a^{-1} = a^{-1}\Delta a = e$  olacak şekilde vardır.

Eğer  $(A, \Delta)$  bir grup ve  $\forall a, b \in A$  için  $a\Delta b = b\Delta a$  değişme özelliğinde sağlanıyorsa gruba değişmeli veya abel grubu denir.

**3.1.2.6. Tanım:**  $A \neq \emptyset$  kümesi üzerinde tanımlı ikili işlem "+" ve "." olsun.  $(A, +, .)$  cebirsel yapısı  $\forall x, y, z \in A$  için,

i.  $(A, +)$  değişmeli bir gruptur;

ii. "." işleminin  $A$  da birleşme özelliği vardır. Yani;  $x.(y.z) = (x.y).z$ ;

iii. "." işleminin "+" işlemi üzerinde soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır.

Yani,  $x.(y+z) = x.y+x.z$ ,  $(x+y).z = x.z+y.z$  şartlarını sağlıyorsa bu yapıya halka denir.

**3.1.2.7. Tanım:** Değişmeli ve birimli bir  $A$  halkasının sıfırdan farklı tüm elemanlarının çarpma işlemine göre tersi varsa  $A$  halkasına bir cisim denir.

**3.1.2.8. Tanım:**  $A \neq \emptyset$  bir cümle,  $F$  ise reel veya karmaşık sayılar cismi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa  $A$  ya  $F$  üzerinde lineer uzay denir.

a)  $(A, +)$  bir değişmeli gruptur.

b)  $\forall x, y \in A$  ve  $\alpha, \beta \in F$  olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$b_1) \alpha.x \in A \text{ dir.}$$

$$b_2) \alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$$

$$b_3) (\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$$

$$b_4) (\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x)$$

$$b_5) 1.x \text{ (Burada } 1, F' \text{ nin birim elemanıdır.)}$$

**3.1.2.9. Tanım:**  $A, F$  cismi üzerinde bir vektör uzayı ve  $B, A$  'nın bir alt kümesi olsun.  $B$  kümesi lineer bağımsız ve  $B, A$  yı geriyorsa  $B$  ye  $F$  üzerinde  $A$  'nın bir bazı (tabanı) denir.

## 3.2. Yöntem

### 3.2.1. 2-Boyutlu hücrel dönüşümler (2D CA)

Burada  $Z_2$  cismi üzerinde iki boyutlu hücrel dönüşümler genişletilerek incelenecektir. Khan ve ark. (1997), 2D CA'ların karakterizasyonlarını 170N ve 170P için incelemiştir. Choudhury ve ark. (2004),  $Z_2$  cismi üzerinde 170N ve 170P için 2D CA'ların karakterizasyonunun en genel halini ifade etmişlerdir.

Burada, Khan ve ark. (1997)'nin  $Z_2$  cismi üzerinde bazı 2D CA'ların karakterizasyonunu incelerken kullandıkları yöntemler aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

İki boyutlu en yakın komşuluklu lineer CA'da, CA'nın belirli bir hücresinin gelecekte ki durumu, hücrenin hali hazırdaki durumundan ve ona en yakın olan sekiz komşu hücreden etkilenir. Bu tezde sadece lineer kurallar göz önüne alınmaktadır. Özel bir kural ile bu işlemler yapılabilir.

Çizelge 3.1. Komşuluklara göre kural numaraları

|    |     |     |
|----|-----|-----|
| 64 | 128 | 256 |
| 32 | 1   | 2   |
| 16 | 8   | 4   |



Çizelge 3.1'deki merkez kutu, hücrenin hali hazırdaki durumunu ve diğer bütün kutular o hücrenin en yakın sekiz komşuluğunu belirtirler. Her bir kutunun içindeki numara, hali hazırdaki hücrelerin belirli komşulukları ile iş birliği yaparak kendi kural numarasını belirler.

Eğer merkez hücre sadece kendisine bağlı ise bu durum "Kural 1" olarak adlandırılır. Eğer merkez hücre sadece tepesindeki komşu hücreye bağlı ise buna "Kural 128"denir.

Bir hücre, iki veya daha fazla komşu hücreye bağlı ise o zaman kural numarası ilgili hücrelerin sayılarının aritmetik toplamıdır. Örneğin 2D CA Kural 171N (128+32+8+2+1), sıfır sınır şartları altında merkez hücrenin beş komşusuna (üst, sol, sağ, alt ve kendisi) bağlıdır. Halbuki Kural 171P, periyodik sınır şartı (Periodic Boundary Condition) altında aynı komşuluklara bağlıdır. Hücrelerin satır ve sütun bağımlılıklarını elde etmek için;

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

temel matrisler kullanılır.

Aşağıda yer alan teorem 1'de,  $X_t$  konfigürasyonunun belli bir 2D CA altında ötelemesi ile elde edilen yeni  $X_{t+1}$  konfigürasyonunu nasıl tespit edildiğini belirtmesi açısından önemlidir.

**Teorem 1:** (1,2,4,8,16,32,64,128,256) kuralları ile elde edilen 2D CA'lar  $X_t$  konfigürasyonunu öteleyerek,  $X_{t+1}$  konfigürasyonunu aşağıdaki şekilde temsil ederler (Khan ve ark., 1997).

$$\begin{aligned} \text{Kural 1} & : [X_{t+1}] = [X_t], \\ \text{Kural 2} & : [X_{t+1}] = [X_t][T_2], \\ \text{Kural 4} & : [X_{t+1}] = [T_1][X_t][T_2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Kural 8} & : [X_{t+1}] = [T_1][X_t], \\ \text{Kural 16} & : [X_{t+1}] = [T_1][X_t][T_1], \\ \text{Kural 32} & : [X_{t+1}] = [X_t][T_1], \\ \text{Kural 64} & : [X_{t+1}] = [T_2][X_t][T_1], \\ \text{Kural 128} & : [X_{t+1}] = [T_2][X_t], \\ \text{Kural 256} & : [X_{t+1}] = [T_2][X_t][T_2]. \end{aligned}$$

**İspat:**

$$[X_t] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33} \text{ bileşenleri 0 veya 1 değerini alır.})$$

$t$  zamandaki  $3 \times 3$  tipinde bir konfigürasyon olsun.

a)  $[X_{t+1}]$ 'in  $[X_t]$ 'ye eşit olduğu durum Kural 1 olarak bilinir. Yani;

$$\text{Kural 1: } [X_{t+1}] = [X_t] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

\* Hücre olduğu gibi taşınır.  $T \cdot x^t = x^{t+1}$

b)  $[X_t]$ 'yi  $[T_2]$  ile soldan çarparak bir CA'nın  $(t+1)$  inci zamandaki durumunu elde ederiz ki bu Kural 2 olarak bilinir. Gerçekten,

$$[X_{t+1}] = [X_t][T_2] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \end{pmatrix}$$

\* Hücrenin bir sağındaki hücre alınır.

c)  $[X_t]$ 'yi  $[T_1]$  ile sağdan çarparak bir CA'nın  $(t+1)$  inci zamandaki durumunu elde ederiz ki bu Kural 8 olarak bilinir. Gerçekten,

$$[X_{t+1}] = [T_1][X_t] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

\* Hücrenin bir altındaki hücre alınır.

d)  $[X_t]$ 'yi  $[T_1]$  ile önce soldan çarparak ve daha sonra sağdan  $[T_2]$  ile çarparak bir CA'nın  $(t+1)$  zamandaki durumunu elde ederiz ki bu Kural 4 olarak bilinir.

Gerçekten,

$$[X_{t+1}] = [T_1][X_t][T_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

benzer şekilde diğer durumlarda gösterilebilir.

**Teorem 2:** İkinci bir kural ile oluşturulan bir CA'nın bir sonraki geçiş durumu, ilgili başlangıç kurallarının matrislerinin mod2'ye göre toplamı olarak temsil edilebilir (Khan ve ark., 1997).

Kural 3 = Kural 1+Kural 2,  $[X_{t+1}] = [X_t] + [X_t][T_2]$  olarak temsil edilir.

Benzer olarak Kural 170; Kural 2, Kural 8, Kural 32 ve Kural 128 'in mod2'ye göre toplamı olarak yazılır. Bu durumda CA'nın bir sonraki geçiş durumu;

Kural 170 = Kural 2+Kural 8+Kural 32+Kural 128 olarak yazılır ve

$$\begin{aligned} [X_{t+1}] &= [X_t][T_2] + [T_1][X_t] + [X_t][T_1] + [T_2][X_t] \\ &= [X_t][T_1 + T_2] + [T_1 + T_2][X_t] \\ &= [X_t][S] + [S][X_t] \end{aligned}$$

(burada  $[S] = [T_1 + T_2]$  olduğu kabul edilir.)

Bunu açıklamak için bir örnek ele alalım:

$$[X_t] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ 3x3 tipinde bir yapılandırma olsun. Şimdi bu yapılandırmanın}$$

sıfır sınır şartlı Kural 3 ile tanımlanan 2D CA altındaki görüntüsünü elde edelim.

Kural 3 = Kural 1+Kural 2,

$$\begin{aligned} [X_{t+1}] &= [X_t] + [X_t][T_2] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada  $[X_t]$  keyfi olarak seçilmiştir. Benzer olarak;

Kural 170 = Kural 2+Kural 8+Kural 32+Kural 128 olarak yazılır ve

$$\begin{aligned} &((X_t).(S) + (S).(X_t)) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

### 3.2.2. 2D CA'ların temsili matrislerinin elde edilişi

İki boyutlu hücrese dönüşümlerin temsili matrislerini incelerken kuralların her biri  $T$  ile gösterilen bir dönüşüme çevrilebilir. Bu durum aşağıdaki şekilde ifade edilebilir (Khan ve ark., 1997).

$$T_{m \times m}(X) = [T]_{m \times m} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_m \end{bmatrix}_{m \times 1} = \begin{bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X'_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

Bu  $T$  matrisi 2D CA' ların temsil matrisi olarak adlandırılır.

Burada  $X'$ 'in satırları ve  $X_1, X_2, \dots, X_m$  de  $X$ 'in ürettiği bir sonraki durumun yani  $X'$  nün satırlarıdır.

### 3.2.3. Verilen keyfi bir R kuralı için 2D CA' ların temsili matrislerinin bulunması

Aşağıda vereceğimiz teorem ile  $T$  dönüşümü altında verilen keyfi bir  $R$  kuralı için düzgün olarak uygulanmış bütün 2D CA hücreleri formülize edilmeye çalışılacaktır.

**Teorem 3:** Herhangi bir  $R$  kuralı için iki boyutlu dönüşüm matrisi aşağıdaki şekilde temsil edilebilir (Khan ve ark., 1997):

$$T_R = \begin{pmatrix} D & U & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ L & D & U & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & D & U & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & L & D & U \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & L & D \end{pmatrix}_{m \times m}$$

Burada  $D, L, U$   $n \times n$  tipinden aşağıdaki matrislerden biridir:

$(0), (I), (T_1), (T_2), (I+T_1), (I+T_2), (S)$  ve  $(I+S)$ .

**İspat:** Yukarıdaki temsil matrisinin ilk sütununu elde etmek için, aşağıda verilen doğal baz kullanılabilir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Şimdi  $R$  kuralı ilk satırdan başlayarak her bir hücreye uygulanır. İspatı yaparken;

$$T(X)_{m \times n} = [T]_{m \times m} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_m \end{bmatrix}_{m \times 1} = \begin{bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X'_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

dönüşümünden faydalanılır. İlk olarak  $T_R$ 'nin ilk sütunu elde edilir. Şimdi doğal taban matrisindeki bir bileşeni sağa doğru kaydırılıp elde edilen ikinci doğal taban vektörüne, bir kez daha  $R$  kuralı uygulanır. Bu seferde  $T_R$ 'nin ikinci kolonu elde edilir. Bu şekilde devam edilirse geriye kalan tüm sütunlar elde edilir.

Teoremin daha iyi anlaşılabilmesi için örneklerdeki uygulaması aşağıda verilmiştir.

**Örnek 3.1.:** 3 x 3 tipindeki 2D CA'nın boyutunu hesap edelim. Bütün hücreler üzerinde uygulanmış Kural 2' ye karşılık gelen  $T$  matrisini elde etmek için aşağıdaki

adımları takip edilir. Kural 2'ye karşılık gelen  $T$  matrisinin 1. sütununu elde etmek için  $3 \times 3$  tipindeki doğal taban matrisleri kullanılır. Örneğin,  $T$ 'nin 1. sütununu elde etmek için aşağıdaki doğal taban matrisi kullanılır.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Şimdi 2D CA'nın bir durumu gibi doğal taban matrisi dikkate alınarak  $T_{R_2}$ 'nin (1.) ilk sütununu elde etmek için Kural 2 uygulanır. Şimdi ilk olarak Kural 2'yi hatırlayalım.

$$\text{Kural 2; } [X_{t+1}] = [X_t][T_2] = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \end{pmatrix}$$

Şimdi diğer adımlar uygulanabilir. Önce;  $T$  dönüşümü düşünölsün.  $T$  dönüşümü Kural 2'ye uyarlanabilir.

$$\begin{aligned} T(X)_{m \times n} &= [T]_{m \times m} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_m \end{bmatrix}_{m \times 1} = \begin{bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ X'_m \end{bmatrix}_{m \times 1} \\ &= [T]_{m \times m} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \end{aligned}$$

Burada  $a_1, a_2, a_3$   $X$ 'in satırları  $a'_1, a'_2, a'_3$  ise  $X$ 'in bir sonraki durumu olan  $X'$ 'nin  $a_1 = [a_{11} \ a_{12} \ a_{13}]_{1 \times 3}^T$  satırlarıdır.  $a_2 = [a_{21} \ a_{22} \ a_{23}]_{1 \times 3}^T$ ,  $a_3 = [a_{31} \ a_{32} \ a_{33}]_{1 \times 3}^T$  şeklindedir.

Buradan  $T$  dönüşümü yukarıda verilen teoremden faydalanılarak bulunabilir. Yani, aşağıdaki doğal taban matrisini kullanılıp Kural 2'ye karşılık gelen  $T$  dönüşümü bulunur.

**Not:**  $T$  dönüşümünün temsil matrislerini elde etmek için taban vektörlerinin görüntüleri temsil matrisin sütunları olarak alındığında matris elde edilmiş olur. Yani;

$T : V \rightarrow W$ ,  $v \in V$  ve  $v = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$  ise  $T(v) = a_1T(e_1) + a_2T(e_2) + a_3T(e_3)$  şeklindedir. Buradan taban vektörlerinin görüntüleri temsil matrisin sütunları olarak alındığında;

$$(T(e_1) \ T(e_2) \ T(e_3))_{3 \times 1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = T(v)$$

matrisi elde edilmiş olur ki bu da istenilen matristir. Aşağıdaki doğal taban matrisini kullanarak Kural 2'ye karşılık gelen  $T$  dönüşümü bulunabilir.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

İlk olarak doğal taban matrisinin görüntüleri temsil matrisin sütunları olarak alındığında ve daha sonra Kural 2 uygulandığında;



$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dönüşümü elde edilir.

Şimdi doğal taban matrisindeki 1 sağa doğru kaydırılıp bir kez daha Kural 2 uygulansın. Bu durumda

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bulunur.

$T$  dönüşümü elde edilene kadar her seferinde 1 sağa doğru kaydırılıp Kural 2 uygulanırsa

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

**Not:** Eşitliğin sağındaki matrisin tersi alındığında bize soldaki matrisi vermek zorundadır.

Şimdi elde edilen  $T_{R_2}$  kuralı (yani Kural 2'ye karşılık gelen  $T$  dönüşümü) yazılabilir:

$$(T_{R_2})_{9 \times 9} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{9 \times 9} = \begin{pmatrix} T_1 & O_3 & O_3 \\ O_3 & T_1 & O_3 \\ O_{31} & O_3 & T_1 \end{pmatrix}_{9 \times 9}$$

Böylece elde edilen bu matrise ilgili 2D sonlu CA'ya karşılık gelen temsili matris denilir. Bu tezimizde, bazı kurullarla üretilen 2D sonlu CA'lar tarafından elde edilen temsili matrislerin bulunması en önemli amaçlarımızdan biridir. Bu temsil matrislerinin elde edilmesini kısaca karakterizasyon olarak ifade etmekteyiz.

### 3.2.3.1. 170 Kuralının temsili matrisinin bulunması

Bu kısımda Kural 170'in temsili matrisi incelenecektir. Kural 170'in temsili matrisi sıfır sınır şartı ve periyodik sınır şartı altında daha önce incelenmiş ve bu durumlarda genelleme yapılmıştır (Khan ve ark., 1997) ve (Choudhury ve ark., 2004). Bu tezde konunun bütünlüğü bakımından Kural 170 sıfır sınır şartı ve periyodik sınır şartı altında biraz daha ayrıntılı olarak incelenecektir. Bunu yapmadan önce ilk olarak Kural 170 ifade edilsin.

Çizelge 3.2. Kural 170

|           |            |          |
|-----------|------------|----------|
| 64        | <u>128</u> | 256      |
| <u>32</u> | 1          | <u>2</u> |
| 16        | <u>8</u>   | 4        |

Çizelge 3.2.'deki altı çizili kutucukların içindeki rakamların toplamı Kural 170'i verir. Kural170 = Kural 2+Kural 8+Kural 32+Kural 128 olarak yazılır ve dikkat edilecek olursa baklava dilimi şeklindedir. Şimdi Kural 170N'ye karşılık gelen temsili matrisler bulunabilir. Bunu yaparken  $m$  (satır) ve  $n$  (sütun)'lara çeşitli değerler verilerek onların temsili matrisleri sıfır sınır şartı altında bulunabilir.

### 3.2.3.2. 170N Kuralı ile üretilen sonlu 2D CA'nın temsili matrisi

170N Kuralına karşılık gelen temsili matrislerin en genel halini bulmak için yukarıda belirtilen  $m$  ve  $n$  değerleri özelleştirilerek temsili matrisler bulunduktan sonra en genel hali verilecektir.

Şimdi de  $m = 3$  ve  $n = 3$  alarak 170N kuralına karşılık gelen temsili matrisi bulalım. Bunun için ilk önce sıfır sınır şartı altında  $3 \times 3$  tipinde hücrelerden oluşmuş 2D CA'nın konfigürasyonu yazılsın. Daha sonra bu hücrelere 170N kuralı uygulansın.

Çizelge 3.3. 3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

|   |                 |                 |                 |   |
|---|-----------------|-----------------|-----------------|---|
| 0 | 0               | 0               | 0               | 0 |
| 0 | x <sub>11</sub> | x <sub>12</sub> | x <sub>13</sub> | 0 |
| 0 | x <sub>21</sub> | x <sub>22</sub> | x <sub>23</sub> | 0 |
| 0 | x <sub>31</sub> | x <sub>32</sub> | x <sub>33</sub> | 0 |
| 0 | 0               | 0               | 0               | 0 |

Şimdi Çizelge 3.3.'te 170N Kuralı uygulandığında  $T$  dönüşümü altında yeni bir konfigürasyon elde edilir ve bu konfigürasyon aşağıdaki gibidir:

$$x_{21} + x_{12} = y_{11}$$

$$x_{11} + x_{22} + x_{13} = y_{12}$$

$$x_{12} + x_{23} = y_{13}$$

$$x_{11} + x_{31} + x_{22} = y_{21}$$

$$x_{12} + x_{21} + x_{32} + x_{23} = y_{22}$$

$$x_{13} + x_{22} + x_3 = y_{23}$$

$$x_{21} + x_3 = y_{31}$$

$$x_{22} + x_{31} + x_3 = y_{32}$$

$$x_{23} + x_{32} = y_{33}$$

Şimdi doğal taban matrisini kullanılarak bunlara karşılık gelen  $T$  temsili matrisi yazalım.

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eğer elde edilen sütun matrisleri sırasıyla bitleştirilirse, bu durumda karşılık gelen temsili matris aşağıdaki gibi bulunabilir:

Şimdide kare olmayan bir konfigürasyon yani  $m = 4$ ,  $n = 3$  alalım. İlk önce sıfır sınır şartı altında  $4 \times 3$  tipinde hücrelerden oluşmuş 2D CA'nın konfigürasyonu yazılır ve daha sonra bu hücrelere 170N Kuralı uygulanır.

Çizelge 3.4.  $4 \times 3$  tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

|   |          |          |          |   |
|---|----------|----------|----------|---|
| 0 | 0        | 0        | 0        | 0 |
| 0 | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | 0 |
| 0 | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | 0 |
| 0 | $x_{31}$ | $x_{32}$ | $x_{33}$ | 0 |
| 0 | $x_{41}$ | $x_{42}$ | $x_{43}$ | 0 |
| 0 | 0        | 0        | 0        | 0 |

Şimdi Çizelge 3.4.'te 170N Kuralı uygulandığında  $T$  dönüşümü altında yeni bir konfigürasyon elde edilir ve bu konfigürasyon aşağıdaki gibidir:

$$x_{21} + x_{12} = y_{11}$$

$$x_{11} + x_{22} + x_{13} = y_{12}$$

$$x_{12} + x_{23} = y_{13}$$

$$x_{11} + x_{31} + x_{22} = y_{21}$$

$$x_{12} + x_{21} + x_{32} + x_{23} = y_{22}$$

$$x_{13} + x_{22} + x_{33} = y_{23}$$

$$x_{21} + x_{41} + x_{32} + x_{33} = y_{32}$$

$$x_{23} + x_{32} + x_{43} = y_{33}$$

$$x_{31} + x_{42} = y_{41}$$

$$x_{32} + x_{41} + x_{43} = y_{42}$$

$$x_{33} + x_{42} = y_{43}$$

Doğal taban matrisini kullanarak bunlara karşılık gelen sütun vektörlerini yazalım.

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, &
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, &
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, &
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, &
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, &
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{matrix}$$

Böylece yukarıdaki örneklerde de olduğu gibi elde edilen sütun matrisleri yan yana eklenirse  $m = 4$  ve  $n = 3$  için 170N Kuralına karşılık gelen temsili matris aşağıdaki şekilde bulunur. Eğer  $m = 4$  ve  $n = 4$  olarak alınırsa temsili matris aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$T_{R_{170N}} = \begin{pmatrix} S_4 & I_4 & O_4 & O_4 \\ I_4 & S_4 & I_4 & O_4 \\ O_4 & I_4 & S_4 & I_4 \\ O_4 & O_4 & I_4 & S_4 \end{pmatrix}_{16 \times 16}$$

Keyfi  $m$  ve  $n$  için  $(T_{170N})_{m \times m \times n}$  temsili matrisinin genel formu aşağıdaki gibidir:

$$(T_{170N})_{m \times m \times n} = \begin{pmatrix} S & I & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ I & S & I & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & S & I & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & S & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & I & S & I \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & I & S \end{pmatrix}$$

Blok alt matrislerin her biri  $n \times n$  tipinde kare matristir ve S matrisi de aşağıdaki gibidir:

$$S_{n \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### 3.2.3.3. 170P Kuralı ile üretilen sonlu 2D CA'nın temsili matrisi

170P Kuralına karşılık gelen temsili matrislerin en genel halini bulmak için yukarıda belirtilen  $m$  ve  $n$  değerleri özelleştirilerek temsili matrisler bulunduğundan sonra en genel hali verilecektir. Şimdi birkaç örnek verilerek 170P'nin temsili matrisinin en genel halini bulalım.

**Örnek 3.2.3.3.1:**  $m = 3$  ve  $n = 3$  olarak 170P kuralına karşılık gelen temsili matrisi bulalım. Bunun için ilk önce periyodik sınır şartı altında  $3 \times 3$  tipinde hücrelerden oluşmuş 2D CA'nın konfigürasyonu yazılsın. Daha sonra bu hücrelere 170P kuralı uygulansın.

Çizelge 3.5.  $3 \times 3$  tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

|          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| $X_{33}$ | $X_{31}$ | $X_{32}$ | $X_{33}$ | $X_{31}$ |
| $X_{13}$ | $X_{11}$ | $X_{12}$ | $X_{13}$ | $X_{11}$ |
| $X_{23}$ | $X_{21}$ | $X_{22}$ | $X_{23}$ | $X_{21}$ |
| $X_{33}$ | $X_{31}$ | $X_{32}$ | $X_{33}$ | $X_{31}$ |
| $X_{13}$ | $X_{11}$ | $X_{12}$ | $X_{13}$ | $X_{11}$ |



Çizelge 3.5.'te 170P Kuralı uygulandığında  $T$  dönüşümü altında yeni bir konfigürasyon elde edilir, bu konfigürasyon aşağıdaki gibidir.

$$x_{13} + x_{31} + x_{21} + x_{12} = y_{11}$$

$$x_{11} + x_{22} + x_{13} + x_{32} = y_{12}$$

$$x_{33} + x_{12} + x_{23} + x_{11} = y_{13}$$

$$x_{31} + x_{23} + x_{11} + x_{22} = y_{21}$$

$$x_{12} + x_{21} + x_{32} + x_{23} = y_{22}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{33} + x_{13} = y_{23}$$

$$x_{11} + x_{33} + x_{21} + x_{32} = y_{31}$$

$$x_{31} + x_{12} + x_{33} + x_{22} = y_{32}$$

$$x_{32} + x_{13} + x_{31} + x_{23} = y_{33}$$

Şimdi doğal taban matrisini kullanarak bunlara karşılık gelen  $T_{170P}$  temsili matrisi bulunabilir.

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bir önceki kesimde olduğu gibi elde edilen sütun matrisleri sırasıyla birbirine eklenirse  $T_{R_{170P}}$  temsili matrisi aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$T_{R_{170P}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{9 \times 9} = \begin{pmatrix} S_3^* & I_3 & I_3 \\ I_3 & S_3^* & I_3 \\ I_3 & I_3 & S_3^* \end{pmatrix}_{9 \times 9}$$

**Örnek 3.2.3.3.2:** Şimdi kare olmayan bir durumu  $m = 4$  ve  $n = 3$  için inceleyelim. O halde ilk önce periyodik sınır şartı altında  $4 \times 3$  tipinde hücrelerden oluşmuş 2D CA'nın konfigürasyonu yazılsın. Daha sonra bu hücrelere 170P kuralı uygulanarak temsili matris yazılacaktır.

Çizelge 3.6.  $4 \times 3$  tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

|                 |                 |                 |                 |                 |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| X <sub>43</sub> | X <sub>41</sub> | X <sub>42</sub> | X <sub>43</sub> | X <sub>41</sub> |
| X <sub>13</sub> | X <sub>11</sub> | X <sub>12</sub> | X <sub>13</sub> | X <sub>11</sub> |
| X <sub>23</sub> | X <sub>21</sub> | X <sub>22</sub> | X <sub>23</sub> | X <sub>21</sub> |
| X <sub>33</sub> | X <sub>31</sub> | X <sub>32</sub> | X <sub>33</sub> | X <sub>31</sub> |
| X <sub>43</sub> | X <sub>41</sub> | X <sub>42</sub> | X <sub>43</sub> | X <sub>41</sub> |
| X <sub>13</sub> | X <sub>11</sub> | X <sub>12</sub> | X <sub>13</sub> | X <sub>11</sub> |



$$\begin{matrix}
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = &
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, &
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = &
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, &
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = &
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, &
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = &
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, &
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = &
\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, &
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = &
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{matrix}$$

Yukarıdaki gibi düşünülürse, bu durumda temsili matris aşağıdaki gibi bulunur:

$$T_{R_{170P}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{12 \times 12} = \begin{pmatrix} S_3^* & I_3 & O_3 & I_3 \\ I_3 & S_3^* & I_3 & O_3 \\ O_3 & I_3 & S_3^* & I_3 \\ I_3 & O_3 & I_3 & S_3^* \end{pmatrix}_{12 \times 12}$$

**Örnek 3.2.3.3.3:** Şimdi  $m$  sayısı  $n$  den küçük olsun yani,  $m = 3$  ve  $n = 4$  alalım. İlk önce periyodik sınır şartı altında  $3 \times 4$  tipinde hücrelerden oluşmuş 2D CA'nın konfigürasyonu çizelge 3.2.3.3.'teki gibi düzenlenebilir.

Çizelge 3.7. 3x4 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

|                 |                 |                 |                 |                 |                 |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| X <sub>34</sub> | X <sub>31</sub> | X <sub>32</sub> | X <sub>33</sub> | X <sub>34</sub> | X <sub>31</sub> |
| X <sub>14</sub> | X <sub>11</sub> | X <sub>12</sub> | X <sub>13</sub> | X <sub>14</sub> | X <sub>11</sub> |
| X <sub>24</sub> | X <sub>21</sub> | X <sub>22</sub> | X <sub>23</sub> | X <sub>24</sub> | X <sub>21</sub> |
| X <sub>34</sub> | X <sub>31</sub> | X <sub>32</sub> | X <sub>33</sub> | X <sub>34</sub> | X <sub>31</sub> |
| X <sub>14</sub> | X <sub>11</sub> | X <sub>12</sub> | X <sub>13</sub> | X <sub>14</sub> | X <sub>11</sub> |

Çizelge 3.7.'de 170P Kuralı uygulanırsa; o zaman  $T$  dönüşümü altında yeni bir konfigürasyon elde edilir ve bu konfigürasyonun elemanları aşağıdaki gibidir:

$$X_{14} + X_{31} + X_{21} + X_{12} = Y_{11}$$

$$X_{11} + X_{22} + X_{13} + X_{32} = Y_{12}$$

$$X_{14} + X_{12} + X_{23} + X_{33} = Y_{13}$$

$$X_{34} + X_{13} + X_{11} + X_{24} = Y_{14}$$

$$X_{11} + X_{22} + X_{31} + X_{24} = Y_{21}$$

$$X_{21} + X_{32} + X_{23} + X_{12} = Y_{22}$$

$$X_{13} + X_{33} + X_{24} + X_{22} = Y_{23}$$

$$X_{34} + X_{21} + X_{23} + X_{14} = Y_{24}$$

$$X_{32} + X_{11} + X_{34} + X_{21} = Y_{31}$$

$$X_{33} + X_{22} + X_{12} + X_{31} = Y_{32}$$

$$X_{34} + X_{13} + X_{23} + X_{32} = Y_{33}$$

$$X_{24} + X_{14} + X_{31} + X_{33} = Y_{34}$$

Yukarıdaki mantıktan hareketle doğal taban matrisi kullanılarak bunlara karşılık gelen  $T_{R_{170P}}$  temsili matrisi bulunabilir.



$$T_{R_{170P}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{12 \times 12} = \begin{pmatrix} S_4^* & I_4 & I_4 \\ I_4 & S_4^* & I_4 \\ I_4 & I_4 & S_4^* \end{pmatrix}_{12 \times 12}$$

Genel formu elde edebilmek için  $m = 4$ ,  $n = 4$  karesel bir konfigürasyon alınrsa 2D CA'nın konfigürasyonunun  $T$  dönüşümüne karşılık gelen temsili matrisi

$$T_{R_{170P}} = \begin{pmatrix} S_4^* & I_4 & O_4 & I_4 \\ I_4 & S_4^* & I_4 & O_4 \\ O_4 & I_4 & S_4^* & I_4 \\ I_4 & O_4 & I_4 & S_4^* \end{pmatrix}_{16 \times 16}$$

olarak bulunur. Şimdi genellemeye yapabiliriz. Verilen herhangi bir  $m$  ve  $n$  için  $(T_{170P})_{m \times m \times m}$  temsili matrisinin genel formu aşağıdaki gibidir:

$$(T_{170P})_{m \times m \times m} = \begin{pmatrix} S^* & I & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & I \\ I & S^* & I & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & S^* & I & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & S^* & I & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & I & S^* & I \\ I & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & I & S^* \end{pmatrix}$$

Bloklardaki alt matrislerin her biri  $n \times n$  tipinde kare matristir ve  $S^*$  matrisi

$$S_{n \times n}^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.



### 3.3. Mamogramlarda Kanserli Hücreler

Meme kanseri kadınlarda sık görülen bir kanser türü ve ölümcül bir hastalıktır. Gelişmiş ülkelerde 70 yaşına kadar yaşayan her 7-8 kadından birinin meme kanserine yakalandığı bilinmektedir. Meme kanserinin erken teşhisi ancak tarama yöntemleriyle mümkün olmaktadır. Tarama yöntemlerinin başında mamografi yer almaktadır. Mamografinin meme kanserinden ölme riskini %30 oranında azalttığı bilimsel olarak gösterilmekle birlikte, radyologların mamogramlar üzerindeki çalışmalarında ve kararlarında zaman zaman farklılıklar gözlemlenmektedir. Buna ek olarak sürekli tekrar edilmesi gereken ve uzun süre gerektiren ayrıntılı bir inceleme süreci vardır. Bu nedenle geçtiğimiz yıllarda bu alanda görüntü inceleme tekniklerinin kullanımı oldukça yoğun ilgi görmüştür. Woods ve Bowyer (1996), mamogramlarda kanserli hücreler hususunu ele alarak bu alanda çalışmalarda bulunmuşlardır.

Bilgisayar destekli tanı araştırmaları genel olarak meme kanserinin erken teşhisi ve bazı özel durumlar içinde mikrokalsifikasyonların sezimlenmesi üzerine yoğunlaşmıştır. Bu alandaki ilk çalışmalardan birisi fark-görüntü tekniğidir. Bu teknikte görüntü paralel iki filtreden geçirilmekte, filtre çıkışlarında elde edilen bastırılmış-sinyal ile iyileştirilmiş-sinyal görüntüleri birbirinden çıkartılmaktadır.

Ortaya çıkan fark görüntüsü gri seviyeli bir eşik değerine tabii tutularak mikro kalsifikasyonlar ortaya çıkarılmaktadır. Bu uygulamada oluşturulan modelde herhangi bir görüntü bloğu (mamogram dokusu) sisteme verildiğinde öncelikle birinci bölümde belirtilen yüksek dereceden istatistiksel parametreler hesaplanır. Başlangıçta Nijmegen veri tabanından elde edilen ön bilgi yardımıyla hastalıklı bloklara ait yamukluk ve savrukluğ değerleri hesaplanır. Daha sonra bu değerlerin büyük bir çoğunluğu eğitim verisi olarak sistemin eğitiminde kullanılır. Küçük bir kısmı ise kurulan fuzzy modelinin doğruluğunu test etmede kullanılır. Daha sonra test görüntüleri verildiğinde sistem kurulan bu modele bağımlı olarak çıkış üretir. Bu çıkışta hastalıklı ve sağlıklı bloklar arasındaki eşik değerler kullanıcı tarafından belirlenebilmektedir. Diğer bir ifadeyle sistemin hassasiyeti hücresel bloklara göre ayarlanabilir.

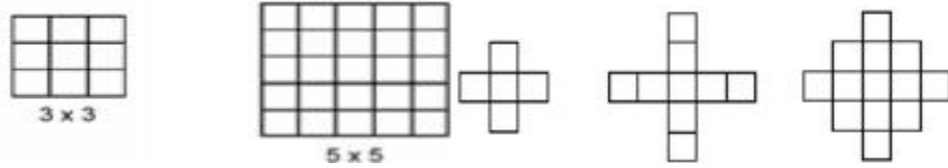
### 3.4. Mamogramlar Üzerinde Görüntü İşleme

Meme kanserine yakalanmış olan kişilerin yaklaşık %20'si radyologların hatalı teşhisi ile karşı karşıya kalabilmektedirler (Holland, 1982). Bunun sebebi ise mamogramlar üç boyutlu bir nesnenin iki boyutlu izdüşümünden dolayı üst üste gelen dokular birtakım izleri sakladıklarının yanında olmayan bazı izleri de meydana getirebilmektedir. Buna bağlı olarak ta radyologlar bu şekil algılama problemlerinden dolayı teşhisi tam olarak görememekte ve buna bağlı olarak ta her yıl belirli sayıda hastalar bunlardan zarar görmektedirler. Bu sebeplerden dolayı Lawrence (1992) tarafından 1980 yılından sonra bilgisayarlı teşhis sistemleri geliştirilmeye başlanmıştır.

Üç aşamadan oluşan bilgisayarlı teşhis sistemlerinin başında ilk olarak mamogramların görüntüsünün iyileştirildiği ön işleme aşaması, ikincisi kanser belirtilerini bölütleme aşaması ve son olarak belirtilerin kanserli olup olmadıklarını yakalayan tümör algılama derecesidir.

#### 3.4.1. Seçici ortalama yöntemleri ile yumuşatma

Bu metotlarda temel yapı piksellerin komşuluğuna dayanmaktadır. Bu komşuluk biçimleri (pencereler)  $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$ ,  $7 \times 7$  vb. biçiminde olmaktadır.



Şekil 3.3. Komşuluklar (Nagao, 1979).

$f(x, y)$  görüntüsü üzerindeki komşuluk ortalaması ile yumuşatma işleminde;

$W$  :  $(x, y)$  pikselinin komşuluğu ( $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$  vb. biçimindeki pencere)

$a(m, n)$  : pencere unsurları

$g(x, y)$  : komşuluk ortalaması alınmış görüntü olmak üzere:

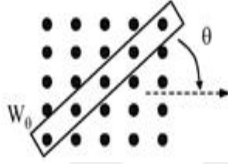
$$g(x, y) = \sum_{neW} \sum_{meW} a(m, n) f(x-m, y-n)$$

şeklindedir. Burada  $N_w$  ifadesi pencere içerisindeki piksellerin sayısını gösterecek olursa

$$g(x, y) = \frac{1}{N_w} \sum_{neW} \sum_{meW} f(x-m, y-n)$$

biçiminde meydana gelmekte ve her bir piksel değeri kendi komşuluğunun ortalaması ile değiştirilir.

Yumuşatma işleminin bir çeşidi olan yönsel yumuşatma sisteminde ise pencereye bir  $\theta$  açısı kadar yön verilerek işlem uygulanır.



Şekil 3.4. Yönsel yumuşatma penceresi (Nagao, 1979).

Bu işlemde elde edilen görüntüsünü  $g(x, y : \theta)$  şeklinde gösterecek olursak:

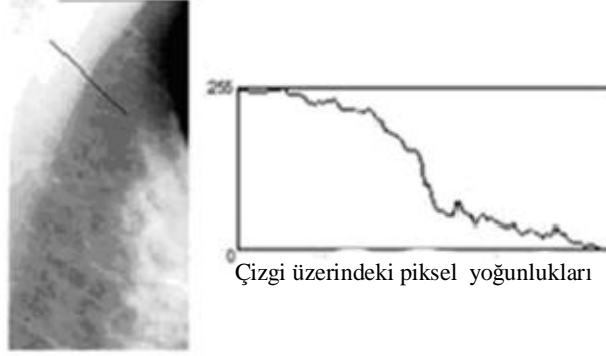
$$g(x, y : \theta) = \frac{1}{N_\theta} \sum_{neW} \sum_{meW} f(x-m, y-n)$$

biçiminde yazılabilir. Yumuşatma işleminin en önemli sorunlarının başında gelen ve önemli nedenlerinden biri olan yumuşatma işlemi, yumuşatmada görüntü işlemi yapılırken görüntü üstündeki kenarların zarar görmesidir. Kenar görüntüsünün insan veya bilgisayarla algılanması için önemli bir etken oluşturmasından dolayı bunların algıda yok olması problem durumu oluşturabilir (Nagao, 1979).

### 3.4.2. Kenar tanımlama

Kenar, birbirinden değişik yüzeylerin yan yana gelmesiyle oluşur. Cisimlerin ifade edilmesinde kenarın mühim bir yeri bulunmaktadır. Sayısal görüntülerin

üstündeki gravite ölçütlerinin aniden çoğaldığı ya da azaldığı yerler kenarlar olarak ifade edilmektedir.



Şekil 3.5. Mamogram üzerindeki bir grup pikselin yoğunluk değerleri (Nagao, 1979).

Birinci türev oranı bize kenar noktaları üstündeki eğimi verir. Böylelikle bir  $f(x)$  sinyalinin bir noktadaki hızlı bir şekilde farklılaşması onun gradyant vektörü yönündedir. Böylelikle kenar belirtme işleminin içindeki fonksiyonun gradyantı ( $\nabla f(x)$ ) ya da  $\text{Grad}(f(x))$  hesap edilmelidir. Bir  $f(x, y)$  şekli üzerinde gradyant kenar belirtme işleminde yatay ve dikey kenarlar aşağıda belirtilen gradyant vektörler aracılığıyla bulunmaktadır.

$$G_x = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 w_x(i, j) f(x+i, y+j)$$

$$G_y = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 w_y(i, j) f(x+i, y+j)$$

Burada  $W_x$  yatay türevlenme süzgeci,  $W_y$  ise dikey türevlenme süzgeci olarak karşımıza çıkmaktadır.

$$G_x = f(x, y+1) - f(x, y)$$

$$G_y = f(x, y) - f(x+1, y)$$

olacaktır. Bu  $W_x$  ve  $W_y$  süzgeçleri içindeki oranların işleme alınması ve değiştirilmesiyle farklı kenar ayırt etme biçimleri ortaya çıkmaktadır.

### 3.4.3. Sağ ve sol göğsün karşılaştırılması

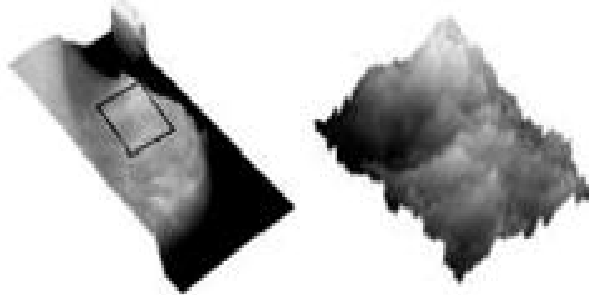
Sağ ve sol göğsün karşılaştırılması hususu Geiger tarafından ilk kez geliştirilmiştir ve bu sistemde sağ ve sol göğsün yapısındaki simetrisine bakılmaktadır (Yin ve Giger, 1993). Daha çok sağ ve sol göğüsler şekil olarak aynıdır. Bu sistem kanserli hücrelerin bu simetriyi değiştireceği düşüncesini oluşturmaktadır. Sağ ve sol göğüslerin görüntü esnasındaki açı değişkenliklerin yok edilmesi bu düşüncenin kullanılması için gerekmektedir. Mamogram üstündeki gri düzey eşikleme muamelesinden sonra sağ ve sol göğüs lineer olmayan çıkarma yöntemi kullanılarak çıkan sonuç ile kullanılır (Yin ve Giger, 1993).



Şekil 3.6. Sağ ve sol göğsün karşılaştırılma anında görülen farklılık örneği (Yin, ve Giger, 1993.)

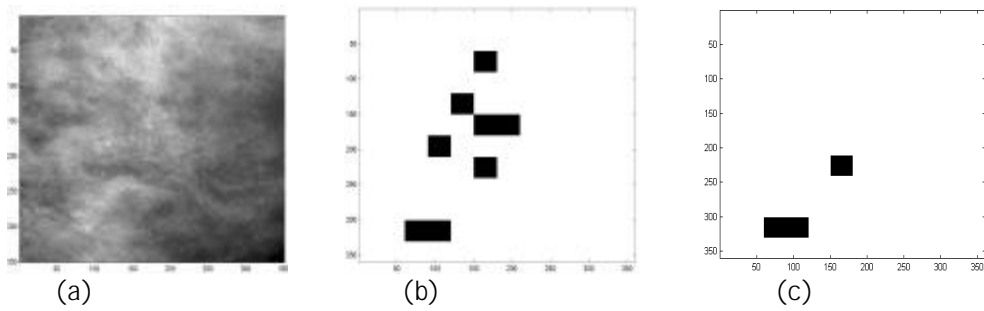
### 3.4.4. Doku çözümlemesi

İlk kez Undrill tarafından, mamogramlar üstündeki kuşku kitlelerin saptanması için doku analizi kullanılmıştır (O'doherty). Nesne yüzeylerinin ana özelliklerinin başında gelen doku, görüntü alanındaki görüntü elemanlarının bir araya gelme sistemi olarak ifade edilmektedir. Doku bu durumda, bir komşuluk içindeki görüntü unsurlarının gri düzeylerinin farklı istatistik oranlarındaki özellikleriyle anlatılabilir. Kanser hücresinin derecesine doku özelliğinden yararlanılarak ulaşılabilir.



Şekil 3.7. Bir mamogram kesiti üzerindeki doku örneği

Tuceryan ve Jain (1993), dokunun net ve matematiksel bir tanımı yapılmamasının yanında üstünde en fazla durulan ve tartışma konularının başında geldiğini belirtmişlerdir. Bir görüntünün dokusal farklılıkları ton değişimlerinin uzaysal dağılımı hususunda bilgi arz ettiğinden dolayı ton kavramı önem teşkil etmektedir. Ton anlamı, gölge içindeki piksellerin gravitesidir. Farklı kavramla bir yerin dokusu, o bölgenin etrafındaki ton değerlerin uzamsal dağılımının şeklidir. Doku çözümü yöntemi mamogram görüntüsü üstünde ön işleme basamağı aplikasyon sonrasında net bir şekilde neticeler verebilmektedir. Daha çok bu yöntem sıralı bir şekilde kitlelerin saptanmasında kullanılmaktadır. Bu biçimde yıldız yapısındaki kitleler ile düzgün biçimde olan kitlelerin birbirinden ayırd edilmesi sırasında en net neticeleri vermemektedir (O'doherty). Dolayısıyla doku analizi mamogram görüntüsüne en iyi yardımcı metodudur.



Şekil 3.8. a) Orijinal mamogram doku parçası, b) Yapay sinir ağı algılama çıktısı, c) Bulanık mantık algılama çıktısı. (Woods ve Bowyer, 1996.)

## 4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

### 4.1. $Z_3$ Cismi Üzerinde 2D CA'ların Temsili Matrislerinin Elde Edilişi

$Z_3$  cismi üzerinde 2D CA'lara literatürde henüz rastlanmamıştır. (Şiap ve ark., 2009).  $Z_3$  cismi üzerinde bazı özel kurallarla 2D CA'ların karakterizasyonları ile ilgili bir çalışmayı bildiri olarak sunmuşlardır. Bu çalışmada 2460N ve 2460P özel kuralın periyodik ve sıfır sınır şartı altında karakterizasyonu incelemiştir (Akın ve ark., 2009).  $Z_3$  cismi üzerinde CA'ların özel bir hybrid dönüşümünün temsili matrisinin en genel halini vermişlerdir.

Bu tezde,  $Z_3$  cismi üzerinde matris cebirleri kullanılarak 2-boyutlu periyodik sınır şartı ve sıfır sınır şartı altındaki bazı özel kurallarla üretilen sonlu lineer CA'ların temsili matrisleri elde edilmektedir.

İlk olarak  $Z_3$  cismi üzerinde CA'nın tanımı verilecektir. Daha sonra 2460N ve 2460P'nin periyodik ve sıfır şartlar altında temsili matrisleri incelenip genel bir formül elde edilecektir.

### 4.2. Kural 2460 Tarafından Üretilen Temsili Matrislerin Elde Edilişi

Bu tezin bu bölümünde Kural 2460 tarafından üretilen  $Z_3$  üzerindeki 2D CA'ların periyodik ve sıfır sınır şartı altında temsili matrisleri incelenip genel durumu ifade edilecektir. İki boyutlu hücresele dönüşümlerin temsili matrisinin nasıl bulunacağını  $Z_2$  üzerinde 2D CA'ların temsili matrisleri bazı özel kurallar için genellerken ayrıntılı olarak gösterilmiştir. Şimdi  $Z_3$  üzerinde bazı özel kurallar için 2D CA'ların temsili matrisleri elde edilip, genel durumu ifade edilecektir.

Bu kısımda, Kural 2460'ın temsili matrisi sıfır sınır şartı ve periyodik sınır şartı altında incelenip bu durumlarda genelleme yapılacaktır. Bunu yapmadan önce ilk olarak Kural 2460'ı ifade edelim.

$$f_{2460N}(X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{31}, X_{32}, X_{33}) = a X_{12} + b X_{23} + c X_{32} + d X_{21} \pmod{3}$$

Çizelge 4.1. Kural 2460N

|            |            |            |
|------------|------------|------------|
| $X_{11}$   | $a X_{12}$ | $X_{13}$   |
| $d X_{21}$ | $X_{22}$   | $b X_{23}$ |
| $X_{31}$   | $c X_{32}$ | $X_{33}$   |

Çizelge 4.2. Kural 2460

|            |             |          |
|------------|-------------|----------|
| 729        | <u>2187</u> | 6561     |
| <u>243</u> | 1           | <u>3</u> |
| 81         | <u>27</u>   | 9        |

Yukarıdaki Çizelge 4.2.'de altı çizili kutucukların içindeki rakamların toplamı Kural 2460'ı verir. Kural 2460 = Kural 3+Kural 27+Kural 243+Kural 2187 olarak yazılır ve dikkat edilecek olursa baklava dilimi şeklinde olduğu ortaya çıkmaktadır. Kural 2460N'ye karşılık gelen temsili matris bulunabilir. Bunu yaparken m (sıra) ve n (sütun)'lara çeşitli değerler verilerek onların temsili matrislerini sıfır sınır şartı altında bulunacaktır. Bir kaç örnek verdikten sonra 2460N durumu en genel halde ifade edilecektir. Daha sonra 2460P'ye karşılık gelen temsili matris, yine m (sıra) ve n (sütun)'lara değerler verilerek periyodik sınır şartı altında bulduktan sonra 2460P'nin de en genel halde temsili matrisi ifade edilecektir. İlk olarak daha önceki kesimde  $Z_2$  için verdiğimiz bazı teoremleri  $Z_3$  içinde verelim.

**Teorem 4:** Bütün başlangıç kurallarının (1, 3, 9, 27, 81, 273, 729, 2460, 6561) bir sonraki durumu aşağıdaki gibidir:

$$\text{Kural 1} \quad : [X_{t+1}] = a_0[X_t]$$



$$\text{Kural 2} \quad : [X_{t+1}] = a_1[X_t] [T_2]$$

$$\text{Kural 9} \quad : [X_{t+1}] = a_2[T_1] [X_t] [T_2]$$

$$\text{Kural 27} \quad : [X_{t+1}] = a_3[T_1] [X_t]$$

$$\text{Kural 81} \quad : [X_{t+1}] = a_4[T_1] [X_t] [T_1]$$

$$\text{Kural 243} \quad : [X_{t+1}] = a_5[X_t] [T_1]$$

$$\text{Kural 279} \quad : [X_{t+1}] = a_6[T_2] [X_t] [T_1]$$

$$\text{Kural 2187} \quad : [X_{t+1}] = a_7[T_2] [X_t]$$

$$\text{Kural 6561} \quad : [X_{t+1}] = a_8[T_2] [X_t] [T_2]$$

Daha önce yapılan çalışmalarda olduğu gibi hücrelerin satır ve sütun bağımlılıklarını elde etmek için;

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{temel matrisleri kullanırız.}$$

$$\text{İspat: } t \text{ zamandaki bir konfigürasyon } [X_t] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ şeklinde olsun.}$$

( $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$  0,1 veya 2 değerlerini alır).

a)  $[X_{t+1}] = a_0[X_t]$  ye eşit olduğu durum Kural 1 olarak bilinir. Yani; bunun anlamı C.A. dönüşümünde  $a_0$  hariç diğer bütün katsayılar 0'dır.

$$\text{Kural 1: } [X_{t+1}] = a_0 [X_t] = a_0 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 a_{11} & a_0 a_{12} & a_0 a_{13} \\ a_0 a_{21} & a_0 a_{22} & a_0 a_{23} \\ a_0 a_{31} & a_0 a_{32} & a_0 a_{33} \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

b)  $[X_t]$ 'yi  $[T_2]$  ile soldan ve  $a_1$  ile sağdan çarparak bir CA'nın  $(t+1)$ . zamandaki durumunu elde edilir ki bu Kural 3 olarak bilinir.

$$\text{Kural 3: } [X_{t+1}] = a_1[X_t] [T_2]$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= a_1 \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_{12} & a_1 a_{13} & 0 \\ a_1 a_{22} & a_1 a_{23} & 0 \\ a_1 a_{32} & a_1 a_{33} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

c)  $[X_t]$ 'yi  $[T_1]$  ile sağdan ve  $a_3$ 'ü de  $[T_1]$  ile soldan çarparak bir CA'nın  $(t+1)$ .zamandaki durumunu elde ederiz ki bu Kural 27 olarak bilinir.

$$\begin{aligned}
\text{Kural 27: } [X_{t+1}] &= a_3 [T_1] [X_t] = a_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&= a_3 \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 a_{21} & a_3 a_{22} & a_3 a_{23} \\ a_3 a_{31} & a_3 a_{32} & a_3 a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

d)  $[X_t]$  yi  $a_2 [T_1]$  ile önce soldan ve daha sonra sağdan  $[T_2]$  ile soldan çarparak bir CA'nın  $(t+1)$ .zamandaki durumunu elde ederiz ki bu Kural 9 olarak bilinir.

$$\text{Kural 9: } [X_{t+1}] = a_2 [T_1] [X_t] [T_2]$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 a_{22} & a_2 a_{23} & 0 \\ a_2 a_{21} & a_2 a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

benzer şekilde başka durumlarda gösterilebilir.

**Teorem 5:** İkinci bir kural ile oluşturulan bir CA'nın bir sonraki geçiş durumu ilgili başlangıç kurallarının matrislerinin mod3'e göre toplamı olarak temsil edilebilir.

Teoremin ispatı  $Z_2$  üzerindeki gibidir. Örneğin; Kural 4, Kural 1 ve Kural 3'ün mod3'e göre toplamı olarak yazılırsa CA'nın bir sonraki geçiş durumu;

Kural 4=Kural 1+Kural 3,  $[X_{t+1}] = a_0 [X_t] + a_1 [X_t] [T_2]$  olarak temsil edilir.

Benzer olarak Kural 2460'ı Kural 3, Kural 27, Kural 243 ve Kural 2187 'in mod3'e göre toplamı olarak yazabiliriz. Bu durumda CA'nın bir sonraki geçiş durumu;

Kural 2460 = Kural 3+Kural 27+Kural 243+Kural 2187 olarak yazılır ve

$$\begin{aligned} [X_{t+1}] &= a_1 [X_t][T_2] + a_3 [T_1][X_t] + a_5 [X_t][T_1] + a_7 [T_2][X_t] \\ &= [X_t][a_5 T_1 + a_1 T_2] + [a_3 T_1 + a_7 T_2][X_t]. \end{aligned}$$

Bu tez boyunca 2460 kuralını tanımlamak için, kolaylık amacıyla  $a_7 = a$ ,  $a_1 = b$ ,  $a_3 = c$ ,  $a_5 = d$  olarak alınacaktır. Bu durumda;

$$\begin{aligned} [X_{t+1}] &= [X_t][dT_1 + bT_2] + [cT_1 + aT_2][X_t] \\ &= [X_t][S_1] + [S_2][X_t] \end{aligned}$$

(burada  $[S_1] = [dT_1 + bT_2]$  veya  $[S_2] = [cT_1 + aT_2]$  olarak kabul edilir).

Burada  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  e  $Z_3$  şeklindedir. Örneğin 3 x 3 tipinde 2D sonlu CA konfigürasyonu

$$X_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde olsun.

Şimdi bu konfigürasyonun Kural 4 ile üretilen 2D sonlu CA altındaki görüntüsünü yazalım.

Kural 4 = Kural 1+Kural 3,

$$\begin{aligned} [X_{t+1}] &= a_0 [X_t] + a_1 [X_t][T_2] \\ &= a_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a_0 \begin{pmatrix} 0 & a_0 & 0 \\ a_0 & 0 & a_0 \\ 0 & a_0 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ a_1 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & a_0 \\ a_0 & a_1 & a_0 \\ a_1 & a_1 + a_0 & a_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak temsil edilir.  $(X_t)_{3 \times 3}$  sonlu konfigürasyonunun kural 2460 vasıtasıyla üretilen 2D sonlu CA altındaki görüntüsü;

$$\begin{aligned} [X_{t+1}] &= [X_t][dT_1 + bT_2] + [cT_1 + aT_2][X_t] \\ &= [X_t][S_1] + [S_2][X_t]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left[ d \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ b & 0 & d \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d \\ 0 & d+b & 0 \\ b & b & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Bu teoremler verildikten sonra yukarıda bahsettiğimiz Kural 2460'ın periyodik sınır şartı ve sıfır sınır şartı altında temsili matrislerinin en genel hali aşağıda incelenmiştir. Öncelikle ilk olarak sıfır sınır şartı altında temsili matrislerin elde edilmesini inceleyelim.

### 4.3. 2460N Kuralı İle Üretilen Sonlu 2D CA'nın Temsili Matrisi

Kural 2460N'nin temsili matrisinin en genel halini bulmak için daha önce de belirttiğimiz gibi  $m$  ve  $n$  durumlarının bazı özel durumlarını incelenecektir. Şimdi daha önceki kesimlerde olduğu gibi konunun daha iyi anlaşılabilmesi için  $m$  ve  $n$  nin bazı değerleri için birkaç örnek verilecektir.

**Örnek 4.3.1:**  $m$  ve  $n$  sayılarını 2 den büyük durumlar için inceleyelim.  $m=3$  ve  $n=3$  olsun. İlk önce sıfır sınır şartı altında 3 x3 tipinde hücrelerden oluşmuş 2D sonlu CA'nın konfigürasyonu çizelge 4.3.'teki gibi düzenlenebilir. Daha sonra bu hücrelere 2460N kuralı uygulanırsa,

Çizelge 4.3. 3x3 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

|   |          |          |          |   |
|---|----------|----------|----------|---|
| 0 | 0        | 0        | 0        | 0 |
| 0 | $X_{11}$ | $X_{12}$ | $X_{13}$ | 0 |
| 0 | $X_{21}$ | $X_{22}$ | $X_{23}$ | 0 |
| 0 | $X_{31}$ | $X_{32}$ | $X_{33}$ | 0 |
| 0 | 0        | 0        | 0        | 0 |

$T$  dönüşümü altında yeni bir konfigürasyon elde edilir ve bu konfigürasyonun hücreleri aşağıdaki gibidir:

$$cx_{21} + bx_{12} = y_{11}$$

$$dx_{11} + cx_{22} + bx_{13} = y_{12}$$

$$dx_{12} + cx_{23} = y_{13}$$

$$ax_{11} + cx_{31} + bx_{22} = y_{21}$$

$$ax_{12} + dx_{21} + cx_{32} + bx_{23} = y_{22}$$

$$ax_{13} + dx_{22} + cx_{33} = y_{23}$$

$$ax_{21} + bx_{32} = y_{31}$$

$$ax_{22} + dx_{31} + bx_{33} = y_{32}$$

$$ax_{23} + dx_{32} = y_{33}$$

O halde doğal taban matrislerini kullanarak bunlara karşılık gelen  $T$  dönüşümleri bulunur ve 2460N'ye karşılık gelen temsili matris elde edilir.

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \\ a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ 0 \\ a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \\ b \\ d \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix},$$

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \\ 0 \\ d \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Önceki bölümde olduğu gibi bu sütun matrisleri yan yana yazılırsa temsili matris,

$$T_{R_{2460N}} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & b & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & d & 0 & b & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & d & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & d & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & d & 0 \end{pmatrix}_{9 \times 9} = \begin{pmatrix} S_3(b,d) & cI_3 & O_3 \\ aI_3 & S_3(b,d) & cI_3 \\ O_3 & aI_3 & S_3(b,d) \end{pmatrix}_{9 \times 9}$$

şeklinde bulunur.

#### 4.4. 2460P Kuralı İle Üretilen Sonlu 2D CA'nın Temsili Matrisi

Kural 2460P'nin temsili matrisinin en genel halini bulmak için yukarıda belirttiğimiz gibi  $m$  ve  $n$  durumlarının bazı özel durumlarını inceleyelim: Şimdi daha önceki kesimlerde olduğu gibi konunun daha iyi anlaşılabilmesi için  $m$  ve  $n$  nin bazı değerleri için birkaç örnek verelim.

**Örnek 4.4.1:**  $m = 3$  ve  $n = 3$  olsun. Burada ilk önce periyodik sınır şartı altında  $3 \times 3$  tipinde hücrelerden oluşmuş 2D sonlu CA'ya karşılık gelen temsili matrisi bulalım.

Çizelge 4.4.  $3 \times 3$  tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

|          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| $X_{33}$ | $X_{31}$ | $X_{32}$ | $X_{33}$ | $X_{31}$ |
| $X_{13}$ | $X_{11}$ | $X_{12}$ | $X_{13}$ | $X_{11}$ |
| $X_{23}$ | $X_{21}$ | $X_{22}$ | $X_{23}$ | $X_{21}$ |
| $X_{33}$ | $X_{31}$ | $X_{32}$ | $X_{33}$ | $X_{31}$ |
| $X_{13}$ | $X_{11}$ | $X_{12}$ | $X_{13}$ | $X_{11}$ |

Çizelge 4.4.'teki  $(X_t)_{3 \times 3}$  konfigürasyonunun her bir hücresine 2460P kuralı ile

üretilen 2D sonlu CA uygulanırsa yeni konfigürasyonun hücreleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$ax_{31} + dx_{13} + cx_{21} + bx_{12} = y_{11}$$

$$ax_{32} + dx_{11} + cx_{22} + bx_{13} = y_{12}$$

$$ax_{33} + dx_{12} + cx_{23} + bx_{11} = y_{13}$$

$$ax_{11} + dx_{23} + cx_{31} + bx_{22} = y_{21}$$

$$ax_{12} + dx_{21} + cx_{32} + bx_{23} = y_{22}$$

$$ax_{13} + dx_{22} + cx_{33} + bx_{21} = y_{23}$$

$$ax_{21} + dx_{33} + cx_{11} + bx_{32} = y_{31}$$

$$ax_{22} + dx_{31} + cx_{12} + bx_{33} = y_{32}$$

$$ax_{23} + dx_{32} + cx_{13} + bx_{31} = y_{33}$$

Doğal taban matrislerini kullanarak bunlara karşılık gelen  $T$  dönüşümleri bulunarak 2460P kuralı ile üretilen 2D sonlu CA'ya karşılık gelen temsili matris aşağıdaki gibi elde edilir. Bu sütun matrisleri sırasıyla,

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ b \\ a \\ 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} b \\ d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ b \\ 0 \\ 0 \\ a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ b \\ d \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix},$$

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \\ b \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \\ 0 \\ d \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



biçimindedir ve bu sütun matrisleri yan yana eklenerek;

$$T_{R_{2460N}} = \begin{pmatrix} 0 & b & d & c & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ d & 0 & b & 0 & c & 0 & 0 & 0 & a \\ b & d & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & 0 & b & d & c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & d & 0 & b & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & d & 0 & 0 & 0 & c \\ c & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & b & b \\ 0 & c & 0 & 0 & a & 0 & d & 0 & b \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & a & b & d & 0 \end{pmatrix}_{9 \times 9} = \begin{pmatrix} S_3^*(b,d) & cI_3 & aI_3 \\ aI_3 & S_3^*(b,d) & cI_3 \\ cI_3 & aI_3 & S_3^*(b,d) \end{pmatrix}_{9 \times 9}$$

temsili matrisi bulunur.

**Örnek 4.4.2:**  $m = 2$  ve  $n = 2$  durumunu göz önüne alalım. Bu halde periyodik sınır şartlı 2D sonlu CA konfigürasyonunu ifade eden çizelge aşağıdaki gibidir:

Çizelge 4.5. 2x2 tipinde hücrelerden oluşmuş bir konfigürasyon

|          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|
| $X_{22}$ | $X_{21}$ | $X_{22}$ | $X_{21}$ |
| $X_{12}$ | $X_{11}$ | $X_{12}$ | $X_{11}$ |
| $X_{22}$ | $X_{21}$ | $X_{22}$ | $X_{21}$ |
| $X_{12}$ | $X_{11}$ | $X_{12}$ | $X_{11}$ |

Eğer Çizelge 4.5.'teki periyodik sınır şartlı  $(X_t)_{2 \times 2}$  konfigürasyonunun her bir hücresine 2460P kuralı ile üretilen 2D sonlu CA uygulanırsa elde edilen yeni konfigürasyonun hücreleri aşağıdaki gibidir:

$$ax_{21} + dx_{12} + cx_{21} + bx_{12} = y_{11}$$

$$ax_{22} + dx_{11} + cx_{22} + bx_{11} = y_{12}$$

$$ax_{11} + dx_{22} + cx_{11} + bx_{22} = y_{21}$$

$$ax_{12} + dx_{21} + cx_{12} + bx_{21} = y_{22}$$

Doğal taban matrisleri kullanılarak bunlara karşılık sütun matrisleri;

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b+d \\ a+c \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+d \\ 0 \\ 0 \\ a+c \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ 0 \\ 0 \\ b+d \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a+c \\ b+d \\ 0 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Buradan elde edilen temsili matris;

$$T_{R_{2460P}} \begin{pmatrix} 0 & b+d & a+c & 0 \\ b+d & 0 & 0 & a+c \\ a+c & 0 & 0 & b+d \\ 0 & a+c & b+d & 0 \end{pmatrix}_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} (b+d)I & (a+c)I_2 \\ (a+c)I_2 & (b+d)I \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

olarak bulunur.

## 5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

### 5.1. Sonuçlar

CA birçok bilim dalında incelenen bir kavramdır. Fizik ve biyoloji alanında ve bilgisayar bilimleri gibi birçok alanda olayları modellemek için CA kavramı farklı yönleriyle incelenmiştir. Örneğin hücrel dönüşümler karmaşık sistemlerin davranışlarını incelemek için kullanılırlar. CA son yıllarda bilgisayar biliminde kullanılmaya başlandı (Choudhury ve ark., 2004). Sistem dizayncıları yazılım tabanlarından çeşitli karmaşık fonksiyonları silikon tabanlı donanım bloklarına yerleştirmeyi denemektedirler.

Paralel işleyen mimariler talebi hızlı hesaplamalara daha önce görülmemiş artan ihtiyaç ile büyük önem kazanmıştır. Bunun sonucu olarak, VLSI'da kolaylıkla uygulanabilen paralel işleyen mimariler 2D CA'ların kullanımını teşvik etti (Khan ve ark., 1997). Bu çalışmada daha çok CA kavramının bazı özel lokal kurallar tarafından sıfır sınır şartı ve periyodik sınır şartı altında üretilen temsili matrislerin elde edilişi incelenmiştir.

Son yıllarda popüler olan CA'nın karakteristik özellikler için birçok makale yazılmıştır (Khan ve ark., 1997; Choudhury ve ark., 2004; Siap ve ark., 2009).

### 5.2. Öneriler

Bu çalışmada genellikle  $Z_2$  ve  $Z_3$  cisimleri üzerinde 2D CA'ların temsili matrislerinin elde edilişi üzerinde durulmuştur. Bu temsili matrisler bazı özel kurallar için sıfır sınır şartı ve periyodik sınır şartı altında incelenmiştir. İleriye dönük olarak, CA temsili matrislerin elde edilişi farklı cisim ve halkalar için tekrar incelenebilir. Çalışmamda hücrel dönüşümlerdeki matrislerde işlem yapılırken bulduğumuz matrisin tersi ile işleme koyduğumuzda bize başlangıç matrisini vermek zorundadır. Başlangıç matrisini vermezse matrisimizin doğru olmadığı sonucunu elde ederiz.

## KAYNAKLAR

- CHOUDHURY, P.P. and DIHIDAR, K., 2004. Matrix algebraic formulae concerning some special rules of two dimensional cellular automata, international journal on Information Sciences, Elsevier Publication, Volume 165: 91-101.
- DAS, A.K. and CHAUDHURI, P.P., 1993. Vector space theoretic analysis of additive cellular automata and its applications for pseudo exhaustive test pattern generation, IEEE Trans on Computers 42 (3): 340-352.
- HEDLUND, G.A., 1969. Endomorphisms and automorphisms of full shift dynamical system, Mathematical Systems Theory 3, p.320.
- HOLLAND, T., 1982. So-called interval cancers of the breast, pathologic and radiographic Analysis. Cancer, 49: 2527-2533.
- KHAN, A.R., CHOUDHURY, P.P., DIHIDAR, K., MITRA, S. and SARKAR P., 1997. VLSI architecture of cellular automata machine, Computers Math. Applic, Vol 33: 79-94.
- LAWRENCE, W.B., 1992. Breast imaging current status and future directions, The Radiologic Clinics of North America, W. B. Saunders, Philadelphia, USA.
- NAGAO, M., 1979. Edge Preserving Smoothing Computer Graphics Image Processing, Vol 9: 394-407.
- NEUMANN, J.V., 1996. The theory of self reproducing automata, Univers of Illinois Press Urbana.
- O'DOHERTY, T., Review of the Effective Image Processing Techniques of Mammograms. I.T. Centre, N.U.I., Galway
- PACKARD, N.H., and WOLFRAM, S., 1985. Two dimensional cellular automata, Journal of Statistical Physics, 38 (5/6): 901-946.
- PRIES, W., 1986. A Thanailakis and H.C. Card, Group properties of cellular automata and VLSI Application, IEEE Trans on computers C-35: 1013-1024.
- RIETMAN, E., 1992. Creating artificial life self organization, Winderest.
- SIAP, I., AKIN, H. And SAH, F., 2009. Characterization of two dimensional cellular automata over ternary elds, Journal of the Franklin Institute, 348: 1258-1275.
- TUCERYAN, M. and JAIN, K., 1993. Texture Analysis in Handbook of Pattern Recognition and Computer Vision. World Scientific Publishing Co., River Edge, NJ.
- WOODS, K. and BOWYER, K., 1996. A general view of dedection algorithms, in Proc. 3rd Int. Workshop Digital Mammograhya, 9-12 Haziran, Chicago, s. 385-390.
- YIN, F.F. and GIGER, M.L., 1993. Comparison of bilateralsubstruction and single image processing techniques in the computerised detection of mammographic masses, Investigative Radiology.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Mihriban İLHANLI BİRGÜL  
Uyruğu : T.C  
Doğum Yeri ve Tarihi : Akhisar-05.10.1990  
Telefon : 05446010271  
Faks :  
e-mail : İlhanlimihriban@mynet.com

### EĞİTİM

| Derece        | Adı  | İlçe/ İl                 | Bitirme Yılı |
|---------------|--|--------------------------|--------------|
| Lise          | Namık Kemal Lisesi                                   | Yenişehir/<br>DİYARBAKIR | 2007         |
| Üniversite    | Harran Üniv. Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü | Haliliye/<br>ŞANLIURFA   | 2014         |
| Yüksek Lisans | Harran Üniv. Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü | Haliliye /<br>ŞANLIURFA  | 2018         |

### İŞ DENEYİMLERİ

| Yıl  | Kurum | Görevi              |
|------|-------|---------------------|
| 2016 | MEB   | Ücretli Öğretmenlik |
| 2017 | MEB   | Ücretli Öğretmenlik |
| 2018 | MEB   | Ücretli Öğretmenlik |

**UZMANLIK ALANI:** Matematik

**YABANCI DİLLER :** İngilizce

