T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİÜTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HİPERBOLİK KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SONLU FARK ŞEMASI METODUYLA ÇÖZÜMÜ

Mustafa CAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2018

T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİÜTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HİPERBOLİK KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SONLU FARK ŞEMASI METODUYLA ÇÖZÜMÜ

Mustafa CAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2018

Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MODANLI danışmanlığında Mustafa CAN'ın hazırladığı **"Hiperbolik Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sonlu Fark Şeması Metoduyla Çözümü"** konulu bu çalışma 05/06/ 2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

		İmza
Danışman	: Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MODANLI	………...…………………
Üye	: Doç. Dr.Ali AKGÜL	………...…………………
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Fatih ÖZBAĞ	………...…………………

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini onaylarım.

Prof. Dr. H. Murat ALĞIN
Enstitü Müdürü

Bu çalışma HÜBAK/DPT/TÜBİTAK Tarafından Desteklenmiştir.
Proje No:

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HİPERBOLİK KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SONLU FARK ŞEMASI METODUYLA ÇÖZÜMÜ

Mustafa CAN

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MODANLI
Yıl: 2018, Sayfa: 47

Bu çalışmada ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin başlangıç-sınır değer problemi

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x) + u_x(t,x) + f(t,x); & 0 < x < \pi, 0 < t < 1 \\ u(0,x) = \varphi_1(x), u_t(0,x) = \varphi_2(x), u(t,0) = u(t,1) = 0; & 0 \le x \le \pi, 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

incelendi. Bu hiperbolik kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü bilinmesine karşın, sonlu fark şeması metodunun güvenilirliğinin test edilmesi önemlidir. Bu hiperbolik kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü bulunup bu tam çözüm için kararlılık kestirimleri verildi. Bunun için yukarıda verilen denklemin başlangıç değer koşulları kullanılarak birinci ve ikinci mertebeden diferansiyel fark şemaları oluşturuldu. Bu diferansiyel fark şeması için kararlılık kestirimleri yapıldı. Bu problemin yaklaşık çözümü için birinci ve ikinci mertebeden tam-doğruluk diferansiyel fark şeması yaklaşımı uygulanmaktadır. Bu başlangıç-sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için küçük parametrelere ($\tau = T/N\ (N > 0)\ ve\ h = L/M\ (M > 0)$) dayanan ızgara noktaları (=*grid points*) ailesinin $w(\tau,h) = [0,T]_\tau \times [0,L]_h$ kümesi kullanıldı. Hiperbolik kısmi diferansiyel denklemin sonlu fark şeması metodu ile yaklaşık çözümü elde etmek için Gauss eliminasyon metodu uygulandı. Örnek kısmi diferansiyel denklemlere Laplace ve Fourier transform metotları uygulandı. Bu diferansiyel fark şemasının çözümü için teorik ifadeler nümerik deneylerin sonuçlarıyla da desteklendi. Matlab programı kullanılarak tam ve nümerik çözümler karşılaştırılarak doğruluk kestirimleri açısından güzel sonuçlar bulundu. Sonuç olarak, sonlu fark şeması metodu uygulanılarak çalışılan hiperbolik kısmi diferansiyel denklemin nümerik çözümü için elverişli sonuçlar bulunup hata analizi yapıldı.

ANAHTAR KELİMELER: Sonlu fark şeması metodu, hiperbolik kısmi diferansiyel denklem, kararlılık kestirimi, başlangıç-sınır değer problemi, nümerik çözümler.

ABSTRACT

MSc Thesis

SOLUTION of PARTIAL HYPERBOLIC DIFFERENTIAL EQUATIONS with FINITE DIFFERENCE SCHEME METHOD

Mustafa CAN

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asisst. Prof. Dr. Mahmut MODANLI
Year: 2018, Sayfa: 47

In this study, second order partial differential equations are investigated. We studied the following initial-boundary value problem:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x) + u_x(t,x) + f(t,x), & 0 < x < \pi, 0 < t < 1, \\ u(0,x) = \varphi_1(x), u_t(0,x) = \varphi_2(x), u(t,0) = u(t,1) = 0, & 0 \le x \le \pi, 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

Even though the solution of this hyperbolic partial differential equation is already known, it is important to test reliability of finite difference scheme method. For this purpose, first and second order difference schemes were contructed by using initial value conditions given above. Stability theorem was obtained for this difference scheme. The first and second order accuracy difference scheme approach is applied for the approximate solution of this problem. In order to solve this initial-boundary value problem approximately, $w(\tau,h) = [0,T]_\tau \times [0,L]_h$, set of grid points family, which is based on small parameters ($\tau = T/N\ (N > 0)\ and\ h = L/M\ (M > 0)$), is used. Gauss elimination method is applied to obtain an approximate solution to hyperbolic partial differential equation with finite difference method. Stability estimates are given for this hyperbolic differential equation. The exact solutions obtained with Laplace and Fourier transform methods are compared with the approximate solution. Theoretical expressions for this difference scheme are supported by results of numerical experiments. Numerical solutions obtained with Matlab program produce decent results in terms of stability estimates. Some examples are given in order to show validity and applicability of the given technique. In conclusion, finite difference method produce convenient results for solving the studied hyperbolic partial differential equation.

KEY WORDS: Finite difference scheme method, hyperbolic partial differential equation, stability estimate, initial-boundary value problem, numerical solution.

TEŞEKKÜR

Tezin konusunun seçiminde, uygulamasında ve çalışmamda yardımlarını esirgemeyen danışman hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MODANLI**'**ya, tez çalışmamda bana yardımcı olan Yüksek Lisans Öğrencisi Bawar Mohammed FARAJ'a ve sınıf arkadaşım Mehmet Emin ÇOBAN'a teşekkür ederim.

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

SİMGELER DİZİNİ

A	*Self-adjoint positive operatör*
L_p	L_p *–uzayı*
$\sum$	*Toplam Sembolü*
$[\,]$	*Kapalı aralık*
$f[a, b]$	*a ve* b *aralığında sınırlı fonksiyonlar kümesi*
R	*Reel Sayılar*
$\Vert\ \Vert$	*Norm*
H	*Hilbert uzayı*
$\Vert\ \Vert_{L_2}$	L_2*normu*

1. GİRİŞ

Kısmi diferansiyel denklemler, fen bilimleri ve mühendisliğin termodinamik, elektromanyetik, elektrodinamik, hidrodinamik, esneklik, akışkan dinamiği, dalga yayılımı, malzeme bilimi gibi birçok bilimdalı için çok önemli bir araçtır. Bu denklemleri çözmek için kullanılan sayısal yöntemlerde, kararlılık problemi büyük bir öneme sahiptir ve büyük ölçüde dikkat çekmiştir. Hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlerin sınır değer problemlerinin çeşitli özelliklerinin incelenmesi, kısmi diferansiyel denklemler için fark şemalarının kararlılığı ve Fourier serilerinin toplamının incelenmesi çalışmalarında Hilbert ve Banach uzaylarında diferansiyel ve fark operatörlerinin pozitiflik özelliğinin oynadığı rol iyi bilinmektedir (Fattorini, 1985; Goldstein, 1985; Ashyralyev ve Sobolevskii, 1994; Ashyralyev ve Sobolevskii 2004; Ashyralyev ve Koksal, 2009; La Sen, 2011; La Sen, 2013; Achour ve Belacel, 2014; Ghorbanalizadeh ve Sawano, 2014). Hilbert ve Banach uzaylarında hiperbolik diferansiyel denklemler için lokal ve lokal olmayan problemlerin çözümüne yönelik bir araç olarak operatörler metodu, çeşitli yazarlar tarafından sistematik olarak geliştirilmiştir (Fattorini, 1985; Goldstein, 1985; Ashyralyev ve Sobolevskii, 2004; Krein, 1971; Vasilev, 1990).

Hiperbolik kısmi diferansiyel denklemi, sinyal analizi, dalga yayılımı, rastgele yürüyüş teorisi gibi uygun bazı problemlerin modellenmesi için önemlidir (Weston ve He, 1993; Banasiak ve Mika,1998 Jordan ve Puri, 1999). Kısmi diferansiyel denklemin üstesinden gelmek amacıyla, tam ve yaklaşık çözümler elde etmek için çeşitli matematiksel yöntemler önerilmiştir. Örneğin, Dehghan ve Shokri radyal tabanlı fonksiyon (Kansa's method) yöntemine dayanan yeni bir nümerik şema önermişlerdir (Dehghan ve Shokri, 2008). Gao ve Chi, lineer olmayan telegraf denklemlerinin çözümü için nümerik bir algoritma geliştirdi (Gao ve Chi, 2007). Biazar, telegraf denklemlerine yaklaşık çözümler elde etmek için varyasyonel iterasyon yöntemini kullandı (Biazar, 2009). Saadatmandi ve Dehghan, telegraf denklemini nümerik olarak çözmek için Chebyshev Tau yöntemini uyguladı (Saadatmandiand ve Dehghan, 2010). Twizell, genişletilmiş kararlılık aralığı ile dalga denklemi için açık fark yöntemini kullanmıştır

(Twizell, 1979). Ashyralyev ve Akat, stokastik hiperbolik ve stokastik telegraf denklemlerinin yaklaşık çözümü için fark yöntemini uygulamışlardır (Ashyralyev ve Akat, 2011; Ashyralyev ve Akat, 2012; Ashyralyev ve Akat, 2013). Köksal, iletim hatlarında ortaya çıkan telegraf denklemlerinin nümerik çözümlerini hesaplamıştır (Koksal, 2011). Hesammeddini ve Asodolahifard telegraf denklemlerin çözümü için Sinc-Collocation metodunu kullanmıştır (Hesammeddini ve Asodolahifard, 2013).

Bu tezde aşağıdaki hiperbolik başlangıç-sınır değer problemi

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x) + u_x(t,x) + f(t,x), \ 0 < x < \pi, \ 0 < t < 1, \\ u(0,x) = \varphi_1(x), \ u_t(0,x) = \varphi_2(x), \ u(t,0) = u(t,1) = 0, \\ 0 \le x \le \pi, \ 0 \le t \le 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

çalışılacaktır. Bu çalışmadaki amaç, hiperbolik kısmi diferansiyel tipteki denklemlerin sınır değer problemlerinin bazı çeşitlerinin kararlı olduğu gösterilecek (Jiwari, 2012) ve hiperbolik kısmi diferansiyel denklemler için bu problemleri çözmede fark şemalarının kararlılığı incelenecektir.

Hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlerin başlangıç-sınır değer problemlerinin analitik çözümleri için Fourier dönüşüm, Laplace dönüşüm ve Fourier seri çözüm yöntemleri ile çözülebileceği bilinmektedir. Şimdi, bu yöntemleri kullanarak kısmi diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerini gösterelim.

Örnek 1.1.

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) + u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) + u(t,x) = 2e^{-t}\sin(x), \ t > 0, \ \ 0 < x < \pi, \\ u(0,x) = sinx, u_t(0,x) = -sinx, \ 0 \le x \le \pi, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \ t \ge 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

denkleminin çözümünü Fourier serisi çözüm metodunu kullanarak elde ediniz.

Çözüm: $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)$ olsun.

Burada $v(t,x)$;

$$\begin{cases} v_{tt}(t,x) + v_t(t,x) + v(t,x) = v_{xx}(t,x), & t > 0, 0 < x < \pi, \\ v(0,x) = sinx, v_t(0,x) = -sinx, & 0 \leq x \leq \pi, \\ v(t,0) = v(t,\pi) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

ve $w(t,x)$;

$$\begin{cases} w_{tt}(t,x) + w_t(t,x) - w_{xx}(t,x) + w(t,x) = 2e^{-t}\sin(x) & t > 0, 0 < x < \pi, \\ w(0,x) = 0, w_t(0,x) = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ w(t,0) = w(t,\pi) = 0, & t \geq 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

dır. Şimdi, (1.3) denkleminin çözümü için

$$v(t,x) = T(t)X(x)$$

değişkenlere ayırma yöntemini kullanalım. Bu son denklem ve türevleri (1.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$T''(t)X(x) + T'(t)X(x) + T(t)X(x) = T(t)X''(x)$$

olur. Buradan da

$$\frac{T''(t) + T'(t) + T(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \tag{1.5}$$

elde edilir. (1.2) denklemindeki başlangıç değer koşullarından

$$\left.\begin{matrix} v(t,0) = T(t)X(0) = 0 \\ v(t,\pi) = T(t)X(\pi) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow X(\pi) = X(0) = 0$$

yazılır. (1.5) denkleminden

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, 0 < x < \pi, \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Sturm-Liouville problemi bulunur. $X \not\equiv 0$ olması durumunda (x,λ)'ya bağlı çözüm elde edilir. (1.6) denklemininin karakteristik denklemi ve kökleri

$$m^2 - \lambda = 0, m^2 = \lambda \Rightarrow m = \mp i\sqrt{-\lambda} \quad (\lambda < 0)$$

şeklindedir. Eğer $\lambda \geq 0$ ise (1.6) sınır değer problemi $X(x) = 0$ aşikar çözümüne sahip olur. λ<0 için (1.6) sınır değer probleminin aşikar olmayan çözümleri

$$X(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{-\lambda}\, x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{-\lambda}\, x\right)$$

dir. Sınır değer koşulları kullanılırsa

$$X_k(x) = \sin(kx), \ \ \lambda = -k^2, \qquad k = 1,2, \ldots$$

çözümü elde edilir. (1.5) ifadesindeki diğer denklem

$$T_k''(t) + T_k'(t) + (k^2+1)T_k(t) = 0 \tag{1.7}$$

dır. (1.7) denkleminin karakteristik denklemi

$$m^2 + m + (k^2 + 1) = 0$$

olup, kökleri

$$m_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{1 - 4(k^2 + 1)}}{2} = \frac{-1 \mp \sqrt{1 - 4k^2 - 4}}{2}$$

$$= \frac{-1 \mp i\sqrt{4k^2 + 3}}{2} = -\frac{1}{2} \mp \frac{i\sqrt{4k^2 + 3}}{2}$$

şeklindedir. Bu durumda, (1.7) denkleminin genel çözümü

$$T_k(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{4k^2 + 3}}{2}\right)t + B\sin\left(\frac{\sqrt{4k^2 + 3}}{2}\right)t\right]$$

olarak bulunur. Sonuç olarak, süperpozisyon ilkesi kullanılırsa (1.3) probleminin genel çözümü

$$v(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{t}{2}}\left[A_k cos\left(\frac{\sqrt{4k^2+3}}{2}\right)t+B_k sin\left(\frac{\sqrt{4k^2+3}}{2}\right)t\right]sinkx \qquad (1.8)$$

olur. Başlangıç değer koşulları uygulanırsa

$$v(0,x)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{0}{2}}\left[A_k cos\left(\frac{\sqrt{4k^2+3}}{2}0\right)+B_k sin\left(\frac{\sqrt{4k^2+3}}{2}0\right)\right]sinkx$$

$$v(0,x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\, sinkx=sinx$$

bulunur. Bu durumda, bu son denklemden

$$A_1=1, \qquad A_k=0, \qquad k\geq 2$$

olduğu görülür. (1.8) denkleminde $t\ değişkenine$ göre türev alınırsa

$$v_t(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\left[A_k cos\left(\frac{\sqrt{4k^2+3}}{2}\right)t+B_k sin\left(\frac{\sqrt{4k^2+3}}{2}\right)t\right]sinkx$$

$$+e^{-\frac{t}{2}}\left[-\frac{\sqrt{4k^2+3}}{2}A_k sin\left(\frac{\sqrt{4k^2+3}}{2}\right)t+\frac{\sqrt{4k^2+3}}{2}B_k cos\left(\frac{\sqrt{4k^2+3}}{2}\right)t\right]sinkx$$

olur. Bu son denklemde başlangıç değer koşulları kullanılırsa

$$v_t(0,x)=\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{1}{2}A_k\, sinkx+B_k\frac{\sqrt{4k^2+3}}{2}sinkx=-sinx$$

denklemi elde edilir. $A_1=1$ olduğu gözönüne alınırsa

$$-\frac{1}{2}A_1+\frac{B_1\sqrt{7}}{2}=-1, \qquad B_k=0, k\geq 2$$

$$\frac{B_1\sqrt{7}}{2} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \ B_1 = -\frac{1}{\sqrt{7}}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$v(t,x) = e^{-\frac{t}{2}}\left[cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)t - \frac{1}{\sqrt{7}}sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)t\right]sinx \tag{1.9}$$

çözümü elde edilir. Şimdi, (1.4) probleminin çözümünü bulmak için

$$w(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)sinkx$$

denklemi verilsin. Bu son denklem ve türevleri alınıp (1.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k''(t)sinkx + \sum_{k=1}^{\infty} A_k'(t)sinkx + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)k^2sinkx + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t)sinkx$$

$$= 2e^{-t}\sin(x) \tag{1.10}$$

elde edilir. Bu denklemden

$$A_k''(t) + A_k'(t) + 2A_k(t) = \ 2e^{-t}, \qquad A_k(0) = 0, A_k'(0) = 0$$

ve

$$A_k''(t) + A_k'(t) + (k^2+2)A_k(t) = \ 0, \qquad A_k(0) = 0, A_k'(0) = 0$$

bulunur. Bu son denklemin karakteristik denklemi ve kökleri

$$m^2 + m + (k^2+2) = 0 \Rightarrow m = \frac{-1 \mp \sqrt{1-4(k^2+2)}}{2}$$

$$= \frac{-1 \mp \sqrt{1-4k^2-8}}{2} = \frac{-1 \mp i\sqrt{4k^2+7}}{2} = -\frac{1}{2} \mp \frac{i\sqrt{4k^2+7}}{2}$$

olarak bulunur. O halde, $A_k(t)$ ifadesinin çözümü

$$A_k(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left[c_1 cos\left(\frac{\sqrt{4k^2+7}}{2}\right)t + c_2 sin\left(\frac{\sqrt{4k^2+7}}{2}\right)t\right]$$

şeklindedir. Başlangıç değer koşulları kullanılıp, bu son denklemde yerine yazılırsa

$$A_k(0) = c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

ve

$$A_k'(0) = -\frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{4k^2+7}}{2}c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$A_k(t) = 0, \qquad k \geq 2$$

elde edilir. Şimdi, $A_1(t)$ çözümünü bulalım. (1.10) denkleminden $k = 1$ için

$$A_1''(t) + A_1'(t) + 2A_1(t) = 2e^{-t} \tag{1.11}$$

yazılabilir. Bu denklemin çözümü için

$$A_1(t) = A_1^c(t) + A_1^p(t)$$

denklemi ele alınsın. Buradan denklemin homojen kısmı

$$A_1''(t) + A_1'(t) + 2A_1(t) = 0 \tag{1.12}$$

olup, karakteristik denklem ve kökleri

$$m^2 + m + 2 = 0 \ \Rightarrow m = \frac{-1 \mp \sqrt{1-8}}{2} = -\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

dir. (1.12) denkleminin çözümü

$$A_1^c(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left[c_1 cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)t + c_2 sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)t\right]$$

olarak bulunur. (1.12) denkleminde homojen olmayan kısmın özel çözümü için

$$A_1^p(t) = Ae^{-t}$$

alınıp, türevleriyle beraber yerine yazılırsa

$$Ae^{-t} - Ae^{-t} + 2Ae^{-t} = 2e^{-t} \Rightarrow \quad A = 1$$

elde edilir. Bu nedenle,

$$A_1^p(t) = e^{-t}$$

dir. $A_1(0) = 0,\ A_1'(0) = 0$ başlangıç değer koşulları kullanılarak

$$A_1(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left[c_1 cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)t + c_2 sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)t\right] + e^{-t}$$

denkleminden

$$A_1(0) = c_1 + 1 = 0 \Rightarrow c_1 = -1$$

ve

$$A_1'(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\left[c_1 cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)t + c_2 sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)t\right] - e^{-t}$$

$$+e^{-\frac{t}{2}}\left[-c_1\frac{\sqrt{7}}{2}sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)t + c_2\frac{\sqrt{7}}{2}cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)t\right]$$

denkleminden

$$A_1'(0) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{\sqrt{7}}{2}c_2 = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{7}}{2}c_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

bulunur. Bulunan bu sonuçlar denklemde yerine yazılırsa

$$A_1(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left[-cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)t + \frac{1}{\sqrt{7}}sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)t\right] + e^{-t}$$

elde edilir. Buradan da

$$w(t,x) = A_1(t)sinx = -e^{-\frac{t}{2}}cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\,sinx + \frac{1}{\sqrt{7}}e^{-\frac{t}{2}}sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\,sinx + e^{-t}sinx \quad (1.13)$$

olduğu görülür. Sonuç olarak, (1.9) ve (1.13) denklemlerinden

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) = e^{-t}sinx$$

bulunur. Dolayısıyla, bu son denklem (1.2) denkleminin tam çözümüdür.

Örnek 1.2.

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) + u_t(t,x) - \, u_{xx}(t,x) + 2u(t,x) = e^{-t-x}, \quad t > 0, \qquad x > 0, \\ u(0,x) = e^{-x}, \qquad u_t(0,x) = -e^{-x}, \;\; x \geq 0, \\ u(t,0) = e^{-t}, \qquad u_x(t,0) = -e^{-t}, \;\; t \geq 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

denkleminin tam çözümünü Laplace dönüşüm yöntemini kullanarak elde ediniz.

Çözüm: $u(s,x) = \mathcal{L}\{u(t,x)\}$ olsun. Verilen (1.14) problemin her ifadesinin ayrı ayrı Laplace dönüşümleri alınırsa

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = s^2\mathcal{L}\{u(t,x)\} - su(0,x) - u_t(0,x) = s^2u(s,x) - se^{-x} + e^{-x},$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = s\mathcal{L}\{u(t,x)\} - u(0,x) = su(s,x) - u(0,x) = s\,u(s,x) - e^{-x},$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\;\mathcal{L}\{u(t,x)\} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}u(s,x),$$

$$\mathcal{L}\{u(t,0)\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{1}{s+1},$$

$\mathcal{L}\{u_x(t,0)\} = \mathcal{L}\{-e^{-t}\} = -\mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{-1}{s+1}$,

$$\mathcal{L}\{u(t,x)\} = \mathcal{L}\{e^{-t-x}\} = \frac{e^{-x}}{s+1}$$

yazılabilir. Bulunan bu değerler (1.14) probleminde yerine yazılırsa

$$-\frac{\partial^2 u(s,x)}{\partial x^2} + s^2 u(s,x) + su(s,x) + 2u(s,x) - se^{-x} + e^{-x} - e^{-x} = \frac{e^{-x}}{s+1}$$

denklemi elde edilir. Gerekli işlemler yapılıp, başlangıç değer koşullarının Laplace dönüşümleri alınırsa

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u(s,x)}{\partial x^2} + (s^2 + \mathrm{s} + 2)u(s,x) = \left(\dfrac{s^2 + \mathrm{s} + 1}{s+1}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}, \\ u(s,0) = \dfrac{1}{s+1}, \quad u_x(s,0) = \dfrac{-1}{s+1} \end{cases} \tag{1.15}$$

bulunur. (1.14) problemin çözümünü bulmak için

$$u(s,x) = u^c(s,x) + u^p(s,x)$$

formülü kullanılırsa, homojen kısmının çözümü

$$-\frac{\partial^2 u(s,x)}{\partial x^2} + (s^2 + \mathrm{s} + 2)u(s,x) = 0$$

şeklindedir. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$-m^2 + (s^2 + \mathrm{s} + 2) = 0$$

ve kökleri

$$m_{1,2} = \mp\sqrt{s^2 + s + 2}$$

olduğundan homojen denklemin çözümü

$$u^c(s,x) = c_1 e^{\sqrt{s^2+s+2}x} + c_2 e^{-\sqrt{s^2+s+2}x} \tag{1.16}$$

şeklinde elde edilir. (1.15) denkleminin özel çözümü için

$$u^p(s,x) = Ae^{-x} \tag{1.17}$$

olarak alınıp, türevleriyle beraber (1.15) denkleminde yerine yazılırsa

$$-Ae^{-x} + (s^2 + \mathrm{s} + 2)Ae^{-x} = \left(\frac{s^2 + \mathrm{s} + 1}{s+1}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}$$

sonucuna varılır. Öyleyse,

$$(s^2 + \mathrm{s} + 2)A = \left(\frac{s^2 + \mathrm{s} + 1}{s+1}\right) \Rightarrow A = \frac{1}{s+1}$$

olur. (1.16) ve (1.17) formülleri kullanılırsa

$$u(s,x) = c_1 e^{\sqrt{s^2+s+2}x} + c_2 e^{-\sqrt{s^2+s+2}x} + \frac{1}{s+1}e^{-x}$$

sonucu elde edilir. $u(s,0) = \frac{1}{s+1}$, $u_x(s,0) = \frac{-1}{s+1}$ başlangıç değer koşulları kullanılırsa

$$c_1 = c_2 = 0$$

bulunur. Bu durumda,

$$u(s,x) = \frac{e^{-x}}{s+1}$$

olur. Bu son denklemin denkleminin ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$u(t,x) = \mathcal{L}^{-1}\{u(s,x)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-x}}{s+1}\right\} = e^{-x}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-x-t}$$

çözümü elde edilir. Böylece, (1.14) problemini tam çözümü

$$u(t,x) = e^{-x-t}$$

olarak elde edilir.

Örnek 1.3. Aşağıdaki Cauchy probleminin çözümünü

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) + u_t(t,x) - u_{xx}(t,x) + u(t,x) = (3-4x^2)e^{-t-x^2} & t > 0,\ x \in (-\infty,\infty), \\ u(0,x) = e^{-x^2},\ u_t(0,x) = -e^{-x^2},\ x \in (-\infty,\infty) \end{cases} \tag{1.18}$$

Fourier dönüşümü yöntemi ile elde ediniz.

Çözüm:

$$u(t,s) = F\{u(t,x)\}$$

olsun. (1.18) denkleminin her iki tarafı için Fourier dönüşümü alınıp, başlangıç değer koşulları kullanılırsa

$$u_{tt}(t,s) + u_t(t,s) + s^2u(t,s) + u(t,s) = e^{-t}F\{(3-4x^2)e^{-x^2}\}$$

sonucu elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$u_{tt}(t,s) + u_t(t,s) + s^2u(t,s) + u(t,s) = -e^{-t}F\{(4x^2-2)e^{-x^2}\} + e^{-t}F\left\{e^{-x^2}\right\}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$u_{tt}(t,s) + u_t(t,s) + (s^2+1)u(t,s) = -e^{-t}F\left\{\left(e^{-x^2}\right)''\right\} + e^{-t}F\left\{e^{-x^2}\right\}$$

yazılır. Böylece,

$$u_{tt}(t,s) + u_t(t,s) + (s^2+1)u(t,s) = e^{-t}(s^2+1)F\left\{e^{-x^2}\right\} \tag{1.19}$$

sonucuna varılır. Bu son denklemin genel çözümü

$$u(t,s) = u^c(t,s) + u^p(t,s)$$

olarak ele alınsın. Bu denklemin homojen kısmı

$$u_{tt}(t,s) + u_t(t,s) + (s^2+1)u(t,s) = 0$$

olup, karakteristik denklemi

$$m^2 + m + (s^2+1) = 0$$

ve kökleri

$$m_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{1-4(s^2+1)}}{2} = \frac{-1 \mp i\sqrt{4s^2+3}}{2}$$

olarak elde edilir. Bu durumda homojen kısmının çözümü

$$u^c(t,s) = e^{-\frac{t}{2}}[c_1\cos\left(\frac{\sqrt{4s^2+3}}{2}t\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{4s^2+3}}{2}t\right)] \tag{1.20}$$

olarak bulunur. Denklemin özel çözümü

$$u^p(t,s) = Ae^{-t}$$

olarak alınıp türevleriyle beraber (1.19) denkleminde yerine yazılırsa

$$u^p(t,s) = Ae^{-t} = F\{e^{-x^2}\}e^{-t} \tag{1.21}$$

olduğu görülür. (1.20) ve (1.21) denklemlerinden

$$u(t,s) = e^{-\frac{t}{2}}[c_1\cos\left(\frac{\sqrt{4s^2+3}}{2}t\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{4s^2+3}}{2}t\right)] + F\{e^{-x^2}\}e^{-t}$$

sonucu elde edilir. Bu son denklemin çözümü için başlangıç değer koşulları kullanılırsa

$$u(0,s) = c_1 + F\{e^{-x^2}\} = F\{e^{-x^2}\} \Rightarrow c_1 = 0$$

ve

$$u_t(t,s) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}[\mathrm{c}_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4s^2+3}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4s^2+3}}{2}t\right)] - F\{e^{-x^2}\}e^{-t}$$

$$+e^{-\frac{t}{2}}[-c_1\frac{\sqrt{4s^2+3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{4s^2+3}}{2}t\right) + c_2\frac{\sqrt{4s^2+3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{4s^2+3}}{2}t\right)]$$

$$u_t(0,s) = -F\{e^{-x^2}\} + c_2\frac{\sqrt{4s^2+3}}{2} = -F\{e^{-x^2}\} \Rightarrow c_2 = 0$$

bulunur. Buradan da

$$u(t,s) = e^{-t}F\{e^{-x^2}\}$$

olur. Her iki tarafın ters Fourier dönüşümü alınırsa

$$u(t,x) = F^{-1}\{u(t,s)\} = e^{-t}F^{-1}\left\{F\{e^{-x^2}\}\right\} = e^{-t}e^{-x^2} = e^{-t-x^2}$$

sonucu elde edilir. Böylece (1.18) probleminin tam çözümü

$$u(t,x) = e^{-t-x^2}$$

olarak bulunur.

Şimdi çalışmamızda kullanılan temel tanımları verelim.

Tanım 1.1. "Eğer aşağıdaki özelliklere sahip kompleks değerli bir $\langle .,. \rangle : H \times H \to C$ fonksiyonu mevcut ise bir H kompleks lineer uzayı iç çarpım uzayı olarak adlandırılır:

i. $\forall\, x \in H$ $için, \langle x,x\rangle \geq 0$ ve $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
ii. $\forall\, x,y \in H$ $için, \langle x,y\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$,
iii. $\forall\, x,y \in H$ ve $\alpha \in C$ için, $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$,
iv. $\forall\, x,y,z \in H$ $için, \langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

$\langle x, y\rangle$ fonksiyonu x ve y'nin iç çarpımı olarak adlandırılır. Hilbert uzayı, tam bir iç çarpım uzayıdır. H üzerinde bir iç çarpım $\left||x|\right| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ ile verilen H üzerindeki bir normu tanımlar. Bu nedenle, iç çarpım uzayları normlu uzaylardır ve Hilbert uzayları Banach uzaylarıdır" (Yanovsky, 2005).

Örnek 1.4. Verilen bir kapalı $[-1,1]$ aralığında tüm tanımlı ve sürekli fonksiyonların $C_2[-1,1]$ uzayı

$$\langle x, y\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)y\overline{(t)}\,dt.$$

olarak verildiği uzay bir iç çarpım uzayıdır.

Örnek 1.5. $L_2[-1,1] = \overline{C_2[-1,1]}$ uzayında iç çarpımın

$$\langle x, y\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)y\overline{(t)}\,dt$$

şeklinde tanımlanan uzay bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 1.2. "H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayı olsun. Lineer bir A operatörü öyle bir operatördür ki

$$A:\ H_1 \rightarrow\ H_2$$

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay;\ \forall\ \alpha, \beta \in C\ için\ ve\ x, y \in H_1$$

tanımlanır. A'nın tanım kümesi $D(A) = \{x \in H_1,\ \exists Ax \in H_2\}$ bir vektör uzayıdır ve

$$R(A) = \{y = Ax, \qquad \forall x \in D(A)\}$$

A'nın değer kümesini (range) belirtmektedir. Eğer bir lineer $A:\ H \rightarrow\ H$ operatörü sınırlıysa $her\ x \in H\ için$

$$\|Ax\|_H \leq M\|x\|_H$$

olacak şekilde bir M>0 reel sayısı vardır.

$$\|A\| = \inf M$$

ifadesine A operatörünün normu denir” (Yanovsky, 2005).

Örnek 1.6. $H = L_2\,[0,1]$’den kendisine sınırlı bir lineer operator

$$Ax = tx(t), \qquad 0 \leq t \leq 1$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 1.1. Sınırlı lineer A operatörünün normu

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

dır.

Tanım 1.3. “$A\colon H_1 \to H_2$ sınırlı bir lineer operator olsun. Burada H_1 ve H_2 Hilbert uzaylarıdır. Öyle ise bir A operatörünün Hilbert adjoint operatörü A^*, tüm $x \in H_1\ ve\ y \in H_2$ için

$$A^*\colon H_2 \to H_1,$$

olan bir operatördür. Yani, $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ dır” (Yanovsky, 2005).

Teorem 1.2. A’nın Hilbert adjoint operatörü A^*,

$$\|A^*\| = \|A\|$$

şeklinde norma sahip tek ve sınırlı bir lineer operatördür.

Tanım 1.4. “Eğer $\forall\ x, y \in H$ için $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ ise, bir Hilbert uzayında sınırlı bir $A : H \to H$ operatörünün self-adjoint olduğu söylenir ”(Yanovsky, 2005).

Tanım 1.5. **"**Eğer $A \geq 0$ ise, yani $\forall\, x \in H$ için $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ ise, bir self-adjoint A operatörünün pozitif olduğu söylenir**"** (Yanovsky, 2005).

Tanım 1.6. "$A\colon D(A) \to H$, $\overline{D(A)} = H$ olan bir lineer operator olsun. Bu durumda eğer $\forall\, x, y \in D(A)$ için $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ ise A'ya simetriktir denir. Eğer A simetrik ve $D(A) = D(A^*)$ ise A self-adjiont bir operatördür**"** (Yanovsky, 2005).

Örnek 1.7. $Au = -\frac{d^2u}{dx^2} + u\,,\quad u(a) = u(b) = 0\ ve\ \ H = L_2[a, b]$ olsun. A, bir self-adjoint pozitif operatördür.

Tanım 1.7. "H bir Hilbert uzayı ve $A : H \to H$, $D(A)\,H$ olan bir lineer operatör olsun. $A_\lambda = A - \lambda I$ olarak gösterilebilir. Burada $\lambda \in C$ ve I, D(A) H üzerinde bir birim (özdeş) operatördür.

Eğer A_λ nın tersi varsa, buna A nın resolvent operatörü veya basitçe A nın resolventi denir ve $R_\lambda(A)$ ile gösterilir. Bu da

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$$

dır **"** (Yanovsky, 2005).

Örnek 1.8. Eğer $x \in C\,\big[[a, b], H\big]$ ve $y : [a, b] \to H$1 $[a, b]$ aralığında sınırlı varyasyona sahip ise

$$\left\|\int_a^b x(t)dy(t)\right\| \leq \int_a^b \parallel x(t) \parallel dV_a^t[y(t)] \leq \max_{t\in[a,b]} \parallel x(t) \parallel dV_a^b[y(t)]$$

dır.

Teorem 1.3. H'nın kompleks bir Hilbert uzayı olduğu ve $D(A)$'nın H'da yoğun olduğu durumda $A : D(A) \to H$ bir self-adjoint lineer operatör olsun. Öyleyse, A'nın

$$A = \int_m^\infty \lambda dE_\lambda \text{ ve } I = \int_m^\infty dE_\lambda$$

şeklinde bir spektral temsili vardır. Eğer F, $[m,\infty)$ aralığında sürekli sınırlı bir fonksiyon ise

$$F(A)=\int_{m}^{\infty}F(\lambda)dE_{\lambda}$$

dır.

Örnek 1.9. A, örnek (1.7) ifadesinde tanımlanan operator olmak üzere

$$\begin{cases}\|\exp(-At)\|\leq e^{-t},\\ \left\|\cos\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)\right\|\leq 1,\ \left\|A^{\frac{1}{2}}\sin\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)\right\|\leq 1\end{cases} \tag{1.22}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Self-adjoint pozitif tanımlı operatörlerin spektral özelliklerinden

$$\exp(-At)\,\varphi=\int_{1}^{\infty}\exp(-\mu t)\,dE_{\mu}\varphi$$

yazılabilir. Burada (E_{μ}), A ile asosye (ilişkili)spektral ailedir. Bu nedenle, herhangi bir $t\geq 0$ için

$$\|\exp(-At)\|_{H\to H}\leq e^{-t}$$

dır.

Self-adjoint pozitif tanımlı operatörlerin spektral temsili özelliklerini kullanarak

$$e^{\pm A^{\frac{1}{2}}t}\,\varphi=\int_{1}^{\infty}e^{\pm it\mu^{\frac{1}{2}}}\,dE_{\mu}\varphi$$

yazılabilir. Bu nedenle, son teorem kullanılırsa

$$\left\|e^{\pm A^{\frac{1}{2}}t}\right\|\leq\sup_{1\leq\mu<\infty}\left|e^{\pm it\mu^{\frac{1}{2}}}\right|=1$$

ifadesi elde edilir. Bu yüzden,

$$\left\|\cos\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)\right\| = \left\|\frac{e^{iA^{\frac{1}{2}}t} + e^{-iA^{\frac{1}{2}}t}}{2}\right\| \leq \frac{1}{2}\left[\left\|e^{iA^{\frac{1}{2}}t}\right\| + \left\|e^{-iA^{\frac{1}{2}}t}\right\|\right] \leq 1$$

ve

$$\left\|A^{\frac{1}{2}}\sin\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)\right\| = \left\|\frac{e^{iA^{\frac{1}{2}}t} - e^{-iA^{\frac{1}{2}}t}}{2i}\right\| \leq \frac{1}{2|i|}\left[\left\|e^{iA^{\frac{1}{2}}t}\right\| + \left\|e^{-iA^{\frac{1}{2}}t}\right\|\right] \leq 1$$

bulunur.

Tezdeki bölümlerin içeriğini kısaca tanımlayalım. İlk bölümde, giriş ve temel tanımlar verildi. İkinci bölümde, hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümleri bulunup, bu tam çözümlerin kararlılığı gösterildi. Üçüncü bölümde, hiperbolik kısmi diferansiyel denklemler için fark şemaları oluşturulup, oluşturulan bu fark şemalarının kararlılığı incelendi. Dördüncü bölümde, birinci ve ikinci mertebeden doğruluk fark şemaları uygulanarak, örnek problemlerin tam ve nümerik çözümleri karşılaştırılıp, hata analizi yapıldı. Son bölümde, tezin sonuç kısmı verildi.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1. Tam Çözüm ve Kararlılık

Bu bölümde hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümleri bulunup, bu tam çözümlerin kararlılığı tartışılacaktır. Bu tam çözümün kararlılığı ile ilgili teoremler verilecektir.

2.2. Hiperbolik Kısmi Diferansiyel Denklemin Kararlılığı ve Tam Çözümleri

Bu kısımda, $H = L_2[0, L]$ Hilbert uzayında kısmi diferansiyel denklemi

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x) + u_x(t,x) + f(t,x) \quad 0 < t < 1; \ 0 < x < L \\ u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = \psi(x), u(t,0) = u(t,L) = 0; \ 0 \le x \le L, \ \ 0 \le t \le 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

ele alınacaktır. Burada, $f(t) = f(t,x)$ değerleri, $H = L_2[0, L]$ de [0,1] aralığında tanımlı verilmiş bir soyut fonksiyondur. $\varphi = \varphi(x)$ ile $\psi = \psi(x)$ ise $H = L_2[0, L]$ nin elemanlarıdır. (Bu, onların [0,1] aralığında (x'te) tanımlı fonksiyonlar olduğu anlamına gelir). $u(t) = u(t,x), H = L_2[0, L]$ uzayı üzerinde [0,1] aralığındaki değerlere sahip tanımlı ve bilinmeyen soyut fonksiyondur. $A: D(A) \to H$

$$Au(x) = -u''(x) - u'(x),$$

biçiminde tanımlanmış bir self-adjoint pozitif A operatörünün tanım bölgesi

$$D(A) = \{u: u, u', u'' \in L_2[0, L]; \ u(0) = u(L) = 0\}.$$

dır. (Twizell, 1979; Ahyraleyv ve Sobolevskii, 2004) ve yukarıda verilmiş koşullar kullanılararak (2.1) formülü

$$\begin{cases} \frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = f(t); \ (0 \le t \le 1) \\ u(0) = \varphi, \ u'(0) = \psi \end{cases} \tag{2.2}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Bu, bir H Hilbert uzayında yoğun $\overline{D}(A) = H$ bölgesine sahip sınırsız lineer self-adjoint ve pozitif tanımlı operatör $A = A^* \geq \delta I\ (\delta > 0)$ içindir. Hiperbolik denklemler için çeşitli başlangıç sınır değer problemlerinin problem (2.2)'ye indirgenebileceği bilinmektedir (Ashyralyev, A. ve Akat, M., 2012). Ayrıca, başlangıç değer probleminin sadece zamana göre kesikli hale getirimesiyle ilgili bir çalışma, eğer uzay değişkenlerindeki diferansiyel operatör A, Hilbert uzaylarında işlev gören ve $0 < h \leq h_0$ için h cinsinden uniform (düzgün) olarak pozitif belirli ve self-adjoint fark operatörleri A_h ile yer değiştirirse, uygulamalara genel fark şemalarının dahil edilmesine izin verir.

(2.2) denkleminin homojen kısmı

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = 0$$

dır. Bu son denklemin karakteristik çözümü

$$m^2 + A = 0$$

olup, kökleri

$$m^2 = -A, \qquad m = \mp iA^{\frac{1}{2}}$$

şeklindedir. Buradan homojen kısmının çözümü

$$u^c(t) = c_1 \sin(A^{\frac{1}{2}}t) + c_2\cos(A^{\frac{1}{2}}t)$$

olarak elde edilir. Genel çözümü elde etmek için

$$u^c(x) = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x)$$

şeklinde bir çözümün olduğu gözönüne alınıp, birinci türevi alınırsa

$$u'(t) = c_1'(t)u_1(t) + c_1(t)u_1'(t) + c_2'(t)u_2(t) + c_2(t)u_2'(t)$$

denklemi elde edilir. $c_1\ ve\ c_2$ sabit olduğundan dolayı türev sıfıra yaklaşır. Böylece

$$c_1'(t)u_1(t) + c_2'(t)u_2(t) = 0 \quad (2.3)$$

olur. Bu durumda geriye kalan kısım

$$u'(t) = c_1(t)u_1'(t) + c_2(t)u_2'(t)$$

olur. Şimdi de bu son denklemin tekrar türevi alınırsa

$$u''(t) = c_1'(t)u_1'(t) + c_1(t)u_1''(t) + c_2'(t)u_2'(t) + c_2(t)u_2''(t)$$

bulunur. Bu değerler (2.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$c_1'(t)u_1'(t) + c_2'(t)u_2'(t) = f(t) \quad (2.4)$$

olur. (2.3) ve (2.4) denklemleri çözülürse

$$c_1'(t) = -\frac{fu_2}{w(u_1,u_2)}\ ve\ c_2'(t) = \frac{fu_1}{w(u_1,u_2)} \quad (2.5)$$

bulunur. Bu son denklemler integre edilirse

$$c_1(t) = -\int_{h_1}^{t} \frac{f(p)u_2(p)}{w(u_{1,}u_2)}dp$$

$$c_2(t) = \int_{h_2}^{t} \frac{f(p)u_1(p)}{w(u_{1,}u_2)}dp$$

olarak elde edilir. Bulunan bu değerler yerine yazılrsa

$$u(t) = c_1(t)u_1(t) + c_2(t)u_2(t) + u_1(t)\int_{h_1}^{t} -\frac{f(p)u_2(p)}{w(u_{1,}u_2)}dp + u_2(t)\int_{h_2}^{t} \frac{f(p)u_1(p)}{w(u_1,u_2)}dp \quad (2.6)$$

çözümü bulunur. Burada,

$$u_1(t) = \sin\left(A^{\frac{1}{2}}t\right),\ \ u_2(t) = \cos(A^{\frac{1}{2}}t)$$

dır ve Wronskiyen

$$w(u_1,u_2)=\begin{bmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sin\left(A^{\frac{1}{2}}\,t\right) & \cos\left(A^{\frac{1}{2}}t\right) \\ A^{\frac{1}{2}}\cos\left(A^{\frac{1}{2}}t\right) & -A^{\frac{1}{2}}\sin(A^{\frac{1}{2}}\,t)\end{bmatrix}$$

$$=-A^{\frac{1}{2}}\sin^2\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)-A^{\frac{1}{2}}\cos^2\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)=-A^{\frac{1}{2}}$$

dır. Buradan da

$$u(t)=c_1\sin\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)+c_2\cos\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)+\sin\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)\int_0^t-\frac{f(p)\cos\left(A^{\frac{1}{2}}p\right)}{-A^{\frac{1}{2}}}dp+$$

$$\cos\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)\int_0^t\frac{f(p)\sin(A^{\frac{1}{2}}p)}{-A^{\frac{1}{2}}}dp$$

$$u(t)=c_1\cos\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)+c_2\sin\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)+\sin\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)\int_0^t\frac{f(p)\cos\left(A^{\frac{1}{2}}p\right)}{A^{\frac{1}{2}}}dp-$$

$$\cos\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)\int_0^t\frac{f(p)\sin\left(A^{\frac{1}{2}}p\right)}{A^{\frac{1}{2}}}dp$$

yazılabilir. $u(0)=\varphi, u'(0)=\psi$ başlangıç değer koşullarından uygulanırsa,

$$c_1\cos\left(A^{\frac{1}{2}}0\right)+c_2\sin\left(A^{\frac{1}{2}}0\right)=\varphi$$
$$-c_1A^{\frac{1}{2}}\sin\left(A^{\frac{1}{2}}0\right)+c_2A^{\frac{1}{2}}\cos\left(A^{\frac{1}{2}}0\right)=\psi$$

denklemlerinden $c_1=\varphi,\ c_2=\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}\psi$ sonucuna varılır. Bunun sonucu olarak,

$$u(t)=\cos\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)\varphi+A^{-\frac{1}{2}}\sin\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)\psi+\sin\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)\int_0^t\frac{f(p)\cos\left(A^{\frac{1}{2}}\,p\right)}{A^{\frac{1}{2}}}dp-$$

$$\cos\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)\int_0^t\frac{f(p)\sin(A^{\frac{1}{2}}p)}{A^{\frac{1}{2}}}dx$$

$$u(t) = \cos\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)\varphi + A^{-\frac{1}{2}}\sin\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)\psi + \int_0^t \frac{\left[\sin\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)cos\left(A^{\frac{1}{2}}p\right) - \cos(A^{\frac{1}{2}}t)\sin(A^{\frac{1}{2}}p)\right]f(p)dp}{A^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \cos\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)\varphi + A^{-\frac{1}{2}}\sin\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)\psi + \int_0^t A^{-\frac{1}{2}}\sin\left(t-p)A^{\frac{1}{2}}\right)f(p)dp \quad (2.7)$$

haline gelir. Yukarıda bahsedilen tam çözüm için kararlılığı gösteren teorem aşağıda verilecektir.

Teorem 2.2.1. $\varphi \in D(A)$, $\psi \in D(A^{\frac{1}{2}})$ ve $f(t)$'nin $[0,T]$ aralığında sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Öyle ise, (2.2) probleminin tek bir çözümü vardır ve kararlılık kestirimi aşağıdaki gibidir:

$$\max_{0\le t\le T}\|u(t)\|_H \le M\left[\|\varphi\|_H + \left\|A^{-1/2}\psi\right\|_H + \max_{0\le t\le T}\left\|A^{-1/2}f(t)\right\|_H\right] \quad (2.8)$$

$$\max_{0\le t\le T}\left\|\frac{du(t)}{dt}\right\| + \max_{0\le t\le T}\left\|A^{1/2}u(t)\right\|_H \le M\left[\left\|A^{1/2}\varphi\right\|_H + \|\psi\|_H + \max_{0\le t\le T}\|f(t)\|_H\right] \quad (2.9)$$

$$\max_{0\le t\le T}\left\|\frac{d^2u(t)}{dt^2}\right\|_H + \max_{0\le t\le T}\|Au(t)\|_H$$

$$\le M\left[\|A\varphi\|_H + \left\|A^{1/2}\psi\right\|_H + \|f(0)\|_H + \max_{0\le t\le T}\|f'(t)\|_H dt\right] \quad (2.10)$$

burada M; $\varphi,\ \psi$ ve $f(t)$'ye bağlı değildir.

İspat: Formül (2.8), $A \ge \delta I,$ üçgen eşitsizliği ve

$$\left\|cos\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)\right\|_{H\to H} \le 1, \quad \left\|sin\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)\right\|_{H\to H} \le 1 \quad (2.11)$$

eşitsizliğinin doğruluğu göz önüne alınırsa herhangi bir $t \in [0,T]$ için

$$\|u(t)\|_H \le \left\|cos\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)\right\|_{H\to H}\|\varphi\|_H + \left\|sin\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)\right\|_{H\to H}\left\|A^{-\frac{1}{2}}\psi\right\|_H +$$

$$\int_0^t \left\| \sin(A^{\frac{1}{2}}(t-p)) \right\|_{H\to H} \left\| A^{-\frac{1}{2}} f(p) \right\|_H dp$$

$$\leq M \left[\|\varphi\|_H + \left\| A^{-\frac{1}{2}} \psi \right\|_H + \max_{0\leq t\leq T} \left\| A^{-\frac{1}{2}} f(t) \right\|_H \right]$$

olur. Bu durumda,

$$\max_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_H \leq M \left[\|\varphi\|_H + \left\| A^{-\frac{1}{2}} \psi \right\|_H + \max_{0\leq t\leq T} \left\| A^{-\frac{1}{2}} f(t) \right\|_H \right]$$

sonucu elde edilir. Benzer şekilde, herhangi bir $t \in [0,T]$ için $A^{\frac{1}{2}}$'yi formül (2.7)'ye uygulanır ve (2.10) daki eşitsizlik kullanılırsa

$$\left\| A^{\frac{1}{2}} u(t) \right\|_H \leq \left\| cos\left(A^{\frac{1}{2}} t\right) \right\|_{H\to H} \left\| A^{\frac{1}{2}} \varphi \right\|_H + \left\| \sin\left(A^{\frac{1}{2}} t\right) \right\|_{H\to H} \|\psi\|_H +$$

$$\int_0^t \left\| \sin(A^{\frac{1}{2}}(t-P)) \right\|_{H\to H} \|f(p)\|_H dp$$

$$\leq M \left[\left\| A^{\frac{1}{2}} \varphi \right\|_H + \| \psi\|_H + \max_{0\leq t\leq T} \| f(t)\|_H \right]$$

elde edilir. Buradan da,

$$\max_{0\leq t\leq T} \left\| A^{\frac{1}{2}} u(t) \right\|_H \leq M \left[\left\| A^{\frac{1}{2}} \varphi \right\|_H + \| \psi\|_H + \max_{0\leq t\leq T} \| f(t)\|_H \right]$$

sonucuna ulaşılır.

İlk önce, $Au(t)$ ifadesini bulmak için, A'yı formül (2.7)'ye uygulayıp kısmi integrasyon kullanılırsa

$$Au(t) = cos\left(A^{\frac{1}{2}} t\right) A\varphi + sin\left(A^{\frac{1}{2}} t\right) A^{\frac{1}{2}}\psi + f(t) - cos\left(A^{\frac{1}{2}} t\right) f(0)$$
$$- \int_0^t A^{\frac{1}{2}} \cos(A^{\frac{1}{2}} (t-p)[f'(p)]dp$$

elde edilir. Bu son formüle üçgen eşitsizliği uygulanırsa, herhangi bir $t \in [0,T]$ için

$$\|A\,u(t)\,\|_H \;\le \left\|cos\left(A^{\frac{1}{2}}\,t\right)\right\|_{H\to H}\|A\,\varphi\|_H + \left\|\sin\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)\right\|_{H\to H} + \left\|A^{\frac{1}{2}}\,\psi\right\|_H$$

$$+\left[\left\|\cos\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)\right\|_{H\to H}\|f(0)\|_H\right] + \int_0^t \left\|cosA^{\frac{1}{2}}(t-p)\right\|_{H\to H}[\|f'(p)\,\|_H]dp$$

$$\le M\left[\|A\,\varphi\|_H + \left\|A^{\frac{1}{2}}\,\psi\right\|_H + \|f(0)\|_H + \max_{0\le t\le T}\|f'(t)\|_H\right]$$

ifadesi elde edilir. Öyleyse,

$$\max_{0\le t\le T}\|A\,u(t)\,\|_H \;\le M\left[\|A\,\varphi\|_H + \left\|A^{\frac{1}{2}}\,\psi\right\|_H + \|f(0)\,\|_H + \max_{0\le t\le T}\|f'(t)\|_H\right]$$

yazılabilir. $\max\limits_{0\le t\le T}\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|_H$ için kestirim ise, son kestirimden ve üçgen eşitsizliğinden elde edilir. Böylece Teorem 2.1.1 ispatlanmış olur.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Birinci Mertebeden Fark Şemaları

Taylor açılımı kullanılırsa, (2.2) başlangıç değer problemi için birinci mertebeden doğruluk fark şeması

$$\begin{cases} \tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + Au_{k+1} = f_k, \\ f_k = f(t_{k+1}),\ \ t_k = k\tau, 1 \le k \le N-1, \quad N\tau = 1 \\ u_0 = \varphi,\ \ \tau^{-1}(u_1 - u_0) = \psi \end{cases} \tag{3.1}$$

olarak elde edilir. Bu doğruluk fark şeması için kararlılık kestirimi aşağıdaki teoremle verilecektir.

Teorem 3.1.1. $\varphi \in D(A), \psi \in D(A)$ olsun. Öyleyse fark şeması (3.1)'in çözümü için aşağıdaki kararlılık eşitsizlikleri $2 \le k \le N$ aralığında doğrudur:

$$\|u_k\|_H \le \tau \sum_{s=1}^{k-1} \left\|A^{-\frac{1}{2}} f_s\right\|_H + \left\|A^{-\frac{1}{2}}\psi\right\|_H + \|\varphi\|_H \tag{3.2}$$

$$\left\|A^{\frac{1}{2}} u_k\right\|_H \le \tau \sum_{s=1}^{k-1} \|f_s\|_H + \left\|A^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_H + \|\psi\|_H, \tag{3.3}$$

$$\|Au_k\|_H \le 2\sum_{s=1}^{k-1} \|f_s - f_{s-1}\|_H + \|f_1\|_H + \left\|A^{\frac{1}{2}}\psi\right\|_H + \|A\varphi\|_H \tag{3.4}$$

$$\|u_1\|_H \le \|\varphi\|_H + \left\|\left(I + i\tau A^{\frac{1}{2}}\right) A^{-\frac{1}{2}}\psi\right\|_H,$$

$$\left\|A^{\frac{1}{2}} u_1\right\|_H \le \left\|A^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_H + \left\|\left(I + i\tau A^{\frac{1}{2}}\right)\psi\right\|_H,$$

$$\|Au_1\|_H \le \|A\varphi\|_H + \left\|\left(I + i\tau A^{\frac{1}{2}}\right) A^{\frac{1}{2}}\psi\right\|_H.$$

Bu teoremin ispatı aşağıdaki formüllere ve kestirimlere dayanır.

$$u_1 = \varphi + \tau\psi, \qquad 2 \le k \le N \text{ için}$$

$$u_k = \frac{1}{2}\left[R^{k-1} - \breve{R}^{k-1}\right]\varphi + \left(R - \tilde{R}\right)^{-1}\tau R\left(R^k - \tilde{R}\right)\psi - \sum_{s=1}^{k-1}\frac{\tau}{2i}A^{-\frac{1}{2}}\left[R^{k-s} - \breve{R}^{k-s}\right]f_s$$

$$= \frac{1}{2}\left[R^{k-1} - \breve{R}^{k-1}\right]\varphi + \left(R - \tilde{R}\right)^{-1}\tau R\left(R^k - \tilde{R}\right)\psi +$$

$$A^{-1}\frac{1}{2}\sum_{s=2}^{k-1}\left[R^{k-s} - \breve{R}^{k-s}\right](f_{s-1} - f_s) + 2f_{k-1} - \left[R^{k-1} - \breve{R}^{k-1}\right]f_1 \tag{3.5}$$

dır. Burada $R = (\left(I + i\tau A^{\frac{1}{2}}\right))^{-1}$, $\widetilde{R} = \left(I - i\tau A^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$ dır ve aşağıdaki kestirimler

$$\begin{cases} \|R\|_{H\to H} \le 1, \ \|\widetilde{R}\|_{H\to H} \le 1; \\ \left\|R\,\widetilde{R}^{-1}\right\|_{H\to H} \le 1, \ \left\|\widetilde{R}\,R^{-1}\right\|_{H\to H} \le 1; \\ \left\|\tau A^{\frac{1}{2}}R\right\|_{H\to H} \le 1, \ \left\|\tau A^{\frac{1}{2}}\widetilde{R}\right\|_{H\to H} \le 1; \end{cases} \tag{3.6}$$

doğrudur.

Formül (3.5)'in $A^{1/2}$ operatörü tarafından üretildiğini ve fark şeması (3.1)’in çözümleri için kararlılık kestirimlerini kanıtlamak amacıyla kullanıldığını belirtelim. Ancak, bu fark şeması (3.1)’in pratik olarak gerçekleştirilmesi için, (Achour, D. ve Belacel, A., 2014; Ashyralyev, A. ve Akat, M., 2011.)’de olduğu üzere, $A^{\frac{1}{2}}$ operatörü kullanılmaz. Ayrıca, k=1 durumunda bu kararlılık eşitsizlikleri $k = 2,\dots,N$ durumlarındaki eşitsizliklere göre daha zayıftır. Ancak, bu tür eşitsizlikleri elde etmek uygulamalar için önemlidir. $a^\tau = (ak)$ yaklaşıklığın örgü (mesh) fonksiyonunu temsil etmektedir. Öyleyse, τ 0’a yaklaşırken $\tau\|Aa_1\|_H$’ın $\|a_1\|_H$’tan daha yavaş olmayan biçimde 0’a yaklaştığını varsayarsak, $\left\|\left(I + i\tau A^{\frac{1}{2}}\right)a_1\right\|_H \sim \|a_1\|_H = o(\tau)$ olur. Uzay değişkenlerinde verilerin düzlük (smoothness) özelliği üzerindeki ek sınırlama aracılığı ile uygulamalarda yer alır.

Aşağıdaki kestirimin olmadığı (eksik olduğu)

$$\|u_1\|_H \leq \|\varphi\|_H + \left\|A^{-\frac{1}{2}}\psi\right\|_H \tag{3.7}$$

açıktır. Bununla birlikte, (2.2) başlangıç değer problemi için birinci dereceden doğruluk modifikasyon fark şemasının çözümü için kestirimler,

$$\begin{cases} \tau^{-2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) + Au_{k+1} = f_k, \qquad f_k = f(t_k),\ \ t_k = k\tau, \\ 1 \leq k \leq N-1, \quad N\tau = 1, \\ (I + \tau^2 A)\tau^{-1}(u_1 - u_0) = \psi, \qquad u_0 = \varphi, \end{cases} \tag{3.8}$$

fark şeması (3.1)'in çözümüne yönelik kestirimlerden daha iyidir.

Teorem 3.1.2. $\varphi \in D(A)$, $\psi \in D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$ olsun. Öyle ise, fark şeması (3.8)'in çözümü için $1 \leq k \leq N$ aralığında aşağıdaki kararlılık eşitsizlikleri doğrudur:

$$\begin{cases} \|u_k\|_H \leq \tau \sum_{s=1}^{k-1} \left\|A^{-\frac{1}{2}} f_s\right\|_H + \left\|A^{-\frac{1}{2}}\psi\right\|_H + \|\varphi\|_H, \\ \left\|A^{\frac{1}{2}} u_k\right\|_H \leq \tau \sum_{s=1}^{k-1} \|f_s\|_H + \left\|A^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_H + \|\psi\|_H, \\ \|Au_k\|_H \leq 2 \sum_{s=1}^{k-1} \|f_s - f_{s-1}\|_H + \|f_1\|_H + \left\|A^{\frac{1}{2}}\psi\right\|_H + \|A\varphi\|_H. \end{cases} \tag{3.9}$$

Bu teoremin ispatı aşağıdaki formüllere ve (3.6) kestirimlerine dayanır:

$$u_1 = \varphi + \tau R\tilde{R}\psi, \qquad 2 \leq k \leq N \text{ için}$$

$$u_k = \frac{1}{2}\left[R^{k-1} - \breve{R}^{k-1}\right]\varphi + \left(R - \tilde{R}\right)^{-1} \tau R\left(R^k - \tilde{R}\right) R\tilde{R}\psi - \sum_{s=1}^{k-1} \frac{\tau}{2i} A^{-\frac{1}{2}}\left[R^{k-s} - \breve{R}^{k-s}\right] f_s$$

$$= \frac{1}{2}\left[R^{k-1} - \breve{R}^{k-1}\right]\varphi + \left(R - \tilde{R}\right)^{-1} \tau R\left(R^k - \tilde{R}\right) R\tilde{R}\psi$$

$$+A^{-1}\frac{1}{2}\sum_{s=2}^{k-1}\left[R^{k-s}-\tilde{R}^{k-s}\right](f_{s-1}-f_s)+2f_{k-1}-\left[R^{k-1}-\tilde{R}^{k-1}\right]f_1. \tag{3.10}$$

3.2 İkinci Mertebe Fark Şemalari

Başlangıç değer problemi (2.2) ifadesinin yaklaşık çözümleri için ikinci mertebeden doğruluk fark şeması

$$\begin{cases}\tau^{-2}\left(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}\right)+Au_k+\dfrac{\tau^2}{4}A^2u_{k+1}=f_k,\\ f_k=f(t_k),\qquad t_k=k\tau,\qquad 1\le k\le N-1,\quad N\tau=1,\\ (I+\tau^2A)\tau^{-1}(u_1-u_0)=\dfrac{\tau}{2}\left(f_0-Au_0\right)+\varphi,\quad f_0=f(0),\qquad u_0=\varphi,\end{cases} \tag{3.11}$$

$$\begin{cases}\tau^{-2}\left(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}\right)+\dfrac{1}{4}Au_k+\dfrac{1}{4}A\left(u_{k+1}+u_{k-1}\right)=f_k\\ f_k=f(t_k),t_k=k\tau,\qquad 1\le k\le N-1,\quad N\tau=1\\ (I+\tau^2A)\tau^{-1}(u_1-u_0)=\dfrac{\tau}{2}\left(f_0-Au_0\right)+\psi,\quad f_0=f(0),\qquad u_0=\varphi,\end{cases} \tag{3.12}$$

olarak verilir. Bu fark şemalarının çözümüne yönelik kararlılık kestirimleri aşağıdaki teoremle elde edilmiştir.

Teorem 3.2.1. $\varphi\in D(A),\psi\in D(A^{\frac{1}{2}})$ olsun. Öyle ise, (3.11) fark şemasının çözümü için aşağıdaki kararlılık eşitsizlikleri $1\le k\le N$ aralığı için doğrudur:

$$\|u_k\|_H\le\tau\sum_{s=0}^{k-1}\left\|A^{-\frac{1}{2}}f_s\right\|_H+\left\|A^{-\frac{1}{2}}\psi\right\|_H+\|\varphi\|_H, \tag{3.13}$$

$$\left\|A^{\frac{1}{2}}u_k\right\|_H\le\tau\sum_{s=1}^{k-1}\|f_s\|_H+\left\|A^{\frac{1}{2}}\varphi\right\|_H+\|\psi\|_H, \tag{3.14}$$

$$\|Au_k\|_H \leq 2\sum_{s=1}^{k-1}\|f_s - f_{s-1}\|_H + \|f_0\|_H + \left\|A^{\frac{1}{2}}\psi\right\|_H + \|A\varphi\|_H. \tag{3.15}$$

Bu teoremin ispatı (Ashyralyev ve Sobolevcskii, 2004) ve aşağıdaki formül ve kestirimlere dayanır:

$$u_1 = (I + \tau^2 A^{-1})\left[\left(I + \frac{\tau^2}{2}A\right)\varphi + \tau\psi + \frac{\tau^2}{2}f_0\right]$$

$$u_k = \left[R^k + \tau R\big(R - \tilde{R}\big)^{-1}[R^k - \tilde{R}^k](I + \tau^2 A)^{-1}\left(-\tau A + iA^{\frac{1}{2}}\right)\right]\varphi$$

$$+\tau R\big(R - \tilde{R}\big)^{-1}[R^k - \tilde{R}](I + \tau^2 A)^{-1}\psi + \frac{\tau^2}{2}R\big(R - \tilde{R}\big)^{-1}[R^k - \tilde{R}](I + \tau^2 A)^{-1}f_0$$

$$-\sum_{s=1}^{k-1}\frac{\tau}{2i}A^{-\frac{1}{2}}\big[R^{k-s} - \breve{R}^{k-s}\big]f_s$$

$$\begin{aligned} &= \left[R^k + \tau R\big(R - \tilde{R}\big)^{-1}\big[R^k - \breve{R}^k\big](I + \tau^2 A)^{-1}\left(-\tau A + iA^{\frac{1}{2}}\right)\right]\varphi \\ &\quad + \tau R\big(R - \tilde{R}\big)^{-1}[R^k - \tilde{R}^k](I + \tau^2 A)^{-1}\psi \\ &\quad + \frac{\tau^2}{2}R\big(R - \tilde{R}\big)^{-1}[R^k - \tilde{R}^k](I + \tau^2 A)^{-1}f_0 \\ &\quad + A^{-1}\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{k-1}\left[\left(I + \frac{i\tau}{2}A^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}R^{k-s} - \left(I - \frac{i\tau}{2}A^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\breve{R}^{k-s}\right](f_{s-1} - f_s) \\ &\quad + 2\left(I + \frac{i\tau}{2}A^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\left(I - \frac{i\tau}{2}A^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}f_{k-1} \\ &\quad - \left[\left(I + \frac{i\tau}{2}A^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}R^{k-1} - \left(I - \frac{i\tau}{2}A^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\breve{R}^{k-1}\right]f_0, \qquad 2 \leq k \leq N. \end{aligned}$$

Burada $R = \left(I + i\tau A^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\tau^2}{2}\right)A\right)^{-1}$, $\tilde{R} = (I - i\tau A^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\tau^2}{2}\right)A)^{-1}$ ve kestirimler ise

$$\begin{cases} \|R\|_{H\to H} \le 1, \quad \|\widetilde{R}\|_{H\to H} \le 1, \quad \|R\widetilde{R}^{-1}\|_{H\to H} \le 1, \\ \|R\,\widetilde{R}^{-1}\|_{H\to H} \le 1, \quad \left\|\left(I \mp \frac{i\tau}{2}A^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right\|_{H\to H} \le 1, \\ \left\|\left(I \mp \frac{i\tau}{2}A^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right\|_{H\to H} \le 1, \quad \left\|\tau A^{\frac{1}{2}}\left(I \mp \frac{i\tau}{2}A^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right\|_{H\to H} \le 1, \end{cases} \tag{3.16}$$

ifadeleridir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde yöntemin hata analizi ele alındı. Öncelikle, fark şeması yöntemi ile problemin nümerik çözümünü bulunup, nümerik çözüm ile tam çözüm karşılaştırılacaktır. Buradan da hata analizi tablosu elde edilecektir.

Böylece, (2.1) denklemi yerine fark şeması

$$\frac{u(t_{k+1},x_n)-2u(t_k,x_n)+u(t_{k-1},x_n)}{\tau^2}-\frac{u(t_{k+1},x_{n+1})-2u(t_{k+1},x_n)+u(t_{k+1},x_{n-1})}{h^2}$$
$$-\frac{u(t_{k+1},x_{n+1})-u(t_{k+1},x_n)}{h}=f(t_{k+1},x_n)$$

olarak yazılabilir. Küçük terimler ihmal edilip gerekli sadeleştirme yapılırsa birinci mertebe fark şeması

$$\begin{cases}\dfrac{u_n^{k+1}-2u_n^k+u_n^{k-1}}{\tau^2}-\dfrac{u_{n+1}^{k+1}-2u_n^{k+1}+u_{n-1}^{k+1}}{h^2}-\dfrac{u_{n+1}^{k+1}-u_n^{k+1}}{h}=f_n^{k+1},\\ u_0^k=u_M^k=0, 1\le k\le N, 1\le n\le M,\\ u_n^0=\varphi, \dfrac{u_n^1-u_n^0}{\tau}=\psi\end{cases} \tag{4.1}$$

elde edilir. Bu fark şeması

$$\left(\frac{-1}{h^2}-\frac{1}{h}\right)u_{n+1}^{k+1}+\left(\frac{1}{\tau^2}+\frac{2}{h^2}+\frac{1}{h}\right)u_n^{k+1}+\left(\frac{-2}{\tau^2}\right)u_n^k+\left(\frac{1}{\tau^2}\right)u_n^{k-1}+\left(\frac{-1}{h^2}\right)u_{n-1}^{k+1}=f_n^{k+1}$$

olarak da yazılabilir. Bu da

$$au_{n+1}^{k+1}+bu_n^{k-1}+cu_n^k+du_n^{k+1}+eu_{n-1}^{k+1}=f_n^{k+1}$$

$$AU_{n+1}+BU_n+CU_{n-1}=f_n$$

biçiminde yazılır. Burada,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b & c & d & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ \frac{-1}{\tau} & \frac{1}{\tau} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

İkinci mertebeden fark şeması için aşağıdaki sonuçlar Taylor açılımından

$$u_{tt} = \frac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} + O(\tau^2),$$

$$u_{xx} = \frac{u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k}{h^2} + O(h^2)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{u_{n+1}^{k+1} - 2u_n^{k+1} + u_{n-1}^{k+1}}{h^2} + \frac{1}{2}\frac{u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k-1} + u_{n-1}^{k-1}}{h^2} + O(h^2),$$

$$u_x = \frac{u_{n+1}^k - u_{n-1}^k}{2h} + O(\mathrm{h}) = \frac{1}{4}\frac{u_{n+1}^{k+1} - u_{n-1}^{k+1}}{h} + \frac{1}{4}\frac{u_{n+1}^{k-1} - u_{n-1}^{k-1}}{h} O(\mathrm{h})$$

elde edililir.

Eğer bu değerler (2.1) ifadesinde yazılırsa ikinci mertebeden fark şeması

$$\begin{cases} \dfrac{u_n^{k+1} - 2u_n^k + u_n^{k-1}}{\tau^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{u_{n+1}^{k+1} - 2u_n^{k+1} + u_{n-1}^{k+1}}{h^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{u_{n+1}^{k-1} - 2u_n^{k-1} + u_{n-1}^{k-1}}{h^2} \\ \qquad - \dfrac{1}{4}\dfrac{u_{n+1}^{k+1} - u_{n-1}^{k+1}}{h} - \dfrac{1}{4}\dfrac{u_{n+1}^{k-1} - u_{n-1}^{k-1}}{h} = f_n^k \\ u_0^k = u_M^k = 0, 1 \le k \le N, 1 \le n \le M \\ u_n^0 = \varphi, \dfrac{u_n^1 - u_n^0}{\tau} = \psi \end{cases} \tag{4.2}$$

olarak elde edilir. İkinci mertebeden fark şemasını aşağıdaki formda

$$\left(\frac{-1}{2h^2} - \frac{1}{4h}\right) u_{n+1}^{k+1} + \left(\frac{-1}{2h^2} - \frac{1}{4h}\right) u_{n+1}^{k-1} + \left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{h^2}\right) u_n^{k+1} + \left(\frac{-2}{\tau^2}\right) u_n^k$$

$$+ \left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{h^2}\right) u_n^{k-1} + \left(\frac{-1}{2h^2} + \frac{1}{4h}\right) u_{n-1}^{k+1} + \left(\frac{-1}{2h^2} + \frac{1}{4h}\right) u_{n-1}^{k-1} = f_n^k$$

$$a u_{n+1}^{k+1} + a u_{n+1}^{k-1} + b u_n^{k-1} + c u_n^k + b u_n^{k+1} + d u_{n-1}^{k+1} + d u_{n-1}^{k-1} = f_k$$

$$AU_{n+1} + BU_n + CU_{n-1} = f_n$$

yazılabilir. Burada,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b & c & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & c & b \\ \frac{-1}{\tau} & \frac{1}{\tau} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & d & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

Örnek 4.1.1.

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x)-\ u_{xx}(t,x)-u_x(t,x)=e^{-t}(2\sin(x)-\cos(x))\,, 0<t<1, 0<x<\pi \\ u(0,x)=sinx, u_t(0,x)=-sinx, \\ u(t,0)=\ u(t,\pi)=0, 0\le x\le \pi, 0\le t\le 1 \end{cases} \tag{4.3}$$

örneğinin tam ve yaklaşık çözümlerini bulup hata analizini yapınız.

Çözüm: (4.3) ifadesinin birinci mertebe fark şeması

$$\begin{cases} \dfrac{u_n^{k+1}-2u_n^k+u_n^{k-1}}{\tau^2}-\dfrac{u_{n+1}^{k+1}-2u_n^{k+1}+u_{n-1}^{k+1}}{h^2}-\dfrac{u_{n+1}^{k+1}-u_n^{k+1}}{h}=e^{-t_{k+1}}(2\sin(x_n)-\cos(x_n)) \\ u_0^k=u_M^k=0, \qquad 1\le k\le N, \qquad 1\le n\le M \\ u_n^0=\sin(x_n)\,, \qquad \dfrac{u_n^1-u_n^0}{\tau}=-\sin(x_n) \end{cases} \tag{4.4}$$

ve ikinci mertebe fark şeması

$$\begin{cases} \dfrac{u_n^{k+1}-2u_n^k+u_n^{k-1}}{\tau^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{u_{n+1}^{k+1}-2u_n^{k+1}+u_{n-1}^{k+1}}{h^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{u_{n+1}^{k-1}-2u_n^{k-1}+u_{n-1}^{k-1}}{h^2} \\ -\dfrac{1}{4}\dfrac{u_{n+1}^{k+1}-u_{n-1}^{k+1}}{h}-\dfrac{1}{4}\dfrac{u_{n+1}^{k-1}-u_{n-1}^{k-1}}{h}=e^{-t_k}(2\sin(x_n)-\cos(x_n)) \\ u_0^k=u_M^k=0, \qquad 1\le k\le N, \qquad 1\le n\le M \\ u_n^0=\sin(x_n)\,, \qquad \dfrac{u_n^1-u_n^0}{\tau}=-\sin(x_n)+\dfrac{\tau}{2}\dfrac{u_n^2-2u_n^1+u_n^0}{\tau^2} \end{cases} \tag{4.5}$$

dır.

Bu fark denklemlerini çözmek için, modifiye Gauss eliminasyonu işlemi uygulanır. Bu nedenle, matris denkleminin aşağıdaki formda bir çözümü

$$u_j=\alpha_{j+1}u_{j+1}+B_{j+1}, \qquad u_M=0, \qquad j=1,2,\dots,M-1$$

aranır. Burada α_j $(j=1,2,\dots,M)$, $(N+1)\times(N+1)$ birer kare matristir ve B_j $(j=1,2,\dots,M)$, $(N+1)\times 1$ dır. Buradan da

$$\alpha_{j+1}=-\left(B+C\alpha_j\right)^{-1}A\,,$$

$$\beta_{j+1}=\left(B+C\alpha_j\right)^{-1}\left(D+C\alpha_j\right),j=1,2,\dots,M-1,$$

olarak tanımlanan sütun matrisleridirler. Ayrıca, $j=1,2,\dots,M-1, \alpha_1$, $(N+1)\times(N+1)$ sıfır matrisi ve β_1, $(N+1)\times 1$ sıfır matrisidir. Bilgisayar hesaplamasının sonucu, ikinci mertebe doğru fark şemalarının birinci mertebeden doğru farkı şemasından daha doğru olduğunu göstermektedir. Tablo 4.1.'de sırasıyla $N=M=25, 50, 75, 100$ için sonuçları göstermektedir.

Hata analizi

$$E_M^N=\max_{1\le k\le N.1\le n\le M-1}\left|u(t_k,x_n)-u_n^k\right|,$$

$formül$ü $kullanılarak\ yapılır.$ Burada $u(t_k,x_n)$ tam çözümü, u_n^k ise (t_k,x_n)'de ki nümerik çözümü sembolize etmektedir. Sonuçlar Tablo 4.1.'de verilmiştir.

Aşağıdaki tablo birinci ve ikinci mertebeden yaklaşık çözüm ile tam çözümü göstermektedir.

Çizelge 4.1. Hata analizi.

$\boldsymbol{\tau = \frac{1}{N},\ h = \frac{\pi}{M}}$,	**N=M=25**	**N=M=50**	**N=M=75**	**N=M=100**
(4.4)'teki Fark Şeması	2.6201×10^{-2}	1.3692×10^{-2}	9.2669×10^{-3}	7.0005×10^{-3}
(4.5)'teki Fark Şeması	1.1160$\times 10^{-2}$	2.8879$\times 10^{-3}$	1.2980$\times 10^{-3}$	7.3389×10^{-4}

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tezde, kısmi diferansiyel denklemlerin (KDD) analitik çözümlerini bulmak için için Laplace, Fourier ve Fourier serisi çözüm metotları kullanılmıştır. KDD için gerekli tanımlar ve örnekler verilmiştir. Bundan sonra kısmi diferansiyel denklemler tanımlanan operatörler yardımıyla adi diferansiyel denklemlere indirgenmiştir. Bu adi diferansiyel denklemlerin tam çözümleri bulunmuş ve bu tam çözümü için kararlılık kestirimleri yapılmıştır. KDD için fark şemaları oluşturulup, bu fark şemaları için kararlılık kestirimleri yapılmıştır. Sonlu fark şeması metodu uygulanarak bu denklemlerin yaklaşık çözümleri Matlab programı yardımyla hesaplanmıştır. Tam ve yaklaşık çözümler karşılaştırılarak hata analizi tablosu verilmiştir. Bu KDD için etkili bu metot yüksek mertebeden diğer KDD'lere uygulanabilir.

KAYNAKLAR

ACHOUR, D. and BELACEL, A., 2014. Domination and factorization theorems for positive strongly p-summing operators. Positivity, 18 : 785–804.

ASHYRALYEV, A. and AKAT, M., 2011. An approximation of stochastic hyperbolic equa- tions. AIP Conf. Proc., 1389 : 625–628.

ASHYRALYEV, A. and AKAT, M., 2013. An approximation of stochastic hyperbolic equations: case with Wiener process. Math. Method. Appl. Sci., 36 : 1095– 1106.

ASHYRALYEV, A. and AKAT, M., 2012. An approximation of stochastic telegraph equa- tions. AIP Conf. Proc., 1479 : 598–601.

ASHYRALYEV, A. and ALTAY, N., 2006. A note on the well-posedness of the nonlocal boundaryvalue problem for elliptic difference equations. Appl. Math. Com- put., 175 : 49–60.

ASHYRALYEV, A. and SOBOLEVSKII, P., 2001. A note on the difference schemes for hyper- bolic equations. Abstr. Appl. Anal., 6 : 63–70.

ASHYRALYEV, A. and YILDIRIM, O., 2010. On multipoint nonlocal boundary value prob- lems for hyperbolic differential and difference equations Taiw. J. Math., 14 : 165–194.

ASHYRALYEV, A. and YILDIRIM, O., 2013. On the numerical solution of hyperbolic IBVP withhigh-orderstablefinitedifferencescheme. BoundaryValueProblem, 14 : 1–34.

ASHYRALYEV, A.and KÖKSAL, M.N., 2009. Onthenumerical solution of hyperbolic PDEs with variable space operator. Numerical Methods for Partial Differ- ential Equations, 25 : 1086–1099.

BANASIAK, J. and MIKA, J., 1998. Singularly perturved telegraph equations with appli- cations in the random walk theory. J. Appl. Math. Stoch. Anal., 11 : 9–28.

BIAZAR, J., EBRAHIMI, H., and AYATI, Z., 2009. An approximation to the solution of telegraph equation by variational iteration method. Numer. Meth. Part. D. E., 25 : 797–801.

DEHGHAN, M. and SHOKRI, A., 2008. A numerical methods for solving the hyperbolic telegraph equation. Numer. Meth. Part. D. E., 24 : 1080–1093.

AO, F. and CHI, C., 2007. Unconditionally stable difference schemes for a one-space- dimensional linear hyperbolic equation. Appl. Math. Comput., 187 : 1272–1276.

GHORBANALIZADEH, A. and SAWANO, Y., 2014. Approximation in Banach space by linear positive operators. Positivity, 18 : 585–594.

HESAMMEDDINI, E. and ASODOLAHİFARD, E., 2013. The Sinc-Collocation Method for Solving the Telegraph Equation. Jour. Compt. Eng. and Inform., 1 : 13-17

JIWARI, R., PANDIT S., MITTAL, R.C., 2012. A Differential Quadrature

Algorithm for the NumericalSolutionoftheSecond-Order One Dimensional Hyperbolic Telegraph Equation. Int. J. of Nonlinear Sci., 13 : 259–266.
JORDAN, P. and PURI, A., 1999. Digital signal propagation in dispersive media, J. Appl. Phys., 85 : 1273–1282.
SAADATMANDI, A. and DEHGHAN, M., 2010. Numerical solution of hyperbolic telegraph equation using the Chebyshev Tau method. Numer. Meth. Part. D. E., 26 : 239–252.
TWIZELL, E., 1979. An explicit difference method for the wave equation with extended stability range. BIT, 19 : 378–383.
VASILEV, V., KREIN, S., and PISKAREV, S., 1991. Operator Semigroups, Cosine Operator Functions, and Linear Differential Equations. Itogi Nauki Tekhniki, 204 : 87–202.
WESTON, V. and HE, S., 1993. Wave splitting of telegraph equation in R3 and its applications to inverse scattering. Inverse Probl., 9 : 789–812.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	Mustafa CAN
Uyruğu	:	T.C.
Doğurm Yeri ve Tarihi	:	Şanlıurfa-23.03.1983
Telefon	:	+90 (553) 616 09 29
e-Mail	:	msfcan2014@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı-İlçe-İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Gazi Lisesi, Merkez, ŞANLIURFA	2001
Üniversite	:	Harran Üniversitesi, Matematik Bölümü, Merkez, ŞANLIURFA	2007
Yüksek Lisans	:	Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, ŞANLIURFA	2018

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2009	Posta ve Telegraf Teşkilatı (PTT)	Memur

EKLER

Ek 1. Matlab Programı

```
'Birinic Mertebe'
N=25;M=25;
h=1/M;
tau=1/N;
a=(-1/(h^2)-(1/(h)));
b=(1/(tau^2)+(2/(h^2))+1/h);
c=(-(2/(tau^2)));
d=(1/(tau^2));
e= -(1/(h^2));
for i=2:N; A(i,i+1)=a; end;
A(N+1,N+1)=0;A;
for i=2:N;B(i,i+1)=b; end;
for i=2:N;B(i,i)=c; end;
for i=2:N;B(i,i-1)=d; end;
B(1,1)=1;B(N+1,1)=-1/tau;B(N+1,2)=1/tau;B(N+1,N+1)=0;B;
for i=2:N;C(i,i+1)=e;end;
C(N+1,N+1)=0;C;
for i=1:N+1;D(i,i)=1;end;D;
'fii(j) finding';
for j=1:M+1;
x=((j)*h);
fii(1,j:j)=sin(x);
fii(N+1,j:j)=-sin(x);
for k=2:N;
t=tau*(k-1);
fii(k,j:j)=(2*sin(x)-cos(x))*exp(-t);
```

```
end;
end;
alpha(N+1,N+1,1:1)=0;
betha(N+1,1:1)=0;
for j=1:M-1;
alpha(:,:,j+1:j+1)=inv(B+C*alpha(:,:,j:j))*(-A);
betha(:,j+1:j+1)=inv(B+C*alpha(:,:,j:j))*(D*fii(:,j:j)-C*betha(:,j:j));
end;
U(N+1,1,M:M)=0;
for z=M-1:-1:1;
U(:,:,z:z)=alpha(:,:,z+1:z+1)*U(:,:,z+1:z+1)+betha(:,z+1:z+1);
end;
for z=1:M;
p(:,z+1:z+1)=U(:,:,z:z); end;
'EXACT SOLUTION OF THIS PROBLEM';
for j=1:M+1; for k=1:N+1;
x=((j-1)*h);
es(k,j:j)=(sin(x))*exp(-t);
end;
end;
es;
%'ERROR ANALSIS';
maxes=max(max(es));
maxapp=max(max(p));
maxerror=max(max(abs(es-p)))
relativeerror=max(max(abs(es-p)))/max(max(abs(p)));
cevap=[maxes,maxapp,maxerror,relativeerror];

‘Ikinci Mertebe’
format long g
```

```
disp('Second Order Difference Scheme')

N=25;

M=25;

tau=pi/N;h=pi/M;

a=(-1/(2*(h^2)))-(1/(4*h));

b=(1/(tau^2))+(1/(h^2));

c=(-2/(tau^2));

d=(-1/(2*(h^2)))+(1/(4*h));

for i=2:N; A(i,i-1)=a; A(i,i+1)=a; end;

A(N+1,N+1)=0;A;

for i=2:N; C(i,i-1)=d; C(i,i+1)=d; end;

C(N+1,N+1)=0;C;

for i=2:N; B(i,i-1)=b; end;

for i=2:N; B(i,i)=c; end;

for i=2:N; B(i,i+1)=b; end;

B(1,1)=1;B(N+1,1)=-3/(2*tau),B(N+1,2)=2/(tau);B(N+1,3)=-
1/(2*tau);B(N+1,N+1)=0;B;

for i=1:N+1;D(i,i)=1;end;D;

'fii(j) finding';

for j=1:M+1;

x=((j)*h);

fii(1,j:j)=sin(x);

fii(N+1,j:j)=-sin(x);

for k=2:N;

t=tau*(k-1);

fii(k,j:j)=(2*sin(x)-cos(x))*exp(-t);

end;
```

```
end;
alpha(N+1,N+1,1:1)=0;
betha(N+1,1:1)=0;
for j=1:M-1;
alpha(:,:,j+1:j+1)=inv(B+C*alpha(:,:,j:j))*(-A);
betha(:,j+1:j+1)=inv(B+C*alpha(:,:,j:j))*(D*fii(:,j:j)-C*betha(:,j:j));
end;
U(N+1,1,M:M)=0;
for z=M-1:-1:1;
U(:,:,z:z)=alpha(:,:,z+1:z+1)*U(:,:,z+1:z+1)+betha(:,z+1:z+1);
end;
for z=1:M;
   p(:,z+1:z+1)=U(:,:,z:z);
end;
'EXACT SOLUTION OF THIS PROBLEM';
for j=1:M+1;
for k=1:N+1;
x=((j-1)*h);
es(k,j:j)=exp(-tau*(k-1))*sin(x);
end;
end;
es;
%'ERROR ANALSIS';
maxes=max(max(es));
maxapp=max(max(p));
maxerror=max(max(abs(es-p)))
relativeerror=max(max(abs(es-p)))/max(max(abs(p)));
```

```
cavap=[maxes,maxapp,maxerror,relativeerror];
```