T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODUNUN UYGULAMALARI

Nermin AĞIRAĞAÇ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2017

T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODUNUN UYGULAMALARI

Nermin AĞIRAĞAÇ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2017

Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ danışmanlığında, Nermin AĞIRAĞAÇ'ın hazırladığı **"Diferansiyel Dönüşüm Metodunun Uygulamaları"** konulu bu çalışma 29/12/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy çokluğu ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

			İmza
Danışman	:	Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ	....
Üye	:	Doç. Dr. Haydar ALICI	....
Üye	:	Prof. Dr. Necat POLAT	....

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Prof. Dr. Halil Murat ALĞIN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODUNUN UYGULAMALARI

Nermin AĞIRAĞAÇ

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ
Yıl: 2017, Sayfa: 42

Belirli bir yapıya sahip, özellikle birinci mertebeden

$$y' + p(x)y = q(x), \quad y' = (ax + by + c)^2, \quad y' = a\cos(\omega x + \alpha)y^2,$$
$$y' = a\sin(\omega x + \alpha)y^2, \quad y' = \frac{a_1 + b_1 x}{a_2 + b_2 y}, \quad y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}, \quad y' = \frac{a_1 xy + b_1}{a_2 x^2 + b_2}$$

bayağı diferansiyel denklemlerinin DTM ile çözümü ve ikinci mertebeden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

bayağı diferansiyel denkleminin DTM ile çözümü için gerekli teoremler formüle edilerek elde edilen bu formüller örneklerle izah edildi.

ANAHTAR KELİMELER: Bayağı diferansiyel denklemler, diferansiyel transform metodu, Taylor seri metodu

ABSTRACT

MSc Thesis

APPLICATIONS of DIFFERNTIAL TRANSFORM METHOD

Nermin AĞIRAĞAÇ

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Tanfer TANRIVERDİ
Year: 2017, Page: 42

Theorems are given for specific first-second order linear and nonlinear ordinary differential equations by differential transform method. These specific equations are

$$y' + p(x)y = q(x), \quad y' = (ax + by + c)^2, \quad y' = a\cos(\omega x + \alpha)y^2,$$
$$y' = a\sin(\omega x + \alpha)y^2, \quad y' = \frac{a_1 + b_1 x}{a_2 + b_2 y}, \quad y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}, \quad y' = \frac{a_1 xy + b_1}{a_2 x^2 + b_2}$$

and

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

Accuracy of obtained results is tested by examples.

KEY WORDS: Ordinary differential equations, Differential transform method, Taylor series method

TEŞEKKÜR

Bu tezin çalışmasında ve hazırlamasında bana her türlü imkanı sağlayan, benden desteklerini esirgemeyen, beni motive eden, bana her konuda yardımcı olan ve bana güvenen tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ'ye, tezimin jürisinde bulunan ve katkı sunan Doç. Dr. Haydar ALICI hocama

ve beni yetiştiren ve beni ben yapan anneme, babama ve ailemdeki herkese ayrı ayrı teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler teorisi doğada gerçek hayat problemlerini formüle eden en temel enstrümanlardan biridir. Ayrıca, diferansiyel denklemler; matematik, mühendislik, mekanik, fizik ve diğer sosyal bilimlerde de yaygın bir kullanıma sahiptir. Sistem konumun değişim oranı ve konumu içeren bir denklem tarafından idare ediliyorsa sistemin modellemesi genellikle ya bayağı diferansiyel denklemler ya da kısmi diferansiyel denklemler ile ifade edilir. Matematiksel fizikte ve diğer bir çok alanda modellemesi yapılan problemlerin çoğunu analitik olarak çözmek oldukça zordur. Dolayısıyla, analitik çözüme yakın çözümler elde etmek için çeşitli nümerik yöntemler geliştirilmiştir.

Bu yöntemlerden bir tanesi de Diferansiyel dönüşüm metodu (DDM) veya Diferansiyel transform metodu (DTM) dur. Literatürde daha çok "Differential Transform Method" olarak bilinmektedir. $y' = f(x, y)$ ve $y'' = f(x, y, y')$ türündeki denklemlerin DTM ile çözülmesi için gerekli teoremler oluşturularak analitik olarak serisel çözümleri için gerekli formüller elde edildi.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Diferansiyel denklemlerde, matematiksel fizikte ve diğer bir çok alanda modellemesi yapılan problemlerin çoğunu analitik olarak çözmek oldukça zordur. Dolayısıyla, analitik çözüme yakın çözümler elde etmek için çeşitli nümerik yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden bir tanesi de (Zhou, 1986) tarafından geliştirilen diferansiyel tranform metodu (DTM) dur. Bu metodun yeni olmadığı ve Taylor seri açılımı olduğu ve temeli çok eskilere dayandığı söylenmektedir (Bervillier, 2012). Bu metot kısmi diferansiyel denklemlerde ve bayağı diferansiyel denklemlerde sıklıkla kullanılmaktadır. Bu metotla, gereksiz hesaplamalara girmeden analitik çözümlerin serisel çözümleri kolaylıkla elde edilebilir. Bu seri çözümlerin limitleri halinde, yeterli sayıda terimlerin toplamı alındığında, gerçek çözüme gitmektedir.

Belli özelliğe sahip diferansiyel denklemlerin çözümleri mevcuttur (Codington ve Levinson, 1955). Diferansiyel denklemlerin uygulama alanları için (Debnath, 1997; Logan, 1994; Whitham, 1974) bakılabilir. Bu metodun kısmi diferansiyel denklemler ve bayağı diferansiyel denklemlerdeki kullanımı için (Chen ve Ho, 1996; Ayaz, 2004; Davis, 1962; Wazwaz, 2006) çalışmalarına bakılabilir.

Ayrıca, ülkemizde de son yıllarda yüksek lisans ve doktora seviyesinde diferansiyel dönüşüm metodu ile ilgili bir çok çalışma yapılmıştır (İlan, 2009; Toker, 2008; Sarp, 2014).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde literatürde çalışılmış bir, iki ve üç değişkenli diferansiyel dönüşüm metodunun tanımı ve ilgili teoremler ifade edilecektir. Bu kısımda kullanılan klasik temel tanım ve teoremler (Chen ve Ho, 1996; Ayaz, 2003; Ayaz, 2004; Arıkoğlu ve Özkol, 2005; Kurnaz ve Oturanç, 2005) çalışmalarından derlenmiştir.

3.1. Bir Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Metodu

İlk olarak bir boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu tanımlanacaktır.

Tanım 3.1 Tek degişkenli bir analitik $f(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $F(k)$ olmak üzere

$$F(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k} f(x)\right]\Bigg|_{x=x_0} \tag{3.1}$$

şeklindedir. $F(k)$ fonksiyonunun ters diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(x - x_0)^k F(k). \tag{3.2}$$

(3.1) denklemi (3.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k} f(x)\right]\Bigg|_{x=x_0} \tag{3.3}$$

(3.3) denklemi elde edilir. $x_0 = 0$ için

$$F(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k} f(x)\right]\Bigg|_{x=0}$$

şeklinde tanımlanır. $F(k)$ fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu denir.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F(k)x^k$$

burada, $f(x)$, $F(k)$ fonksiyonunun ters diferansiyel dönüşümüdür.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} f(x) \right] \Big|_{x=0} \tag{3.4}$$

(3.4) denklemine bir boyutlu DTM denir. $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k F(k)$$

ifadesinin kalan terimlerini (hata payını) ve çözümün yaklaşığı

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k F(k)$$

serisel olarak ifade edilir.

3.2. İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Metodu

Şimdi de iki değişkenli fonksiyonlar için diferansiyel dönüşüm metodu tanımlanacaktır.

Tanım 3.2 İki degişkenli bir analitik $f(x, y)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $F(k, h)$ olmak üzere

$$F(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} f(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right] \Big|_{(x=0, y=0)} \tag{3.5}$$

seklinde tanımlanır. $F(k, h)$ fonksiyonunun ters diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} F(k, h) x^k y^h \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanır. (3.5) denklemi (3.6) denkleminde yazılırsa

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{x^k y^h}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} f(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right] \Big|_{(x=0, y=0)} \tag{3.7}$$

denklemi elde edilir. (3.7) denklemine iki değişkenli DTM denir.

$$f(x, y) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{h=n+1}^{\infty} F(k, h) x^k y^h$$

ifadesi $f(x, y)$ foksiyonunun kalan terimlerini (hata payını) çözümün yaklaşığı

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{h=0}^{n} F(k, h) x^k y^h$$

serisel olarak ifade edilir.

3.3. Temel Teoremler

Bu kısımda, diferansiyel dönüşüm metodunun uygulamaları için kullanılacak teoremler ifade edilmiştir.

3.4. Bir Boyutlu Diferansiyel Dönüşümün Temel Teoremleri

Bir boyutlu diferansiyel dönüşüm için kullanılabilecek teoremler verilmiştir. Bu teoremlerin ispatları için (Chen ve Ho, 1996; Arıkoğlu ve Özkol, 2005; Hassan, 2002) çalışmalarına bakılabilir.

Teorem 3.1 λ sabit $y(x)$ analitik foksiyon ise $f(x) = \lambda y(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \lambda Y(k)$$

ile verilir.

Teorem 3.2 $y(x)$ ve $z(x)$ analitik iki fonksiyon ise $f(x) = y(x) \pm z(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = Y(k) \pm Z(k)$$

ile verilir.

Teorem 3.3 $y(x)$ analitik fonksiyon ise $f(x) = \frac{dy(x)}{dx}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = (k + 1)Y(k + 1)$$

ile verilir.

Teorem 3.4 $y(x)$ analitik foksiyon ise $f(x) = \frac{d^2 y(x)}{dx^2}$ foksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = (k+1)(k+2)Y(k+2)$$

ile verilir.

Teorem 3.5 $y(x)$ analitik fonksiyon ise $f(x) = \frac{d^n y(x)}{dx^n}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \frac{(k+n)!}{k!}Y(k+n)$$

ile verilir.

Teorem 3.6 $y(x)$ ve $z(x)$ analitik iki fonksiyon ise $f(x) = y(x)z(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \sum_{r=0}^{k} Y(r)Z(k-r)$$

ile verilir.

Teorem 3.7 $y_1(x)$, $y_2(x)$ ve $y_3(x)$ analitik fonksiyonlar ise $f(x) = y_1(x)y_2(x)y_3(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \sum_{k_2=0}^{k} \sum_{k_1=0}^{k_2} Y_1(k_1)Y_2(k_2-k_1)Y_3(k-k_2)$$

ile verilir.

Teorem 3.8 $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ analitik fonksiyonlar olsun. Bu halde, $f(x) = y_1(x)y_2(x)\ldots y_n(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^{k} \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \cdots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} Y_1(k_1)Y_2(k_2-k_1)\ldots Y_n(k-k_{n-1})$$

ile verilir.

Teorem 3.9 $u(x)$ ve $\frac{dv(x)}{dx}$ analitik fonksiyonlar ise $f(x) = u(x)\frac{dv(x)}{dx}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

$$F(k) = \sum_{r=0}^{k} (k - r + 1)V(k - r + 1)U(r)$$

ile verilir.

Teorem 3.10 λ sabit ise $f(x) = e^{\lambda x}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$$

ile verilir.

Teorem 3.11 $f(x)$ analitik fonksiyon ve λ sabit ise $f(x) = a^{\lambda x}$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \frac{\lambda^k}{k!}(\ln a)^k$$

ile verilir.

Teorem 3.12 $f(x) = x^m$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \delta(k - m) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{array} \right\}$$

ile verilir.

Teorem 3.13 $f(x) = \sin(\omega x + \alpha)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \frac{\omega^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi k}{2} + \alpha\right)$$

ile verilir.

Teorem 3.14 $f(x) = \cos(\omega x + \alpha)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$F(k) = \frac{\omega^k}{k!} \cos\left(\frac{\pi k}{2} + \alpha\right)$$

ile verilir.

Üç boyutlu diferansiyel dönüşüm için kullanılabilecek bazı teoremler için (Ayaz, 2004), integral diferansiyel denklemleri ve fark denklemleri ile ilgili temel teoremler üzerine (Arıkoğlu ve Özkol, 2005; Arıkoğlu ve Özkol, 2006) çalışmalarına bakılabilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Birinci mertebeden bazı diferansiyel denklemlerin DTM ile analizi

Burada, özel bir yapıya sahip birinci mertebeden diferansiyel denklemlerin DTM ile analizi için gerekli teoremler ve bu teoremlerin uygulamalarına yer verilmiştir.

4.2. Ana Sonuç 1

Teorem 4.1 p, q, y ve $y' \in C^k$ olsun. Bu halde, birinci mertebeden

$$y' + p(x)y = q(x), \quad y(0) = y_0 \tag{4.1}$$

denkleminin DTM ile $k+1$ inci terimi

$$Y(k+1) = -\frac{1}{k+1}\left[\sum_{r=0}^{k} P(r)Y(k-r) - Q(k)\right], \quad Y(0) = y_0$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla, (4.1) denkleminin DTM ile serisel çözümü

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k$$

ile verilir.

Sonuç 4.1 (4.1) denkleminin DTM ile yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} Y(k)x^k \quad \text{ve} \quad y(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} Y(k)x^k$$

ile verilir.

Sonuç 4.2 Eğer p ve q sabit ise bu halde, $k+1$ inci terimi

$$Y(k+1) = -\frac{1}{k+1}\left[pY(k) - q\delta(k)\right], \quad Y(0) = y_0$$

ile verilir.

İspat 4.1 Tanım 3.1 gereğince

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}y(x)\right]\bigg|_{x=0}$$

$$P(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}p(x)\right]\bigg|_{x=0}$$

$$Q(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}q(x)\right]\bigg|_{x=0}$$

yazılır. Teorem 3.2, Teorem 3.3 ve Teorem 3.6, (4.1) denkleminde kullanılırsa arzu edilen denkleminin diferansiyel dönüşümü

$$Y(k+1) = -\frac{1}{k+1}\left[\sum_{r=0}^{k} P(r)Y(k-r) - Q(k)\right],\ Y(0) = y_0$$

formülü ile verilir.

4.3. Uygulama

Örnek 4.1

$$y' + 4xy = 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \tag{4.2}$$

başlangıç değer problemine diferansiyel dönüşüm metodu uygulayarak çözelim.

Çözüm 4.1 Klasik olarak, (4.2) denkleminin çözümü

$$y = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2x^2}\right)$$

olduğunu biliyoruz. (4.2) denkleminin diferansiyel dönüşümü Teorem 4.1 gereğince

$$Y(k+1) = -\frac{1}{k+1}\left[\sum_{r=0}^{k} P(r)Y(k-r) - Q(k)\right] \tag{4.3}$$

ile verilir. Burada $p(x) = 4x$, $q(x) = 2x$ ve $Y(0) = 1$ değerleri (4.3) denkleminde kullanılır.

$$Y(k+1) = -\frac{1}{k+1}\left[4\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)Y(k-r) - 2\delta(k-1)\right]$$

elde edilir.

$$k = 0 \quad \text{ise} \quad Y(1) = 0,$$

$$k = 1 \quad \text{ise} \quad Y(2) = -1,$$

$$k = 2 \quad \text{ise} \quad Y(3) = 0,$$

$$k = 3 \quad \text{ise} \quad Y(4) = 1,$$

$$k = 4 \quad \text{ise} \quad Y(5) = 0,$$

$$k = 5 \quad \text{ise} \quad Y(6) = -\frac{2}{3},$$

$$k = 6 \quad \text{ise} \quad Y(7) = 0,$$

$$k = 7 \quad \text{ise} \quad Y(8) = \frac{1}{3},$$

$$\vdots$$

devam edilir.

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k \\ &= Y(0) + Y(1)x + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + Y(4)x^4 + Y(5)x^5 + Y(6)x^6 + \cdots \end{aligned}$$

$$y(x) = 1 - x^2 + x^4 - \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{3}x^8 - \cdots .$$

Denklem

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 + (-2x^2) + \frac{(-2x^2)^2}{2!} + \frac{(-2x^2)^3}{3!} + \frac{(-2x^2)^4}{4!} + \cdots\right)$$

olarak düzenlenir. Buradan, bu serinin limit hali

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2x^2}\right)$$

analitik çözümüne yakınsadığı görülür.

Örnek 4.2

$$y' - y = 0, \quad y(0) = 1 \tag{4.4}$$

başlangıç değer problemine diferansiyel dönüşüm metodu uygulayarak çözelim.

Çözüm 4.2 Klasik olarak, (4.4) denkleminin çözümü

$$y = e^x$$

olduğunu biliyoruz. (4.4) denkleminin diferansiyel dönüşümü Sonuç 4.2 gereğince

$$Y(k+1) = -\frac{1}{k+1}\left[pY(k) - q\delta(k)\right] \tag{4.5}$$

ile verilir. Burada $p(x) = -1$, $q(x) = 0$ ve $Y(0) = 1$ değerleri (4.5) denkleminde kullanılırsa

$$Y(k+1) = \frac{Y(k)}{k+1}$$

elde edilir.

$$k = 0 \quad \text{ise} \quad Y(1) = 1,$$

$$k = 1 \quad \text{ise} \quad Y(2) = \frac{1}{2},$$

$$k = 2 \quad \text{ise} \quad Y(3) = \frac{1}{6},$$

$$k = 3 \quad \text{ise} \quad Y(4) = \frac{1}{24},$$

$$\vdots$$

devam edilir.

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k \\ &= Y(0) + Y(1)x + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + Y(4)x^4 + \cdots \end{aligned}$$

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots .$$

Buradan, bu serinin limit hali

$$y(x) = e^x$$

analitik çözümüne yakınsadığı görülür.

4.4. Ana Sonuç 2

Teorem 4.2 a, b ve c sıfrdan farklı sabitler olmak üzere birinci mertebeden

$$y' = (ax + by + c)^2, \quad y(0) = y_0 \tag{4.6}$$

denkleminin DTM ile $k+1$ inci terimi

$$\begin{aligned} Y(k+1) = \frac{1}{k+1}\Big[& a^2\delta(k-2) + 2ac\delta(k-1) + c^2\delta(k) + 2bcY(k) \\ & + 2ab\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)Y(k-r) + b^2\sum_{r=0}^{k}Y(r)Y(k-r)\Big], \; Y(0) = y_0 \end{aligned}$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla, (4.6) denkleminin DTM ile serisel çözümü

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k$$

ile verilir. Serisel olarak yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} Y(k)x^k \quad \text{ve} \quad y(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} Y(k)x^k$$

biçimindedir.

İspat 4.2 (4.6) denkleminde sağ tarafın karesi alınırsa

$$y' = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2 + 2abxy + 2acx + 2bcy \tag{4.7}$$

elde edilir. (4.7) denkleminde her iki tarafa diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa

$$\begin{aligned}(k+1)Y(k+1) = \Bigg[& a^2\delta(k-2) + 2ac\delta(k-1) + c^2\delta(k) + 2bcY(k) \\ & + 2ab\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)Y(k-r) + b^2\sum_{r=0}^{k}Y(r)Y(k-r)\Bigg]\end{aligned}$$

elde edilir. Yani,

$$\begin{aligned}Y(k+1) = \frac{1}{k+1}\Bigg[& a^2\delta(k-2) + 2ac\delta(k-1) + c^2\delta(k) + 2bcY(k) \\ & + 2ab\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)Y(k-r) + b^2\sum_{r=0}^{k}Y(r)Y(k-r)\Bigg], \; Y(0) = y_0\end{aligned}$$

bulunur.

4.5. Uygulama

Örnek 4.3

$$y' = (x+y)^2, \quad y(0) = 1 \tag{4.8}$$

başlangıç değer problemine diferansiyel dönüşüm metodu uygulayarak çözelim.

Çözüm 4.3 Klasik olarak, (4.8) denkleminin $y(0) = 1$ şartını sağlayan çözümü

$$y = \frac{1+\tan x}{1-\tan x} - x$$

veya

$$y(x) = 1 + x + 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \cdots$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi de (4.8) denkleminin diferansiyel dönüşümü Teorem 4.2

gereğince

$$\begin{aligned} Y(k+1) = \frac{1}{k+1}\Big[& a^2\delta(k-2) + 2ac\delta(k-1) + c^2\delta(k) + 2bcY(k) \\ & + 2ab\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)Y(k-r) + b^2\sum_{r=0}^{k}Y(r)Y(k-r)\Big] \end{aligned} \tag{4.9}$$

ile verilir. Burada, $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ ve $Y(0) = 1$ değerleri (4.9) denkleminde kullanılırsa

$$Y(k+1) = \frac{1}{k+1}\left[\delta(k-2) + 2\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)Y(k-r) + \sum_{r=0}^{k}Y(r)Y(k-r)\right]$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} k &= 0 \quad \text{ise} \quad Y(1) = 1, \\ k &= 1 \quad \text{ise} \quad Y(2) = 2, \\ k &= 2 \quad \text{ise} \quad Y(3) = \frac{8}{3}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

devam edilir.

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k \\ &= 1 + x + 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \cdots \end{aligned}$$

veya bu serinin limit halindeki kompakt formu

$$y(x) = \frac{1+\tan x}{1-\tan x} - x$$

biçimindedir.

4.6. Ana Sonuç 3

Teorem 4.3 a, ω ve α sıfırdan farklı sabitler olmak üzere birinci mertebeden

$$y' = a\cos(\omega x + \alpha)y^2, \quad y(0) = y_0 \tag{4.10}$$

denkleminin DTM ile $k+1$ inci terimi

$$Y(k+1) = \frac{a}{k+1}\left[\sum_{k_2=0}^{k}\sum_{k_1=0}^{k_2}\frac{\omega^{k_1}}{k_1!}\cos\left(\frac{k_1\pi}{2}+\alpha\right)Y(k_2-k_1)Y(k-k_2)\right],\ Y(0) = y_0$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla, (4.10) denkleminin DTM ile serisel çözümü

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k$$

ile verilir. Serisel olarak yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} Y(k)x^k \quad \text{ve} \quad y(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} Y(k)x^k$$

biçimindedir.

İspat 4.3 (4.10) denklemin her iki tarafına diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa

$$(k+1)Y(k+1) = a\left[\sum_{k_2=0}^{k}\sum_{k_1=0}^{k_2}\frac{\omega^{k_1}}{k_1!}\cos\left(\frac{k_1\pi}{2}+\alpha\right)Y(k_2-k_1)Y(k-k_2)\right]$$

elde edilir. Yani,

$$Y(k+1) = \frac{a}{k+1}\left[\sum_{k_2=0}^{k}\sum_{k_1=0}^{k_2}\frac{\omega^{k_1}}{k_1!}\cos\left(\frac{k_1\pi}{2}+\alpha\right)Y(k_2-k_1)Y(k-k_2)\right],\ Y(0) = y_0$$

bulunur.

4.7. Uygulama

Örnek 4.4

$$y' = -\cos(2x)y^2, \quad y(0) = 1 \tag{4.11}$$

başlangıç değer problemine diferansiyel dönüşüm metodu uygulayarak çözelim.

Çözüm 4.4 Klasik olarak, (4.11) denkleminin $y(0) = 1$ şartını sağlayan çözümü

$$y(x) = \frac{2}{\sin(2x) + 2}$$

veya

$$y(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \cdots$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi de (4.11) denkleminin diferansiyel dönüşümü Teorem 4.3 gereğince

$$Y(k+1) = \frac{a}{k+1}\left[\sum_{k_2=0}^{k}\sum_{k_1=0}^{k_2}\frac{\omega^{k_1}}{k_1!}\cos\left(\frac{k_1\pi}{2}+\alpha\right)Y(k_2-k_1)Y(k-k_2)\right] \tag{4.12}$$

ile verilir. Burada, $a = -1$, ve $Y(0) = 1$ değerleri (4.12) denkleminde kullanılırsa

$$Y(k+1) = -\frac{1}{(k+1)}\left[\sum_{k_2=0}^{k}\sum_{k_1=0}^{k_2}\frac{2^{k_1}}{k_1!}\cos(\frac{k_1\pi}{2})Y(k_2-k_1)Y(k-k_2)\right]$$

elde edilir.

$$k = 0 \quad \text{ise} \quad Y(1) = -1,$$

$$k = 1 \quad \text{ise} \quad Y(2) = 1,$$

$$k = 2 \quad \text{ise} \quad Y(3) = -\frac{1}{3},$$

$$k = 3 \quad \text{ise} \quad Y(4) = -\frac{1}{3},$$

$$\vdots$$

devam edilir.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k = 1 - x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \cdots$$

veya bu serinin limit halindeki kompakt formu

$$y(x) = \frac{2}{\sin(2x) + 2}$$

biçimindedir.

4.8. Ana Sonuç 4

Teorem 4.4 a, ω ve α sıfırdan farklı sabitler olmak üzere birinci mertebeden

$$y' = a\sin(\omega x + \alpha)y^2, \quad y(0) = y_0 \tag{4.13}$$

denkleminin DTM ile $k+1$ inci terimi

$$Y(k+1) = \frac{a}{k+1}\left[\sum_{k_2=0}^{k}\sum_{k_1=0}^{k_2}\frac{\omega^{k_1}}{k_1!}\sin\left(\frac{k_1\pi}{2} + \alpha\right)Y(k_2 - k_1)Y(k - k_2)\right], \; Y(0) = y_0$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla, (4.13) denkleminin DTM ile serisel çözümü

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k$$

ile verilir. Serisel olarak yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} Y(k)x^k \quad \text{ve} \quad y(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} Y(k)x^k$$

biçimindedir.

İspat 4.4 Teorem 4.3 ile benzerdir.

4.9. Ana Sonuç 5

Teorem 4.5 a_1, a_2, b_1 ve b_2 sıfırdan farklı sabitler olmak üzere birinci mertebeden

$$y' = \frac{a_1 + b_1 x}{a_2 + b_2 y}, \quad y(0) = y_0 \tag{4.14}$$

denkleminin DTM ile $k+1$ inci terimi

$$Y(k+1) = \frac{1}{(k+1)(a_2+b_2Y(0))}\Big[a_1\delta(k)+b_1\delta(k-1) \\ - b_2\sum_{r=0}^{k-1}(r+1)Y(r+1)Y(k-r)\Big], \ Y(0)=y_0$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla, (4.14) denkleminin DTM ile serisel çözümü

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}Y(k)x^k$$

ile verilir. Serisel olarak yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}Y(k)x^k \quad \text{ve} \quad y(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}Y(k)x^k$$

biçimindedir.

İspat 4.5 (4.14) denklemine içler dışlar çarpımı uygulanırsa

$$a_2y'+b_2yy'=a_1+b_1x$$

elde edilir. Denklemin her iki tarafına diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa

$$a_2(k+1)Y(k+1)+b_2\sum_{r=0}^{k}(r+1)Y(r+1)Y(k-r)=a_1\delta(k)+b_1\delta(k-1)$$

elde edilir. Buradan, $k+1$ inci terim çekilirse

$$(k+1)Y(k+1)[a_2+b_2Y(0)]=a_1\delta(k)+b_1\delta(k-1) \\ - b_2\sum_{r=0}^{k-1}(r+1)Y(r+1)Y(k-r)$$

elde edilir. Yani,

$$Y(k+1) = \frac{1}{(k+1)[a_2+b_2Y(0)]}\Big[a_1\delta(k)+b_1\delta(k-1) \\ - b_2\sum_{r=0}^{k-1}(r+1)Y(r+1)Y(k-r)\Big], \ Y(0)=y_0$$

bulunur.

4.10. Uygulama

Örnek 4.5

$$y' = \frac{2-x}{1+y}, \quad y(0) = 1 \tag{4.15}$$

başlangıç değer problemine diferansiyel dönüşüm metodu uygulayarak çözelim.

Çözüm 4.5 Klasik olarak, (4.15) denkleminin $y(0) = 1$ şartını sağlayan çözümü

$$y(x) = -1 + 2\left(1 + \frac{4x - x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

veya

$$y(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{3x^4}{16} + \cdots$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi de (4.15) denkleminin diferansiyel dönüşümü Teorem 4.6 gereğince

$$\begin{aligned} Y(k+1) = \frac{1}{(k+1)[a_2 + b_2 Y(0)]} \Bigg[& a_1\delta(k) + b_1\delta(k-1) \\ & - b_2 \sum_{r=0}^{k-1} (r+1)Y(r+1)Y(k-r) \Bigg] \end{aligned} \tag{4.16}$$

ile verilir. Burada, $a_1 = 2$, $b_1 = -1$, $a_2 = 1$, $b_2 = 1$ ve $Y(0) = 1$ değerleri (4.16) denkleminde kullanılırsa

$$Y(k+1) = \frac{1}{(k+1)[1+Y(0)]}\left[2\delta(k) - \delta(k-1) - \sum_{r=0}^{k-1}(r+1)Y(r+1)Y(k-r)\right]$$

elde edilir.

$$k = 0 \quad \text{ise} \quad Y(1) = 1,$$

$$k = 1 \quad \text{ise} \quad Y(2) = -\frac{1}{2},$$

$$k = 2 \quad \text{ise} \quad Y(3) = \frac{1}{4},$$

$$k = 3 \quad \text{ise} \quad Y(4) = -\frac{3}{16},$$

$$\vdots$$

devam edilir.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^4 + \cdots$$

veya bu serinin kompakt formu

$$y(x) = -1 + 2\left(1 + \frac{4x - x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

bulunur.

4.11. Ana Sonuç 6

Teorem 4.6 a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 ve c_2 sıfırdan farklı sabitler olmak üzere birinci mertebeden

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}, \quad y(0) = y_0 \tag{4.17}$$

denkleminin DTM ile $k+1$ inci terimi

$$\begin{aligned} Y(k+1) = \frac{1}{(k+1)(b_2Y(0) + c_2)}\Bigg[& a_1\delta(k-1) + b_1Y(k) + c_1\delta(k) \\ & - a_2\sum_{r=0}^{k}(k-r+1)\delta(r-1)Y(k-r+1) \\ & - b_2\sum_{r=0}^{k-1}(r+1)Y(r+1)Y(k-r)\Bigg], \; Y(0) = y_0 \end{aligned}$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla, (4.17) denkleminin DTM ile serisel çözümü

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k$$

ile verilir. Serisel olarak yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} Y(k)x^k \quad \text{ve} \quad y(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} Y(k)x^k$$

biçimindedir.

İspat 4.6 (4.17) denklemine içler dışlar çarpımı uygulanırsa

$$a_2xy' + b_2yy' + c_2y' = a_1x + b_1y + c_1$$

elde edilir. Denklemin her iki tarafına diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa

$$a_2\sum_{r=0}^{k}(k-r+1)\delta(r-1)Y(k-r+1) + b_2\sum_{r=0}^{k}(r+1)Y(r+1)Y(k-r)$$
$$+c_2(k+1)Y(k+1) = a_1\delta(k-1) + b_1Y(k) + c_1\delta(k)$$

elde edilir. Buradan, $k+1$ inci terim çekilirse

$$(k+1)Y(k+1)[b_2Y(0)+c_2] = a_1\delta(k-1) + b_1Y(k) + c_1\delta(k)$$
$$-a_2\sum_{r=0}^{k}(k-r+1)\delta(r-1)Y(k-r+1) - b_2\sum_{r=0}^{k-1}(r+1)Y(r+1)Y(k-r)$$

elde edilir. Yani,

$$\begin{aligned} Y(k+1) = \frac{1}{(k+1)(b_2Y(0)+c_2)}\Bigg[& a_1\delta(k-1) + b_1Y(k) + c_1\delta(k) \\ & - a_2\sum_{r=0}^{k}(k-r+1)\delta(r-1)Y(k-r+1) \\ & - b_2\sum_{r=0}^{k-1}(r+1)Y(r+1)Y(k-r)\Bigg], \quad Y(0) = y_0 \end{aligned}$$

bulunur.

4.12. Uygulama

Örnek 4.6

$$y' = -\frac{x+2y+1}{2x+4y+3}, \quad y(0) = 1 \tag{4.18}$$

başlangıç değer problemine diferansiyel dönüşüm metodu uygulayarak çözelim.

Çözüm 4.6 Klasik olarak, (4.18) denkleminin $y(0) = 1$ şartını sağlayan çözümü

$$y = \frac{-(3+2x)}{4} + \frac{7}{4}\left[1 + \frac{4x}{49}\right]^{\frac{1}{2}}$$

veya

$$y(x) = 1 - \frac{3}{7}x - \frac{1}{686}x^2 + \frac{1}{7^5}x^3 - \cdots$$

olduğunu biliyoruz. (4.18) denkleminin diferansiyel dönüşümü Teorem 4.6 gereğince

$$\begin{aligned} Y(k+1) = \frac{1}{(k+1)(b_2Y(0)+c_2)} \Big[& a_1\delta(k-1) + b_1Y(k) + c_1\delta(k) \\ & - a_2 \sum_{r=0}^{k} (k-r+1)\delta(r-1)Y(k-r+1) \\ & - b_2 \sum_{r=0}^{k-1} (r+1)Y(r+1)Y(k-r) \Big] \end{aligned} \tag{4.19}$$

ile verilir. Burada, $a_1 = -1$, $b_1 = -2$, $c_1 = -1$, $a_2 = 2$, $b_2 = 4$, $c_2 = 3$ ve $Y(0) = 1$ değerleri (4.19) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} Y(k+1) = \frac{1}{(k+1)(4Y(0)+3)} \Big[& -\delta(k-1) - 2Y(k) - \delta(k) \\ & - 2 \sum_{r=0}^{k} (k-r+1)\delta(r-1)Y(k-r+1) \\ & - 4 \sum_{r=0}^{k-1} (r+1)Y(r+1)Y(k-r) \Big] \end{aligned}$$

elde edilir.

$$k = 0 \quad \text{ise} \quad Y(1) = -\frac{3}{7},$$

$$k = 1 \quad \text{ise} \quad Y(2) = -\frac{1}{686},$$

$$k = 2 \quad \text{ise} \quad Y(3) = \frac{1}{7^5},$$

$$\vdots$$

devam edilir.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k = 1 - \frac{3}{7}x - \frac{1}{686}x^2 + \frac{1}{7^5}x^3 - \cdots$$

veya bu serinin kompakt formu

$$y(x) = \frac{-(3+2x)}{4} + \frac{7}{4}\left[1 + \frac{4x}{49}\right]^{\frac{1}{2}}$$

bulunur.

4.13. Ana Sonuç 7

Teorem 4.7 a_1, a_2, b_1 ve b_2 sıfırdan farklı sabitler olmak üzere birinci mertebeden

$$y' = \frac{a_1 xy + b_1}{a_2 x^2 + b_2}, \quad y(0) = y_0 \tag{4.20}$$

denkleminin DTM ile $k+1$ inci terimi

$$Y(k+1) = -\frac{1}{b_2(k+1)}\left[a_2 \sum_{r=0}^{k} \delta(k-r-2)(r+1)Y(r+1) - a_1 \sum_{r=0}^{k} \delta(r-1)Y(k-r) - b_1\delta(k)\right], \; Y(0) = y_0$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla, (4.20) denkleminin DTM ile serisel çözümü

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k$$

ile verilir. Serisel olarak yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} Y(k)x^k \quad \text{ve} \quad y(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} Y(k)x^k$$

biçimindedir.

İspat 4.7 (4.20) denklemine içler dışlar çarpımı uygulanırsa

$$a_2x^2y' + b_2y' = a_1xy + b_1$$

elde edilir. Denklemin her iki tarafına diferansiyel dönüşüm metodu uygulanırsa

$$a_2 \sum_{r=0}^{k} \delta(k-r-2)(r+1)Y(r+1) + b_2(k+1)Y(k+1)$$
$$= a_1 \sum_{r=0}^{k} \delta(r-1)Y(k-r) + b_1\delta(k)$$

elde edilir. Buradan, $k+1$ inci terim çekilirse

$$b_2(k+1)Y(k+1) = -\Big[a_2 \sum_{r=0}^{k} \delta(k-r-2)(r+1)Y(r+1)$$
$$- a_1 \sum_{r=0}^{k} \delta(r-1)Y(k-r) - b_1\delta(k)\Big]$$

elde edilir. Yani,

$$Y(k+1) = -\frac{1}{b_2(k+1)}\Big[a_2 \sum_{r=0}^{k} \delta(k-r-2)(r+1)Y(r+1)$$
$$- a_1 \sum_{r=0}^{k} \delta(r-1)Y(k-r) - b_1\delta(k)\Big], \; Y(0) = y_0$$

bulunur.

4.14. Uygulama

Örnek 4.7

$$y' = \frac{2xy+3}{1-x^2}, \quad y(0) = 1 \tag{4.21}$$

başlangıç değer problemine diferansiyel dönüşüm metodu uygulayarak çözelim.

Çözüm 4.7 Klasik olarak, (4.21) denkleminin $y(0) = 1$ şartını sağlayan çözümü

$$y(x) = \frac{3x+1}{1-x^2}$$

veya

$$y(x) = 1 + 3x + x^2 + 3x^3 + x^4 + 3x^5 + \cdots$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi de (4.21) denkleminin diferansiyel dönüşümü Teorem 4.7 gereğince

$$Y(k+1) = -\frac{1}{b_2(k+1)}\Bigg[a_2 \sum_{r=0}^{k} \delta(k-r-2)(r+1)Y(r+1) \\ - a_1 \sum_{r=0}^{k} \delta(r-1)Y(k-r) - b_1\delta(k)\Bigg] \tag{4.22}$$

ile verilir. Burada, $a_1 = 2$, $b_1 = 3$, $a_2 = -1$, $b_2 = 1$ ve $Y(0) = 1$ değerleri (4.22) denkleminde kullanılırsa

$$Y(k+1) = -\frac{1}{(k+1)}\Bigg[-\sum_{r=0}^{k} \delta(k-r-2)(r+1)Y(r+1) \\ - 2\sum_{r=0}^{k} \delta(r-1)Y(k-r) - 3\delta(k)\Bigg]$$

elde edilir.

$k = 0$ ise $Y(1) = 3$,

$k = 1$ ise $Y(2) = 1$,

$k = 2$ ise $Y(3) = 3$,

$k = 3$ ise $Y(4) = 1$,

$k = 4$ ise $Y(5) = 3$,

$\vdots$

devam edilir.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k = 1 + 3x + x^2 + 3x^3 + x^4 + 3x^5 + \cdots$$

veya bu serinin kompakt formu

$$y(x) = \frac{3x+1}{1-x^2}$$

bulunur.

4.15. İkinci mertebeden bazı diferansiyel denklemlerin DTM ile analizi

Burada, özel bir yapıya sahip ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerin DTM ile analizi için gerekli teoremler ve bu teoremlerin uygulamalarına yer verilmiştir.

4.16. Ana Sonuç 1

Teorem 4.8 p, q, r, y, y' ve $y'' \in C^k$ olsun. Bu halde, ikinci mertebeden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad y(0) = y_0 \tag{4.23}$$

denkleminin DTM ile $k+2$ inci terimi

$$Y(k+2) = -\frac{1}{(k+1)(k+2)}\left[\sum_{r=0}^{k}(k-r+1)Y(k-r+1)P(r) + \sum_{r=0}^{k} Q(r)Y(k-r) - R(k)\right], \; Y(0) = y_0$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla, (4.23) denkleminin DTM ile serisel çözümü

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k$$

ile verilir.

Sonuç 4.3 (4.23) denkleminin yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} Y(k)x^k \quad \text{ve} \quad y(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} Y(k)x^k$$

ile verilir.

Sonuç 4.4 Eğer p, q ve r sabit ise bu halde, $k+2$ inci terimi

$$Y(k+2) = -\frac{1}{(k+1)(k+2)}\Big[p(k+1)Y(k+1) + qY(k) - r\delta(k)\Big]$$

ile verilir.

Not 4.1 (4.23) diferansiyel denklemi $y(a) = y_0$ ve $y(b) = y_1$ sınır değer koşulları ile verildiğinde $t = \frac{x-a}{b-a}$ dönüşümü ile yeni denklem $y(0) = y_0$ ve $y(1) = y_1$ sınır değer koşullarına sahip olur. Bu yeni denkleme DTM kolaylıkla uygulanır.

İspat 4.8 Tanım 3.1 gereğince

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}y(x)\right]\Bigg|_{x=0}$$

$$P(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}p(x)\right]\Bigg|_{x=0}$$

$$Q(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}q(x)\right]\Bigg|_{x=0}$$

$$R(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}r(x)\right]\Bigg|_{x=0}$$

yazılır. Teorem 3.2, Teorem 3.4, Teorem 3.9 ve Teorem 3.6, (4.23) denkleminde kullanılırsa arzu edilen denkleminin diferansiyel dönüşümü

$$Y(k+2) = -\frac{1}{(k+1)(k+2)}\Bigg[\sum_{r=0}^{k}(k-r+1)Y(k-r+1)P(r) + \sum_{r=0}^{k}Q(r)Y(k-r) - R(k)\Bigg],\ Y(0) = y_0$$

bulunur.

4.17. Uygulamalar

Örnek 4.8

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(3) = 0 \tag{4.24}$$

denklemine sınır değer şartlarını uygulayarak diferansiyel dönüşüm metodu ile çözelim.

Çözüm 4.8 Klasik olarak, (4.24) denkleminin çözümü

$$y(x) = -\frac{e^6}{e^3 - e^6}e^x + \frac{e^3}{e^3 - e^6}e^{2x}$$

olduğunu biliyoruz. (4.24) denkleminin diferansiyel dönüşümü Sonuç 4.4 gereğince

$$Y(k+2) = -\frac{1}{(k+1)(k+2)}\Big[p(k+1)Y(k+1) + qY(k) - r\delta(k)\Big] \tag{4.25}$$

ile verilir. Burada, $p(x) = -3$, $q(x) = 2$, $r(x) = 0$ ve $Y(0) = 1$ değerleri (4.25) denkleminde kullanılırsa

$$Y(k+2) = -\frac{1}{(k+2)(k+1)}\Big[-3(k+1)Y(k+1) + 2Y(k)\Big]$$

elde edilir.

$$k = 0 \quad \text{ise} \quad Y(2) = -\frac{1}{2}\Big[-3Y(1) + 2Y(0)\Big] = \frac{3}{2}Y(1) - 1,$$

$$k = 1 \quad \text{ise} \quad Y(3) = -\frac{1}{6}\Big[-6Y(2) + 2Y(1)\Big] = \frac{7}{6}Y(1) - 1,$$

$$k = 2 \quad \text{ise} \quad y(4) = -\frac{1}{12}\Big[-9Y(3) + 2Y(2)\Big] = \frac{5}{8}Y(1) - \frac{7}{12},$$

$$\vdots$$

devam edilir.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k = Y(0) + Y(1)x + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + \cdots$$

$$y(x) = 1 + Y(1)x + Y(1)\frac{3}{2}x^2 - x^2 + Y(1)\frac{7}{6}x^3 - x^3 + Y(1)\frac{5}{8}x^4 + \cdots$$

$$y(x) = e^x + (Y(1) - 1)(e^{2x} - e^x) \tag{4.26}$$

$$y(3) = 0 \quad \text{ise} \quad Y(1) = \frac{2e^3 - e^6}{e^3 - e^6}$$

olur. Buradan, $Y(1)$ değeri (4.26) denkleminde yerine yazılırsa

$$y(x) = -\frac{e^6}{e^3 - e^6}e^x + \frac{e^3}{e^3 - e^6}e^{2x}$$

bulunur.

Örnek 4.9

$$y'' - 3y' - 4y = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \tag{4.27}$$

başlangıç değer problemine diferansiyel dönüşüm metodu uygulayarak çözelim.

Çözüm 4.9 Klasik olarak, (4.27) denkleminin çözümü

$$y = -\frac{1}{10}e^{-x} + \frac{4}{15}e^{4x} - \frac{1}{6}e^x$$

olduğunu biliyoruz. (4.27) denkleminin diferansiyel dönüşümü Teorem 4.8 gereğince

$$\begin{aligned} Y(k+2) = -\frac{1}{(k+1)(k+2)}\Bigg[&\sum_{r=0}^{k}(k-r+1)Y(k-r+1)P(r) \\ &+ \sum_{r=0}^{k} Q(r)Y(k-r) - R(k)\Bigg] \end{aligned} \tag{4.28}$$

ile verilir. Burada, $p(x) = -3$, $q(x) = -4$, $r(x) = e^x$, $Y(0) = 0$ ve $Y(1) = 1$ değerleri (4.28) denkleminde kullanılırsa

$$Y(k+2) = \frac{1}{(k+2)(k+1)}\left[3(k+1)Y(k+1) + 4Y(k) + \frac{1^k}{k!}\right]$$

elde edilir.

$$k = 0 \quad \text{ise} \quad Y(2) = \frac{4}{2!},$$

$$k = 1 \quad \text{ise} \quad Y(3) = \frac{17}{3!},$$

$$k = 2 \quad \text{ise} \quad Y(4) = \frac{68}{4!},$$

$$\vdots$$

şeklinde devam ederek

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k = Y(0) + Y(1)x + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + \cdots$$

$$y(x) = x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{17}{3!}x^3 + \frac{68}{4!}x^4 + \cdots .$$

Denklem

$$\begin{aligned} y(x) = &-\frac{1}{10}\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) \\ &+ \frac{4}{15}\left(1 + 4x + \frac{(4x)^2}{2!} + \frac{(4x)^3}{3!} + \cdots\right) - \frac{1}{6}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) \end{aligned}$$

olarak düzenlenirse

$$y(x) = -\frac{1}{10}e^{-x} + \frac{4}{15}e^{4x} - \frac{1}{6}e^{x}$$

olduğu görülür.

Örnek 4.10

$$y'' + 4y = \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \tag{4.29}$$

başlangıç değer problemine diferansiyel dönüşüm metodu uygulayarak çözelim.

Çözüm 4.10 Klasik olarak (4.29) denkleminin çözümü

$$y(x) = \frac{2}{3}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos x + \sin 2x$$

olduğunu biliyoruz. (4.29) denkleminin diferansiyel dönüşümü Teorem 4.8 gereğince

$$\begin{aligned} Y(k+2) = -\frac{1}{(k+1)(k+2)}\Bigg[&\sum_{r=0}^{k}(k-r+1)Y(k-r+1)P(r) \\ &+ \sum_{r=0}^{k} Q(r)Y(k-r) - R(k)\Bigg] \end{aligned} \tag{4.30}$$

ile verilir. Burada, $p(x) = 0$, $q(x) = 4$, $r(x) = \cos x$, $Y(0) = 1$ ve $Y(1) = 2$ değerleri

(4.30) denkleminde kullanılırsa

$$Y(k+2) = \frac{1}{(k+2)(k+1)}\left[\frac{1^k}{k!}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 4Y(k)\right]$$

elde edilir.

$$k = 0 \quad \text{ise} \quad Y(2) = -\frac{3}{2!},$$

$$k = 1 \quad \text{ise} \quad Y(3) = -\frac{8}{3!},$$

$$k = 2 \quad \text{ise} \quad Y(4) = \frac{11}{4!},$$

$$k = 3 \quad \text{ise} \quad Y(5) = \frac{32}{5!},$$

$$\vdots$$

devam edilir.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k = Y(0) + Y(1)x + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + Y(4)x^4 + \cdots$$

$$y(x) = 1 + 2x - \frac{3}{2!}x^2 - \frac{8}{3!}x^3 + \frac{11}{4!}x^4 + \frac{32}{5!}x^5 + \cdots .$$

Denklem

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \cdots\right) \\ &\quad + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + \left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \cdots\right) \end{aligned}$$

olarak düzenlenirse

$$y(x) = \frac{2}{3}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos x + \sin 2x$$

elde edilir.

Örnek 4.11

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0 \tag{4.31}$$

sınır değer problemine diferansiyel dönüşüm metodunu uygulayarak çözelim.

Çözüm 4.11 Klasik olarak (4.31) denkleminin çözümü

$$y = c\sin(\sqrt{\lambda}x) \;\; ve \;\; \lambda = (k\pi)^2, \;\; k = 1, 2, 3, \ldots$$

olduğunu biliyoruz. (4.31) denkleminin diferansiyel dönüşümü Sonuç 4.4 gereğince

$$Y(k+2) = -\frac{1}{(k+1)(k+2)}\Big[p(k+1)Y(k+1) + qY(k) - r\delta(k)\Big] \tag{4.32}$$

ile verilir. Burada, $p(x) = 0$, $q(x) = \lambda$, $r(x) = 0$ ve $Y(0) = 0$ değerleri (4.32) denkleminde kullanılırsa

$$Y(k+2) = -\frac{\lambda Y(k)}{(k+1)(k+2)}$$

elde edilir.

$$k = 0 \quad \text{ise} \quad Y(2) = -\frac{\lambda Y(0)}{2} = 0,$$

$$k = 1 \quad \text{ise} \quad Y(3) = -\frac{\lambda Y(1)}{6} = -\frac{\lambda Y(1)}{3!},$$

$$k = 2 \quad \text{ise} \quad Y(4) = -\frac{\lambda Y(2)}{12} = 0,$$

$$k = 3 \quad \text{ise} \quad Y(5) = -\frac{\lambda Y(3)}{20} = \frac{\lambda^2 Y(1)}{5!},$$

$$k = 4 \quad \text{ise} \quad Y(6) = -\frac{\lambda Y(4)}{24} = 0,$$

$$k = 5 \quad \text{ise} \quad Y(7) = -\frac{\lambda Y(5)}{42} = -\frac{\lambda^3 Y(1)}{7!},$$

$$\vdots$$

şeklinde devam edilir. Burada, $Y(1)$ sınır değer şartını sağlayacak şekilde tanımlanması gerekir.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k = Y(0) + Y(1)x + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + Y(4)x^4 + \cdots$$

$$y(x) = Y(1)\left[x - \frac{\lambda x^3}{3!} + \frac{\lambda^2 x^5}{5!} - \frac{\lambda^3 x^7}{7!} + \cdots\right]$$

$$y(x) = \frac{Y(1)}{k\pi}\sin(k\pi x) \tag{4.33}$$

$$y(1) = 0 \quad ise \quad \frac{Y(1)}{k\pi}\sin(k\pi) = 0$$

buradan, $\sin(k\pi) = 0$ ve $Y(1) = k\pi$ dir. $Y(1)$ değeri (4.33) denkleminde yerine yazılırsa

$$y(x) = \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

bulunur.

Örnek 4.12

$$y'' = x, \quad y(0) = y(1) = 0 \tag{4.34}$$

sınır değer problemine diferansiyel dönüşüm metodunu uygulayarak çözelim.

Çözüm 4.12 Klasik olarak (4.34) denkleminin çözümü

$$y = -\frac{x}{6} + \frac{x^3}{6}$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi de (4.34) denkleminin diferansiyel dönüşümü Teorem 4.8 gereğince

$$\begin{aligned} Y(k+2) = -\frac{1}{(k+1)(k+2)}\Bigg[&\sum_{r=0}^{k}(k-r+1)Y(k-r+1)P(r) \\ &+ \sum_{r=0}^{k} Q(r)Y(k-r) - R(k)\Bigg] \end{aligned} \tag{4.35}$$

ile verilir. Burada, $p(x) = 0$, $q(x) = 0$, $r(x) = x$ ve $Y(0) = 0$ değerleri (4.35) denkleminde kullanılırsa

$$Y(k+2) = \frac{\delta(k-1)}{(k+2)(k+1)}$$

elde edilir.

$$k = 0 \quad \text{ise} \quad Y(2) = 0,$$

$$k = 1 \quad \text{ise} \quad Y(3) = \frac{1}{6},$$

$$k = 2, 3, \ldots \quad \text{ise} \quad Y(k+2) = 0,$$

Burada, $Y(1)$ in sınır değer şartını sağlayacak şekilde tanımlanması gerekir.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k = Y(0) + Y(1)x + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + Y(4)x^4 + \cdots$$

$$y(x) = Y(1)x + \frac{x^3}{6} \tag{4.36}$$

$$y(1) = 0 \quad \text{ise} \quad Y(1) + \frac{1}{6} = 0$$

buradan $Y(1) = -\frac{1}{6}$ bulunur. $Y(1)$ değeri (4.36) denkleminde yerine yazılırsa

$$y(x) = -\frac{x}{6} + \frac{x^3}{6}$$

bulunur.

Örnek 4.13

$$y'' = 1, \quad y(0) = y'(1) = 0 \tag{4.37}$$

sınır değer problemine diferansiyel dönüşüm metodunu uygulayarak çözelim.

Çözüm 4.13 Klasik olarak, (4.37) denkleminin çözümü

$$y(x) = -x + \frac{x^2}{2}$$

olduğunu biliyoruz. (4.37) denkleminin diferansiyel dönüşümü Sonuç 4.4 gereğince

$$Y(k+2) = -\frac{1}{(k+1)(k+2)}\Big[p(k+1)Y(k+1) + qY(k) - r\delta(k)\Big]. \tag{4.38}$$

Burada, $p(x) = 0, q(x) = 0, r(x) = 1, Y(0) = 0$ ve $Y(1) = 0$ değerleri (4.38) denkleminde kullanılırsa

$$Y(k+2) = \frac{\delta(k)}{(k+2)(k+1)}$$

elde edilir.

$$k = 0 \quad \text{ise} \quad Y(2) = \frac{1}{2},$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{ise} \quad Y(k+2) = 0,$$

Burada, $Y(1)$ in sınır değer şartını sağlayacak şekilde tanımlanması gerekir.

$$y(x) = Y(0) + Y(1)x + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + Y(4)x^4 + \ldots$$

$$y(x) = Y(1)x + \frac{x^2}{2} \tag{4.39}$$

$$y'(x) = Y(1) + x$$

olur.

$$y'(1) = 0 \quad \text{ise} \quad Y(1) = -1$$

$Y(1)$ değeri (4.39) denkleminde yerine yazılırsa

$$y(x) = -x + \frac{x^2}{2}$$

bulunur.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

p, q, y ve $y' \in C^k$ ise birinci mertebeden

$$y' + p(x)y = q(x), \quad y(0) = y_0$$

denkleminin bilinen genel çözümünün DTM analoğu olan seri çözümün $k+1$ inci terimi

$$Y(k+1) = -\frac{1}{k+1}\left(\sum_{r=0}^{k} P(r)Y(k-r) - Q(k)\right), \quad Y(0) = y_0$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla, (4.1) denkleminin DTM çözümü serisel olarak

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k$$

ile verilir. Serisel olarak yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} Y(k)x^k \quad \text{ve} \quad y(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} Y(k)x^k$$

biçimindedir. Aynı şekilde a, b ve c sıfırdan farklı sabitler olmak üzere birinci mertebeden

$$y' = (ax + by + c)^2, \quad y(0) = y_0$$

denkleminin bilinen genel çözümünün DTM analoğu olan seri çözümün $k+1$ inci terimi

$$\begin{aligned} Y(k+1) = \frac{1}{k+1}\Bigg(& a^2\delta(k-2) + 2ac\delta(k-1) + c^2\delta(k) + 2bcY(k) \\ & + 2ab\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)Y(k-r) + b^2\sum_{r=0}^{k}Y(r)Y(k-r)\Bigg), \; Y(0) = y_0 \end{aligned}$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla, (4.6) denkleminin DTM çözümü serisel olarak

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k$$

ile verilir. Serisel olarak yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} Y(k)x^k \quad \text{ve} \quad y(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} Y(k)x^k$$

biçimindedir. Aynı şekilde, a sıfırdan farklı sabit olmak üzere birinci mertebeden

$$y' = a\cos(\omega x + \alpha)y^2, \; y(0) = y_0$$

denkleminin genel çözümünün DTM analoğu olan seri çözümün $k+1$ inci terimi

$$Y(k+1) = \frac{a}{k+1}\left(\sum_{k_2=0}^{k}\sum_{k_1=0}^{k_2}\frac{\omega^k}{k_1!}\cos(\frac{k_1\pi}{2}+\alpha)Y(k_2-k_1)Y(k-k_2)\right), \; Y(0) = y_0$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla, (4.10) denkleminin DTM çözümü serisel olarak

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k$$

ile verilir. Serisel olarak yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} Y(k)x^k \quad \text{ve} \quad y(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} Y(k)x^k$$

biçimindedir. Benzer olarak, a sıfırdan farklı sabit olmak üzere birinci mertebeden

$$y' = a\sin(\omega x + \alpha)y^2, \; y(0) = y_0$$

denkleminin genel çözümünün DTM analoğu olan seri çözümün $k+1$ inci terimi

$$Y(k+1) = \frac{a}{k+1}\left(\sum_{k_2=0}^{k}\sum_{k_1=0}^{k_2}\frac{\omega^k}{k_1!}\sin(\frac{k_1\pi}{2}+\alpha)Y(k_2-k_1)Y(k-k_2)\right), \; Y(0) = y_0$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla, (4.13) denkleminin DTM çözümü serisel olarak

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k$$

ile verilir. Serisel olarak yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} Y(k)x^k \quad \text{ve} \quad y(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} Y(k)x^k$$

biçimindedir. Benzer tarzda a_1, a_2, b_1 ve b_2 sıfırdan farklı sabitler olmak üzere birinci mertebeden

$$y' = \frac{a_1 + b_1 x}{a_2 + b_2 y}, \ y(0) = y_0$$

denkleminin genel çözümünün DTM analoğu olan seri çözümün $k+1$ inci terimi

$$\begin{aligned} Y(k+1) = {} & \frac{1}{(k+1)(a_2 + b_2 Y(0))}\Bigg(a_1\delta(k) + b_1\delta(k-1) \\ & - b_2 \sum_{r=0}^{k-1}(r+1)Y(r+1)Y(k-r)\Bigg), \ Y(0) = y_0 \end{aligned}$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla, (4.14) denkleminin DTM çözümü serisel olarak

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k$$

ile verilir. Serisel olarak yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} Y(k)x^k \quad \text{ve} \quad y(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} Y(k)x^k$$

biçimindedir. Benzer muhakemeyle a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 ve c_2 sıfırdan farklı sabitler olmak üzere birinci mertebeden

$$y' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}, \ y(0) = y_0$$

denkleminin genel çözümünün DTM analoğu olan seri çözümün $k+1$ inci terimi

$$\begin{aligned} Y(k+1) = {} & \frac{1}{(k+1)(b_2 Y(0) + c_2)}\Bigg(a_1\delta(k-1) + b_1 Y(k) + c_1\delta(k) \\ & - a_2 \sum_{r=0}^{k}(k-r+1)Y(k-r+1)\delta(r-1) \\ & - b_2 \sum_{r=0}^{k-1}(r+1)Y(r+1)Y(k-r)\Bigg), \ Y(0) = y_0 \end{aligned}$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla, (4.17) denkleminin DTM çözümü serisel olarak

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k$$

ile verilir. Serisel olarak yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} Y(k)x^k \quad \text{ve} \quad y(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} Y(k)x^k$$

biçimindedir. Benzer muhakeme yürütülürse a_1, a_2, b_1 ve b_2 sıfırdan farklı sabitler olmak üzere birinci mertebeden

$$y' = \frac{a_1xy + b_1}{a_2x^2 + b_2}, \; y(0) = y_0$$

denkleminin genel çözümünün DTM analoğu olan seri çözümün $k+1$ inci terimi

$$Y(k+1) = -\frac{1}{b_2(k+1)}\Bigg(a_2 \sum_{r=0}^{k} \delta(k-r-2)(r+1)Y(r+1) \\ - a_1 \sum_{r=0}^{k} \delta(r-1)Y(k-r) - b_1\delta(k)\Bigg), \; Y(0) = y_0$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla, (4.20) denkleminin DTM çözümü serisel olarak

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k$$

ile verilir. Serisel olarak yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} Y(k)x^k \quad \text{ve} \quad y(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} Y(k)x^k$$

biçimindedir.

Son olarak, benzer muhakeme ile p, q, r, y, y' ve $y'' \in C^k$ ise ikinci mertebeden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \; y(0) = y_0,$$

denkleminin genel çözümünün DTM analoğu olan seri çözümün $k+1$ inci terimi

$$Y(k+2) = -\frac{1}{(k+1)(k+2)}\Bigg(\sum_{r=0}^{k}(k-r+1)Y(k-r+1)P(r) \\ + \sum_{r=0}^{k} Q(r)Y(k-r) - R(k)\Bigg), \; Y(0) = y_0$$

formülü ile verilir. Dolayısıyla, (4.23) denkleminin DTM çözümü serisel olarak

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k$$

ile verilir. Serisel olarak yaklaşık çözümü ve hata payı sırasıyla

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} Y(k)x^k \quad \text{ve} \quad y(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} Y(k)x^k$$

biçimindedir.

Kısaca, $y' = f(x, y)$ ve $y'' = f(x, y, y')$ denklemlerinin belirli bir yapısı için birinci ve ikinci mertebeden bayağı diferansiyel denklemlerin çözümü için gerekli teoremler diferansiyel dönüşüm metodu ile formüle edilerek örneklerle izah edildi.

Öneri olarak, ele alınan denklemlerden farklı olarak $f(x, y, y') = 0$, $y' = f(x, y)$, $f(x, y, y', y'') = 0$, $y'' = f(x, y, y')$ ve mertebesi ikiden daha büyük olan denklemlerin DTM ile çözümleri için yeni teoremler ve sonuçlar elde edilebilir. DTM yöntemi ile çözümlerin hesaplanabilirliği Taylor serisine göre daha hızlı ve ekonomiktir.

KAYNAKLAR

ARIKOGLU, A., and OZKOL, I., 2005. Solution of boundary value problem for integro differential equations by using differential transform method. Applied Mathematics and Computation, 168:1145-1158.

ARIKOGLU, A., and OZKOL, I., 2006. Solution of differential-difference equations by using differential transform method. Applied Mathematics and Computation, 181:153-162.

AYAZ, F., 2003. On the two dimensional differential transform method. Applied Mathematics and Computation, 143:361-374.

BERVILLIER, C., 2012. Status of the differential transformation method. Applied Mathematics and Computation, 218:10158–10170.

CHEN, C. K., and HO, S. H., 1996. Application of differential transformation to eigenvalue problems. Applied Mathematics and Computation, 79:179-188.

CODDINGTON, E. A., and LEVINSON, N., 1955. Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill, New York, USA, 429p.

DAVIS, H. T., 1962. Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations. Dover, New York, USA, 566p.

DEBNATH, L., 2005. Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. Birkhauser, Boston, MA, USA, 737p.

ESKİN İLAN, D., 2009. Diferansiyel dönüşüm metodu ve uygulamaları. Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Denizli, 84s.

HASSAN ABDEL-HALİM, I.H., 2002. Different applications for the differential transformation in the differential equations. Applied Mathematics and Computation, 129:183-201.

KURNAZ, A., and OTURANÇ, G., 2005. The differential transform approximation for the system of ordinary differential equations. International Journal of Computer Mathematics, 82:709-719.

LOGAN, J. D., 1994. An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations. Wiley-Interscience, New York, USA, 397p.

SARP, Ü., 2014. Bazı kısmi türevli diferansiyel denklemlerin diferansiyel dönüşüm yöntemi ile çözümü ve diğer yöntemlerle karşılaştırılması. Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir, 55s.

TOKER, M. M., 2008. Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin diferansiyel transform metodu ile çözümü ve diğer yöntemlerle karşılaştırılması. Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Konya, 63s.

ZHOU, J. K., 1986. Differential Transformation and Its Application for Electrical Circuits. Huazhong University Press, Wuhan, China.

WAZWAZ, A. M., 2006. The modified decomposition method for analytic treatment of differential equations. Applied Mathematics and Computation, 173:165-176.

WHITHAM, G. B., 1974. Linear and Nonlinear Waves, Wiley, New York, USA, 636p.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:** Nermin AĞIRAĞAÇ
Uyruğu	**:** T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:** Ceylanpınar, 1994
Telefon	**:**
Faks :	
e-mail	**:** nagiragac@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Şanlıurfa Lisesi, Şanlıurfa	2010
Üniversite	:	Harran Üni. Matematik Böl., Şanlıurfa	2014
Yüksek Lisans	:	Harran Üni. Matematik Böl., Şanlıurfa	2017

UZMANLIK ALANI : Matematik

YABANCI DİLLER : İngilizce