T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BANACH CEBİRLERİNDE WEDDERBURN AYRIŞIMI VE BANACH CEBİRLERİNİN BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Faik GÜRSOY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2008

T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BANACH CEBİRLERİNDE WEDDERBURN AYRIŞIMI VE BANACH CEBİRLERİNİN BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Faik GÜRSOY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA

2008

Yrd. Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK danışmanlığında, Faik GÜRSOY'un hazırladığı "*Banach Cebirlerinde Wedderburn Ayrışımı ve Banach Cebirlerinin Bazı Geometrik Özellikler*i" konulu bu çalışma 04/08/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK

Üye : Doç. Dr. Vatan KARAKAYA

Üye : Doç. Dr. Seyit TEMİR

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım

Prof.Dr. İbrahim BOLAT
Enstitü Müdürü

Bu Çalışma HÜBAK Tarafından Desteklenmiştir
Proje No:

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZ

Yüksek Lisans Tezi

BANACH CEBİRLERİNDE WEDDERBURN AYRIŞIMI VE BANACH CEBİRLERİNİN BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Faik GÜRSOY

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman : Yrd.Doç.Dr. Necip ŞİMŞEK
Yıl : 2008, Sayfa :78

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin amacı ve bu konunun seçilme gereksinimi anlatılmıştır. İkinci bölüm ise, tezin ilerleyen kısımlarında gerekli olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölüm ise Banach cebirlerinin Wedderburn ayrışımına ayrılmıştır. Bu bölümde ayrışım, Banach cebirleri ve Grup Banach cebirleri olarak ayrı ayrı ele alınmıştır. Dördüncü bölüm ise Banach cebirlerinin geometrik özellikleriyle ilgilidir. Bu özellikler, Banach cebirinin kompleks ve reel olması durumları ayrı ayrı ele alınarak incelenmiştir. Beşinci bölüm ise bir Banach uzayı için birim yuvarın sahip olduğu bazı geometrik özelliklerin incelenmesine ayrılmıştır. Altıncı bölüm ise tezin sonuçları ve önerilerine ayrılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Banach cebiri, Wedderburn ayrışımı, geometrik özellikler

ABSTRACT

Master Thesis

THE WEDDERBURN DECOMPOSITION OF BANACH ALGEBRAS AND SOME GEOMETRIC PROPERTIES OF BANACH ALGEBRAS

Faik GÜRSOY

Harran University
Graduate School of Natural Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK

Year:2008, Page:78

This thesis is composed of six parts. The first part explains the goal of the thesis and the reason for the choice of this topic. The second part mentions about basic definitions and theorems which are necessary for the following parts. In the third part, Wedderburn decomposition of Banach algebras is defined. In this part, the decomposition is explained as Banach algebras and Group Banach algebras seperately. When the subject comes to fourth part, it is related to the geometric properties of Banach algebras. These properties are analysed by explaining the circumstances of Banach algebras' being complex and real one by one. The fifth part is devoted to study some geometric properties which the unit ball has for a Banach space, and the sixth part gives information about the results of the thesis and the suggestions.

KEY WORDS: Banach algebra, Wedderburn decomposition, geometric properties

TEŞEKKÜR

Bu tezin başlangıcından bitiş safhasına kadar bana yol gösteren, çalışmalarımda yardımlarını esirgemeyen Yüksek Lisans Tez Danışmanım Adıyaman Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK'e teşekkürü ve sonsuz saygılarımı bir borç bilirim.

SİMGELER DİZİNİ

C, ***Z***, ***N***, T	:Kompleks sayılar, tam sayılar, doğal sayılar ve birim çember
A	:Banach cebiri
$Rad(A)$	:A Banach cebirinin radikali
I	:$A \supset I$ olmak üzere ideal
$hull(I)$,	:$h(I)$ I idealinin kabuğu
$ker(\theta)$	:θ dönüşümünün çekirdeği
Σ_A , Δ_A	:A cebirinin maximal ideal uzayı
$\oplus$	:Direkt toplam
P	:İzdüşüm operatörü
$r(a)$, $\|a\|$	:Cebirin r elemanının spektral yarıçapı
G	:Lokal kompakt abel grubu
$\hat{G}$	:G grubunun dual grubu
$L^1(G)$	:G grubunun grup cebiri
$A(G)$	:G grubunun Fourier cebiri
$\hat{f}$	: $f \in L^1(G)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü
$\\|\hat{f}\\|_{A(G)}$	: $\hat{f}$ fonksiyonunun $A(G)$ deki normu
$\\|f\\|$	:f fonksiyonunun $L^1(G)$ deki normu
I_K	: $G \supset K$, kabuğu kompakt K kümesi olan en büyük ideal
J_K	: $G \supset K$, kabuğu kompakt K kümesi olan en küçük ideal
$L^1(G)/I$	: $I \subset L^1(G)$ olmak üzere $L^1(G)$ cebirinin bölüm cebiri
$\sigma(x)$	:x elemanının spektrumu
$\rho(x)$	:x elemanının rezolventi $(\boldsymbol{C} - \sigma(x))$
$*$	:Girişim işlemi
Λ	:İndeks kümesi
Φ_U	:Maksimal İdeal Uzayı
U/R	: $R \subset U$ olmak üzere U cebirinin bölüm cebiri
$\approx$	:Cebirsel İzomorfizma
$C(X,R)$	:X ten R ye tanımlı sürekli fonksiyonlar kümesi
$\overline{co}M(x_0,\varepsilon)$	: $M(x_0,\varepsilon)$ yuvarının kompakt kapanışı

1. GİRİŞ

Matematikte, uzayların tümlenebilir veya tümlenemez uzay olması, bu uzayların özelliklerinin öğrenilmesi açısından büyük öneme sahiptir. Banach cebirlerinde de aynı problem mevcut durumdadır. Özellikle de bilinen yapılarla cebirin ayrışıma sahip olması önem taşımaktadır. Wedderburn, Jacobson (1980) in kitabında bahsedildiği gibi, sonlu boyutlu cebirlerde cebirin radikal ile tamamlanabilir olduğunu ispatlamıştır. Benzer soru sonsuz boyutlu uzaylar içinde hala geçerlidir.

Ele alınan Banach cebirlerinin çoğunun Wedderburn ayrışımına sahip olmadığı görülerek bu uzaylar ve bölüm uzayları hakkında genel bilgi edinilmiş olacaktır. Ayrıca Banach cebirlerinde temel teoremlerden olan Gelfand teoremi, bu incelemede kullanılması öğrenilecek ve bazı uzaylar için bu inceleme yapılmaya çalışılacaktır.

Biz Banach cebirleri içinde bu şartları taşıyan uzayları, bu uzaylarla elde edilen bölüm uzaylarının Wedderburn ayrışımına sahip olup olmadığını, Bade ve Curtis (1960), Bachelis ve Saeki (1987) ve Bade ve Dales (1992) in çalışmalarını ele alarak inceleyeceğiz.

Yine bu tezde Banach Cebirleri ve Banach uzaylarının geometrik özelliklerini de Bohnenblust ve Karlin (1955), Ingelstam (1962) ve Lin ve ark (1986) nın çalışmalarını ele alarak inceleyeceğiz.

Bu çalışma, bölüm grubu Banach cebirlerinin Wedderburn ayrışımına sahip olup-olmadığının öğrenilmesi açısından ve ayrışımın hangi şartlar altında mümkün olup-olmadığının incelenmesi ve öğrenilmesi açısından çok önemlidir. Çünkü sonsuz boyutlu uzaylar için Wedderburn ayrışımı problemi hala çözülememiştir. Ayrıca, Banach cebirlerinin ve Banach uzaylarının geometrisinin incelenmesi de literatürde büyük öneme sahiptir. Bu konularda öğrenilecekler, sonrasında yapılacak olan ileri düzey çalışmalara temel teşkil edecektir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu problemle ilgili olarak, Feldman (1951), Bade ve Curtis (1960), Bachelis ve Saeki (1987), Bade (1989), Bade ve Dales (1992), Michel Solovej (1995), Mustafayev ve Ülger (1999), Mustafayev (2003), Seferoglu (Mustafayev) (2003) ve Mustafayev ve Karaev (2002) tarafından günümüze kadar bu çalışmalar sürdürülmektedir. Biz bu tezde ilk olarak; Bade ve Curtis (1960), Bachelis ve Saeki (1987) ve Bade ve Dales (1992) nin çalışmalarını sonrasında da Bohnenblust ve Karlin (1955), Ingelstam (1962) ve Lin ve ark (1986) nın çalışmalarını inceledik.

Bade ve Curtis (1960), çalışmalarında Wedderburn temel teoreminin hangi şartlar altında sonsuz boyutlu değişmeli Banach cebirleri için sağlandığını araştırmıştır. Yine aynı çalışmada kapalı olmayan B alt cebiri için Wedderburn ayrışımının geçerliliği de araştırılmıştır.

Bachelis ve Saeki (1987) çalışmasında $L^1(G)/J_S$ bölüm cebirini ele alarak bu cebir için kuvvetli Wedderburn ayrışımının olmadığını ispatlamıştır.

Daha sonra Bade ve Dales (1992) daha da ileri giderek $L^1(G)/J_S$ cebirleri için Wedderburn ayrışımının mevcut olmadığını ispatlamıştır.

Bachelis ve Saeki (1987) nin $L^1(G)/J_S$ cebiri için yaptığı ispatta, önemli bir biçimde Gelfand (1941) teoremini kullanmıştır. Bu teorem daha sonra Hille (1957) tarafından genelleştirilmiştir. Bachelis ve Saeki (1987) nin yukarıda sözü edilen teoremdeki ispat tekniği, Gelfand teoreminin Banach cebirlerinin Wedderburn ayrışımının mevcut olup olmaması yönünde bazı fikirler edinilmesinde büyük öneme sahip olduğunu göstermektedir. Bu yüzden Banach cebirlerinin Wedderburn ayrışımına sahip olup-olmadığı incelenirken Gelfand teoreminden çokça faydalanıldığı görülecektir.

Ayrıca, Bohnenblust ve Karlin (1955) de Banach cebirlerinin birim yuvarlarının geometrik özelliklerini incelemiş ve Ingelstam (1962) de bu sonuçları kullanarak reel cebirlerle ilgili geometrik özellikleri incelemiş ve önemli sonuçlar elde etmiştir.

Bu önemli sonuçlar cebirlerin vertex özelliği olarak bilinen ve Banach cebirlerinin geometrik özelliklerinin incelenmesinde referans alınan sonuçlardır.

Ayrıca, Lin ve ark. (1986) da Banach uzayı olarak bir ölçüm uzayını ele almış ve bu uzayda birim yuvarın bazı geometrik özelliklerini incelemiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Çalışma tamamen teorik olup daha önce bu konuda yapılmış olan çalışmalar incelenmiş ve kitaplardan faydalanılmıştır. Literatürde bulunan bazı Banach cebirlerinin Wedderburn ayrışımları irdelenerek, var olan sonuçlar için ayrıca geometrik özellikler incelenmeye çalışılmıştır.

Bunun için kaynaklarda belirtilen çalışmalar detaylıca incelenmiş olup, problemin devamı olacak şekilde konu hakkında bilgi edinilmiş ve bunlar yapılırken, elde edilen sonuçları karşılaştırma imkânı elde edilmiştir.

Çalışma boyunca YÖK, Bilkent ve ODTÜ kütüphanelerindeki ilgili yayınlar taranarak ve temin edilmiştir. Ayrıca çalışma boyunca internet imkânlarından da faydalanılmıştır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak temel tanım ve teoremler verildi. Bu kavramlar Reiter (1968), Rudin (1966), Rudin (1973) ve Larsen (1973) kaynak alınarak yazılmıştır.

Tanım 4.1.1 (Grup) : G kümesi aşağıdaki özellikleri sağlayan $+: G \times G \to G$ ikili işlemiyle birlikte bir *abel grup*tur ve bu grup $(G,+)$ ile gösterilir:

i) $x + y = y + x$, $\forall x, y \in G$

ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$, her $x, y, z \in G$

iii) $x + 0 = 0 + x = x$, $\forall x \in G$ için *e* birim elemandır.

iv) $\forall\, x \in G$ için $x - x = 0$ olacak şekilde bir $(-x) \in G$ vardır.

Tanım 4.1.2 (Altgrup) : $(G,+)$ bir grup ve $G \supset H$ da *G* kümesinin altkümesi olsun. Eğer $(H,+)$ da bir grup ise bu takdirde *H* grubuna *G* grubunun *altgrubu* denir.

Tanım 4.1.3 (Uzay): Verilen bir cümle üzerinde cebirsel veya geometrik bir yapı kurulmuşsa bu cümleye uzay denir.

Tanım 4.1.4 (Topolojik uzay): X boş olmayan bir küme; ve X kümesinin altkümelerinin bir sınıfı olan τ verilsin. Eğer aşağıdaki şartları sağlanıyorsa; τ sınıfına *X* üzerinde bir t*opoloji* ve (X,τ) ikilisine de *topolojik uzay* denir.

T1) $\varnothing, X \in \tau$,

T2) her $i = 1,2,...,n$ için $G_i \in \tau$ olmak üzere $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \tau$,

T3) her $i \in I$ için $G_i \in \tau$ olmak üzere $\bigcup_{i} G_i \in \tau$

Tanım 4.1.5 (Bir Kümenin Örtüsü): $\Re$ nin bazı alt kümelerinin bir Γ sınıfını göz önüne alalım. Bir $A \subset \Re$ kümesi için $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, $A_\lambda \in \Gamma$ yazılabiliyorsa Γ sınıfına A kümesinin bir *örtüsü* adı verilir.

Bu durumda A kümesinin her noktası Γ sınıfındaki bir kümenin içinde bulunur.

Tanım 4.1.6 (Açık örtü): (X,τ) topolojik uzay ve $X \supset A$ olsun. Eğer $A \subset \bigcup_{i \in I} G_i$ olacak şekilde $(G_i)_{i \in I}$ sınıfına A kümesinin bir *açık örtüsü* denir.

Tanım 4.1.7 (Sayılabilir Örtü): Γ sınıfı $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ gibi kümelerin oluşturduğu sayılabilir bir sınıfsa ve $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ yazılabiliyorsa Γ sınıfına A kümesinin bir *sayılabilir örtüsü* adı verilir.

Tanım 4.1.8 (Kompakt Küme): Bir $A \subset \Re$ kümesinin her açık örtüsünün bir sonlu alt örtüsü varsa A bir *kompakt* kümedir. Yani A kümesi kompakt ise her Γ açık örtüsünün sonlu sayıda, örneğin n tane, açık kümeden oluşan bir $\{A_i \in \Gamma : i = 1,2,...,n\}$ alt sınıfı vardır ve $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ yazılabilir.

Tanım 4.1.9 (Lokal kompakt topolojik uzay): (X,τ) topolojik uzayının her x noktası, X uzayında kapanışı kompakt olan bir komşuluğa sahipse; X uzayına *lokal kompakt topolojik uzay* denir.

Tanım 4.1.10 (Zayıf, kuvvetli topoloji) : (X,τ) topolojik uzay ve τ_1 ve τ_2 de bu uzayda iki topoloji olsun. Eğer $\tau_2 \subset \tau_1$ ise yani τ_2 topolojisine göre her açık küme τ_1 topolojisine göre de açıksa; τ_2 topolojisi τ_1 *topolojisinden kuvvetlidir* veya τ_1 topolojisi τ_2 *topolojisinden zayıftır*.

Tanım 4.1.11 (Dual Topolojik Uzaylar, Zayıf ve Kuvvetli Yakınsama): Genel olarak bilinmektedir ki; bir topolojik vektör uzayındaki topoloji sıfır noktasının komşulukları (veya taban komşulukları) ile belirlenir. X bir Banach uzayı olmak üzere X de sıfırın $\{x : \|x\| < \varepsilon\}$ komşulukları ile oluşan topolojiye *kuvvetli topoloji* denir. Bu topolojiye göre X de bir $\{x_n\}$ dizisinin x noktasına yakınsaması demek $\|x_n - x\| \to 0$ olması demektir. Bu yakınsama *kuvvetli yakınsama* olarak adlandırılır. Şimdi de zayıf topolojiyi (w-topoloji) tanımlayalım. Keyfi $\varepsilon > 0$ ve sonlu $f_1,...,f_n \in X^*$ için X de $\{x : | f_1(x) | < \varepsilon, ..., | f_n(x) | < \varepsilon\}$ komşulukları ile oluşan topolojiye *zayıf topoloji* veya *w-topoloji* denir. X den elde edilen her (x_n) dizisinin x noktasına zayıf topolojiye göre yakınsaması demek, her $f \in X^*$ için $f(x_n) \to f(x)$ olması demektir. Zayıf (weak) topoloji bazen $\sigma(X, X^*)$ ile de gösterilir.

Dual uzaylarda bu iki topolojinin yanı sıra daha zayıf topolojilerden de bahsedilebilir. X normlu uzay, X^* bu uzayın duali olsun. Keyfi $\varepsilon > 0$ ve sonlu $x_1,...,x_n \in X^*$ için X^* da $\{f : | f(x_1) | < \varepsilon, ..., | f(x_n) | < \varepsilon\}$ komşuluklarının belirttiği topolojiye *zayıf*topoloji* veya *w*-topoloji* denir.

Buradan anlaşılacağı gibi; X^* da bir (f_n) dizisinin f e zayıf* (w*) topolojiye göre yakınsaması demek, her $x \in X$ için $f_n(x) \to f(x)$ olması demektir.

Tanım 4.1.12 (Topolojik grup): G bir grup ve aynı zamanda topolojik uzay olsun.

i) $\underset{(x,y)\ \to\ x+y}{G + G \to G}$ dönüşümü sürekli,

ii) $\underset{x\ \to\ -x}{G \to G}$ dönüşümü sürekli

ise G ye bir *topolojik grup* denir. Dahası bir topolojik grup; bir G grubunun grup işlemlerini sürekli kılan bir topoloji ile donatılmasıdır. Burada G grubu abel grup ise bu topolojik gruba topolojik *abel grubu* adı verilir. Ayrıca her noktası açık olan gruba da *diskret grup* adı verilir.

Tanım 4.1.13 (Kompakt topolojik grup): G bir topolojik grup olsun. Bu grup, üzerindeki topolojiye göre kompakt ise bu topolojik gruba; *kompakt topolojik grup* adı verilir.

Tanım 4.1.14 (Lokal kompakt topolojik grup): G bir topolojik grup olsun. Bu grup, üzerindeki topolojiye göre lokal kompakt ise bu topolojik gruba; *lokal kompakt topolojik grup* denir.

Tanım 4.1.15 (Homomorfizma, izomorfizma): Bir $(G,+)$ grubundan bir $(H,+)$ grubu içine tanımlı

$$\phi(x+y)=\phi(x)+\phi(y)$$

dönüşümüne bir *homomorfizma* adı verilir.

Eğer bu homomorfizma bire-bir ise bu takdirde *izomorfizma* adını alır. Eğer G grubundan H grubuna bir izomorfizma varsa bu takdirde G ve H izomorfik grup olurlar.

Tanım 4.1.16 (Dual grup): G bir lokal kompakt topolojik abel grup ise, $\chi : G \to T$ şeklinde G grubundan T birim çember içine tanımlı sürekli bir homomorfizmaya *karakte*r adı verilir. Bu şekilde tanımlı tüm karakterlerin kümesi de G nin *karakter grubu* veya *dual grubu* olarak adlandırılır ve $\hat{G}$ veya Γ ile gösterilir. Burada $T=\{\lambda \in \mathbf{C} :|\lambda|=1\}$ şeklindedir. Şunu da belirtelim ki; buradaki $\hat{G}$ dual grubunun kendisi de aynı zamanda bir lokal kompakt topolojik abel gruptur.

Tanım 4.1.17 (Lineer Vektör Uzayı): Bir $\{G,\#\}$ Abelyen grubunu ve bir $\{F,+,\times\}$ cismini göz önüne alalım. 1 bu cismin çarpmaya göre birim elemanını göstermektedir. $*$ ile bir $F \times G \to G$ ikili işlemini tanımlayalım. Dolayısıyla bu ikili işlem cismin her $\alpha \in F$ ve grubun her $x \in G$ üyesine yine grubun bir $\alpha * x$ üyesini karşı getirmektedir. Ayrıca bu $*$ ikili işleminin aşağıdaki özellikleri sağladığını kabul edelim:

$\forall \alpha, \beta \in F$ ve $x, y \in G$ için;

i) $(\alpha \times \beta) * x = \alpha * (\beta * x)$ sağlanır

ii) $(\alpha + \beta) * x = (\alpha * x)\#(\beta * x), \alpha * (x\# y) = (\alpha * x)\#(\alpha * y)$ sağlanır

iii) $1 * x = x$ sağlanır

Bu koşulları gerçekleyen $V = \{G, F, \#, +, \times, *\}$ sistemine F cismi üzerinde bir *lineer vektör uzayı* adı verilir. Grubun üyeleri *vektörler,* cismin elemanları da *skalerler* olarak adlandırılır. $\#$ işlemi vektör toplamı, $*$ işlemi ise skaler çarpma adını alır.

Tanım 4.1.18 (Alt Uzaylar): V bir vektör uzayı ve $U \subseteq V$ olsun. V deki işlemlere göre U alt kümesi bir lineer vektör uzayı ise U kümesi bir alt uzay adını alır. Alt uzaylar bazen *lineer katman* olarak da adlandırılırlar. Bir $U \subseteq V$ alt kümesinin bir alt uzay olabilmesi için gerek ve yeter koşullar

i) $\forall u_1, u_2 \in U \ için \ u_1 + u_2 \in U$

ii) $\forall \alpha \in F, u \in U \ için \ \alpha u \in U$

olmasıdır.

Tanım 4.1.19 (Norm, normlu uzay): $\boldsymbol{C}$ veya $\boldsymbol{R}$ üzerinde tanımlı bir lineer uzay (vektör uzayı) X olsun. $\|\cdot\| : X \to \boldsymbol{C}$ (veya $\boldsymbol{R}$) fonksiyonu her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \boldsymbol{C}$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa ; $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir *norm* ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de *normlu uzay* denir.

i) $\|x\| \geq 0$,

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii) $x \in X$, α skaler için, $\|\alpha x\| \leq |\alpha| \|x\|$,

iv) Her $x, y \in X$ için, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

Norm, $x \to \|x\|$ şeklinde bir fonksiyondur.

Tanım 4.1.20 (Cauchy dizisi, Banach uzayı): X normlu uzayında bir (x_n) dizisi alalım. Eğer

$$\|x_n - x_m\| \to 0, \qquad (n, m \to \infty)$$

ise (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir. X normlu uzayında her Cauchy dizisi bu uzayın bir elemanına yakınsak ise X e bir *Banach uzayı* denir.

Tanım 4.1.21 (Banach Uzaylarında Lineer Operatörler): X ve Y iki Banach uzayı olsun. $T : X \to Y$ dönüşümü her $x \in X$ için Y nin bir tek $y = Tx$ elemanına karşılık getiriyorsa bu dönüşüme X üzerinde tanımlı bir operatör denir.

Tanım 4.1.22 (Lineer operatör): $T : X \to Y$ operatörü X den elde edilen her x_1, x_2 ve $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ olmak üzere $T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2$ şartını sağlıyorsa T operatörüne *lineer operatör* denir.

Tanım 4.1.23 (Sınırlı operatör): $T : X \to Y$ lineer operatörü X den elde edilen her sınırlı kümeyi Y de başka bir sınırlı kümeye dönüştürürse, T lineer operatörüne *sınırlı lineer operatör* denir.

Bir başka deyişle; her $x \in X$ için

$$\|T_x\|_Y \le C\|x\|_X$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti varsa T ye *sınırlı operatör* denir.

Tanım 4.1.24 (Operatörün normu): $T : X \to Y$ sınırlı ve lineer operatör olsun.

$$\|T_x\|_Y \le C\|x\|_X$$

eşitsizliğini sağlayan C sayılarının infimumuna, T *operatörünün normu* denir ve $\|T\|$ ile gösterilir.

$$\|T\| = \inf\{C > 0 : \|T_X\|_Y \le C\|x\|_X\}.$$

Tanım 4.1.25 (Sürekli operatör): Eğer $T : X \to Y$ lineer operatörü için $\|x_n - x\|_X \to 0$ olması $\|Tx_n - Tx\|_Y \to 0$ olmasını gerektirirse T operatörüne *sürekli operatör* denir.

X uzayını Y uzayına dönüştüren tüm lineer ve sınırlı operatörlerin kümesini $B(X, Y)$ ile gösterelim.

Tanım 4.1.26 (Lineer fonksiyonel) : X Banach uzayında tanımlı $f : X \to \mathbf{C}$ dönüşümü X uzayından elde edilen her x, y ve her $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ için

$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ eşitliğini sağlarsa bu dönüşüme *lineer fonksiyonel* denir.

Tanım 4.1.27 (Sınırlı fonksiyonel ve fonksiyonelin normu) : *X* bir Banach uzayı ve *f* de *X* üzerinde tanımlı bir lineer fonksiyonel olsun. Her $x \in X$ için

$$|f(x)| \leq C\|x\|$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti varsa bu fonksiyonele *sınırlı fonksiyonel* adı verilir.

Yukarıdaki eşitsizliği sağlayan *C* sabitlerinin infimumuna *f* fonksiyonelinin *normu* denir ve $\|f\|$ ile gösterilir. Yani $\|f\| = \sup_{\|x\| \neq \theta} \dfrac{|f(x)|}{\|x\|}$ dir.

Teorem 4.1.28: Normlu bir *X* uzayı için, X^* dual uzayı bir Banach uzayıdır.

Tanım 4.1.29 (Alt Uzayların Toplamı): V vektör uzayının iki alt uzayı U_1 *ve* U_2 olsun, $U_1 + U_2$ kümesini

$$U_1 + U_2 = \{u = u_1 + u_2 : \forall u_1 \in U_1 \;\; ve \;\; \forall u_2 \in U_2\} \subseteq V$$

şeklinde tanımlayalım. *V* nin bir alt uzayı olduğu görülen bu kümeye U_1 *ve* U_2 *alt uzaylarının toplamı* denir.

Tanım 4.1.30 (Direkt Toplam): Bir X Banach uzayının kapalı bir altuzayı *M* olsun. Eğer,

$$X = M + N \qquad\qquad M \cap N = \{0\}$$

olacak şekilde X in kapalı bir N altuzayı varsa, bu takdirde; M altuzayı X de *tümlenebilirdir* denir. Bu durumda; *X* uzayı *M* ile *N* alt uzaylarının *direkt toplamıdır* denir ve $X = M \oplus N$ şeklinde gösterilir. Başka bir ifadeyle;

V vektör uzayının iki alt uzayı U_1 *ve* U_2 ve $U = U_1 + U_2 \subseteq V$ bu iki alt uzayın toplamı olan alt uzay olsun. U daki her u vektörü $u_1 \in U_1$ *ve* $u_2 \in U_2$ tek olarak belirlenmek üzere $u = u_1 + u_2$ şeklinde gösterilebiliyorsa bu alt uzay toplamına *direkt toplam* adı verilir ve $U = U_1 \oplus U_2$ yazılır.

Tanım 4.1.31 (Sıfır uzayı): $P: X \to X$ bir lineer dönüşüm olsun. $P^{-1}(\{0\}) = \{x \in X : Px = 0\} = N(P)$ uzayı, X in bir altuzayıdır ve P dönüşümünün *sıfır*(*null*) *uzayı* adı verilir.

Tanım 4.1.32 (İzdüşüm operatörü, Projeksiyon): X bir Banach uzayı olsun. Eğer her $x \in X$ için $P(Px) = Px$ ve $P^2 = P$ ise, $P: X \to X$ bir lineer dönüşümüne *izdüşüm operatörü* adı verilir. Kabul edelim ki; $N(P)$ sıfır uzayı ve $R(P)$ değer kümesi ile birlikte P dönüşümü X de bir izdüşüm operatörü olsun. Bu takdirde; $R(P) \cap N(P) = \{0\}$ ve $X = R(P) + N(P)$ olur. Eğer X in A ve B uzayları için $A \cap B = \{0\}$ ve $X = A + B$ yazılabilir ise, bu takdirde; $A = R(P)$ ve $B = N(P)$ olacak şekilde X de bir tek P izdüşüm operatörü mevcuttur.

Tanım 4.1.33 (Operatörün çekirdeği): $T: X \to Y$ operatörü lineer ve sınırlı bir operatör olsun.

$KerT = \{x : Tx = 0\}$ kümesine T operatörünün *çekirdeği*, $RanT = \{Tx : x \in X\}$ kümesine ise T operatörünün *değer kümesi* denir.

Lineer bir operatörün sürekli olması için gerek ve yeter şart; bu operatörün çekirdeğinin kapalı olmasıdır. Eğer $KerT = \{0\}$ ise T operatörüne *bire-bir*, $RanT = Y$ ise T operatörüne *örtendir* denir.

Eğer $T: X \to Y$ operatörü bire-bir ve örten ise bu operatörün $T^{-1}: Y \to X$, $T^{-1}(Tx) = x$ olacak şekilde tersinden bahsedilebilir.

Tanım 4.1.34 (Dual uzay): X Banach uzayında tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesine X uzayının *dual uzayı* denir ve X^* ile gösterilir.

Tanım 4.1.35 (Lineer fonksiyonel): X Banach uzayında tanımlı $f: X \to \mathbf{C}$ dönüşümü X uzayından elde edilen her x, y ve her $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ için

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

eşitliğini sağlarsa bu dönüşüme *lineer fonksiyonel* denir.

Tanım 4.1.36 (Çarpımsal lineer fonksiyonel): Bir Banach cebiri üzerinde her $x, y \in B$ için $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$ şartını sağlayan $\chi : B \to C$ sıfır olmayan lineer dönüşümüne *çarpımsal lineer fonksiyonel* denir.

Tanım 4.1.37 (Cebir): A kümesi $\boldsymbol{C}$ cismi üzerindeki bir lineer uzay olsun. Eğer $A \times A$ dan A ya tanımlı olan ve $(x, y) \to xy$ olarak belirlenen dönüşüm, $x, y, z \in A$ ve $\alpha \in \boldsymbol{C}$

i) $x(yz) = (xy)z$

ii) $x(y + z) = xy + xz$, $(x + y)z = xz + yz$

iii) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$,

şartlarını sağlıyorsa; bu dönüşüme bir *cebir* denir.

iv) $xy = yx$ ise *değişmeli cebir*,

iv) $ex = xe = x$, $e \in A$ ise *birimli cebir* adını alır.

Tanım 4.1.38 (Altcebir): A bir cebir ve $A \supset I$ verilsin. I lineer altuzayı, $x, y \in I$ olduğunda $xy \in I$ ise bu I altuzayına *altcebir* denir.

Tanım 4.1.39 (Normlu cebir): $\boldsymbol{C}$ üzerindeki bir $(A, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayı eğer

i) A bir cebir,

ii) $x, y \in A$ olmak üzere $\|xy\| \le \|x\| \|y\|$,

şartlarını sağlıyorsa; A cebirine bir *normlu cebir* adı verilir.

Tanım 4.1.40 (Banach cebiri): Eğer $(A, \|\cdot\|)$ normlu cebiri bir Banach uzayı ise bu normlu cebire bir *Banach cebiri* denir.

Her $x, y \in A$ için $xy = yx$ ise A cebirine *değişmeli cebir* denir. A Banach cebirinin çarpma işlemine göre etkisiz elemanı varsa yani her $x \in A$ için $xe = ex = x$ olacak şekilde $e \in A$ varsa, A cebirine *birimli cebir* ve e elemanına da cebirin *birim elemanı* denir.

Biz bundan sonra ele alacağımız bütün Banach cebirlerin değişmeli ve kompleks Banach cebiri olduğunu kabul edeceğiz.

Tanım 4.1.41 (İdeal): A bir cebir ve I da bir alt cebir olsun. $x \in A$ ve $y \in I$ için $xy \in I$ oluyorsa, I altcebirine *ideal* adı verilir. Eğer burada $I \neq A$ ve $I \neq \varnothing$ ise, I ideali *has ideal* olur.

Tanım 4.1.42 (Maximal ideal): A bir cebir ve I ($A \supset I$) da bir ideal olsun. I ideali başka hiçbir ideal tarafından kapsanmıyorsa, bu ideale m*aksimal ideal* denir.

Tanım 4.1.43 (Regüler ideal): A bir cebir ve $A \supset I$ olsun. Eğer en az bir $u \in A$ için $(xu - x) \in I$ olacak şekilde bir $x \in A$ bulunabiliyorsa; I idealine *regüler ideal* denir ve u elemanına da I modülüne göre A nın birimi denir. Burada ayrıca u elemanının A/I bölüm cebirinin birimi olduğunu söyleyebiliriz.

A cebiri birimli ise, her ideal regülerdir ve e elemanı da her ideal için özdeşlik(birim) modülüdür.

Tanım 4.1.44 (İzometri , izometrik uzaylar): (X, d) *ve* (Y, ρ) metrik uzayları arasındaki $g : X \to Y$ şeklinde üzerine bir fonksiyon ve her $x_1, x_2 \in X$ için

$$\rho(g(x_1), g(x_2)) = d(x_1, x_2)$$

bağıntısı sağlanıyorsa bir *izometri* adını alır. Aralarında bir izometrinin varlığı belirlenmiş metrik uzaylar da *izometrik uzaylar* olarak adlandırılır.

Tanım 4.1.45 (Karakter): A değişmeli bir kompleks Banach cebiri olsun. A dan kompleks sayılar cismi üzerine tanımlı sıfır olmayan bir homomorfizmaya bir *karakter* denir. Her karakter süreklidir.

Tanım 4.1.46 (Maksimal İdeal Uzayı): A değişmeli bir kompleks Banach cebiri olsun. A üzerindeki tüm karakterlerin uzayına A nın *maksimal ideal uzayı* denir. A^* dan alınan zayıf* -topoloji ile donatılmış bu uzay lokal kompakt Hausdorff uzayıdır.

Tanım 4.1.47 (Küme cebiri ve σ -cebir): Bir X kümesini ve kümenin tüm alt kümelerini içeren $P(X)$ kuvvet kümesini gözönüne alalım. X in bir $\Gamma \subseteq P(X)$ alt kümeler sınıfı aşağıdaki özellikleri gerçekliyorsa bir *küme cebiri* adını alır(bu sınıfa bir Boole cebiri de diyeceğiz).

i) Her $A_1, A_2 \in \Gamma$ için $A_1 \bigcup A_2 \in \Gamma$ bağıntısı sağlanır,

ii) Her $A \in \Gamma$ için $A' = X - A \in \Gamma$ bağıntısı sağlanır,

(i) ve (ii) özelliklerine ek olarak sayılabilir birleşimlerle ilgili

iii) $A_i \in \Gamma, i \in N\, için \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Gamma$ bağıntısı sağlanır,

özelliği de varsa Γ sınıfı bir σ - *cebri* adını alır. Bu durumda sınıf üyelerinin bir sayılabilir arakesiti göz önüne alındığında $i \in N\, olmak\, üzere\, A_i \in \Gamma\, için \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Gamma$ bağıntısının da sağlanacağı açıktır. $P(X)$ kuvvet kümesi X kümesi üzerindeki en geniş σ - *cebrini* oluşturur.

Tanım 4.1.48 (Ölçüm): X bir küme, Γ bu kümenin alt kümelerinin bir σ - *cebri* olsun. Γ sınıfını negatif olmayan reel sayılara dönüştüren $m : \Gamma \to \Re^+$ küme fonksiyonu Γ sınıfındaki ayrık kümelerin bir $\{A_i : i \in N\}$topluluğunun sayılabilir her birleşimi için

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i), \forall\, A_i \cap A_j = \phi, i \neq j$$

eşitliğini sağlarsa Γ üzerinde bir *ölçüm* adını alır.

Tanım 4.1.49 (Ölçüm Uzayı): (X, Γ, m) sıralı üçlüsünü ifade eder. Burada X bir küme, Γ sınıfı X in alt kümelerinin bir σ - *cebri* ve m küme fonksiyonu Γ sınıfı üzerinde bir ölçümdür.

Tanım 4.1.50 (Olasılık Ölçümü): *W* bir örneklem uzayı olmak üzere, bir $P(F)$ reel sayısını bir σ - cebiri olan *B* nin her *F* elemanına karşılık getiren ve

i) Her $F \in B$ için $P(F) \geq 0$

ii) $P(W) = 1$

iii) $i = 1,2,3,...$ için $F_i \in B$ ayrık kümeler ise bu taktirde

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i)$$

şartlarını sağlayan P fonksiyonuna olasılık ölçümü denir.

Tanım 4.1.51 (Olasılık Uzayı): W bir örneklem uzayı, B W nın altkümelerinin bir σ - cebiri ve P bir olasılık ölçümü olmak üzere (W, B, P) üçlüsüne olasılık uzayı denir.

Tanım 4.1.52 (İnvolüsyon): A bir Banach cebiri olmak üzere; $a, b \in A$ *ve* $\alpha \in C$ için $A \to A$ ya aşağıdaki özellikleri sağlayan $a \mapsto a^*$ dönüşümüne bir *involüsyon* denir.

i) $\left(a^*\right)^* = a$

ii) $(ab)^* = b^* a^*$

iii) $(\alpha\, a + b)^* = \overline{\alpha}\, a^* + b^*$

İlave olarak; A bir involüsyona ve bir birime sahip ise bu taktirde

$$1^* a = \left(1^* a\right)^{**} = \left(a^* 1\right)^* = \left(a^*\right)^* = a$$

benzer şekilde

$$a \cdot 1^* = a$$

dır.

Birim eleman teklikle belli olduğundan $1^* = 1$ dir. Ayrıca herhangi bir $\alpha \in C$ için $\alpha^* = \overline{\alpha}$ dir.

Tanım 4.1.53 (C* - cebir): $\forall a \in A$ için $\left\|a^* a\right\| = \|a\|^2$ şartını sağlayan involüsyonlu bir A Banach cebirine bir C^* - *cebir* denir.

Tanım 4.1.54 (Parçalı(Kısmi)İzometri): A bir C^* - *cebir* olsun. Bu taktirde A daki bir u elemanı $uu^*u = u$ şartını sağlıyorsa bu eleman bir *kısmi izometri* olarak adlandırılır.

Tanım 4.1.55 (DPB-Kuvvetleri sınırlı eleman) : A cebiri birimli bir Banach cebiri ve $a \in A^{-1}$ verildiğinde eğer,

$$\sup_{n \in \mathbf{Z}} \| a^n \| < \infty$$

oluyorsa; a elemanına A cebirinin *kuvvetleri sınırlı*(DPB) elemanı denir.

Tanım 4.1.56 (Bir Operatörün Spektrumu) : $T \in B(X)$ için $\mathbf{C} \setminus \rho(T)$ kümesine T operatörünün *spektrumu* denir ve $\sigma(T)$ ile gösterilir.

Dolayısıyla görüyoruz ki; T operatörünün spektrumu $(T - \lambda \mathbf{1}_X)$ operatörü-nün tersinin olmadığı $\lambda \in \mathbf{C}$ ler den oluşur.

Tanım 4.1.57 (Spektral yarıçap) : Bir $T \in B(X)$ için spektral yarıçap $r(T) = |T|_\sigma$ gösterimiyle birlikte,

$$|T|_\sigma = r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

olarak tanımlanır. Ayrıca, $T \in B(X)$ için $r(T) \leq \|T\|$ eşitsizliği mevcuttur.

Tanım 4.1.58 (Bir Operatörün Rezolventi): X bir Banach uzayı olsun. Operatör teorisinde $\mathbf{1}_X : X \to X$, $\mathbf{1}_X(x) = x$ olacak şekilde tanımlanan operatöre *birim operatör,* $0_X : X \to X$, $0_X(x) = 0$ olacak şekilde tanımlanan operatöre de *sıfır operatörü* adı verilir. Herhangi $T \in B(X)$ için

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbf{C} : T - \lambda \mathbf{1}_X \text{ in tersi vardır}\}$$

kümesine T operatörünün *rezolvent kümesi* denir. Görüldüğü gibi $\rho(T)$ düzlemde bir kümedir ve bu küme üzerinde

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda \mathbf{1}_X)^{-1}$$

olacak şekilde tanımlanan operatör fonksiyondan bahsedilebilir. $R_\lambda(T)$ ye T operatörünün *rezolventi* denir.

Komütatif Banach cebirleri için Gelfand Teorisi

A bir komütatif Banach cebiri olsun. Her $a, b \in A$ için $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ eşitliğini sağlayan $\varphi : A \to \mathbf{C}$ dönüşümüne bir *kompleks homomorfizma* denir. A

değişmeli Banach cebirinin tüm sıfırdan farklı kompleks homomorfizmalar kümesi Σ_A ile gösterilecektir. Gelfand teorisinden bilinmektedir ki Larsen (1973); her maksimal ideal bir kompleks homomorfizmanın çekirdeğidir ve tersine, her kompleks homomorfizmanın çekirdeği bir maksimal idealdir.

Σ_A, zayıf* topoloji yani $\sigma(A^*, A)$ topolojisine göre lokal-kompakt Hausdorff topolojik uzaydır (Larsen, 1973). $(\Sigma_A, w*)$ uzayına *Gelfand uzayı* denir. Eğer A birimli bir cebir ise Gelfand uzayı kompakt olur. Şimdi de, her $a \in A$ için Σ_A üzerinde aşağıdaki şekilde bir $\hat{a}(\varphi)$ fonksiyonu tanımlayalım:

$$\hat{a} : \Sigma_A \to \boldsymbol{C}, \quad \hat{a}(\varphi) = \varphi(a), \quad \varphi \in \Sigma_A .$$

Her $a \in A$ için $\hat{a}(\varphi)$ fonksiyonu Σ_A da sürekli olup, $\hat{a} \in C_0(\Sigma_A)$ olur (Larsen, 1973). Burada $\hat{a}$ dönüşümüne ise *Gelfand dönüşümü* denir.
S kümesi Σ_A nın kapalı bir altkümesi ve $\varphi_0 \notin S$ olsun. Eğer $\hat{a}(\varphi_0) \neq 0$ ve tüm $\varphi \in S$ ler için $\hat{a}(\varphi) = 0$ olacak şekilde bir $a \in A$ bulunuyorsa, A cebirine *regüler cebir* adı verilir.

Fourier ve Fourier-Stieltjes Dönüşümleri

$L^1(R)$ ile $\boldsymbol{R}$ üzerinde Lebesque anlamında mutlak integrallenebilen fonksiyonlar uzayını gösterelim. $L^1(R)$ uzayının

$$\|f\|_1 = \int_{\boldsymbol{R}} |f(x)| dx$$

normuna göre bir Banach uzayı olduğu bilinmektedir. $L^1(R)$ uzayı aynı zamanda

$$(f * g)(x) = \int_{\boldsymbol{R}} f(x-y) g(t) dt$$

şeklinde tanımlanan "*" girişim işlemine göre bir *komütatif* Banach cebiridir:

Bir $f \in L^1(R)$ için *Fourier dönüşümü*

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{\boldsymbol{R}} e^{-i\lambda t} f(t) dt$$

şeklinde tanımlıdır.

Burada önemle belirtilmesi gereken şey; $f \in L^1(R)$ fonksiyonunun Gelfand dönüşümü ile Fourier dönüşümünün çakışmakta olduklarıdır.

Yukarıda tanımlanan Fourier dönüşümü aynı zamanda şu özellikleri de sağlar.

i) $\hat{f}(\lambda) \in C_0(\mathbf{R})$, $f \in L^1(R)$,

ii) $\hat{f}_t(\lambda) = e^{-i\lambda t}\hat{f}(\lambda)$, $f_t(x) = f(x-t)$,

iii) $\widehat{f * g} = \hat{f}.\hat{g}$.

$L^1(R)$ cebiri aynı zamanda regüler bir Banach cebiridir (Larsen, 1973).

Tanım 4.1.59 (Grup Cebirleri): G lokal kompakt bir abel grubu ve $\hat{G}$ ise G in dual grubu olsun. $L^1(G)$ ile G nin grup cebirini, $A(G)$ ile de *Fourier cebirini* gösterelim. Burada

$$A(G) = \left\{\hat{f} : f \in L^1(G)\right\}$$

ifadesi normal çarpma işlemine göre bir cebir ve

$$\|\hat{f}\|_{A(G)} = \|f\|_{L^1(\hat{G})}$$

normuna göre de bir Banach cebiridir. Ayrıca $\hat{f}$ de $f \in L^1(\hat{G})$ nin Fourier dönüşümüdür. $\hat{G}$ dual grubunda kapalı bir K kümesi için

$$I_K = \left\{f \in L^1(G) : \hat{f}(\chi) = 0,\ \forall \chi \in K\right\} \quad \text{ve}$$

$$J_K = kapanış\left\{f \in L^1(G),\ supp\hat{f} \text{ kompakt ve } supp\hat{f} \cap K = \varnothing\right\}$$

kümelerini ele alalım. I_K kümesi $L^1(G)$ cebirinde kabuğu K olan en büyük ideali ve J_K kümesi de $L^1(G)$ cebirinde kabuğu K olan en küçük ideali göstersin. Her zaman $J_K \subseteq I_K$ dir. Eğer $J_K = I_K$ ise K ya sentezlenebilen küme (sentez kümesi) denir. Örneğin G kompakt bir abel grubu ise bu takdirde $\hat{G}$ diskret olup her altkümesi sentezlenebilirdir (Larsen, 1973). Acaba sentezlenebilir olmayan kümeler var mıdır? Bu soruyu Malliavin (1959) cevaplamıştır. Malliavin (1959) kompakt olmayan her grubun dual grubunun, sentezlenebilir olmayan kapalı (veya kompakt) altkümesinin mevcut olduğunu ispatlamıştır. Ayrıca, eğer K kümesi, $\hat{G}$ dual grubunun kapalı ve sentezlenebilir olmayan bir altkümesi ise, $J_K \underset{\neq}{\subset} I_K$ dir ve bu durumda $A = L^1(G)/J_K$ yarı-basit olmayan bir cebir olup, $Rad(A) = I_K/J_K \neq \{0\}$ olur.

Teorem 4.1.60: *X ve Y birer Banach uzayı olmak üzere* $B(X,Y)$ *bir Banach uzayıdır.*

Burada $X=Y$ olması durumunda $B(X,Y)$ yerine sadece $B(X)$ kullanılacaktır. $A,B\in B(X)$ olmak üzere, $B(X)$ de aşağıdaki şekilde bir çarpma işlemi tanımlanabilir:

$$(AB)(x)=A(Bx)$$

$$\|AB\|\le\|A\|\,\|B\|$$

eşitsizliğinden görüldüğü gibi bu çarpma işlemi süreklidir ve dolayısıyla $B(X)$ bir Banach cebiridir.

Teorem 4.1.61: Eğer P dönüşümü X Banach uzayındaki sürekli bir izdüşüm operatörü ise, bu takdirde

$$X=R(P)+N(P)$$

dir. Tersine eğer X bir Banach uzayı ve $X=A+B$ ise, bu takdirde; değer kümesi A ve sıfır uzayı B olan P izdüşüm operatörü süreklidir.

Sonuç 4.1.62: Bir X Banach uzayının kapalı bir altuzayının X de tümlenebilir olması için gerek ve yeter şart bu kapalı altuzayın, X de ki bazı sürekli izdüşüm operatör lerinin değer kümesi olmasıdır.

Teorem 4.1.63 (Banach Teoremi): $T:X\to Y$ operatörü bire-bir, örten ve sınırlı lineer bir operatör ise $T^{-1}:Y\to X$ ters operatörü de sınırlı lineer bir operatördür.

Teorem 4.1.64: Her $T\in B(X)$ için

i) $\rho(T)\neq\varnothing$ olup, $\rho(T)$ düzlemde bir açık kümedir.

ii) $R_\lambda(T)$ fonksiyonu, $\rho(T)$ de λ nın analitik fonksiyonudur.

Teorem 4.1.65: Her $T \in B(X)$ için

i) $\sigma(T) \neq \varnothing$ olup, $\sigma(T)$ düzlemde bir kapalı kümedir.

ii) $\sigma(T)$, merkezi orijinde olup yarıçapı $\|T\|$ olan kapalı daire tarafından kapsanır.

Teorem 4.1.66 (Gelfand): Her $T \in B(X)$ için

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$$

şeklinde bir eşitlik mevcuttur.

Teorem 4.1.67: Normlu bir X uzayı için, X^* dual uzayı bir Banach uzayıdır.

Tanım 4.1.68 (Doğrulan cebir): A cebiri e birimine sahip bir Banach cebiri olsun. A cebirinin bir E altkümesi verilsin. Eğer E kümesini kapsayan en küçük cebir, A nın kendisi ise, bu takdirde E kümesi A cebirini doğurur denir.

Teorem 4.1.69: Bir $\varepsilon > 0$ alalım. Fourier dönüşümü $\{1\}$ in bir komşuluğunda≡1 olup, $\|f\|_1 \leq 1+\varepsilon$ olacak şekilde bir $f \in L^1(Z)$ vardır (Larsen, 1973).

Tanım 4.1.70 (İdempotent matris): A kare matrisi için $A^{p+1} = A$ olacak şekilde bir $p > 0$ tamsayısı varsa A ya periyodik matris denir. Özel olarak $A^2 = A$ ise A ya idempotent matris denir.

Tanım 4.1.71 (Nilpotent eleman): A kare matrisi için, $A^p = 0$ olacak şekilde bir $p > 0$ tam sayısı varsa A ya *nilpotent matris* denir. Böyle p lerin en küçüğüne de, A *nilpotentlik derecesi* adı verilir.

Tanım 4.1.72 (Hilbert Uzayı): H, K üzerinde bir lineer uzay olsun ve herhangi $x, y \in H$ çiftine karşılık aşağıdaki beş şartı sağlayan $\langle x, y\rangle \in K$ sayısını alalım.

i) $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$

ii) $\langle \alpha \cdot x , y \rangle = \alpha \cdot \langle x , y \rangle$

i) $\langle x , y \rangle = \overline{\langle y , x \rangle}$

iv) $\langle x , x \rangle \geq 0$

v) $\langle x , x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bu taktirde H ya bir ön Hilbert uzayı denir ve $\langle x , y \rangle \in K$ sayısına x ve y nin iç çarpımı denir.

H üzerinde $\|x\| = \sqrt{\langle x , x \rangle}$ normu tanımlanırsa H ya normlu lineer uzay denir. Eğer H, $\|x - y\|$ uzaklık normuna göre tam ise (yani $m , n \to \infty$ için $\|x_n - x_m\| \to 0$ olması $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ limitinin varlığını belirtir.) H ya bir Hilbert uzayı denir.

Tanım 4.1.73 (Analitik devam): *f* nin ***C*** kompleks düzlemin açık bir U alt kümesi üzerinde tanımlı bir analitik fonksiyon olduğunu kabul edelim. Eğer V, ***C*** nin U yu kapsayan daha büyük bir açık alt kümesi ve F,V üzerinde $\forall z \in U$ için $F(z) = f(z)$ şartını sağlayacak şekilde bir analitik fonksiyon ise F ye f nin *analitik devamı* denir. Başka bir deyişle F nin U ya kısıtlanışı f dir denir.

Tanım 4.1.74 (Denk normlar): Bir V vektör uzayı üzerinde tanımlı $\| \ \|_\alpha$ *ve* $\| \ \|_\beta$ normları için; $\forall x \in V$ olmak üzere $c\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq d\|x\|_\alpha$ şartını sağlayacak şekilde c ve d pozitif reel sayıları mevcut ise bu normlara *denk normlar* denir. Bir sonlu boyutlu vektör uzayı üzerinde bütün normlar denktir.

Tanım 4.1.75 (Modül): Modül kavramı, vektör uzayı kavramının bir halka üzerine genelleştirilmesi olarak tanımlanır. Yani; bir vektör uzayında skalerlerin bir cisimden alınması yerine keyfi bir halkadan alınması ile oluşan yapıya *modül* denir.

Böylece bir modül, bir vektör uzayında olduğu gibi toplamaya göre bir Abelyen gruptur ve modülün elemanları ile halkanın elemanları arasında değişmeli ve birleşimli bir çarpma işlemi tanımlıdır.

Tanım 4.1.76 (Jacobson Radikali): Bir R halkasının Jacobson radikali; bir anlamda R nin "sıfıra yakın" elemanlarını içeren R nin bir idealidir. **J(R)** ile gösterilir ve birkaç farklı yolla tanımlanabilir;

i) tüm maksimal sol ideallerin kesişimi

ii) tüm maksimal sağ ideallerin kesişimi

iii) $\{x \in R : \forall r \in R \text{ } için \text{ } u(1 - rx) = 1 \text{ } olacak \text{ } şekilde \, u \in R \, mevcuttur\}$

iv) $\{x \in R : \forall r \in R \text{ } için \text{ } (1 - xr)u = 1 \text{ } olacak \text{ } şekilde \, u \in R \, mevcuttur\}$

v) Eğer *R* değişmeli ise *R* deki tüm maksimal ideallerin kesişimidir.

Tanım 4.1.77 (Konveks küme ve Konveks kombinasyon): *C* reel veya kompleks vektör uzayında bir küme olsun. $\forall x, y \in C$ ve $\forall t \in [0,1]$ için $(1-t)x + ty$ noktası *C* de ise *C* ye *konvekstir* denir.

Eğer *S* konveks bir küme ise herhangi $u_1, u_2, ..., u_r \in S$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_r = 1$ olacak şekildeki herhangi negatif olmayan $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ sayıları için şeklinde yazılan $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k u_k \in S$ vektörüne $u_1, u_2, ..., u_r$ vektörlerinin bir *konveks kombinasyonu* denir.

Tanım 4.1.78 (Konvekslik aksiyomları): Eğer konveksliğin belirli özellikleri aksiyom olarak seçilirse konvekslik kavramı başka amaçlara genişletilebilir.

Verilen bir *X* kümesi için *X* üzerinde konvekslik, aşağıdaki aksiyomları sağlayacak şekildeki *X* in alt kümelerinin bir *C* koleksiyonudur.

i) ϕ ve *X*, *C* dedir,

ii) *C* den alınan herhangi bir koleksiyonun kesişimi *C* dedir,

iii) *C* nin elemanlarının bir zincirinin (kapsama bağıntısına göre) birleşimi *C* dedir,

C nin elemanlarına *konveks kümeler* ve (X, C) çiftine de *konvekslik uzayı* denir.

Tanım 4.1.79 (Hausdorff uzayı): *X* bir topolojik uzay ve $x, y \in X$ olsun. Eğer $U \cap V = \phi$ olacak şekilde *x* in bir *U* ve *y* nin bir *V* komşuluğu varsa *x* e ve *y* ye komşulukları tarafından ayrılabilirdir denir.

X in herhangi iki noktası komşulukları tarafından ayrılabilirdir ise X e bir *Hausdroff uzayı* denir. Bu nedenle Hausdorff uzayları T_2 *uzayları* veya *ayırma uzayları* olarak da adlandırılır.

Tanım 4.1.80 (Ayırma özelliği): X keyfi bir topolojik uzay olmak üzere $C(X)$ uzayını göz önüne alalım. $\mathcal{C} \subset C(X)$ alt uzayında her farklı $x, y \in X$ nokta çifti için $h(x) \neq h(y)$ olacak şekilde bu çiftlere bağımlı birer $h \in \mathcal{C}$ fonksiyonu bulunabiliyorsa $\mathcal{C}$ uzayı X in noktalarını ayırır yada $\mathcal{C}$ nin ayırma özelliği bulunduğu söylenir. $\mathcal{C}$ ile noktaları ayrılabildiği taktirde X bir Hausdorff uzayı olmak zorundadır.

Teorem 4.1.81 (Stone-Weierstrass Teoremi): X boş olmayan kompakt bir Hausdorff uzayı ve $\mathcal{C} \subset C(X)$ ayırma özelliğine sahip ve birim sabit fonksiyonu içeren bir alt kafes olsun. $\mathcal{C}$ alt kafesi düzgün metriğin ürettiği topolojide $C(X)$ uzayında yoğundur.

Tanım 4.1.82 (Helson kümesi): G, bütün dualleri Γ ile gösterilen bir lokal kompakt abelian grup olsun. Her $F \in C(H)$ ye $x \in H$ *için* $F(x) = \int_\Gamma \overline{(x, y)} f(\gamma) d\gamma$ olacak şekilde bir $f \in L^1(\Gamma)$ karşılık gelirse G deki bir kompakt H kümesine *Helson kümesi* denir.

4.2. Wedderburn Ayrışımı

Wedderburn, Jacobson (1980) in kitabında bahsedildiği üzere, *Wedderburn Temel Teoremi* olarak adlandırılan teorem ile; kompleks sayılar üzerinde kurulu her sonlu boyutlu cebirin Wedderburn ayrışımına sahip olduğunu ifade eder. Yani Wedderburn bu teorem ile, sonlu boyutlu cebirlerde radikalin tümlenebilir olduğunu ispatlamıştır. Benzeri soru sonsuz boyutlu uzaylar içinde hâla açık bir problem olarak durmaktadır.

A cebiri değişmeli bir Banach cebiri olsun. $Rad(A)$ ile gösterilen A nın radikali, A daki bütün maksimal ideallerin kesişimi olarak tanımlanır. Yani, A nın maksimal ideal uzayı $\Delta(A)$ olmak üzere,

$$Rad(A) = \bigcap_{M \in \Delta(A)} M$$

dir. $\Delta(A) = \varnothing$ veya $\Delta(A) = \{0\}$ olduğunda $Rad(A) = A$ olur ve bu A cebirine *radikal cebir* denir. Eğer A cebiri için $Rad(A) = \{0\}$ ise, bu cebire *yarı-basit cebir* adı verilir. Banach cebirinin radikali de cebirde kapalı bir idealdir.

Eğer

$$A = B \oplus rad(A)$$

olacak şekilde A cebirinin bir B alt cebiri bulunuyorsa, bu takdirde; A Banach cebiri Wedderburn ayrışımına sahiptir denir. Burada; eğer B kümesi kapalı alt cebir olursa, bu takdirde A Banach cebiri kuvvetli Wedderburn ayrışımına sahiptir denir ve ancak yarı basit olmayan cebirler için Wedderburn ayrışımından bahsedilebilir.

A Banach cebiri Wedderburn ayrışımına sahip olduğunda B altcebirinin $A/Rad(A)$ yarı-basit cebirine izomorfik olması gereklidir.

Bu bölümün devamında önce Banach Cebirlerinin Wedderburn ayrışımı sonra da Bölüm grubu cebirlerinin Wedderburn ayrışımı incelenmiştir.

4.2.1. Banach cebirlerinde Wedderburn ayrışımı

U Banach cebiri R radikaline sahip bir cebir olsun. U sonlu boyutlu ise Wedderburn Temel Teoremi; U nun $U=B+R$ ve $B\cap R=\{0\}$ şartlarını sağlayan bir B alt cebiri olduğunu ifade eder. Üstelik burada U değişmeli ise B nin tek olma zorunluluğu vardır. Bu kısımda genel olarak Bade ve Curtis (1960) da yapılan çalışma incelenecektir. Adı geçen çalışmada hangi şartlar altında sonsuz boyutlu değişmeli Banach cebirleri için Wedderburn teoreminin sağlanacağı araştırılmaktadır. Zelinsky (1954) Wedderburn Temel Teoremi'nin sonsuz boyutlu cebirler için genellikle sağlanmadığını gösteren bir örnek vermiştir. Fakat burada topolojik varsayımlar yoktur ve kullanılan cebirde bir Banach cebiri değildir. Feldman (1955), $U=B+R$ ve $B\cap R=\{0\}$ şartını sağlayan bir kapalı alt cebire sahip olmayan tek boyutlu bir radikale sahip değişmeli bir Banach cebiri örneği kurmuştur. Benzer özelliklere sahip bir başka örnek Glaeser (1958) tarafından verilmiştir. Çeşitli şartlar altında kapalı B alt cebiri için teoremin sağlanacağı hem Feldman (1955) hem de Glaeser (1958) tarafından tartışılmıştır. Bu çalışmada ayrıca kapalı olmayan B alt cebirleri için Wedderburn Teoreminin doğruluğu ile ilgilenilecektir. U nun $U=B+R$ ve $B\cap R=\{0\}$ ($U=B\oplus R$) özelliklerini sağlayan bir B alt cebiri mevcut ise bir Banach cebirine *ayrışabilirdir* diyeceğiz. Burada sadece bir tane böyle alt cebir varsa bu ayrışım tektir. $U=B\oplus R$ şartını sağlayan bir kapalı B alt cebiri mevcutsa bu takdirde U ya kuvvetli ayrışabilirdir denir. U nun kapalı alt cebirleri arasında B tek ise bir kuvvetli ayrışımın tek olduğu bilinmektedir. Bade ve Curtis-1 (1960) ın çalışmasında tartışılan basit bir örnekte değişmeli bir Banach cebirinin tek bir ayrışıma sahip olmadığı fakat bir tek kuvvetli ayrışıma sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu çalışmadaki başka bir örnekte bir değişmeli cebirin ayrışabilir olmak zorunda olmadığını göstermektedir.

Bununla birlikte bir değişmeli cebirin ayrışabilir olması durumunda daha fazla genel kriter verilebilir. Bu sonuçların çoğu az da olsa değişmeli olmayan Banach cebirleri için de geçerlidir. Sonlu boyutlu durumlardan tahmin edileceği gibi sonuçların çoğu idempotentlerin sayısına bağlıdır. Burada çalışılan cebirler genellikle birimli olarak kabul edilmektedir. Ayrışıma sahip olabilirlik için bu çalışmada gösterilen temel kriter aşağıdaki gibidir. A tamamıyla bağlantısız Φ_U maksimal ideal uzayına sahip ise bu taktirde U ayrışabilirdir ve $U/R \approx C(\Phi_U)$ olması için gerek ve yeter şart U nun idempotentlerinin bir sınırlı küme olmasıdır. Burada $\approx$ işareti cebirsel izomorfizmayı göstermektedir. Eğer son şart sağlanırsa bu taktirde U kuvvetli ayrışabilirdir ve kuvvetli ayrışım tektir sonucuna varılmaktadır.

Kolaylık olması açısından U cebiri e ile gösterilen bir birime sahip bir Banach cebiri olarak ele alınacaktır. U birimsiz ve U' de U cebirine bilinen yollarla birim eklenerek elde ediliyorsa bu taktirde U cebirinin (kuvvetli) ayrışabilir olması için gerek ve yeter şart birimli U' cebirinin (kuvvetli) ayrışabilir olmasıdır. Dahası bir ayrışımın veya bir kuvvetli ayrışımın U da tek olması için gerek ve yeter şart bu ayrışımın U' cebirinde tek olmasıdır.

Şimdi bu bölümde kullanılacak ve yararlı olacak bazı kavramlara değinilecek-tir.U cebirinin Jacobson radikali R ile gösterilecektir. U/R cebiri $\overline{x} = x + R$ olmak üzere doğal $\left\|\overline{x}\right\| = \inf_{r \in R}\left\|x + r\right\|$ normu altında bir yarı-basit Banach cebiridir. Aksi belirtilmedikçe buradaki norm her zaman U/R cebirinden alınan norm olacaktır. Eğer $x \in R$ ise bu taktirde $\lim_{n\to\infty}\left\|x^n\right\|^{1/n} = 0$ ve A değişmeli ise bu özellik R nin elemanlarını karakterize eder. v ile U dan U/R cebiri üzerine doğal homomorfizma-yı göstereceğiz. v dönüşümü süreklidir ve eğer $U=B \oplus R$ olacak şekilde bir alt cebiri varsa bu taktirde v, B alt cebirini U/R cebiri üzerine izomorfik olarak dönüştürür. v', v nin B cebirine kısıtlanışının tersi olsun v', U/R nin B üzerine tanımlı bir izomorfizmasıdır ve kolayca gösterilebilir ki v' nün sürekli olması için gerekli ve yeterli şart B cebirinin kapalı olmasıdır. Eğer B kapalı ise bu taktirde U cebiri B ve R nin topolojik direkt toplamıdır.

Lemma 4.2.1.1: P_U, bir U Banach cebirinin idempotentlerinin kümesini belirtsin. Bu taktirde;

i) $P_U \bigcap R = \{0\}$

ii) $x \equiv x^2(R)$ ise, bu taktirde $x \equiv p(R)$ yi sağlayan $p \in P_U$ mevcuttur, ve $yx = xy$ olacak şekilde herhangi $y \in U$ için $yp = py$ dir.

ii) Eğer $p, q \in P_U$, ve $pq = qp$ ise bu taktirde $p \equiv q(R)$ olması $p = q$ olduğunu gösterir.

İspat: R quasi regüler elemanlardan oluştuğundan ve sadece 0 quasi regüler idempotent olduğundan (i) nin ispatı açıktır. (ii) nin ispatı Rickart (1960) de Teorem 2.3.9 den elde edilebilir. Son olarak (iii) nin ispatı için ise, eğer $p, q \in P_U$ ve $pq = qp$ ise, bu taktirde $p - q \in R$ olması $p(p-q), -q(p-q) \in P_U \bigcap R$ olduğunu ifade eder. Böylece $p(p-q) = 0 = -q(p-q)$ *veya* $p = q$ dır. ♦

Lemma 4.2.1.2: Eğer U nun bazı B alt cebirleri için $U = B \oplus R$, ve her bir $p, q \in P_U$ için $pq = qp$ ise bu taktirde $P_U \subset B$ dir.

İspat: Her bir $x \in U$ için bir tek $x = y_x + k, y_x \in B, k \in R$ gösterimi vardır. $\tau : x \to y_x$ dönüşümü U dan B üzerine bir homomorfizmadır. Bu nedenle eğer $p \in P_U$ ise, bu taktirde $q = \tau(p) \in P_U \bigcap B$ ve $p \equiv q(R)$ dir. Lemma 4.2.1.1 (iii) den $p = q$ ve böylece $P_U \subset B$ elde edilir. ♦

Lemma 4.2.1.3: Eğer her $p \in P_U, r \in R$ için $pr = rp$ ise, ve U/R değişmeli ise bu taktirde $p, q \in P_U$ için $pq = qp$ dir.

İspat: $p, q \in P_U$ olsun. İlk olarak, $pq \in R$ ise bu taktirde $pq = qp = 0$ olduğunu not edelim. Hipotezden $pq \in R$ olması $pqp = pq$ olduğunu belirtir, ve böylece lemma 4.2.1.1 (i) den $(pq)^2 = pq = 0$ olduğu elde edilir. U/R değişmeli olduğundan $pq \in R$

olması $qp \in R$ olduğunu gösterir ve iddia sağlanmış olur. Genelde, Lemma 4.2.1.1. (ii) den $pq \equiv q_0 \equiv qp(R)$ olacak şekilde bir $q_0 \in P_U$ olduğu görülür. $(1-p)q_0$ ve $(1-q)q_0 \in R$ olduğu açıktır. Böylece $q_0 = pq_0 = q_0 p = qq_0 = q_0 q$ elde edilir. Bu nedenle $p - q_0, q - q_0 \in P_U$, ve $(p - q_0)(q - q_0) \in R$ olduğundan aynı tartışmanın bir uygulaması $pq = q_0 = qp$ olduğunu gösterir.♦

Bu bölümdeki sonuç teoremini vermeden önce Rickart (1960) de verilen Teorem 1. den aşağıdaki gerçeği not edelim. Eğer v, $C(\Omega)$ nın bir U değişmeli Banach cebirine tanımlı herhangi bir izomorfizmi ise, bu taktirde her bir w, U üzerindeki bir çarpımsal lineer fonksiyonele genişletilebilir. Bu bize kullanmamız için iki sonuç sağlar. Birisi Kaplansky (1949) de verilen Teorem 6.2 nin bir sonucu olan $\|v(x)\| \geq \sup\limits_{w \in \Omega} |x(w)|$ ifadesidir. Bu nedenle v nin bir homomorfizma olması için gerek ve yeter şart v nin görüntü kümesinin kapalı olmasıdır. İkinci olarak, eğer $U = C(\Omega')$ ve v sürekli ve de $v(C(\Omega)), \Omega'$ nün noktalarını ayırıyor ise bu taktirde v dönüşümü U üzerine bir dönü- şümdür. Bu Stone-Weierstrass teoreminden sağlanır, çünkü bu hipotezler altında $v(C(\Omega)), C(\Omega')$ de self adjoint olmalıdır.

Şimdi verilecek sonuç ayrışabilirlik için bir esas kriter olacaktır.

Teorem 4.2.1.4: R bir radikal olmak üzere U, R radikali ile birlikte bir Banach cebiri ve $B = U/R$ olsun. Kabul edelim ki B, Φ_B tamamıyla bağlantısız maksimal ideal uzayı ile birlikte değişmelidir ve kabul edelim ki $p, q \in P_U$ için $pq = qp$ dir. Bu taktirde P_U nun bir sınırlı küme olması için gerek ve yeter şart U nun ayrışabilir olması ve $B \approx C(\Phi_B)$ olmasıdır. Eğer P_U bir sınırlı küme ise bu taktirde U kuvvetli ayrışabilirdir ve kuvvetli ayrışım tektir. Eğer ek olarak R nilpotent ise ayrışım kuvvetli ve tek olmak zorundadır.

İspat: Kabul edelim ki U ayrışabilirdir ve $B \approx C(\Phi_B)$ dir. B', U nun $U = B \oplus R$ şartını sağlayan bir alt cebiri ve P_1, $C(\Phi_B)$ nin idempotentlerinin kümesini belirtsin. $B' \approx B \approx C(\Phi_B)$ olduğundan $C(\Phi_B)$ nin B' üzerine bir μ izomorfizması mevcuttur.

Lemma 4.2.1.2 den $P_U \subset B'$ dir bu yüzden $\mu(P_1) = P_U$ olur. Bade ve Curtis-2 (1960) ten P_U , U da sınırlı bir kümedir.

Tersine, kabul edelim ki P_U sınırlı ve B' , U nun P_U tarafından üretilen kapalı değişmeli alt cebiri olsun. Dunford (1954) de verilen Teorem 17 den B' nin $C(\Phi_{B'})$ üzerine tanımlı bir bicontinuous [Bir Banach uzayından diğer bir Banach uzayına tanımlı üzerine, sürekli lineer bir dönüşüm bicontinuous olarak adlandırılır.] τ izomorfizması mevcuttur. $x \in B'$ için $\sup_{\phi \in \Phi_{B'}} |\tau(x)(\phi)| = r_{B'}(x)$ ifadesi daha önce bahsi edilen Rickart (1960) de verilen Teorem 1. in sonucunun doğal bir sonucudur. Bundan dolayı $B' \cap R = \{0\}$ sağlanır, çünkü $x \in B' \cap R$ olması $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = r_{B'}(x) = 0$ olmasını gerektirir.

v , U dan $B = U/R$ üzerine bir doğal homomorfizm ve ρ , B nin $C(\Phi_B)$ içine Gelfand izomorfizmi olsun. Eğer $\mu = \rho v$ ise ; μ , U yu $C(\Phi_B)$ nin içine resmeder ve B' üzerinde bire bir dir. μ yı B' 'den $C(\Phi_B)$ üzerine bir dönüşüm olarak alalım. Silov (1954)'nın iyi bilinen sonucundan $\rho(P_B) = P_1$ ve Lemma 4.2.1.2. den $v(P_U) = P_B$ elde edilir. Bu nedenle, $\mu(P_U) = P_1$ ve $\mu(B')$, P_1 in bir $\wp$ lineer germesini içerir. Φ_B tamamıyla bağlantısız kabul edildiğinden, $\wp$ (ve bu nedenle $\mu(B')$) $C(\Phi_B)$ nin içinde yoğundur. Buradan Rickart (1953) de verilen Teorem 1. den, $\mu \cdot r^{-1}$ dönüşümü $C(\Phi_{B'})$ yi $C(\Phi_B)$ üzerine resmettiği görülür. Sonuç olarak, $\mu(B') = C(\Phi_B) = \rho(B)$ ve $A = B' \oplus R$ dir.

Son olarak, bazı B'' alt cebirleri için $U = B'' \oplus R$ olduğunu kabul edelim. $C(\Phi_B)$ den B'' üzerine bir λ izomorfizmi mevcuttur, ve Lemma 4.2.1.2. den $B \cap B'' \supset P_U$ olduğundan $\lambda(P_1) = P_U$ elde edilir. Eğer B'' kapalı ise λ bir homomorfizmdir ve sonuç olarak $B' = B''$ 'dür. Eğer R nilpotent ise bu taktirde Bade ve Curtis-1 (1960) de verilen Teorem 4.5'den λ sürekli olmak zorundadır. Bu sonuçla teorem ispatlanmış olur. ♦

Belirtmeliyiz ki yukarıdaki teoremdeki ayrışımın tekliğini bozacak şekilde bilinen bir örnek yoktur. Bade ve Curtis-2 (1960)'de gösterildiği gibi böyle bir örneğin kurulumu problemi bir kompakt Ω uzayı için $C(\Omega)$ nın bir süreksiz izomorfizmasının inşaası problemine denktir.

4.2.2. Bölüm grubu cebirlerinde kuvvetli Wedderburn ayrışımı

Bu kısımda, *B* değişmeli Banach cebirinin terslenebilir elemanları üzerinde, *B* nin radikalinin herhangi kapalı bir alt cebirle tümlenemez olmasını içeren bir şart incelenecektir. Sonrasında bu şartın tümlenemez radikalli grup cebirlerinin bölüm cebirlerine uygulanması görülecektir. Bu inceleme temelde Bachelis ve Saeki (1987) nin çalışması ele alınarak yapılacaktır.

B birimli değişmeli bir kompleks Banach cebiri ve *S*, *B* nin bir kapalı ideali olsun. Eğer *B* nin $B = C \oplus S$ olacak şekilde bir *C* alt cebiri mevcutsa *S* ye *B* de cebirsel olarak tümlenebilir (*C* ile) denir. Kapalı bir *C* bulunabilmesi durumunda ise *S* ye *B* de kuvvetli tümlenebilir denir.

Teorem 4.2.2.1: *B* nin DPB (kuvvetleri sınırlı)elemanlarının bir yoğun altuzayı gerdiğini ve *R*,*B* nin radikalini göstermek üzere *S* yi *R* de içerilen *B* nin bir sıfır olmayan kapalı ideali olarak kabul edelim. Bu taktirde *S* kapalı ideali *B* de kuvvetli tümlenemez.

Tümlenebilir olmayan radikalli Banach cebirlerinin geniş bir sınıfını elde etmek için Teorem 4.2.2.1 grup cebirleri bölüm cebirlerine uygulanmıştır. $\mathcal{G}$diskret olmayan lokal kompakt bir Abelian grup olsun ve $\boldsymbol{A}(\mathcal{G})$ ile Fourier cebiri gösterilsin. $\mathcal{G}$nin bir $\mathcal{E}$ kompakt alt kümesi için, $\boldsymbol{I}(\mathcal{E})$ ve $\boldsymbol{J}(\mathcal{E})$ sırasıyla hullari $\mathcal{E}$ a eşit $\boldsymbol{A}(\mathcal{G})$ nin en büyük ve en küçük kapalı idealleridir. Eğer $B=\boldsymbol{A}(\mathcal{G})/\boldsymbol{J}(\mathcal{E})$ ise bu taktirde $R=\boldsymbol{I}(\mathcal{E})/\boldsymbol{J}(\mathcal{E})$ dir. Tanımdan dolayı $R \neq 0$ olduğunda $\mathcal{E}$sentezlenebilir değildir.

Teorem 4.2.2.2: Eğer $\mathcal{E}$kümesi sentezlenebilir değil ise bu taktirde ,
$B= \boldsymbol{A}(\mathcal{G}) /\boldsymbol{J}(\mathcal{E})$ nin $R=\boldsymbol{I}(\mathcal{E})/\boldsymbol{J}(\mathcal{E})$ de içerilen sıfırdan farklı herhangi bir kapalı ideali *B* de kuvvetli tümlenebilir değildir.

$C(\mathcal{E})$ kümesi $\mathcal{E}$üzerindeki sürekli fonksiyonlar olmak üzere, eğer $\boldsymbol{A}(\mathcal{G})/\boldsymbol{I}(\mathcal{E})$ cebiri $C(\mathcal{E})$ kümesine eşit ise, bu takdirde $\mathcal{G}$nin kompakt bir $\mathcal{E}$alt kümesine Helson kümesi adı verilir.

Sonuç 4.2.2.3: Eğer $\mathcal{E}$ sentezlenebilir olmayan bir Helson kümesi ise bu taktirde

B= **A**($\mathcal{G}$) /**J**($\mathcal{E}$), B'de cebirsel olarak tümlenebilir değildir.

Sentezlenebilir olmayan Helson kümeleri herhangi bir $\mathcal{G}$ içinde mevcut değildir.

Şimdi; Teorem 4.2.2.1 in ispatı için gerekli olan bazı temel teorem ve lemmalar verilecektir.

Lemma 4.2.2.4: $S \subset R$, C ile kuvvetli bir şekilde tümlenen B nin bir kapalı ideali ve x , B nin bir DPB elemanı olsun. Bu taktirde $x \in C$ dir.

Bu lemmanın ispatı için aşağıda vereceğimiz Gelfand tarafından verilen ilgili teoremi kullanacağız.

Teorem [Gelfand (1941)]: B birim elemanı **1** olan bir kompleks Banach cebiri olsun ve $sp(x) = 1$ olacak şekildeki $x \in B^{-1}$ bir DPB elemanı olsun. Bu taktirde $x = \mathbf{1}$ dir.

Lemma 4.2.2.4 ün İspatı: $y \in C$ *ve* $z \in S \subset R$ olmak üzere $x = y + z$ olduğunu kabul edelim. π , B den C üzerine tanımlı S çekirdekli bir projeksiyon olsun. Bu taktirde π bir sürekli fonksiyondur ve $\pi(x) = y$ dir. Şimdi herhangi bir idempotent C de olsun. Böylece $\mathbf{1} \in C$ dir, buradan $\pi(x^{-1}) = y^{-1}$ ve $y^{-1}x = 1 + y^{-1}z$ olduğu elde edilir. $y^{-1}z \in R$ olduğundan $sp(y^{-1}x) = \{1\}$ yazabiliriz. Üstelik, $\forall n \in \mathrm{Z}$ ve bazı C sabitleri için $\left\|(y^{-1}x)^n\right\| \leq \|\pi\| \left\|x^{-n}\right\| \left\|x^n\right\| \leq C$ olduğunu yazabiliriz. Böylece Gelfand teoreminden $y^{-1}x = 1 + y^{-1}z$ $y^{-1}x$=**1** yazılabilir buradan da $y = x \in C$ elde edilir.♦

Bu hazırlıktan sonra şimdi de bölüm cebirlerinde kuvvetli Weddeburn ayrışımını karakterize eden başta verdiğimiz Teorem 4.2.2.2 nin ispatı verilecektir.

Teorem 4.2.2.2 nin İspatı: B= **A**($\mathcal{G}$) /**J**($\mathcal{E}$) olsun. $\mathcal{E}$nin bazı komşulukları üzerinde $f = 1$ olacak şekilde herhangi $f \in$ **A**($\mathcal{G}$) seçelim. Bu taktirde $f +$ **J**($\mathcal{E}$), B nin özdeş elemanı olur. Γ ile G nin dual grubunu belirtelim. Bu taktirde $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \cdot f +$**J**($\mathcal{E}$) nin B de terslenebilir olduğunu ifade eder ve her $n \in \mathrm{Z}$ için

$$(\gamma \cdot f + \mathbf{J}(\mathcal{E}))^n = \gamma^n f + \mathbf{J}(\mathcal{E})$$

dir. Ayrıca her $n \in \mathrm{Z}$ için

$$\|(\gamma \cdot f + \boldsymbol{J}(\mathscr{E}))^n\| \leq \left\|\gamma^n f\right\|_A = \left\|f\right\|_A$$

dır. İhtiyacımız olan şey Teorem 4.2.2.1 vasıtasıyla sadece $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \cdot f + \boldsymbol{J}(\mathscr{E})$ elemanının B nin bir yoğun alt uzayını gerdiğini göstermektir. Bu amaçla herhangi $g \in \boldsymbol{A}(\mathscr{G})$ seçelim. Saeki (1972) Lemma 2 den $\mathscr{E}$′nin bazı komşulukları üzerinde $\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_k\right| < \infty$ ve $g = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \gamma_k$ olacak şekilde $\left(a_k\right) \subset C$ ve $\left(\gamma_k\right) \subset \Gamma$ dizilerini bulabiliriz. Bu taktirde

$$g + \boldsymbol{J}(\mathscr{E}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\ (\ \gamma_k f + \boldsymbol{J}(\mathscr{E}))$$

yazabiliriz ve böylece ispat tamamlanır.♦

Eğer $\mathscr{E}$ bir Helson kümesi ise bu taktirde $B/R \approx \boldsymbol{A}(\mathscr{G})\ /\boldsymbol{J}(\mathscr{E}) \approx \boldsymbol{C}(\mathscr{E})$ dir. Eğer R , B de cebirsel olarak tümlenebilir olsaydı bu taktirde Bade ve Curtis-1 (1960) de ki Teorem 4.1. vasıtasıyla cebir kuvvetli tümlenebilir olabilirdi. Eğer $\mathscr{E}$ sentezlenemiyor ise Teorem 4.2.2.2 den dolayı bu mümkün değildir. Bundan dolayı "$\mathscr{E}$ bir sentezlenemeyen Helson kümesi ise bu taktirde B= $\mathbf{A}(\mathscr{G})$ /$\mathbf{J}(\mathscr{E})$ radikali B de cebirsel olarak tümlenemez" sonucu sağlanır.

4.2.3 Bölüm grubu cebirlerinde Wedderburn ayrışımı

Bu kısımda, Bölüm grubu cebirleri için kuvvetli olmayan Wedderburn ayrışımı incelenecektir. Bu incelemede Bade ve Dales (1992) nin çalışması detaylı olarak ele alınarak sürdürülecektir.

E, C üzerinde bir lineer uzay olsun. Bir lineer direkt toplamını göstermek üzere $\oplus$ notasyonu kullanılacaktır. Eğer F ve $G; F+G=E$ ve $F\bigcap G=\{0\}$ şartını sağlayan *E* nin lineer alt uzayları ise $E=F\oplus G$ yazılabilir. Şimdi kabul edelim ki *A*, C üzerinde bir cebir olsun. $A=B\oplus I$ ise bu taktirde *A*, bir *B* alt cebirinin ve bir I idealinin bir yarı direkt çarpımıdır, bu durumda $B\oplus I$ nın b_1+x_1 ve b_2+x_2 gibi iki elemanının çarpımı; $b_1b_2\in B$ ve $b_1x_2+x_1b_2+x_1x_2\in I$ olmak üzere

$$(b_1+x_1)(b_2+x_2)=b_1b_2+(b_1x_2+x_1b_2+x_1x_2)$$

ile verilir.

Tanım 4.2.3.1: *A*, C üzerinde bir Banach cebiri olsun. Bu taktirde; $A=B\oplus Rad(A)$ şartını sağlayacak şekilde *A* nın bir *B* alt cebiri varsa *A* bir Wedderburn ayrışımına sahiptir ve $A=B\oplus Rad(A)$ şartını sağlayacak şekilde *A* nın bir *B* kapalı alt cebiri varsa *A* bir kuvvetli Wedderburn ayrışımına sahiptir denir.

Kabul edelim ki *A* bir Wedderburn ayrışımına sahip olsun. Bu taktirde *B*, $A/Rad(A)$ yarı basit cebirine izomorfik olmak zorundadır.

A, $A=B\oplus Rad(A)$ şeklinde bir Wedderburn ayrışımına sahip olsun. Bu taktirde $P:b+x\mapsto b$ dönüşümü bir homomorfizmadır. Eğer ayrışım kuvvetli ise bu taktirde P süreklidir ve A üzerindeki norm $b\in B, x\in Rad(A)$ olmak üzere $\|b+x\|=\|b\|+\|x\|$ normuna denktir.

Aşağıdaki sonuç bir Wedderburn ayrışımına sahip bir cebir için basit bir örnek olarak verilebilir.

Bir *A* cebiri verildiğinde *A* nın elemanlarının çarpımının lineer gereni A^2 ile gösterilecektir.

Önerme 4.2.3.2: A, $A^2 \cap radA^{\#} = \{0\}$ şartını sağlayan bir cebir olsun. Bu taktirde $A^{\#}$ ($A^{\#}$, bir A cebirine birim eklenerek elde edilmiş bir cebirdir.) bir Wedderburn ayrışımına sahiptir.

İspat: X, $A = \left(A^2 \oplus Rad\left(A^{\#}\right)\right) \oplus X$ şartını sağlayacak şekildeki A nın bir lineer alt uzayı olsun ve $B = \left(A^2 + X\right)^{\#}$ ele alalım. Bu taktirde B, $A^{\#}$ ın bir alt cebiridir ve $A^{\#} = B \oplus Rad\left(A^{\#}\right)$dır.♦

Burada belirli Banach cebirlerinin Wedderburn ayrışımına veya kuvvetli Wedderburn ayrışımına sahip olup olmadıkları sorusuyla ilgilenilecektir. Ayrıca genel teori $A = B \oplus Rad(A)$ ayrışımında B alt cebirinin tekliği ile de ilgilidir. Teori hakkında bilinen sonuçlar şu şekilde verilebilir. (i) Feldman(1951) tarafından kuvvetli Wedderburn ayrışımına sahip olmayan $\dim Rad(A) = 1$ olan bir değişmeli Banach cebiri için bir örnek ortaya konulmuştur. Buna karşın Bade ve Curtis (1960) Teorem 6.1. den dolayı A cebirinin bir Wedderburn ayrışımına sahip olduğu elde edilmiştir. (ii) Bade ve Curtis (1960) Teorem 5.4. den dolayı da Wedderburn ayrışımına sahip olmayan bir Banach cebirinin varlığı sözkonusudur. Bu kısımda verilecek ilk sonuç bir A değişmeli Banach cebirinin Wedderburn ayrışıma sahip olması için gerek ve yeter şart $A^{\#}$ nın aynı özelliklere sahip olmasıdır.

Lemma 4.2.3.3: A bir B alt cebirinin ve bir I idealinin yarıdirekt çarpımları $Rad(A)$ da içerilecek şekildeki bir değişmeli cebir olsun. Bu taktirde A nın her idempotenti B ye aittir.

İspat: p, A nın bir idempotenti olsun ve $b \in B$ ve $r \in I$ olmak üzere $p=b+r$ yi ele alalım. Bu taktirde $b+r=b^2+2br+r^2$ ve buradan $b=b^2$ olur. Şimdi

$$r^3=(p-b)^3=p^3-3p^2b+3pb^2-b^3=p-b=r$$

yazabiliriz. $r \in radA$ olduğundan $r^2 + s - r^2 s = 0$ olduğunu söyleyebiliriz (burada r^2, A' da quasi terslenebilirdir.). Fakat şimdi

$$r = r - r\left(r^2 + s - r^2 s\right) = \left(r - r^3\right) - \left(r - r^3\right)s = 0$$

yazabiliriz ve böylece $p = b \in B$ yazabiliriz.♦

Eğer idempotentlerin lineer birleşimi cebirde yoğun ise bu taktirde bir Banach cebiri idempotentleri tarafından gerilir.

B, A nın bir kapalı alt cebiri ve I, $I \subset Rad(A)$ olacak şekilde A nın sıfır olmayan bir kapalı ideali olmak üzere idempotentleri tarafından gerilen bir değişmeli Banach cebirinin $A = B \oplus I$ şeklinde yazılamayacağı Lemma 4.2.3.3 den görülür.

Önerme 4.2.3.4: B, A nın bir kapalı alt cebiri ve I, $I \subset Rad(A)$ olacak şekilde A nın bir kapalı ideali olmak üzere; A, $A = B \oplus I$ şartını sağlayacak şekilde bir birimli ve değişmeli Banach cebiri olsun. A nın terslenebilen elemanlarının kümesi $InvA$ olmak üzere $a \in InvA$, $n \to \infty$ için

$$\|a^n\| = \|a^{-n}\| = o(n) \tag{4.1}$$

şartının sağlandığını kabul edelim. Bu taktirde $a \in B$ dir.

İspat: I çekirdek olmak üzere, P bir sürekli homomorfizma olacak şekilde P yi A dan B üzerine bir projeksiyon olarak alalım. $b \in B$ ve $x \in I$ olacak şekilde $b = Pa$ yı ve $x = a - b$ yi kuralım. $e \in B$ ve $e = bP(a^{-1})$ olduğundan $P(a^{-1}) = b^{-1}$ ve buradan $e + b^{-1}x = b^{-1}a$ yazabiliriz. $b^{-1}x \in radA$ olduğundan $\sigma(b^{-1}a) = \{1\}$ dir. Üstelik, $n \in Z$ için;

$$\left\|\left(b^{-1}a\right)^n\right\| \le \left\|P\left(a^{-n}\right)\right\|\left\|a^n\right\| \le \|P\|\left\|a^{-n}\right\|\left\|a^n\right\|$$

yazabiliriz ve buradan, (4.1) den dolayı, $|n| \to \infty$ *için* $\left\|\left(b^{-1}a\right)^n\right\| = o(|n|)$ yazabiliriz. Gelfand'ın bir teoreminin Hille genelleştirmesinden dolayı (Hille ve Philips (1957)) $b^{-1}a = e$ sağlanır ve böylece $a = b \in B$ bulunur.♦

$\alpha \ge 0$ olduğunda $B = A_\alpha(T)$ kümesi için E'yi

$$E = \left\{ x = (x_k : k \in Z) : \|x\| = \sup_{k \in Z} |x_k| / w_\alpha(k) < \infty \right\}$$

olacak şekilde $l^\infty\left(Z, w_\alpha^{-1}\right)$ Banach uzayı olarak alalım. R yi $R \in B(E)$ ve $n \in Z$ olmak üzere $\|R^n\| = w_\alpha(n)$ şartlarını sağlayacak şekilde E üzerinde sağa kaydırma operatörü olarak alalım. B de $f = \sum \{\alpha_n Z^n : n \in \mathbb{Z}\}$ için $Z(\theta) = e^{i\theta}$ yazalım, böylece $B(E)$ de $f(R) = \sum \{\alpha_n R^n : n \in \mathbb{Z}\}$ ve $\|f(R)\|_{B(E)} \leq \|f\|_B$ yazabiliriz.

$$A = B \oplus E \qquad (4.2)$$

yi ele alalım. Bu taktirde A bir Banach uzayıdır ve $(f, x)(g, y) = (fg, f(R)y + g(R)x)$ çarpımına göre bir değişmeli, birimli Banach cebiridir.

Açıktır ki; (4.2) ayrışımının tam olarak A nın bir kuvvetli Wedderburn ayrışımı olması için $B \oplus \{0\}$ ın A nın bir kapalı alt cebiri ve $Rad(A) = \{0\} \oplus E$ olması gerekir.

Şimdi $a = (Z, \delta_1)$ i kuralım. Her bir $n \in \mathbb{Z}$ için $a^n = (Z^n, n\delta_n)$ ve $|n| \to \infty$ için $\|a^n\| = w_\alpha(n) + |n|/w_\alpha(n) = O(|n|^\alpha) + O(|n|^{1-\alpha})$ dır ve böylece $|n| \to \infty$ için $\alpha \geq 1/2$ olması durumunda $\|a^n\| = O(|n|^\alpha)$ dır. Bilhassa $\alpha = 1/2$ özel durumunda $n \to \infty$ için $\|a^n\|\|a^{-n}\| = O(n)$ dir. Buna karşın (4.2) ayrışımında $a \in B$ dir.

Şimdi A Φ_A üzerinde bir regüler Banach cebiri olarak alınsın ve E, Φ_A nın bir kapalı alt kümesi olsun. $U/\overline{J(E)}$ yi ele alalım burada E nin sentezlenemez olması durumunda U nun Wedderburn ayrışabilirliği tartışılacaktır.

$A/I(E)$ cebiri *A(E)* ile gösterilir ve *A(E)* doğal olarak $\{f|_E : f \in A\}$ ile tanımlanır. A regüler olduğundan *A(E)*; E üzerinde bir regüler Banach fonksiyon cebiridir ve $\Phi_{A(E)} = E$ dir. U nun $\mathcal{G}$ Gelfand dönüşümünün görüntü kümesi *A(E)* olan U dan bir sürekli homomorfizmdir, gerçekten $\mathcal{G}\left(f + \overline{J(E)}\right) = f|_E$ ve $Rad(U) = I(E)/\overline{J(E)}$ dir. E nin kompakt olması durumunda E üzerinde $h = 1$ olacak şekilde $h \in A$ mevcuttur, ve bu taktirde $h + \overline{J(E)}$; U nun özdeşlik elemanıdır ve $f + \overline{J(E)} \in InvU$ olması için gerek ve yeter şart $x \in U$ olmak üzere $f(x) \neq 0$ olmasıdır. Kabul edelim ki; U; $U = B \oplus radU$ wedderburn ayrışımına sahiptir. Bu taktirde $\mathcal{G} : B \to A(E)$ bir sürekli homomorfizmadır ve $\mathcal{G}\,|_B$ nin tersinin sürekli olması için gerekli ve yeterli şart B nin U da kapalı olmasıdır.♦

Önerme 4.2.3.5: *A,* Φ_A üzerinde bir regüler Banach fonksiyon cebiri, *E*; Φ_A nın bir kapalı alt kümesi ve *F*; *E* nin bir kapalı alt kümesi ve *U*; $U = B \oplus Rad(U)$ Wedderburn ayrışımına sahip olsun. Bu taktirde $P\left(\frac{J(F)}{J(E)}\right) \subset \frac{J(F)}{J(E)}$ dir.

İspat: $f \in J(F)$ alalım; $P\left(\frac{J(F)}{J(E)}\right) \subset \frac{J(F)}{J(E)}$ olduğunu kanıtlayacağız. supp$f$ kümesi kompakttır ve $F \cap \text{supp}f = \phi$ dir ve böylece supp$f \subset U$, $\overline{U}$ kompakt ve $\overline{U} \cap F = \phi$ olacak şekilde bir *U* açık kümesi vardır. *N* normal olduğundan supp$f$ kümesi üzerinde $h = 1$ ve Φ_A / U üzerinde $h = 0$ olacak şekilde $h \in A$ vardır, buradan $fh = f$ ve $h \in J(F)$ yazabiliriz. $a, u \in \frac{J(F)}{J(E)}$ ve $au = a$ olacak şekilde $a = f + \overline{J(E)}$ ve $u = h + \overline{J(E)}$ yi kuralım. Şimdi $b = Pa$, $r = a - b$, $v = Pu$ ve $s = u - v$ yi kuralım. *P* bir homomorfizm olduğundan $bv = b$ ve böylece $(a-r)(u-s) = a - r$ dir. *e*, U'' nün özdeş elemanı olmak üzere $r(e+s) = as + ru \in \frac{J(F)}{J(E)}$ yazabiliriz. $s \in Rad(U)$ olduğundan $e + s \in InvU''$ yazabiliriz ve böylece $r \in \frac{J(F)}{J(E)}$ olmasını gerektirir.♦

Bu kısım özel bir örnek incelenerek sonuca bağlanılacaktır.

Katznelson ve Rudin (1961) Teorem 2.4 ün ilk sonucu eğer *A*, Φ_A üzerinde bir kuvvetli regüler Banach fonksiyon cebiri ise, *E*; Φ_A nın sentezlenemeyen bir kompakt alt kümesi ise ve $\frac{A}{J(E)}$ idempotentleri tarafından geriliyorsa bu taktirde $\frac{A}{J(E)}$ Wedderburn ayrışımına sahip olmadığı sonucudur.

Wedderburn ayrışımının mevcut olmama durumu

Bu bölümde; eğer *A*; $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ olmak üzere $A(G), A_\alpha(T^k)$ veya $A_\alpha(R^k)$ cebirlerinden herhangi birisi ise ve eğer *E*, Φ_A nın sentezlenemeyen bir kapalı alt cebiri ise bu taktirde $A/\overline{J(E)}$ Banach cebiri Wedderburn ayrışımına sahip olmadığını kanıtlayacağız. İki teorem aracılığıyla bu konuya açıklık getirebiliriz. İlki, E nin kompakt olması durumudur ki, Bachelis ve Saeki (1987) den dolayı gereklidir ve kuvvetli Wedderburn ayrışımının var olma ihtimalini elimine eder.

Teorem 4.2.3.6: *A* cebiri aşağıdaki cebirlerden herhangi biri olsun**.**

(i) G bir diskret olmayan lokal kompakt abelian grup olmak üzere $A(G)$

(ii) $0 < \alpha < 1/2$ olmak üzere $A_\alpha(T^k)$ veya $A_\alpha(R^k)$

E, sentezlenemeyen bir Φ_A kümesinin bir kompakt alt kümesi olsun ve $U = \dfrac{A}{\overline{J(E)}}$ yazalım. $I \subset Rad(U)$olmak üzere, *I*; *U* nun bir sıfır olmayan kapalı ideali olsun. Bu taktirde $U = B \oplus I$ olacak şekilde *U* nun kapalı olmayan bir alt cebiri yoktur.

İspat: (i) durumu, ki burada *A=A(G)* dir ve buda Bachelis ve Saeki tarafından ispatlandı; $A_\alpha(T^k)$ durumu $A_\alpha(R^k)$ durumuna benzer fakat kolay olmadığından burada sadece $A_\alpha(R^k)$ cebiri için ispat verilecektir.

Böylece kabul edelim ki; $0 < \alpha < 1/2$ olmak üzere $A = A_\alpha(R^k)$, *E* sentezlenemeyen bir kompakt küme, $U = \dfrac{A}{\overline{J(E)}}$ ve $I \subset Rad(U)$olmak üzere *I*, *U* nun bir sıfır olmayan kapalı ideali olsun. Bir çelişki elde etmek için kabul edelim ki; $U = B \oplus I$ dır. $j = 1,2,...,k$ için $Q_j = [-\pi, \pi]$ olmak üzere $Q = \prod_{j=1}^{k} Q_j$ yi kuralım ve $E \subset \operatorname{int} lQ$ olacak şekilde $l \in \mathrm{N}$ alalım.

A normal olduğundan *E* bir komşuluğu üzerinde $\hat{h} = 1$ olmak üzere $\operatorname{supp} \hat{h} \subset Q$ olmak üzere bir $h \in L^1(R^k, w_\alpha)$ mevcuttur. Bu taktirde $\hat{h} + \overline{J(E)}$, *U* nun özdeşlik elemanıdır.

γ, R^k grubu üzerinde bir sürekli karakter olsun bu durumda $x \in R^k$ ve bazı $y \in R^k$ için $\gamma(x) = \exp(ix \cdot y)$ olduğunu söyleyebiliriz ve $a = \gamma \hat{h} + \overline{J(E)} \in U$ yu kurabiliriz. $x \in E$ için $\left|\gamma(x)\hat{h}(x)=1\right|$ olduğundan $a \in InvU$ dur. Böylece $n \in Z$ için $a^n = \gamma^n \hat{h} + \overline{J(E)}$ yazılabileceğinden $\left\|a^n\right\| \leq \left\|\gamma^n \hat{h}\right\| = \left\|\delta_{ny} * h\right\|_{w_\alpha} \leq \left\|h\right\|_{w_\alpha}\left(1+|n||y|\right)^\alpha$ elde edilir. Böylece $|n| \to \infty$ için $\left\|a^n\right\| = O\left(|n|^\alpha\right)$ dır. $\alpha < 1/2$ olduğundan $n \to \infty$ için $\left\|a^n\right\|\left\|a^{-n}\right\| = o(n)$ olur ve böylece Önerme 4.2.3.4 ten $a \in B$ elde edilir. γ, R^k grubu üzerinde bir sürekli karakter olmak üzere F, U nun elemanlarının $\gamma \hat{h} + \overline{J(E)}$ formundaki lineer germesi olsun. $F \subset B$ olduğunu göstermiştik, şimdi F nin U da yoğun olduğunu göstermeliyiz.

$L^\infty\left(R^k, w_\alpha^{-1}\right)$, R^k üzerinde ölçülebilir φ fonksiyonlarının denklik sınıfının uzayı olsun ki burada $\dfrac{|\varphi(x)|}{w_\alpha(x)}$ sonlu olmak zorundadır, böylece $f \in X, \varphi \in X'$ olmak üzere;

$\langle \varphi, f\rangle = \int f(x)\varphi(-x)dx = (\varphi * f)(0)$ eşlemesi için $X' \equiv L^\infty\left(R^k, w_\alpha^{-1}\right)$, $X \equiv L^1\left(R^k, w_\alpha\right)$ nın dual uzayıdır.

$R = \left\{\varphi \in X' : \langle \varphi, g\rangle = 0 \ \left(\hat{g} \in \overline{J(E)}\right)\right\}$ olmak üzere U' nü R ile tanımlayacağız. F nin U da yoğun olduğunu ispatlamak için “Eğer $\varphi \in R$ ve $\hat{f} + \overline{J(E)} \in F$ olduğunda $\langle \varphi, f\rangle = 0$ ise bu taktirde $\varphi = 0$ dır” olduğunu göstermeliyiz. Böyle bir $\varphi \in R$ alalım. $\hat{h} + \overline{J(E)}$, U nun özdeşlik elemanı olduğundan $f \in X$ için $h * f - f \in \overline{J(E)}$ yazabiliriz. Böylece her bir $f \in X$ için $\langle \varphi, f\rangle = \langle \varphi, h * f\rangle = (\varphi * (h * f))(0) = ((\varphi * h) * f)(0) = \langle \varphi * h, f\rangle$ olduğunu elde ederiz. Bu nedenle X' de $\varphi = \varphi * h$ tır. $F = lin\left\{\left(\delta_x \hat{*} h\right) + \overline{J(E)} : x \in R^k\right\}$ tanımından ve eğer $\hat{g} \in \overline{J(E)}$ ise bu taktirde $x \in R^k$ için

$$0 = \langle \varphi, \delta_x * h + g\rangle = \langle \varphi, \delta_x * h\rangle = (\varphi * (\delta_x * h))(0) = (\varphi * h)(-x)$$

elde edilir.

Böylece X' de $\varphi * h = 0$ olması X' de $\varphi = 0$ olmasını gerektirir. Tüm bunlardan $B = U$ olduğu görülür ve bu nedenle $I = \{0\}$ elde edilir bu da istenen çelişkidir.♦

Bachelis ve Saeki (1987) de belirtildiği gibi yukarıdaki ispat $\overline{J(E)} \subset J \subseteq I(E)$ olmak üzere $\overline{J(E)}$ nin yerine herhangi bir kapalı J ideali alınmasıyla da çalışır. *E* nin *A* nın sentez edilemeyen bir kümesi olması durumu için bu şekilde sayılamayacak kadar çok sayıda *J* kapalı idealleri vardır. $\alpha \geq 1$ olması durumunda Teorem 4.2.3.6 $A_\alpha(T^k)$ veya $A_\alpha(R^k)$ cebirlerine uygulanamaz. Örneğin $1 \leq \alpha < 2$ olmak üzere $A = A_\alpha(R)$ ve $E = \{0\}$ olarak alalım. *A* nın her bir elemanı *R* üzerinde sürekli olarak diferansiyellenebilirdir, $I(E) = \{f \in A : f(0) = 0\}$ ve $\overline{J(E)} = \{f \in A : f(0) = f'(0) = 0\}$ dır.

Böylece $A/\overline{J(E)}$, $(z_1, w_1)(z_2, w_2) = (z_1 z_2, z_1 w_2 + z_2 w_1)$ çarpımıyla C^2 ye izomorftur, ve $C^2 = (C \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times C)$ bir kuvvetli Wedderburn ayrışımıdır.

$\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ olması durumunda ne olacağı henüz bilinmemektedir.

Şimdi ise sonuç olarak elde edilen teoremler verilecektir.

Teorem 4.2.3.7: *A* aşağıdaki cebirlerin herhangi birisi olsun.

i) *G* bir diskret olmayan, lokal kompakt abelyen grup olmak üzere *A(G)* cebiri

ii) $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ olmak üzere $A_\alpha(T^k)$ veya $A_\alpha(R^k)$ cebiri

E, Φ_A kümesinin bir sentezlenemeyen kapalı alt kümesi olsun ve $U = \dfrac{A}{\overline{J(E)}}$ yazalım. Bu taktirde *U* nun bir Wedderburn ayrışımı mevcut değildir.

Teorem 4.2.3.8: *A* bir Diktin cebiri ve *E*, bir Φ_A kümesinin sentezlenemeyen kapalı alt kümesi olsun. $\dfrac{A}{\overline{J(E)}}$ nin idempotentleri tarafından üretildiğini kabul edelim. Bu taktirde $\dfrac{A}{\overline{J(E)}}$ nin bir Wedderburn ayrışımı yoktur.

İspat: Bir çelişki elde etmek için $A/J(E)$ nin bir Wedderburn ayrışımına sahip olduğunu kabul edelim. F_0 sentezlenemeyen E kümesinin bir kompakt alt kümesi olsun. Bu taktirde B', U' nün bir kapalı alt cebiri ve I, $I \subset Rad(U')$ şartını sağlayacak şekilde U' nün bir sıfır olmayan kapalı ideali olmak üzere $U' = \dfrac{A}{J(F_0)}$ nün $U' = B' \oplus I$ şeklinde ayrışımı vardır. Fakat bu Lemma 4.2.3.3 ile çelişir.♦

4.3. Banach Cebirlerinde Birim Yuvarın Geometrik Özellikleri

Banach cebirlerinde bir çok özellik doğal olarak cebirsel olmasına karşın, diğer özellikleri de norm ile belirlenmiş geometriye bağımlıdır ve geometrik kavramlar özel olarak önemli bir role sahiptir. Birim yuvar ile ilgili çalışmalar, cebirsel kavramların sadece geometrik özellikleri karakterizasyonuna izin veren belirli ayırt edici özellikleri ortaya çıkarmaktadır. Kendi esas yararlarına ek olarak; bu karakterizasyonlar; cebirlerden cebirlere izometrik dönüşümlerin geometrik ve sezgisel metot özellikleriyle direkt olarak çözümlenmesinde etkili olarak kullanılabilir. Burada; cebirlerin birim elemana sahip olduğu, $\|e\| = 1$ ve x, y cebirin elemanı olduğunda $\|xy\| \le \|x\| \cdot \|y\|$ olduğu kabul edilecektir.

Bu kısımdaki inceleme Bohnenblust ve Karlin (1955) in çalışması paralelinde sürdürülecektir.

4.3.1. Kompleks Banach cebirlerinde birim yuvarın bazı geometrik özellikleri

Banach uzaylarındaki vertex (köşe) kavramı; reel vektör uzaylarındaki vertex kavramının uygun bir düzenlemesi olarak tanımlanmıştır. Bu kısımda Banach cebirindeki birim elemanın her zaman bir yuvarın bir köşesi olduğu gösterilmiştir.

Yine bu kısımda Banach cebirlerinin bazı klasik özelliklerinde; extreme (uç) noktalar, köşeler, birimsel noktalar ve Banach cebirlerinin yeniden normlandırılması problemi incelenmiştir.

Ayrıca bu bölümde komütatif cebirlerin bir çok norma sahip olduğu gösterilmiştir.

Vertices (Köşeler): Sonlu boyutlu bir reel vektör uzayında konveks bir kümenin sınırı üzerindeki bir u noktası;

i) Konveks kümenin u noktasında bütün düzlemlerinin arakesiti u noktasından ibaret

ii) u dan geçen doğru parçası konveks kümeye teğet değildir,

şartlarını sağlıyorsa u ya bir köşe denir.

Her iki tanım sonsuz boyutlu vektör uzaylarına genişletilebilir. Özel durumda bir kompleks Banach uzayının birim yuvarının konveks küme olması durumu büyük önem arz edecektir.

Yukarıdaki düşüncelerle birim yuvar üzerindeki hiçbir nokta köşe değildir ve u noktası ile birlikte $|\varepsilon| = 1$ olmak üzere $\varepsilon \cdot u$ birim çemberi birim kürenin sınırı üzerinde kalır. Bu yüzden köşe tanımı kompleks Banach uzayları için yeniden düzenlenmelidir.

Şimdi vereceğimiz tanımlar sırasıyla (i) ve (ii) nin genelleşmeleridir.

Tanım 4.3.1.1: Eğer f lineer fonksiyonellerinin ailesi $f(u) = 1\ ve\ \|f\| = 1$ şartlarını sağlarsa bir kompleks B Banach uzayının $\|u\| = 1$ olacak şekilde bir u noktasına birim kürenin bir köşesi denilecek, yani bu ailenin bütün fonksiyonelleri için $f(x) = 0$ olması $x = 0$ olmasını gerektirmektedir.

(ii) nin genişlemesi u daki normun $\phi(x) = \lim \alpha^{-1}(\|u + \alpha x\| - \|u\|)$, $\alpha > 0, \alpha \to 0$ şeklindeki Gateau diferansiyeli üzerine temellendirilmiştir.

Geometrik olarak $\phi(x) = 0$ şartı $u + \alpha x, \alpha > 0$ bir boyutlu reel ışının birim küreye teğet olduğunu ifade eder. $\lambda \in C$ ve her $|\varepsilon| = 1$ için $\phi(\varepsilon x) = 0$ ise $u + \lambda x$ bir boyutlu kompleks manifoldu birim küreye teğettir.

$\psi(x)$; $\psi(x) = Max\phi(\varepsilon x), |\varepsilon| = 1$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere $\phi(x) + \phi(-x) \geq 0$ olduğunda, bu $\psi(x) = 0$ a denktir.

Tanım 4.3.1.2: Eğer her bir $x \neq 0$ için $\psi(x)$ in değeri pozitif ise, kompleks bir Banach uzayının $\|u\| = 1$ şartını sağlayan bir u noktasına birim kürenin *köşesi* denir.

Bu iki tanımın denkliğini göstermek için $\phi\ ve\ \psi$ fonksiyonlarının aşağıdaki özelliklerine ihtiyaç duyulur. Bu özellikler fonksiyonların tanımlarından kolayca anlaşılır.

i) $\phi(0) = 0$, $\phi(u) = 1$

ii) $|\phi(x)| \leq \|x\|$

iii) $\phi(\lambda x) = \lambda \phi(x)$, $\lambda \geq 0$, $\lambda \in \Re$

iv) $\phi(x+y) \le \phi(x) + \phi(y)$

v) $\phi(u+x) = \phi(u) + \phi(x)$

vi) $|\phi(x) - \phi(y)| \le \|x - y\|$

vii) $0 \le \psi(x) \le \|x\|$

viii) $\psi(x+y) \le \psi(x) + \psi(y)$

ix) $\psi(\lambda x) = \lambda \psi(x)$, $\lambda \in C$

Dikkat edilirse son üç şart $\psi(x)$ fonksiyonunun bir *pseudo-normu* olduğunu ifade eder.

Teorem 4.3.1.3 (İki tanımın denkliği): Her x elemanı için $\psi(x) = \max|f(x)|$ dir. Burada maximum; $f(u) = 1, \|f\| = 1$ şartını sağlayan tüm lineer fonksiyoneller üzerinden tanımlanmaktadır.

İspat: i) $|\varepsilon| = 1$ şartını sağlayan belirli bir ε için ve f nin üzerindeki şartlar;

$$|f(x)| = f(\varepsilon x) = \alpha^{-1}\{f(u + \alpha(\varepsilon x)) - 1\} \le \alpha^{-1}\{\|u + \alpha\varepsilon x\| - 1\}$$

olduğunu gösterir ve buradan $|f(x)| \le \phi(\varepsilon x) \le \psi(x)$ elde edilir. Bu da $\sup|f(x)| \le \psi(x)$ olduğunu gösterir.

ii) Diğer taraftan, B de bir x_0 için , $(\varepsilon, |\varepsilon| = 1)$ $\psi(x_0) = \phi(\varepsilon \cdot x_0)$ ve ikinci olarak, Hahn-Banach teoreminden, bir f fonksiyoneli için $|f(x)| \le \psi(x)$, $f(u + \varepsilon \cdot x_o) = \psi(u + \varepsilon \cdot x_0)$ yazılabilir. İlk eşitsizlik $\|f\| \le 1$ olduğunu gösterir. İkinci bağıntı $|f(u)| \le 1, |f(\varepsilon \cdot x_0)| \le \psi(x_0)$ ile birlikte düşünülürse elde edilen

$$1 + \psi(x_0) = 1 + \phi(\varepsilon \cdot x_0) = \phi(u + \varepsilon \cdot x_0) \le \psi(u + \varepsilon \cdot x_0) \le 1 + \psi(x_0)$$

Bağıntısı $f(u) = 1$ *ve* $|f(x_0)| = \psi(x_0)$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.♦

Yukarıdaki teoremden aşağıdaki sonuçlar elde edilir. Bu sonuçları sıralayalım.

Sonuç 4.3.1.4: Köşe noktaları izometriler altında invaryant (değişmez) kalırlar.

Sonuç 4.3.1.5: Her köşe birim kürenin bir ekstrem(uç) noktasıdır.

Sonuç 4.3.1.6: u noktasını $\|x\| = 1$ olacak şekildeki x noktasına birleştiren doğru parçasının birim kürenin sınırı üzerinde kalması için gerek ve yeter şart $\phi(x) = 1$ dir.

Banach cebirlerine uygulamaları

ϕ *ve* ψ elbette u referans noktasının seçimine bağlıdırlar. Bir Banach cebirinde bu referans noktası daima cebirin elemanı olarak anlaşılacak, bu durumda ϕ *ve* ψ fonksiyonları için yeni ifadeler elde edilecektir.

Üstel ve logaritmik fonksiyonların genişletilmesiyle

$$\phi(x) = \lim \alpha^{-1} \log\left\|e^{\alpha x}\right\|$$

ve $\lambda \neq 0$ olan λ sayısı üzerinden

$$\psi(x) = \sup|\lambda|^{-1} \log\left\|e^{\lambda x}\right\|$$

bağıntıları yazılabilir.
Özel olarak burada;

$$\left\|e^{\lambda x}\right\| \leq e^{|\lambda|\psi(x)}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülebilir.

$e^{\lambda x}\lambda^{-2}$ fonksiyonu $|\lambda| = \rho$ çemberi üzerinde pozitif anlamda integre edildiğinde bu son eşitsizlikten

$$\|x\| \leq \rho^{-1} e^{\rho\psi(x)}$$

eşitsizliği elde edilir.

Her $\rho > 0$ için yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafının infimumu $e \cdot \psi(x)$ e eşittir ve buradan

$$\|x\| \leq e \cdot \psi(x)$$

sonucu elde edilir.

Sonuç 4.3.1.7: $\|x\| \leq e \cdot \psi(x)$ eşitsizliği $\psi(x)$ in uzayın orijinal normuna denk olan bir norm olduğunu gösterir. Bununla birlikte,

$$\psi(x \cdot y) \leq \psi(x)\psi(y)$$

eşitsizliği kurulamadığından dolayı $\psi(x)$ cebirin bir normu olarak tanımlanamaz. Ayrıca burada $\psi(x) = 0$ olması $x = 0$ olmasını gerektirir ve bu gerçek ile aşağıdaki ilginç teorem kanıtlanır.

Teorem 4.3.1.8: Bir Banach cebirinin birim elemanı birim kürenin bir köşesidir.

Bu varsayımların ispatındaki temel ilişki; aşağıda yazılan temel formla verilebilir

$$\psi(x) = \sup_{\theta} \sup_{\alpha > 0} \alpha^{-1} \log\left\|\exp \alpha \cdot e^{i\theta} \cdot x\right\|.$$

Bu bağıntının aksine $\rho(x)$ ile gösterilen spektral yarıçap

$$\rho(x) = \sup_{\theta} \inf_{\alpha > 0} \alpha^{-1} \log\left\|\exp \alpha \cdot e^{i\theta} \cdot x\right\| \leq \psi(x)$$

bağıntısıyla verilir.
Bu iddianın kanıtı; yine

$$\inf_{\alpha > 0} \alpha^{-1} h(\alpha) = \lim_{\alpha \to \infty} \alpha^{-1} h(x) = \lim_{n \to \infty} n^{-1} h(n)$$

yi belirten

$$h(\alpha) = \log\left\|\exp \alpha \cdot x\right\|$$

fonksiyonunun alt toplamsallığı ve

$$\rho(x) = \lim \left\|x^n\right\|^{\frac{1}{n}}$$

gerçeği üzerinde temellendirilir.

Son olarak üniter (birimsel) nokta kavramı tanımlanacaktır.

Tanım 4.3.1.9: Bir Banach cebirine ait bir x noktasının tersi var ve $\|x\| = \left\|x^{-1}\right\| = 1$ ise bu x noktasına cebirin bir *birimsel noktası* adı verilir.

Teorem 4.3.1.10: Her birimsel nokta bir köşedir.

İspat: x_0 birimsel nokta olduğundan $x \to x_0^{-1}x$ dönüşümü Banach uzayının bir izometrisidir ve x_0 ı birim elemana dönüştürür.♦

Örneklerle konunun tartışılması

Banach cebirlerinin iki temel örneği;

i) Bir kompakt Hausdroff uzayı üzerinde bütün sürekli fonksiyonların cebiri;

ii) lokal kompakt bir G grubu üzerinde tanımlı integrallenebilir fonksiyonların $A = R(G)$ grup cebiri,

olarak gösterilebilir. Burada uç nokta, köşe ve birimsel nokta kavramlarının çakıştığı kolaylıkla görülebilir. Bununla birlikte, genelde bunların birbirinden farklı olduğunu gösteren birçok örnek mevcuttur.

Örnek 4.3.1.1: A bir C^* cebir olsun, yani, A ; bir H Hilbert uzayı üzerindeki operatörlerin bir düzgün kapalı halkası olarak alınabilir ve A nın her bir operatörünün adjointi de A da içerilir. Literatürde Kadison tarafından yapılan bir tanımda; birim kürenin uç noktalarını şu şekilde verilmiştir.

Bir W operatörünün bir extrem noktası olması için gerek ve yeter şartın cebirdeki her bir T için; başlangıç kümesi E ve bitiş kümesi F olmak üzere $(I - P_F)T(I - P_E) = 0$ şartını sağlayan H Hilbert uzayından kendi içine bir kısmi izometri olmasıdır. (P_E *ve* P_F sembolleri E ve F altuzayları üzerinde ortogonal projeksiyonları belirtir.)

Özel olarak T bir köşe ise bu taktirde T bir uç noktadır ve T her durumda bir parçalı izometridir. Birimsel noktalar cebire ait birimsel dönüşümlerdir ve genelde, birimsel noktalar olmayan uç noktalar mevcuttur. Bununla birlikte, bu örnekte köşeler ve birimsel noktalar çakışırlar.

Bu gerçek, bir C^* -cebirden C^* -cebir içine bir izometrinin birimsel operatörleri birimsel operatörlere götürmesinin basit bir geometrik nedenini gösterir. Eğer W bir köşe ise $F(W) = ,\ \|F\| = 1$ şartını sağlayan fonksiyonellerin ailesi ile W bölgesinde normu 1 olan her bir eleman için $F_x(T) = (T_x, W_x)$ özel fonksiyonelleri ile gerilen konveks kümenin zayıf*-kapanışı çakışır (Bu özel fonksiyonellerin $F(W)=$, $\|F\|=1$ şartlarını sağladığı açıktır).

W bir köşe olduğundan W bölgesindeki her x için $F_x(T)=0, \|x\|=1$ olması $T=0$ olmasını gerektirir. $T=I-P_E$ olduğu için her bir $F_x(T)=0$ ve böylece de E full Hilbert uzayıdır. Dahası $T \to T^*$ izometrisi köşeleri köşelere taşır, aynı argüman W^* a uygulandığında F nin de full Hilbert uzayı olduğu görülür, bu durumda W bir birimsel operatördür.

Örnek 4.3.1.2: $A, |z| \leq 1$ de tanımlı ve sürekli ve $|z|<1$ de regüler olan bütün fonksiyonların Banach cebiri olsun. Birimsel elemanlar $u: w(z)=\varepsilon, |\varepsilon|=1$ in çarpımlarıdır. Bu örnekte köşe ve birimsel bir noktanın birbirinden farklı olduğu gösterilecektir. Köşeleri karakterize etmek için alışılmış birim elemandan ziyade normu 1 olan ve w_0 elemanına göre hesaplanan $\psi(z)$ fonksiyonu ele alınacaktır. Doğru bir hesaplama $\psi(z)=Max|w(z)|$ olduğunu verir, burada maksimum, $|w_0(z)|=1$ olan noktaların E kümesi üzerinden alınır.

w_0 elemanının bir köşe olması için gerek ve yeter şart E kümesinin; $w(z)=0$ fonksiyonunun E üzerinde sonsuza giden A nın tek bir fonksiyonu özelliğine sahip olmasıdır.

Böyle bir E kümesi üzerinde mutlak değeri 1 olan ve sabit olmayan herhangi bir fonksiyon bir köşedir; fakat bir birimsel nokta değildir. Dahası bu örnek $\psi(w)$ fonksiyonunun, w_0 referans noktası bir köşe iken, bir norm olmasına rağmen E kümesi $|z|=1$ full çemberi olmadıkça temel norma denk olmadığını gösterir.

Bu sonuç, Teorem 4.3.1.8 i kanıtlamak için referans noktası olarak u birim elemanının seçiminin önemini göstermektedir.

Denk Normlar

Verilen bir Banach cebirinde genelde, orijinal normuna denk olan ve bununla birlikte $\|u\|=1, \|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ şartlarını sağlayan yeni normlar tanımlamak mümkün dür. Cebirin belirli notasyonları veya özellikleri, $\rho(x)$ spektral yarıçapı gibi, birim noktası norma bakmaksızın daima bir köşedir.

Aşağıdaki örneklerde yeniden normlandırılmış cebirlerin değişmeli olduğu kabul edilecektir.

Örnek 4.3.1.3: $\|x\|$ bir değişmeli cebirin normunu belirtsin ve M bir maksimal ideal olsun. $\|x\|_M = |M(x)| + \|x - M(x)\cdot u\|$ fonksiyonunun yeni bir norm olduğu kolayca gösterilir ve $\|x\| \leq \|x\|_M \leq 3\|x\|$ olduğundan bu fonksiyon orijinal norma denktir ve her bir normun karşılığı olan ψ fonksiyonu vardır. $\psi_M(x)$ fonksiyonu, $\psi_M(x) = \|x\|_M$ ile verilen $\|x\|_M$ normu için hesaplanır. Bunlar beraberce düşünüldüğünde bu bağıntı bir değişmeli cebirin böyle bir yolla daima yeniden normlandırılabileceğini gösterir ki birim küre aşağıdaki anlamda bir "kurallı" yüzeydir.

$\|x\| = 1$ olacak şekilde verilen x için x i $\varepsilon \cdot u$ ya birleştiren doğru parçası tamamıyla birim kürenin yüzeyi üzerinde kalacak şekilde $|\varepsilon| = 1$ olacak şekilde ε sayısı mevcuttur. $\|x\|_M$ normları; maksimum bütün maksimal idealler üzerinden alındığında $\|x\|_1 = \max\|x\|_M$ yi tanımlamak için kullanılabilir. Bu maksimum elbette yeni bir normdur ve karşılık gelen $\psi_1(x)$ fonksiyonu yine $\psi_1(x) = \|x\|_1$ bağıntısını sağlar. Bu son normun ilginç bir özelliği vardır ki bu da eğer $0 \neq x$ elemanı bir maksimal ideale ait ise hiçbir $u + \alpha x, \alpha > 0$ ışını birim küreye teğet değildir.

Bu ifadeyi ispatlamak için $0 \neq x$ ve bazı M için

$$M(x) = 0 \ ise \ \phi_1(x) > 0$$

olduğunu göstermek yeterdir.

(Tanımdan $\phi_1(x) = \lim \alpha^{-1}\{Max_M(|M(u+\alpha x)| + \|\alpha x - \alpha M(x)u\|) - 1\}$ ve $\phi_1(x) \geq \|x\|$ dir.)

Bu sonucun bir sonucu olarak; $\|u + x\|_1 \leq 1, x \neq 0$ ise x in bir tersinin olduğunu söyleyebiliriz, aksi taktirde

$$1 + \|x\| \leq 1 + \phi_1(x) = \phi_1(u + x) \leq \psi_1(u + x) = \|u + x\|_1 \leq 1$$

çelişkisi elde edilir. Herhangi bir norm için $\|u + x\| \leq 1$ eşitsizliğinin x in bir terse sahip olduğunu belirttiği bilinen bir şeydir.

Bazı özel normlar için, $\|x\|_1$, bu sonuç genelliği bozmaksızın eşitlik yazılabileceğini ifade eder.

Örnek 4.3.1.4: Yine $\|x\|$ i bir değişmeli Banach cebirinin bir elemanının normu olarak alalım.

Yukarıda gösterilen (bundan evvelki) örnekte normlar orijinal normdan daha büyük olarak inşa edildi.Yani karşılık gelen birim kürelerden daha küçüktü; Şimdi ise küçük normları göz önüne alalım yani büyük birim küreleri göz önüne alalım. Herhangi $\|x\|$ normu için;

$$\rho(x) = Max_M |M(x)| = \lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{1/n} \leq \|x\|$$

eşitsizliği sağlanır, böylece infimum kabul edilebilir bütün normlar üzerinden alındığında $\rho(x) \leq \inf\|x\|$ dir.

Teorem 4.3.1.11: Değişmeli bir Banach cebirinde, infimum kabul edilebilir normlar üzerinden alınmak üzere;

$$\rho(x) = \inf\|x\|$$

dir.

İspat: Teoremin ispatı için; "belirli bir x_0 elemanı verildiğinde $\rho(x_o) \leq 1$ ise bu takdirde $\|x_0\|_0 \leq 1$ olacak şekilde uygun bir $\|x\|_0$ normu mevcuttur."

Cebirin her x elemanı; a_n katsayıları cebirin elemanı olmak üzere;

$$x = \sum a_n x_0^{\,n}$$

şeklinde polinomlarla temsil edilebilir. Burada infimum x in mümkün gösterimlerinin tümü üzerinden alındığında $\|x\|_0 = \inf\sum\|a_n\|$ yi tanımlar. $\|x\|_0$ ın ;

iii) $\|x\|_0 \geq 0$,

ii) $\|\lambda x\|_0 = |\lambda|\|x\|_0$,

iii) $\|x+y\|_0 \leq \|x\|_0 + \|y\|_0$,

normun özelliklerini ve

iv) $\|x \cdot y\|_0 \le \|x\|_0 \cdot \|y\|_0$,

özelliğini sağladığı aşikardır x in $x = x + 0 \cdot x_0 + ...$ aşikar gösterimi $\|x\|_0 \le \|x\|$ olduğunu gösterir. Diğer yandan $\rho(x_0)$, 1 den küçük olduğundan, $\|x_0{}^n\|$ dizisi sınırlıdır, $\|x_0{}^n\| \le C$, o zaman $\|x\| \le C\|x\|_0$ ve yeni norm orijinal norma denktir. x_0 elemanı için $x_0 = 0 + ux_0 + 0x_0{}^2 + ...$ özel gösterimi yazıabilir ve bu nedenle $\|x\|_0 \le 1$ dir. Son olarak, $\|u\|_0 = 1$ olduğu gerçeklenmelidir. Eğer $u = \sum a_n x_0{}^n$ ve M herhangi bir maksimal ideal ise bu taktirde $M(u) = 1, M(x_0) \le \rho(x_0) < 1$ olması $1 \le \sum \|a_n\|$ *ve* $\|u\|_0 \ge 1$ olmasını gerektirir. Fakat $1 = \|u\| \ge \|u\|_0$ ve ispat tamamlanır.♦

Sonuç 4.3.1.12: Sadece yeniden normlandırılamayan değişmeli Banach cebiri kompleks sayıların aşikar cebiridir.

İspat: Teorem 4.3.1.11 den dolayı böyle bir cebirin bir tek normu $\rho(x) = Max|M(x)|$ spektral yarıçapa eşit olmalıdır. Bu nedenle her bir M maksimal ideali için 4.3.1.3 de tartışılan $\|x\|_M$ kabul edilebilir bir norm olduğundan

$$|M(x)| + \|x - M(x)u\| = Max|M(x)|$$

bağıntısı sağlanmalıdır. Bu bağıntı sadece, x birim elemanın bir katı(çarpanı) ise sağlanabilir.♦

Sonuç 4.3.1.13: Cebir, $^*-cebir$ ise norm üzerine ek şart olarak, $\|x\| = \|x^*\|$ şartı konur. Bu kısıtlamayı sağlayan normlar $^*-$*kabul edilebilir* olarak adlandırılacaktır.

Teorem 4.3.1.14: Bir değişmeli $^*-cebir$in her bir x elemanı için $\rho(x) = \inf\|x\|$ dir. Burada infimum bütün $^*-$*kabul edilebilir* normlar üzerinden alınmıştır.

İspat: Bu teoremin ispatı bundan önceki teoremin ispatına benzerdir.

$$x = \sum a_{pq} x_0^p x_0^{*q}$$

formunun gösterimleri göz önünde bulundurulur ve yeni norm

$$\inf \sum \left\| a_{pq} \right\|$$

olarak tanımlanır. ♦

4.3.2. Reel Banach cebirlerinin bazı geometrik özellikleri

Bohnenblust ve Karlin (1955) de herhangi birimli kompleks Banach cebirinin bir köşe özelliğine sahip olduğunu ispatladı: Bir doğal norma sahip olan her bir küre bir köşe noktası olan birime sahiptir (kompleks anlamda).

Bu, reel cebirler için genelde doğru değildir ve bu kısımın temel amacı, Ingelstam (1962) nin çalışması esas alınarak, uygun özelliğe (reel anlamda alınan köşe ile) sahip olan bir reel cebiri araştırmaktır.

Bu bölüm reel veya kompleks sayılar üzerindeki Banach uzayları(ve cebirleri) ile ilgilidir.

Bilindiği gibi; bütün $x \neq 0$ için,

$$0 < c \leq \frac{N_1(x)}{N_2(x)} \leq C \tag{4.3}$$

olacak şekilde c ve C sayıları varsa N_1 *ve* N_2 normları denk normlar olarak adlandırılır. Aynı elemanlı ve denk normlu iki tam normlu uzay aynı Banach uzayı olarak kabul edilecektir.

Bir K konveks kümesinin bir köşesi K nın sınırına ait bir x_0 noktasıdır, burada bu x_0 noktasından geçecek şekilde K ya teğet olan doğru yoktur. Reel veya kompleks skalerler dikkate alındığında bir doğrunun notasyonu elbette farklıdır (bir kompleks doğru iki boyutlu bir reel afin alt uzayıdır).

Bu yüzden reel köşe veya kompleks köşe olduğu durumlar özellikle belirtilmelidir.

Tanım 4.3.2.1: Bir u noktasına N normu ile tanımlı birim yuvarın bir köşe noktası denmesi için gerek ve yeter şart;

$$\psi(x) = \max_{|\theta|=1} \Phi(\theta x) \tag{4.4}$$

olmak üzere ve de Gateau türevi de

$$\Phi(x) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{N(u + \alpha x) - N(u)}{\alpha} \tag{4.5}$$

şeklinde tanımlanmak üzere, $N(u) = 1$ ve $f(x) = 0$ olduğunda $x = 0$ olmasıdır.

(Bu tanım hem $|\theta| = 1, \theta = \mp 1$ olan reel uzaylar için hem de kompleks uzaylar için geçerlidir.)

Bu çalışmada sadece iki tarafı birimli değişmeli cebirler ele alınacak, bu birim çoğunlukla "*e*" ile gösterilecektir.

Doğal norm kavramı ile

$$\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\| \tag{4.6}$$

$$\|e\| = 1 \tag{4.7}$$

şartlarını sağlayan bir normu anlamalıyız.

Cebirin (yani kendi üzerine lineer operatörlerin bir cebiri olarak) sol regüler gösterimlerinin kullanılmasıyla, Gelfand (1941) her Banach cebiri için topolojiyi tanımlayan en azından bir doğal normun mevcut olduğunu ispatlamıştır.

N verilen herhangi bir norm ise bu taktirde;

$$\|x\| = \sup_{y \neq 0} \frac{N(xy)}{N(y)} \tag{4.8}$$

denk bir normdur.

Burada verilen bir doğal norm için birim elemanın birim kürenin bir köşesi olup olmadığı incelenecektir.

Topolojiyi tanımlayan bütün doğal normlar için birim(eleman) birim kürenin bir köşesi ise bir Banach cebirine köşe özelliğine sahiptir denir. Köşe özelliği topolojik cebirsel bir özelliktir ve herhangi özel bir metriğe sahip değildir.

Hatırlayalım ki bir Banach cebirinde $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ serisi mutlak yakınsak olduğunda $\exp x$ daima

$$\exp x = e + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{4.9}$$

olarak tanımlanabilir.

Eğer x ve y birlikte düşünülürse;

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \tag{4.10}$$

yazılabilir.

Köşe özelliği için bir şart

Bu kısımda birim(eleman)in birim kürenin bir köşesi olması için gerek ve yeter şartlar formüle edilecektir. Burada kullanılan teknik büyük ölçüde Bohnenblust ve Karlin (1955) den alınmıştır.

Lemma 4.3.2.2: $h(\lambda)$ hem reel eksen hem de kompleks düzlem üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer

$$h(\lambda_1 + \lambda_2) \le h(\lambda_1) + h(\lambda_2) \tag{4.11}$$

$$h(0) = 0 \tag{4.12}$$

$$\overline{\lim_{\alpha \to 0}} \frac{h(\lambda\alpha)}{\alpha} \le 0 \tag{4.13}$$

ise bu taktirde;

$$h(\lambda) \equiv 0$$

dır.

İspat: Kabul edelim ki $h(\lambda) > 0$ olan bir yerde $h(\lambda_0) > 0$ olsun. (4.11) in yeniden kullanılmasıyla her pozitif n tamsayısı için;

$$\frac{h\left(\lambda_0/n\right)}{1/n} \ge h(\lambda_0) > 0$$

olduğunu buluruz. $n \to \infty$ olduğunda bu (4.13) ile çelişir. Böylece $h(\lambda) \le 0$ dır. Fakat (4.11) ve (4.12) den

$$0 = h(0) = h(\lambda - \lambda) \le h(\lambda) + h(-\lambda) \le 0$$

yazarız böylece eşitlik her yerde sağlanır ve $h(\lambda) = 0$ dır.♦

Teorem 4.3.2.3: $\| \;\|$ doğal normuyla verilen bir reel veya kompleks Banach cebirinde aşağıdaki durumlar denktir.

i) Birim (eleman) birim kürenin köşesi değildir.

ii) Bütün λ skalerleri için $\|\exp(\lambda x)\| = 1$ denklemini sağlayacak şekilde bir $x \neq 0$ mevcuttur.

İspat:

$\Phi(x) = \lim\limits_{\alpha \to +0} \dfrac{\|e + \alpha x\| - \|e\|}{\alpha}$ ile $\exp(\alpha x) = e + \alpha x + O(\alpha^2), \alpha \to 0$ olduğunda $\Phi(x) = \lim\limits_{\alpha \to +0} \dfrac{\|\exp(\alpha x)\| - 1}{\alpha}$ yazabiliriz. Ayrıca $\log(1+t) = t + O(t^2), t \to 0$ dır, böylece $\Phi(x) = \lim\limits_{\alpha \to +0} \dfrac{\log\|\exp(\alpha x)\|}{\alpha}$ dır. Sabit bir x için $h(\lambda) = \log\|\exp(\lambda x)\|$ yazılabilir. (4.6), (4.7) ve (4.10) dan dolayı $h(\lambda)$, (4.11) ve (4.12)'u sağlar. Her bir λ için Tanım 4.3.2.1 $\psi(x) = 0$ şartı $\Phi(\lambda x) \le 0$ a denktir, yani $\lim\limits_{\alpha \to +0} \dfrac{h(\lambda\alpha)}{\alpha} \le 0$ dır.

Şimdi (i)'nin sağlandığını varsayalım, yani $\psi(x) = 0$ olacak şekilde bir $x \ne 0$ mevcuttur. Lemma 4.3.2.2 den

$$\log\|\exp(\lambda x)\| = 0 \tag{4.14}$$

olduğunu gösterir. Aksine (4.14) ü sağlayan bir $x \ne 0$ varsa $\Phi(\lambda x) = 0$ olduğu görülür ve $\psi(x) = 0$ olduğunu yazılabilir, böylece teorem ispatlanır.♦

Kompleks cebirler için Bohnenblust ve Karlin (1955) nin sonucunun alternatif bir kanıtı aşağıdaki gibi verilebilir.

Sonuç 4.3.2.4: Bir kompleks Banach cebiri kompleks köşe özelliğine sahiptir.

İspat: Kabul edelim ki verilen bir x ve bütün kompleks λ lar için $\|\exp(\lambda x)\| = 1$ dir. Fakat $\exp(\lambda x)$ bir λ kompleks değişkenli sınırlı cebirsel değerli tam fonksiyondur. Bu taktirde Liouville Teorem'inden dolayı sabit olmalıdır. Özellikle kuvvet serisinin açılımındaki λ katsayısı sıfırdır, böylece $x = 0$ olur.♦

Sonuç 4.3.2.5: Eğer bir boyuttan fazla ve birimli bir kompleks Banach cebirinde bir iç çarpımla topoloji tanımlanabilirse (yani, Banach uzayı bir Hilbert uzayı ise) karşılık gelen norm doğal değildir.

İspat: Burada ispatlanacak şey, karşılık gelen birim kürede köşe olacak bir nokta bulunmadığıdır.

N , $N(x) = (x, x)^{1/2}$ şeklinde tanımlı bir norm ve u , $N(u) = 1$ şartını sağlayan bir eleman olsun. Bu taktirde

$$N(u + \alpha x) = (u + \alpha x, u + \alpha x)^{1/2} = 1 + \alpha \operatorname{Re}(u, x) + O(\alpha^2), \alpha \to +0$$

olur öyle ki

$$\Phi(x) = \operatorname{Re}(u, x), \psi(x) = |(u, x)|$$

dir.

Hiperdüzlemdeki her x , u ya diktir, $\psi(x) = 0$ ve bu u nun bir köşe olmadığını gösterir. Sonuç 4.3.2.4'e göre, N doğal ise e birimi (elemanı) bir köşe olacak. Bu nedenle N doğal değildir.♦

Reel cebirlerde köşe özelliği

Bütün doğal normlar için; birim kürenin, bir reel köşe olarak birime (elemana) sahip olduğu gerçeği reel cebirler için genellikle doğru değildir. Örneğin kompleks sayılar sistemi, bir reel cebir olarak, bu özellikle ($\|\xi + i\eta\| = |\xi| + |\eta|$) ve bir diğeri bu özelliğe sahip olmayan ($|\xi + i\eta| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$) bir doğal norma sahiptir. Bununla birlikte, Teorem 4.3.2.3 ün yardımıyla, köşe özelliğine sahip bir cebir için, analitik düşünceye uygun, bir durum formüle etmek mümkündür.

Teorem 4.3.2.6: Bir reel Banach cebirinin reel köşe özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart her $x \neq 0$ için $\exp(\alpha x)$ nın α reel değişkeninin sınırsız bir fonksiyonu olmasıdır.

İspat: Eğer her $x \neq 0$ için $\exp(\alpha x)$, sınırsız ise herhangi bir norm için $\|\exp(\alpha x)\| = 1$ sağlanır. Böylece cebir köşe özelliğine sahiptir.

Aksine kabul edelim ki $\exp(\alpha x_0)$ sınırlı olacak şekilde bir $x \neq 0$ mevcuttur. Belirli bir norm için (doğal olarak seçilebilen) öyle bir K sabiti vardır ki her α reel sayısı için

$$\|\exp(\alpha x_0)\| \le K$$

dır.

Şimdi cebir iki adımda yeniden normlandırılacaktır. İlk önce

$$N(x) = \sup_{\alpha} \|\exp(\alpha x_0)x\|$$

şeklinde bir norm yazalım. Bu norm, $\|x\| = \|\exp(0x_0)x\| \le N(x) \le K\|x\|$ olduğunda $\|x\|$ e denktir. Genelde $N(x)$ doğal değildir, bu yüzden (4.6) işlemi ve $\|x\|$ ve $N(x)$ e denk olan $|||x||| = \sup_{y \ne 0} \frac{N(xy)}{N(y)}$ biçimi yeniden doğallaştırılır. Dahası,

$$|||\exp(\alpha x_0)||| = \sup_{y \ne 0} \frac{\sup_{\beta} \|\exp(\beta \cdot x_0) \cdot \exp(\alpha \cdot x_0)y\|}{\sup_{\gamma} \|\exp(\gamma \cdot x_0)y\|} = \frac{\sup_{\beta} \|\exp[(\beta + \alpha)x_0]y\|}{\sup_{\gamma} \|\exp(\gamma \cdot x_0)y\|} = 1$$

dir. Teorem 4.3.2.3.'in kullanılmasıyla cebirin, birimi birim kürenin bir köşesi olmayan bir doğal $|||\ |||$ normuna sahip olduğu elde edilir. Böylece verilen şart gerekli ve yeterlidir ve teorem ispatlanır.♦

Teorem 4.3.2.6'den bir Banach cebirinde $\exp(\alpha x)$ fonksiyonunu sınırlı yapan x elemanlarının kümesinin ilgi çekici olduğunu görürüz. Bu küme ile cebirin radikalinin kesişimi aşağıdaki teoremde gösterildiği gibi sadece orijindir.

Teorem 4.3.2.7: $x \ne 0$ elemanı bir reel Banach cebirinin radikaline ait ise $\exp(\alpha x)$ reel α değişkeninin sınırsız bir fonksiyonudur.

İspat: $\exp(\alpha x)$ in sınırlı olduğunu varsayalım. x radikale ait olduğundan $N(x)$ normu için $\lim_{n\to\infty} \left(N(x^n)\right)^{1/n} = 0$ dır. f herhangi bir sürekli lineer fonksiyonel olsun ve

$$\varphi(\alpha) = f(\exp(\alpha x)) = f(e) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f(x^n) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\alpha^n}{n!}$$

yazalım. Katsayılar için

$$|a_n|^{1/n} = \left|f(x^n)\right|^{1/n} \le \left(N(f)\right)^{1/n} \left(N(x^n)\right)^{1/n} \to 0, n \to \infty$$

yazabiliriz. Böylece $\varphi(x)$ yakınsaklık yarıçapı sonsuz olan bir kuvvet serisi olarak gösterilir. Bu taktirde $\varphi(\alpha)$ fonksiyonu kompleks düzlemde bir tam fonksiyona analitik olarak devam ettirilebilir. Bir tam fonksiyonun mertebesi en fazla 1 iken, minimum tip, yani her $\delta > 0$ için

$$|\varphi(x)| = O(\exp\delta|\alpha|)\cdot|\alpha| \to \infty$$

dır.♦

Bunu kanıtlamak için, ilk önce

$$|\varphi(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \frac{|\alpha|^n}{n!}$$

olduğuna dikkat çekelim.

Bir Phragmen-Lindelöf teoremi Boas (1954) (s.84) bu tür fonksiyonların (reel eksen üzerinde sınırlı) bir sabit olduğunu gösterir. Bu $a_1 = 0$ olduğunu belirtir, yani sürekli her f fonksiyonu için $f(x) = 0$ dır. Bu nedenle $x = 0$ kabulümüzle çelişir. Bu nedenle radikaldeki her $x \neq 0$ için $\exp(\alpha x)$ sınırsızdır.

Sonuç 4.3.2.8: Eğer bir birim radikal Banach cebirine eklenirse, meydana gelen cebir (alışılmış topolojiyle) köşe özelliğine sahip olur.

İspat: Radikal cebir R ve yeni cebir A olsun. Bu taktirde R, A'nın radikalidir. Her $x \in A$ için $x' \in R$ olduğunda $x = \gamma e + x'$ yazılabilir. $x' \in R$ için $\|x'\|$ norm olduğunda $N(x) = N(\gamma e + x') = |\gamma| + \|x'\|$, A için bir normdur. Dahası,

$$\exp(\alpha x) = \exp(\alpha\gamma e + \alpha x') = \exp(\alpha\gamma)\exp(\alpha x') = \exp(\alpha\gamma)[e + r(\alpha)], r(\alpha) \in R$$

ve $N(\exp(\alpha x)) = \exp(\alpha\gamma)(1 + \|r(\alpha)\|)$ dır. Eğer $\gamma \neq 0$ ise bu fonksiyonun sınırsız olduğu aşikârdır ve eğer $\gamma = 0$ fakat $x' \neq 0$ ise fonksiyon teoreme göre sınırsızdır. Böylece $\exp(\alpha x)$ in sınırlı olması $x = 0$ olduğunu belirtir ve cebir köşe özelliğine sahip olduğunu gösterir.♦

4.4. Banach Uzayında Birim Yuvarın Bazı Geometrik Özellikleri

4.4.1 Banach uzayında birim yuvarın bazı geometrik ve topolojik özellikleri

Bu kısımda bir Banach uzayı olarak ölçüm uzayı ele alınıp Lin ve ark (1986) nın çalışması detaylı olarak incelenecektir.

X bir Banach uzayı olsun ve $(\Omega, \sum, \mu)$ bir olasılık uzayı olsun. Bir X degeri için Ω üzerindeki rastgele değişken x ve bu değişkenin beklenti değeri $Ex = \int_{\Omega} x(t) d\mu$ ile gösterilsin.

(pALUR) özelliği. $1 < p < \infty$ ve λ, $[0,1]$ aralığı üzerinde Lebesgue ölçümü olsun. Her $x \in X$ ve $x_n \in L^p(\lambda, X)$ için $\lim_n \|x + x_n\|_p = \|x\|$ ve $Ex_n = 0$ ise bu taktirde $\lim_n \|x_n\|_p = 0$ dır. Bu şekildeki bir X e *p-ortalama lokal düzgün rotund* denir.

(G) özelliği. X in birim küresinin her noktası kapalı birim yuvarın bir *denting noktası* ise yani $\|x_0\| = 1$ ise bu taktirde her $\varepsilon > 0$ için $M(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : \|x\| \le 1, \|x - x_0\| \ge \varepsilon\}$ olmak üzere $x_0 \notin \overline{co} M(x_0, \varepsilon)$ dir. Bu şartları sağlayan X e **(G)** özelliğine sahiptir denir.

(H) özelliği. X in birim küresi üzerindeki herhangi bir dizi için zayıf ve norm yakınsaklık çakışır ise X e **(H)** özelliğine sahiptir denir.

(K) özelliği. X in birim küresi üzerinde norm topoloji ve zayıf topoloji çakışır ise X e **(K)** *Kadec özelliğine* sahiptir denir.

(LUR) özelliği. Eğer X teki herhangi bir x ve $\{x_n\}$ dizisi için $\|x_n\| \le 1$, $\|x\| = 1$ ve $\lim_n \|x + x_n\| = 2$ ise bu taktirde $\lim_n \|x_n - x\| = 0$ dır. Bu şekildeki bir X e *lokal düzgün rotund* denir.

(MLUR) özelliği. Eğer X teki herhangi bir x ve $\{x_n\}, \{y_n\}$ dizileri için $\|x_n\| \le 1$, $\|y_n\| \le 1$, $\|x\| = 1$ ve $\lim_n \|2x - (x_n + y_n)\| = 0$ ise bu taktirde $\lim_n \|x_n - y_n\| = 0$ dır. Bu şekildeki bir X e *ortanokta lokal düzgün rotund* denir.

(R) özelliği. X in birim küresi aşikar olmayan doğru parçalarını içermiyorsa X e *rotund* denir.

Bu kısımda aşağıdaki teoremi ispatlayacağız.

Teorem4.4.1.1: Bir X Banach uzayında aşağıdaki özellikler denktir.

(i) Her $1 < p < \infty$ için X bir **(pALUR)** dur.

i) Bir kaç $1 < p < \infty$ için X bir **(pALUR)** dur.

ii) X ,**(G)** özelliğine sahiptir

iii) X , **(K)** ve **(R)** özelliklerine sahiptir.

Üstelik , X l_1 e izomorfik olan herhangi bir alt uzay içermezse bu taktirde **(K)**, **(H)** ile değiştirilebilir.

İspat: *(2)$\Rightarrow$(3)*. X in **(G)** özelliğine sahip olmadığını kabul edelim. Bu taktirde $\|x_0\| = 1$ ve $x_0 \in \overline{co}M(x_0, \varepsilon)$ olacak şekilde $x_0 \in X$ ve $\varepsilon > 0$ sayıları mevcuttur. $(i = 1,2,...)$ *için* $z_n = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^{(n)} y_i^n$ olmak üzere $\lim_n \|z_n - x_0\| = 0$ olacak şekilde $\alpha_i^{(n)} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^{(n)} = 1$ ve $\{y_i^n\}_{i=1}^{k_n} \subset M(x_0, \varepsilon)$ alalım. $j = 1,2,...,k_n$ için $\beta_0^n = 0$, $\beta_j^n = \sum_{i=}^{j} \alpha_i^n$ alalım. $y_n(t) = y_{j+1}^n$ olarak tanımlayalım $j = 0,1,2,...,k_n - 1$ için $t \in [\beta_j^n, \beta_{j+1}^n)$ ve $n = 1,2,...$ için $x_n(t) = y_n(t) - z_n$ ise bu taktirde $Ex = 0$ ve $1 \leq \|x_0 + x_n\|_p \leq \|x_0 - z_n\| + \|y_n\|_p \leq \|x_0 - z_n\| + 1$ dir. Bu nedenle $\lim_n \|x_0 + x_n\|_p = 1$ dir. Fakat X bir **(pALUR)** dur. Bu nedenle $\lim_n \|x_n\|_p = 0$ dır. Bununla birlikte her n için $\varepsilon \leq \|x_0 - y_n\|_p \leq \|x_0 - z_n\| + \|x_n\|_p$ dir. Böylece $\varepsilon \leq 0$ çelişkisini elde ederiz.

(3)$\Rightarrow$(4). Bu Fan ve Gliksburg tarafından ispatlandı. Fan ve Gliksburg (1958) de **(G)** nin **(G.3)** özelliğine denk olduğu ispatlandı. $f^* \in X, \|f\| = 1$ olmak üzere $\{x \in X : \|x\| = 1, f(x) \geq \alpha, \alpha \in R\}$ şeklindeki kümeler ailesi X birim küresinin norm topolojisine göre açık kümeler için bir taban teşkil eder.

(4)$\Rightarrow$(1). Troyanski (1985) teki Lemma3.1 i sonraki ifade ile yer değiştirirsek ispat Troyanski (1985) teki Sonuç 1.2 nin doğrultusunda sağlanır.♦

Lemma4.4.1.2: $1 < p < \infty$ olsun. $0 < \delta \leq 1$ için

$x \in X, \|x\| = 1, y \in L^p(\lambda, X), Ey = 0, \|x + y\|_p^p \le 1 + \delta^{p+3}$ olacak şekilde bir C_p sayısı vardır öyle ki; $D = \{t \in [0,1] : \|x + y(t)\| \ge 1 + \delta\}$ olmak üzere $\lambda(D) \le C_p \delta$ ve $\int \|y(t)\|^p \, dt \le C_p^p \delta$ yi yazabiliriz.

Lemmanın ispatı: $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{|1+\alpha|^p - 1 - p\alpha}{\alpha^2} = \dfrac{1}{2} p(p-1) > 0$ ve $\lim\limits_{|\alpha| \to 0} \dfrac{|1+\alpha|^p - 1 - p\alpha}{|\alpha|^p} = 1$

ve $\alpha \ne 0$ için $|1+\alpha|^p - 1 - p\alpha > 0$ olduğundan

$$|1+\alpha|^p \ge \begin{cases} 1 + p\alpha + K_p \alpha^2 & if \ |\alpha| \le 1 \\ 1 + p\alpha + K_p |\alpha|^p & if \ |\alpha| \ge 1 \end{cases}$$

olacak şekilde bir $K_p > 0$ sabiti mevcuttur.

$$M_p(\delta) = \begin{cases} K_p \delta^{2-p} & if \ 1 < p \le 2 \\ K_p & if \ 2 \le p < \infty \end{cases}$$

olarak alalım. Bu taktirde

$$|\alpha| \ge \delta \ \text{ ise } \ |1+\alpha|^p \ge 1 + p\alpha + M_p(\delta)|\alpha|^p \tag{4.15}$$

dır. $\varphi(t) = \|x + y(t)\| - 1$ yazalım. Bu taktirde D üzerinde $E\varphi \ge \left\| \int_0^1 (x + y(t))dt \right\| - 1 = 0$

ve $\varphi(t) \ge \delta$ elde edilir. (4.15) ten

$$1 + \delta^{p+3} \ge \|x + y\|_p^p = \int_0^1 (1 + \varphi(t))^p \, dt \ge \int_0^1 (1 + p\varphi(t))dt + \int_D M_p(\delta)|\varphi(t)|^p \, dt$$

$$\ge 1 + m_p(\delta) \int_D |\varphi(t)|^p \, dt \ge 1 + M_p(\delta)\lambda(D)\delta^p$$

elde edilir.

Bu nedenle $\lambda(D) \le \delta^3 / M_p(\delta) \le \delta / K_p$ ve $\int_D |\varphi(t)|^p \, dt \le \delta^{p+3} / M_p(\delta) \le \delta^{p+1} / K_p$ dir.

Her $\alpha \ge \delta$ için $(1+p)^\alpha \le 1 + \left(\dfrac{2\alpha}{\delta}\right)^p$ olduğundan

$$\int_D \|x + y(t)\|^p \, dt = \int_D (1 + \varphi(t))^p \, dt \le \int_D \left(1 + \left(\frac{2\varphi(t)}{\delta}\right)^p\right)$$

$$= \lambda(D) + \left(\frac{2}{\delta}\right)^p \int_D |\varphi(t)|^p \, dt \leq \frac{\delta}{K_p} + \frac{2^p \delta}{K_p}$$

dir.

Böylece bazı C_p sabitleri için

$$\left(\int_D \|y(t)\|^p \, dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_D \|x + y(t)\|^p \, dt\right)^{1/p} + \lambda(D)^{1/p}$$

$$\leq \left(\frac{1 + 2^p}{K_p}\right)^{1/p} \delta^{1/p} + \frac{\delta^{1/p}}{K_p^{1/p}} \leq C_p \delta^{1/p}$$

elde edilir.

l_1 in X in bir alt uzayına izomorf olmadığı durumda Bor-Luh-Lin ve pei-Kee Lin (1985) te gösterdi ki; **(H)** ve **(R)** birlikte **(G)** yi gerektirir. Böylece teoremde **(K)** ile **(H)** yı yerdeğiştirebiliriz.

Buradan aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.4.1.3: $1 < p < \infty$ olsun ve $(\Omega, \sum, \mu)$ bir olsılık uzayı olsun. Bir X Banach uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir:

i) X bir **(pALUR)** dur.

ii) Her $1 < q < \infty$ için $L^q(\mu, X)$ bir **(pALUR)** dur.

iii) X, **(R)** dir ve **(K)** özelliğine sahiptir.

iv) Her $1 < q < \infty$ için $L^q(\mu, X)$ **(R)** dir ve **(K)** özelliğine sahiptir.

Üstelik, l_1 in X in bir alt uzayına izomorfik olmadığı durumda **(K)** ile **(H)** yı yerdeğiştirebiliriz.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Ele alınan çoğu Banach cebirinin Weddderburn ayrışımına sahip olmadığı görülerek bu uzaylar ve bölüm uzayları hakkında genel bilgi edinilmiştir. Ayrıca Banach cebirlerinin bazı geometrik özellikleri de incelenmiş olup, Banach cebirleri ve Banach uzaylarının geometrik özellikleri hakkında bazı temel bilgiler edinilmiştir.

Bu incelemeler göstermektedir ki; Wedderburn ayrışımına sahip olan veya olmayan bölüm cebirlerinin de geometrik özelliklerinin incelenmesi literatür açısından önemlidir

Bu çalışmada yapılan incelemeler ve elde edilen bilgiler ileride Banach cebirlerinin ve Banach uzaylarının geometrisi ile ilgili olarak yapılacak çalışmalara temel teşkil edecektir.

KAYNAKLAR

BACHELIS, G. F. and SAEKI, S., 1987. Banach algebras with uncomplemented radical, Proc. Amer. Math. Soc. 100: 271-274.

BADE, W. G. and CURTIS, P. C., 1960. The Wedderburn decomposition of commutative Banach algebras. Amer. J. Math. , 82:851-866.

BADE, W. G. and DALES, H. G., 1992. The Wedderburn decomposability of some commutative Banach algebras. Journal Funct. Anal., 107:105-121.

BADE, W. G., 1989. The Wedderburn decomposition for quotient algebras from sets of non-synthesis. Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ., 21: 25-31.

BADE, W. G., CURTIS-1, P. C., 1960. The Wedderburn decomposition of commutative Banach algebras. Amer. J. Math., 82:851-866.

BADE, W. G., CURTIS-2, P. C., 1960. Homomorphisms of commutative Banach algebras, Amer. J. Math., 82: 589-608.

BOAS,R. P., Jr., 1954. Entire functions, New York, Academic Press Inc. 276p.

BOHNENBLUST, H. F. and KARLIN, S., 1955. Geometrical properties of the unit sphere of Banach algebras, Annals of Mathematics, 62(2): 217-229.

BOR-LUH-LIN and PEI-KEE LIN, 1985. Property **(H)** in Lebesgue-Bochner function spaces. Proc.Am. Math. Soc.95:581-584

BOR-LUH-LIN, PEI-KEE LIN and TROYANSKI, S. L., 1986. Some geometric and topological properties of the unit sphere in a Banach space, Math. Ann. 274: 613-616

DUNFORD, N., 1954. Spectral operators, Pacific Journal of Mathematics,4: 321-354

FELDMAN, C., 1951. The Wedderburn principal theorem in Banach algebras. Proc. Amer.Math. Soc. 2: 771-777.

GELFAND, I., 1941. Zur theorie der charaktere der abelschen topologischen gruppen. Rec. Math. (N.S.) 9(51): 49-50.

GELFAND, I. M., RAIKOV, D., SHILOV, G., 1964. Commutative Normed Rings. Chelsea Publ. Comp. Brox.

GLAESER, G., 1958. Étude de certaines algèbres tay loriennes, Journal d’ Analyse Mathematique, 6 : 1-124.

HILLE, E. and PHILIPS, R. S., 1957. Functional analysis and semigroups. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 31, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.,

INGELSTAM, L., 1962. A Vertex property for Banach algebras with identity, Math. Scand., 11: 22-32.

JACOBSON, N., 1980. Basic Algebra, W H Freeman & Co (Sd), 666 p.

JACOBSON, N., 1980. Basic algebra. Vol. II , Freeman, San Francisco.365 s.

JOHNSON, B. E., 1968. The Weddeburn decomposition of Banach algebras with finite dimensional radical. Amer. Math. Journal 90: 866-876.

KATZNELSON, Y. and RUDIN, W., 1961. The Stone-Weierstrass property in Banach algebras. Pacific J. Math.90: 866-876.

KAPLANSKY,I., 1949. Normed algebras, Duke Mathematical Journal, 16: 399-418.

LIN, BOR-LUH, LIN, PEI-KEE, TROYANSKI, S.L., 1986. Some geometric and topological properties of the unit sphere in a Banach space, Math. Ann. 274, 613-616.

MALLIAVIN, P., 1959. Impossibilite de la synthese spectrale sur les groupes abeliens. Inst. Hautes Etudes Sci., 2: 61-68.

MUSTAFAYEV, H. and KARAEV, H., 2003. Expansion of the element sina via exponentials for Hermitian elements a. Journal of Math Sci. (translated from Zap. Nauch. Seminar. POMI St. Petersburg Branch Math. Inst. Steklov), 115(2) : 2230-2234.

MUSTAFAYEV, H. S., 2003. A spectral mapping theorem for Banach modules. Studia Math., 156(2):99-104.

MUSTAFAYEV, H. S. and ÜLGER, A., 1999. A class of Banach algebras whose duals have the Schur property, Turkish Journal of Math. 23(3): 441-452.

RICKART, C. E., 1953. On spectral permanence for certain Banach algebras, Proceedings of the American Mathematical Society, 4: 191-196.

RICKART, C. E., 1960. General Theory of Banach Algebras, D. Van Nostrand Comp.394 p.

SAEKI, S., 1972. Tensor products of Banach algebras and harmonic analysis, Tôhoku Math. J. 24:281-199.

SILOV,G. E., 1954. On a decomposition of a commutative normed ring in a direct sum of ideals, Mathematičeskiĭ Sbornik N.S.,32: 353-364.

SOLOJEV, M., 1995. Wedderburn docempositions of commutative Banach algebras, Proceedings of the American Mathematical Society, 123(11): 3305-3315

TROYANSKI, S., 1985. On a property of the norm which is close to local uniform rotundity. Math.Ann.271:305-314

ZELINSKY, D., 1954. Raising idempotents,Duke Mathematical Journal, 21:315-322

ÖZGEÇMİŞ

01.04.1980 tarihinde Adıyaman iline bağlı Samsat ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adıyaman'da tamamladı. 2000 yılında İnönü Üniversitesi Adıyaman Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne girmeye hak kazandı. 2004 yılında bu bölümden mezun oldu. 2005 yılında Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 06.01.2006 tarihinde 2547 sayılı kanunun 50/d maddesine göre aynı enstitüde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. 09.07.2008 tarihinde bu kurumla kendi isteği üzerine ilişiği kesildi ve Sağlık Bakanlığına naklen ataması yapıldı ve halen Sağlık Bakanlığında görevine devam etmektedir.

ÖZET

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin amacı ve bu konunun seçilme gereksinimi anlatılmıştır. İkinci bölüm ise, tezin ilerleyen kısımlarında gerekli olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölüm ise Banach cebirlerinin Wedderburn ayrışımına ayrılmıştır. Bu bölümde ayrışım, Banach cebirleri ve Grup Banach cebirleri olarak ayrı ayrı ele alınmıştır. Dördüncü bölüm ise Banach cebirlerinin geometrik özellikleriyle ilgilidir. Bu özellikler, Banach cebirinin kompleks ve reel olması durumları ayrı ayrı ele alınarak incelenmiştir. Beşinci bölüm ise bir Banach uzayı için birim yuvarın sahip olduğu bazı geometrik özelliklerin incelenmesine ayrılmıştır. Altıncı bölüm ise tezin sonuçları ve önerilerine ayrılmıştır.

SUMMARY

This thesis is composed of six parts. The first part explains the goal of the thesis and the reason for the choice of this topic. The second part mentions about basic definitions and theorems which are necessary for the following parts. In the third part, Wedderburn decomposition of Banach algebras is defined. In this part, the decomposition is explained as Banach algebras and Group Banach algebras seperately. When the subject comes to fourth part, it is related to the geometric properties of Banach algebras. These properties are analysed by explaining the circumstances of Banach algebras' being complex and real one by one. The fifth part is devoted to study some geometric properties which the unit ball has for a Banach space, and the sixth part gives information about the results of the thesis and the suggestions.