

**T.C.  
HARRAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DÖRT ELEMANLI GRÜBLER MEKANİZMALARININ SANAL  
EKLEMLER METODU İLE MODELLENMESİ VE YAKLAŞIK DİNAMİĞİ**

**Mehmet DİRİLMİŞ**

**MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**ŞANLIURFA  
2005**

**T.C.  
HARRAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DÖRT ELEMANLI GRÜBLER MEKANİZMALARININ SANAL  
EKLEMLER METODU İLE MODELLENMESİ VE YAKLAŞIK DİNAMİĞİ**

**Mehmet DİRİLMİŞ**

**MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**ŞANLIURFA  
2005**

Prof. Dr. Sedat BAYSEÇ danışmanlığında, Mehmet DİRİLMİŞ'in hazırladığı "Dört Elemanlı Gröbler Mekanizmalarının Sanal Eklemler Metodu İle Modellenmesi ve Yaklaşık Dinamiği" konulu bu çalışma 16/09/2005 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Makine Mühendisliği. Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Sedat BAYSEÇ

Üye : Doç. Dr. Bülent YEŐİLATA

Üye : Yrd. Doç. Dr. Arif GÜREL

**Bu Tezin Makine Mühendisliği Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım**

**Prof. Dr. İbrahim BOLAT**  
**Enstitü Müdürü**

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

# İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZ.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	iv
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	4
3.1. Mekanizmaların Hareketliliği.....	4
3.1.1. Serbestlik derecesi.....	4
3.1.2. Düzlemsel uzayda serbestlik derecesi.....	5
3.1.3. Mekanizma serbestlik derecesi.....	6
3.1.4. Mafsalların kinematik zincirdeki dağılımı.....	8
3.1.5. Grübler denklemi.....	9
3.2. Dört Uzunlu Grübler Mekanizmalar.....	11
3.2.1. Dört uzunlu mekanizma tipleri.....	11
3.2.1.1. Dört çubuk mekanizması.....	11
3.2.1.2. Krank-biyel mekanizması.....	12
3.2.1.3. Kol-kızak mekanizması.....	12
3.2.1.4. Salınan blok mekanizması.....	12
3.2.1.5. Çift kızak mekanizması.....	12
3.2.1.6. İskoç boyunduruğu mekanizması.....	13
3.2.1.7. Oldham kavraması mekanizması.....	13
3.2.1.8. Konkoid hareket mekanizması.....	13
3.2.2. Grashof teoremi.....	14
3.2.3. Kinematik yer değişim.....	15
3.2.3.1. RRRP zincirinin kinematik yer değişimi.....	16
3.2.3.2. RPPR zincirinin kinematik yer değişimi.....	17
3.2.3.3. PRPR zincirinin kinematik yer değişimi.....	17
3.3. Mekanizmaların Dinamiği.....	18
3.3.1. Newton yasaları.....	18
3.3.1.1. Newton'un birinci yasası.....	19
3.3.1.2. Newton'un ikinci yasası.....	20
3.3.1.3. Newton'un üçüncü yasası.....	20
3.3.2. Lagrange denklemleri.....	21
3.3.2.1. Holonomik sistemler için Lagrange denklemi.....	21
3.3.2.2. Holonomik olmayan sistemler için Lagrange denklemi.....	23
3.3.3. Hamilton denklemleri.....	23
3.3.4. Yaklaşık dinamik metot.....	25
3.3.5. Metotların karşılaştırılması.....	27
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA.....	29
4.1. Mekanizmaların Dinamiği.....	29
4.2. Açık Zincirlerin Dinamiği.....	31
4.2.1. Sanal eklemler metodu.....	31
4.2.2. Tek elemanlı iki serbestlik dereceli P-R sisteminin dinamiği.....	32
4.2.2.1. Sistemin Lagrange metodu ile dinamik modellenmesi.....	32
4.2.2.2. Sistemin yaklaşık modellenmesi.....	36
4.2.3. İki elemanlı dört serbestlik dereceli P-R-P-R sisteminin dinamiği.....	38
4.2.3.1. Sistemin Lagrange metodu ile dinamik modellenmesi.....	38
4.2.3.2. Sistemin yaklaşık modellenmesi.....	43
4.2.3.3. Uygulamalar.....	46
4.2.4. Üç elemanlı altı serbestlik dereceli P-R-P-R-P-R sisteminin dinamiği.....	49
4.2.4.1. Sistemin Lagrange metodu ile dinamik modellenmesi.....	49
4.2.4.2. Sistemin yaklaşık modellenmesi.....	53

4.3. Açık Zincirlerden Kapalı Mekanizma Zincirlerinin Oluşturulması.....	59
4.3.1. Açık zincirden dört çubuk mekanizmasının elde edilişi.....	59
4.3.2. Krank biyel mekanizması (1. tip) elde edilmesi.....	60
4.3.3. Kol kızak mekanizması elde edilmesi .....	61
4.3.4. Salınan blok mekanizması elde edilmesi.....	61
4.3.5. Krank biyel mekanizması (2. tip) elde edilmesi .....	62
4.3.6. Oldham kaplini mekanizması elde edilmesi.....	62
4.3.7. İskoç boyunduruğu mekanizması elde edilmesi.....	63
4.3.8. Çift kızak mekanizması elde edilmesi .....	63
4.3.9. Konkoid hareket mekanizması elde edilmesi.....	64
4.3.10. Örnekler.....	64
4.3.10.1. Dört elemanlı RRRR eklemler (dört çubuk mekanizması) Grüber mekanizmasının oluşturulması.....	64
4.3.10.2. Dört elemanlı RRRP eklemler (krank-biyel mekanizması) Grüber mekanizmasının oluşturulması .....	66
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	68
KAYNAKLAR.....	69
ÖZGEÇMİŞ.....	70
EKLER.....	71
ÖZET .....	75
SUMMARY .....	76

## ÖZ

Yüksek Lisans Tezi

### DÖRT ELEMANLI GRÜBLER MEKANİZMALARININ SANAL EKLEMLER METODU İLE MODELLENMESİ VE YAKLAŞIK DİNAMİĞİ

Mehmet DİRİLMİŞ

Harran Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Sedat BAYSEÇ

Yıl: 2005, Sayfa: 76

Mekanik sistemlerin gerçek hareket denklemleri Newton-Euler, Lagrange ve Hamilton formülasyonları ile elde edilebilir . Ortaya çıkan denklemler genellikle karmaşık ve lineer değildir ve aritmetik çözümleri yoktur . Bu tür denklemlerin nümerik integrasyonu çok fazla aritmetik işlem gerektirdiğinden sonuçlar gerçek-zaman bazında değildir . Buna karşın gerçek zaman simülatörleri, adaptiv kontrol stratejilerinde kullanılan modeller gibi uygulamalar gerçek zaman içinde çözüme ihtiyaç duyarlar . Bu çalışmada, yaklaşık dinamik denklemleri üreten, bir teknik sunulmaktadır. Bu teknik ile önce 3 adet hareketli elemanın birbirine peş peşe birisi döner, diğeri kayar olmak üzere iki adet eklem ile bağlanmasından oluşan bir açık zincir türetilmekte ve uç nokta uygun kuvvetler ile sabit bir nokta etrafında dönecek yada bir kızak boyunca öteleme yapacak şekilde kontrol edilerek bu zincirden kapalı mekanizma zincirleri elde edilmektedir. Elde edilen mekanizmalar Grüber tipi mekanizmalar olup 4 adet elemana sahip düzlemsel ve bir serbestlik dereceli mekanizmalardır. Bu mekanizmalar sadece kayar ve döner eklemler içerirler.

**ANAHTAR KELİMELEER** : Grüber mekanizmaları, Dinamik modelleme, Gradient metodları

## **ABSTRACT**

**MSc Thesis**

### **METHOD OF FICTITIOUS JOINS WITH MODELLING AND APPROXIMATE DYNAMICS OF THE FOUR LINK GRUBLER MECHANISMS**

**Mehmet DİRİLMİŞ**

**Harran University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mechanical Engineering**

**Supervisor : Prof. Dr. Sedat BAYSEÇ**

**Year: 2005, Page: 76**

Exact motion equations of mechanical systems are derivable using Newton-Euler, Lagrange and Hamilton equations. Resulting equations are generally complicated and high non-linear, and hence have no closed form solutions. Numerical integrations of such equations involves too much computation and therefore can generally not be done in real time. This MSc. Thesis presents a technique which yields approximate dynamics equations of an open chain commposed of 3 moving links connected to each other by a pair of joints successively, one revolute and the other prismatic. The tip of the open chain is constrained to do some certain motions like rotation about a fixed point or translation along a slideway. This converts the open chain into a closed loop to represent mechanisms. The mechanisms obtainable are 4 link Grübler Type mechanisms, which are planar, containing only single degree of freedom joints and of one degree of freedom, .

**KEY WORDS** : Grübler mechanisms, Dynamics modelling, Gradient methods.

## TEŞEKKÜR

Tez alıŐmalarım esnasında değerli yardımlarını esirgemeyen tez danıŐmanım sayın Prof. Dr. Sedat BAYSEÇ'e, beni her konuda destekleyerek cesaretlendiren aileme katkılarından dolayı teŐekkürü bir borç bilirim.

Son olarak Tezimi bitirmemde önemli bir yeri olan değerli eŐim Esra'ya gönülden teşekkür ederim.



## ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa No
Şekil 3.1. Üç boyutlu koordinat ekseninde bir cismin konumu.....	5
Şekil 3.2. Dört çubuk mekanizması .....	6
Şekil 3.3. Maksimum kinematik elemanlı uzuv.....	10
Şekil 3.4. Dört çubuk mekanizması .....	11
Şekil 3.5. Krank-biyel mekanizması.....	12
Şekil 3.6. Kol-kızak mekanizması .....	12
Şekil 3.7. Salınan blok mekanizması.....	12
Şekil 3.8. Çift kızak mekanizması .....	13
Şekil 3.9. İskoç boyunduruğu mekanizması.....	13
Şekil 3.10. Oldham kavraması mekanizması.....	13
Şekil 3.11. Konkoid hareket mekanizması.....	14
Şekil 3.12. RRRP zincirinin kinematik yer değişimi ile türetilen mekanizmalar.....	16
Şekil 3.13. RPPR zincirinin kinematik yer değişimi ile türetilen mekanizmalar.....	17
Şekil 3.14. PRPR zincirinin kinematik yer değişimi ile türetilen mekanizmalar.....	18
Şekil 4.1. Dört çubuk mekanizması.....	29
Şekil 4.2. Tek elemanlı ve iki serbestlik dereceli P-R açık kinematik zincirine ait gösterim.....	32
Şekil 4.3. İki elemanlı ve toplam dört serbestlik dereceli P-R-P-R açık kinematik zincirine ait gösterim.....	38
Şekil 4.4. Lagrange tarzında modellenen ikili sarkacın enerji grafikleri.....	47
Şekil 4.5. Yaklaşık tarzda modellenen ikili sarkacın enerji grafikleri.....	47
Şekil 4.6. Sanal eklemler metodu ile Lagrange tarzında modellenen ikili sarkacın enerji grafikleri.....	48
Şekil 4.7. Üç elemanlı ve toplam altı serbestlik dereceli P-R-P-R-P-R açık kinematik zincirine ait gösterim.....	49
Şekil 4.8. Dört çubuk mekanizmasının elde edilmesi.....	60
Şekil 4.9. Krank biyel mekanizması (2. tip) elde edilmesi.....	61
Şekil 4.10. Kol kızak mekanizmasının elde edilmesi.....	61
Şekil 4.11. Salınan blok mekanizmasının elde edilmesi.....	62
Şekil 4.12. Krank biyel mekanizması (2. tip) elde edilmesi.....	62
Şekil 4.13. Oldham kavraması mekanizmasının elde edilmesi.....	63
Şekil 4.14. İskoç boyunduruğu mekanizmasının elde edilmesi.....	63
Şekil 4.15. Çift kızak mekanizmasının elde edilmesi.....	64
Şekil 4.16. Konkoid hareket mekanizmasının elde edilmesi.....	64
Şekil 4.17. Dört çubuk mekanizması .....	65
Şekil 4.18. Krank-biyel mekanizması.....	66

## 1. GİRİŞ

Dört uzuvlu mekanizmalar uygulamada en fazla rastlanılan mekanizmalar olduğu gibi, çoğu kez çok uzuvlu mekanizmalar, basit dört uzuvlu mekanizmaların birleştirilmeleri ile elde edilir. Pratikte kullanılan mekanizmaların büyük bir kısmı dört uzuvlu Grüber mekanizmalardan türetilmiştir.

Mekanik sistemlerin gerçek hareket denklemleri Newton-Euler, Lagrange ve Hamilton formülasyonları ile elde edilebilir. Ortaya çıkan denklemler genellikle karmaşık ve gayri lineer olup aritmetik çözümleri yoktur. Bu tür denklemlerin nümerik integrasyonu çok fazla aritmetik işlem gerektirdiğinden sonuçlar gerçek-zaman bazında değildir. Buna karşın gerçek zaman simülatörleri, adaptiv kontrol stratejilerinde kullanılan modeller gibi uygulamalar gerçek zaman içinde çözüme ihtiyaç duyarlar. Bu çalışmada, yaklaşık dinamik denklemleri üreten, Gradient metodları içerisinde yer alan “Sanal Eklemler Metodu” sunulmakta ve incelenen sistemin modellemesinde kullanılarak hareketin yaklaşık dinamik denklemleri türetilmekte; birim zaman için, konum, hız, ivme değerleri hesaplanmaktadır. Yaklaşık dinamik denklemleri gerçek hareket denklemlerinden daha basit olup daha az sayıda matematik işlem gerektirdiğinden daha yüksek hızlarda integrasyonları mümkündür.

Matematik model sistemin karakteristiklerini içerip dinamik davranışlarını belirleyicidir. Robotik uygulamaların çoğunluğunda kontrol donanım ve yazılımın işlem hızı maniplatör ve sürücü motorlarından çok daha yüksek olduğundan bunların modellenmesi genellikle aranmaz.

Bu çalışmada; fiziksel modelde varsayılan her bir eleman çifti arasında, biri döner ve biri kayar eklem olmak üzere birbirine mafsallanmış 3 hareketli rijit elemandan oluşan toplam 6 serbestlik dereceli açık kinematik zincir sistemi incelenecektir ve daha sonra bu açık kinematik zincirin en uçta bulunan elemanın

bir yay ile toprağa bağlanması suretiyle dört uzuvlu tek serbestlik dereceli grübler mekanizması elde edilecektir.

Sistemin modellenmesinde ve yaklaşık dinamik denklemlerinin çıkarılmasında Sanal Eklemler Metodu kullanılacak ve yöntemin getirdiği kolaylıklar vurgulanacaktır. Bu metodla elde edilen değerlerle gerçek çözüm değerleri güvenilirliğin ortaya konması açısından karşılaştırılacaktır. Hesaplamalarda türetilen diferansiyel denklemler, bilgisayar ortamında hazırlanacak program ile çözümlenerek; hem daha hassas sonuçların eldesi hem de benzer işlemlerin tekrarlanmasının önlenmesi amaçlanmaktadır.

## **2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR**

Robotik sistemlerin matematik modelleri, tasarımcıların kontrol ve hareket profili belirlemede fikirlerini üzerinde uyguladıkları önemli bir araç olup aynı zamanda eğitim amaçları içinde kullanılırlar. Bir manipülatörün dinamik davranışlarından biri; ucuz bir makinanın sahip olabileceği dinamik dezavantajlı özelliklerde, serbest titreşim ve silkinmenin yumuşak bir harekete indirgenerek kontrol edilebilmesidir. Bu konuda, Jones (1977), yayınlanan makalesinde; hareket esnasında oluşan fazla titreşimin, artış periyodunun başlangıcında kam tarafından verilen hız darbeleriyle elimine edilebileceğini göstermiştir.

Alıcı (1993), yapmış olduğu simülasyona yönelik çalışmada; dinamik yükler taşıyan ve farklı titreşimlere sahip 2 serbestlik dereceli düzlemsel bir manipülatöre, her bir serbestlik derecesinin hareket profili üzerine hız darbelerinin etki ettirilmesiyle titreşimlerin elimine edilebildiğini göstermiştir.

Walker ve Orion (1982), yapmış oldukları çalışmada çok serbestlik dereceli açık kinematik zincirli sistemlerin Newton-Euler formülasyonlarıyla dinamik modellenmesini yapmışlardır.

Çeşitli mekanik sistemlerin dinamik olarak modellenmesine uygun birçok simulator programı geliştirilmiştir, bunlar; DAMN, DRAM, ADAMS, IMP, VECNET, KIDYAN, CATIA gibidir ve bunlardan bazıları ticari olarak üretilmiştir.

### **3. MATERYAL ve YÖNTEM**

Makine, Fransız bilimci Reuleaux'ya göre, tabiatta mevcut mekanik kuvvetlerin belirli bir hareket ile birlikte iş yapmasını sağlayabilen, kuvvete karşı direnç gösterebilen cisimlerin birleştirilmesi ile oluşturulan bir sistemdir. Diğer yandan; Mekanizma, kuvvet ve hareket iletimi için kullanılabilen rijit cisimlerin rijit mafsallarla birleştirildiği sistem olarak tanımlanmaktadır. Bu tanımlar göz önüne alındığında, aşağıdaki sonuçlara ulaşabilir;

Mekanizma ve Makine arasında en önemli fark bir makinenin belirli bir amaç için üretilmiş olmasıdır. Buna karşın mekanizma daha geneldir ve çok farklı makinelerde kullanılıyor olabilir. Makineler temel olarak yaptıkları iş için incelenirken, mekanizmalar kullanım alanına bakılmadan incelenerek farklı uygulamalarda benzer mekanizmalar için de geçerli olabilecek sonuçlar çıkarılmaya çalışılır.

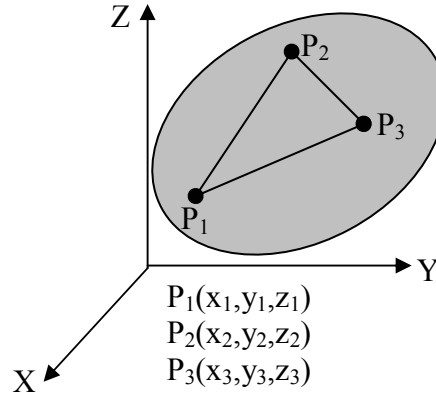
Mekanizma, kendisini inceleyerek Makine yapısını analiz ve sentez edebileceğimiz bir idealleştirilmiş sistemdir. Oysa Makine gerçek (reel) bir sistemi ifade eder.

#### **3.1. Mekanizmaların Hareketliliği**

##### **3.1.1. Serbestlik dereceleri**

Bir kinematik çift ile bağlanmış olan iki rijit cismin birbirlerine göre, kinematik çiftin özelliklerine bağlı olarak, farklı bağlı hareketleri olacaktır. Oluşan bu bağlı hareket bir kinematik çiftin en önemli özelliklerini verir. Bu bağlı hareket kıstasına göre sınıflandırmak için, serbestlik derecesi kavramına ihtiyaç vardır. Uzun serbestlik derecesi, o uzayda bulunan bir cismin konumunu belirlemek için gerekli olan bağımsız parametre sayısıdır.

Şekil 3.1.'de üç boyutlu bir koordinat eksen ve cismin konumu gösterilmektedir. Cismin konumunu bu genel uzayda belirlemenin bir yolu, cismin üzerinde aynı doğru üzerinde bulunmayan her hangi üç noktanın ( $P_1, P_2, P_3$ ) konumunu belirlemektir. Bu üç noktanın konumu bilindikten sonra, rijidite kavramından dolayı bir başka noktanın bu noktalardan uzaklığı değişmeyeceğinden, diğer noktaların konumu belirlenmiş olacaktır. Bu üç noktanın her birinin konumu üç parametre ile belirlenir ( $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  ve  $P_3(x_3, y_3, z_3)$ ). Bu durumda üç noktanın ve dolayısı ile cismin konumunu belirlemek için dokuz parametre gerekli görülür ise de, cisim rijit kabul ettiğimizden bu üç nokta arasında uzaklıklar sabit olacaktır. Bu sabit uzaklık şartı dokuz parametre arasındaki şu üç ilişkiyi tanımlayacaktır:



Şekil 3.1. Üç boyutlu koordinat ekseninde bir cismin konumu

$$\begin{aligned}
 (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 &= a_1^2 \\
 (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 &= a_2^2 \\
 (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 &= a_3^2
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Dokuz parametre ( $x_i, y_i, z_i : i=1,2,3$ ) ve bu parametreler arasında üç denklem bulunmaktadır. Bu durumda bu parametreler arasından sadece altısını tanımladığımızda üç noktanın ve dolayısı ile cismin konumu belirlenmiş olacaktır. Bağımsız parametre sayısı altı olduğundan genel uzayda serbestlik derecesi altıdır.

### 3.1.2. Düzlemsel uzayda serbestlik derecesi

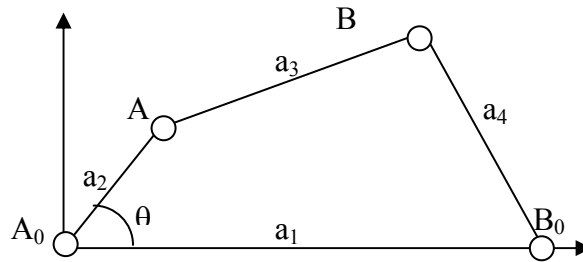
Düzlemsel bir uzay düşündüğümüzde, bir cismin bir düzlem içinde hareketi söz konusu olacaktır. Bu durumda cisim sadece iki yönde öteleyecek ve öteleme

düzlemine dik bir eksen etrafında dönebilecektir. Öyle ise düzlemsel uzayda gerekli olan bağımsız parametre sayısı üçtür ve düzlemsel uzay serbestlik derecesi üç olacaktır. Pratikte kullanılan mekanizmaların çalıştığı ortamlar çoğunlukla düzlemseldir.

Bir kinematik çiftin (mafsalın) serbestlik derecesi, o mafsalla birleştirilen cisimlerin birbirlerine göre bağıl konumlarını belirlemek için kullanılması gerekli bağımsız parametre sayısıdır. Kinematik çiftlerin serbestlik dereceleri ve bu serbestliklerin müsaade ettiği hareketin yönü ve tipi (dönme veya öteleme), kinematik çiftleri birbirinden ayıran en önemli özelliktir ve bu özellikler kinematik çiftlerin tiplerini belirlemede kullanılır.

### 3.1.3. Mekanizma serbestlik derecesi

Bir mekanizmanın serbestlik derecesi, bir mekanizmada bulunan tüm uzuvların konumunu belirlemek için gerekli olan parametre sayısıdır. Örnek olarak dört döner mafsalla bağlı dört uzuvdan oluşan ve genellikle dört-çubuk mekanizması olarak adlandırılan mekanizmayı ele alalım.  $\theta$  açısı değeri verildiğinde her bir uzuv üzerinde iki noktanın konumu ( $A_0B_0$  (1 uzvu),  $A_0A$  (2 uzvu),  $AB$  (3 uzvu) ve  $BB_0$  (4 uzvu)) bulunabildiğine göre, bu mekanizmada bulunan tüm uzuvların konumunu belirlemek için sadece bir parametre gerekmektedir. Öyle ise, dört-çubuk mekanizmasının serbestlik derecesi 1' dir.



Şekil 3.2. Dört çubuk mekanizması

Şekil 3.2.'de gösterilmiş olan örnekte belirtilen  $\theta$  gibi açısal parametrelerden farklı parametreler de mekanizma uzuvlarının konumlarını belirlemek için kullanılabilir. Buna karşın kullanılması gereken parametre sayısı belirlidir. Bir başka husus ise, genel olarak gerekli olan parametre sayısının uzuvların boyutlarına bağlı olmamasıdır. Örneğin  $a_2$  boyutu 5 birim yerine 4 birim olsa, dört çubuk

mekanizmasının serbestlik derecesi yine 1' dir. Öyle ise, mekanizma serbestlik derecesi ile mekanizmada bulunan mafsalların serbestlik derecesi, mafsal sayısı, uzuv sayısı arasında bir bağıntı bulmayı hedefleyebiliriz. Matematiksel olarak olaya bakmak için aşağıda verilmiş olan parametreler tanımlanmalıdır:

$\lambda$  =Uzay Serbestlik Derecesi

$\lambda$  =3 düzlemsel uzaylar için

$\lambda$  = 6 genel uzay için

L = Mekanizmada uzuv sayısı (sabit uzuv dahil)

j = Mekanizmada mafsal sayısı

$f_i$  = i mafsalının serbestlik derecesi

F = Mekanizma serbestlik derecesi veya mekanizmanın hareketliliği

L sayıda uzvun  $\lambda$  serbestlik dereceli uzayda herhangi bir kinematik çift ile birbirlerine bağlanmadan durduklarını düşünelim. Bu durumda sabit uzuv hariç, diğer L-1 uzvun her biri için  $\lambda$  sayıda parametre tanımlamamız gerekir (sabit uzva referans koordinat sistemi bağlı olduğundan sabit uzvun konumu sabittir). Hiç bir mafsal olmadığında uzuvların konumu için gerekli parametre sayısı (3.2)'de verilmiştir.

$$\lambda(L-1) \quad (3.2)$$

Uzay serbestlik derecesi  $\lambda$  olan bir uzayda  $f_i$  serbestliği olan bir mafsal, (  $\sum f_i$  ) kadar hareket serbestisini önler ve cisimlerin serbest olduğu duruma nazaran bu kadar parametreyi tanımlamamız gerekmez. Eğer her bir mafsalın engellediği hareket serbestisi diğer mafsaldan farklı ise, mekanizmada bulunan j mafsal ile uzuv hareketleri üzerine getirilecek olan toplam sınırlama (3.3) no'lu denklemdeki gibidir:

$$\sum_{i=1}^j (\lambda - f_i) = \lambda j - \sum_{i=1}^j f_i \quad (3.3)$$

Bu durumda mekanizmada bulunan uzuvların konumlarını belirlemek için gereken parametre sayısı hiç bir mafsal olmadığında gereken parametre sayısından mafsalların sınırladığı serbestliklerin çıkarılması ile elde edilir. Öyle ise:

F = Serbest uzuvlar için gerekli parametre sayısı (3.2.) - Mafsalların getirdiği sınırlamalar (3.3)



$$F = \lambda(L-1) - (\lambda j - \sum_{i=1}^j f_i) \quad (3.4)$$

veya

$$F = \lambda(L-j-1) + \sum_{i=1}^j f_i \quad (3.5)$$

Elde edilen (3.5) no'lu denkleme "Mekanizma serbestlik derecesi denklemi" denir. Serbestlik derecesi denklemi, birçok mekanizma için geçerli ise de bu denkleme uymayan mekanizmalar da bulunmaktadır. Bunun nedeni bu denklemin elde edilişi sırasında yapılmış olan varsayımlardır. Bu varsayımların en önemlisi mafsalların getirmiş olduğu hareket sınırlamalarının birbirlerinden bağımsız olmasıdır. Ancak uzuv boyutlarının belirli değerler alması durumunda bu varsayım geçerli olmayabilir ve mekanizma serbestlik derecesi denklemi bazı mekanizmalar için doğru sonuçlar vermeyebilir..

#### 3.1.4. Mafsalların kinematik zincirdeki dağılımı

Eğer bir düzlemsel kinematik zincir sadece kayar ve döner kinematik çiftlerden oluşuyor ise, Mekanizma uzuvlarının hareketi belirli olabilmesi için kinematik zincirde aşağıda verilmiş olan kuralların sağlanması gerekir:

1. Eğer bir uzvun kinematik elemanları sadece kayar mafsal oluşturuyor ise, kayar mafsalların tümü paralel olamaz. Çünkü bu durumda mekanizmanın diğer kısımlarının serbestlik derecesi ne olursa olsun, bu uzuv kayar mafsal eksenleri doğrultusunda mutlaka hareket edebilecektir.

2. İki kinematik elemanlı ve sadece kayar mafsal oluşturan iki uzuv doğrudan birbirleri ile bağlı olmamalıdır. Bu durumda da bu iki uzuv, diğer mekanizma uzuv ve mafsallarına bağlı olmadan mutlaka hareket edebilecektir.

3. Kinematik zincir içinde bulunan hiç bir halkada döner mafsal sayısı ikiden az olamaz. Döner mafsalin bir olduğu bir durumu ele alırsak diğer mafsallar kayar mafsal olduğundan o uzuvlar arasında bir dönme hareketine müsaade edilemeyecektir. Bu durumda tek döner mafsal olması durumunda bu mafsalda bağlı dönme hareketi olamayacağından böyle bir halkanın zincir içinde bulunmaması gerekir.

4. Sadece döner ve kayar mafsallardan oluşan bir mekanizmada üç uzuvlu bir halka bir rijit cisimdir. Bu durumda halka içerisindeki uzuvlar arasında bağıl hareket mümkün değildir bu nedenle serbestlik derecesi “0” olur.

Yukarıda gösterilen özel durumlarda, mekanizmanın bir kısmında ya kontrol edilemeyen serbestlik (1 ve 2) ya da hareketsizlik (3 ve 4) bulunmaktadır.

### 3.1.5. Grübler denklemi

Genel serbestlik derecesi denklemi bazı özel durumlar için daha basit hale getirilebilir. Bu şekilde özel durumlar için geçerli olan belirli bazı kuralların elde edilmesi mümkün olacaktır. Uygulamada en sık rastlanılan: bir serbestlik dereceli ( $F=1$ ), düzlemsel ( $\lambda=3$ ) ve sadece döner veya kayar mafsal ( $f_i=1$ ,  $\sum f_i=j$ ) kullanan mekanizmalar olacaktır. Bu değerler genel serbestlik derecesi denkleminde kullanıldığında:

$$3L-2j-4=0 \quad (3.6)$$

(3.6) denkleminde Grübler denklemi denilmektedir (Grübler denklemi genel serbestlik derecesi denkleminde önce bulunmuştur).

Grübler denklemini inceleyerek bu tip mekanizmalar ile ilgili çeşitli özellikleri belirleyebiliriz:

1. Grübler denklemini sağlayan mekanizmalarda uzuv sayısı çifttir.  $L$  ve  $j$  uzuv ve mafsal sayısını gösterdiğinden, tam sayı olmaları şarttır. Mafsal sayısı  $j$  ne olursa olsun  $2j$  daima çift sayıdır. Aynı şekilde,  $(2j+4)$  çift sayı olacaktır.  $3L = 2j + 4$  olduğundan, bu denklemin sağlanabilmesi  $3L$  in çift sayı olması ile mümkündür. 3 ile çarpılan bir sayının sonuçta çift sayı olabilmesi sadece sayının çift sayı olması ile mümkündür. Bu durumda mekanizmada bulunan uzuv sayısı ( $L$ ), çifttir.

2. Mekanizmada bulunan iki elemanlı uzuv sayısı dört veya dörtten fazla olmalıdır. Kinematik eleman sayısı  $k$  olan uzuvların sayısı  $l_k$  olsun. Bir elemanlı uzuv olamayacaktır ( $L_1=0$ ) çünkü uzuv tanımında, uzvun en az iki elemanlı olduğu belirtilmiştir. Toplam uzuv sayısı bu uzuv sayılarının toplamıdır:

$$L=L_2+L_3+L_4+L_5+\dots L_n \quad (3.7)$$

veya

$$3L=3L_2+3L_3+3L_4+3L_5+\dots+3L_n \quad (3.8)$$

Yukarıdaki denklemlerde  $L_2$ , mekanizmadaki iki elemanlı uzuvların sayısını,  $L_3$  üç elemanlı uzuvların sayısını belirtmektedir

$$2L_2+3L_3+4L_4+\dots+nL_n=\text{kinematik eleman sayısı} \quad (3.9)$$

İki kinematik eleman bir kinematik çift oluşturduğuna göre, kinematik eleman sayısı mafsalsayısının iki katı olacaktır:

$$2j = 2L_2+3L_3+4L_4+\dots+nL_n \quad (3.10)$$

(3.8) ve (3.10) denklemlerini Grübler denkleminde (3.6) yerleştirdiğimizde:

$$L_2-(L_4+2L_5+3L_6+\dots+(n-3)L_n)=4 \quad (3.11)$$

veya

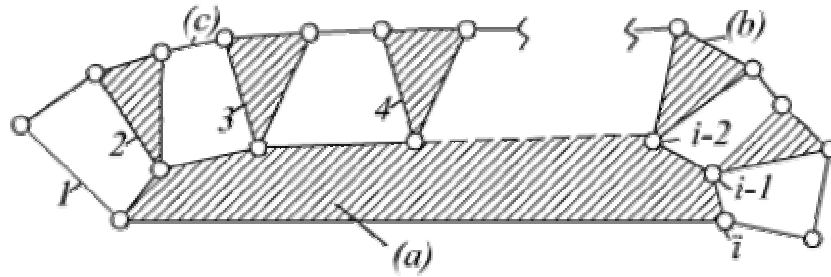
$$L_2=4+P \quad (3.12)$$

Burada

$$P = L_4+2L_5+3L_6+\dots+(n-3)L_n \quad (3.13)$$

$P$  daima pozitif bir değer alacaktır ve en küçük değeri, mekanizmada bulunan uzuvlar iki veya üç elemanlı ise, sıfırdır (uzuv sayısı değerleri eksi olamaz). Bu durumda iki elemanlı uzuvların sayısı  $P=0$  olduğunda  $L_2=4$ dir. Bunun dışında durumlarda ise iki elemanlı uzuv sayısı mutlaka 4 den fazla olacaktır.

3. Mekanizmada bulunan bir uzuvda kinematik eleman sayısı mekanizmada bulunan uzuv sayısının yarısından fazla olamaz.



Şekil 3.3. Maksimum kinematik elemanlı uzuv (Söylemez, 2000)

Yukarıdaki şekilde gösterildiği gibi, (a) gibi kinematik eleman sayısı maksimum olacak bir uzuv düşünelim. Maksimum eleman sayısı  $i$  olsun. Bu uzuvun her bir elemanı bir kinematik çift oluşturacağından,  $i$  kadar (b) tipte uzuv (a) uzvuna bağlanacaktır. Mevcut uzuv sayısı  $(i+1)$  olmuştur ancak henüz kapalı bir zincir yoktur. Ekleniecek bir uzuv (a) uzvunun kinematik eleman sayısını artırmaz. Öyle ise

minimum sayıda (c) tipinde uzuv kullanarak kapalı bir zincir elde edilir ise, (a) uzvunda kinematik eleman sayısı maksimum olur. Bu düşünüldüğünde, (i-1) kadar (c) tipinde uzuv kapalı zincir oluşturmak için yeterlidir. Bu mekanizmada uzuv sayısı:

$$L=1+i+(i-1) \quad (3.14)$$

veya

$$i = L / 2 \quad (3.15)$$

olur.

### 3.2. Dört Uzuvlu Grüber Mekanizmaları

Dört uzuvlu mekanizmalar uygulamada en sık karşılaşılan mekanizmalardır ve birçok makinede kullanılan mekanizmalar bu yapıdadır. Daha karmaşık mekanizmalar genellikle dört uzuvlu mekanizmaların birleşmesi ile oluşturulmaktadır.

#### 3.2.1. Dört uzuvlu mekanizma tipleri

Dört uzuvlu Grüber mekanizmalarda döner veya kayar mafsallar bulunabilir. Bu mafsalların mekanizma içinde dağılımı ve bu mafsallara göre sabit uzvun yeri yedi değişik tipte dört uzuvlu mekanizmayı verir.

##### 3.2.1.1. Dört çubuk mekanizması

Dört uzuvlu ve dört döner mafsala sahip mekanizmaya dört-çubuk mekanizması denmektedir (Şekil 3.4.). Genelde hareket eden üç uzuv görülse de, sabit gövde de bir uzuv sayılmaktadır. Dört-çubuk mekanizmalarının uygulamada çeşitliliği hayret edici miktarlarda olup genelde kullanan kişiler onun bir mekanizma olduğunun bile farkına varmayabilirler.



Şekil 3.4. Dört çubuk mekanizması

### 3.2.1.2. Krank-biyel mekanizması

Mekanizma tasarımında yoğun bir şekilde kullanılan bir başka mekanizma da krank-biyel mekanizmasıdır (Şekil 3.5.). Genel olarak bir dönme hareketini bir öteleme hareketine, veya bir öteleme hareketini bir dönme hareketine çevirmek için kullanılabilir.



Şekil 3.5. a) Krank-biyel mekanizması (1.tip), b) Krank-biyel mekanizması (2.tip)

### 3.2.1.3. Kol-kızak mekanizması

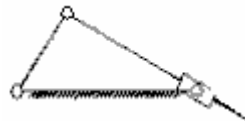
Kol-kızak mekanizması, krank-biyel mekanizmasında kayar mafsalları oluşturan uzuvlar dışında bir uzvun sabit alınması ile kayar mafsallın sabit olmayan bir eksen yönünde öteleme yapması sonucunda elde edilir. Kol-kızak mekanizması vargel mekanizması olarak da bilinmektedir.



Şekil 3.6. Kol-kızak mekanizması

### 3.2.1.4. Salınan blok mekanizması

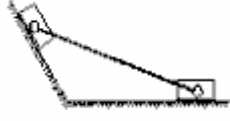
Salınan blok mekanizması, krank-biyel mekanizmasında biyel elemanının sabitlenmesi neticesinde ortaya çıkan dört elemanlı ve tek serbestlik dereceli bir mekanizmadır.



Şekil 3.7. Salınan blok mekanizması

### 3.2.1.5. Çift kızak mekanizması

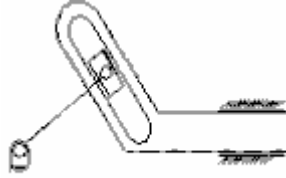
Çift kızak mekanizması (Şekil 3.8.) iki döner ve iki kayar eklemden oluşan tek serbestlik dereceli bir mekanizmadır. Bu mekanizma ile gerçek elips eğrileri çizilebilmektedir. PRRP şeklindeki kapalı kinematik zincirden türetilmiştir.



Şekil 3.8. Çift kızak mekanizması

### 3.2.1.6. İskoç boyunduruğu mekanizması

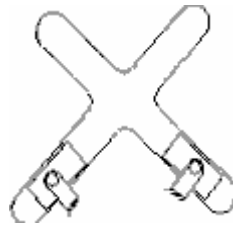
İskoç boyunduruğu mekanizması (Şekil 3.9.), dört uzuvdan oluşan iki döner ekleme ve iki de kayar ekleme sahip, tek motorla sürülen bir grübler mekanizmasıdır. RRPP kapalı kinematik zincirinden oluşan bir mekanizmadır.



Şekil 3.9. İskoç boyunduruğu mekanizması

### 3.2.1.7. Oldham kavraması

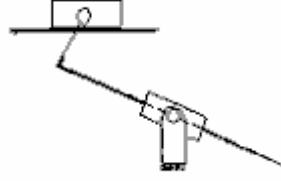
Oldham kavraması mekanizması (Şekil 3.10.), iki döner ve iki kayar mafsaldan oluşan dört elemanlı bir grübler mekanizmasıdır. Birbirine paralel yöndeki kaçık eksenli iki milin bir araya getirilerek birleştirilmesinde bu mekanizmadan yararlanılmaktadır.



Şekil 3.10. Oldham kavraması mekanizması

### 3.2.1.8. Konkoid hareket mekanizması

Konkoid hareket mekanizması (Şekil 3.11.), iki döner ve iki kayar mafsaldan oluşan dört elemanlı ve tek motorla sürülen bir grübler mekanizmasıdır. PRPR kapalı kinematik zincirinden elde edilen mekanizmadır.



Şekil 3.11. Konkoid hareket mekanizması

### 3.2.2. Grashof teoremi

Bir mekanizmanın tipi uzuv boyutları ile değişmez ise de hareket özellikleri uzuv boyutlarına bağlıdır. Bir dört-çubuk mekanizmasında hareket özellikleri uzuv boyutlarının birbirlerine göre oranı ile belirlenir. Sabit uzva döner mafsallı ile bağlı uzuvlar kol veya krank ve sarkaç adlı iki değişik hareket yapabilir. Uzuv, sabit uzva göre tam bir dönme yapabilir ise bu tip uzva kol (krank), belirli bir açısal aralıkta salınım yapan uzva da sarkaç denir.

Sabit uzva bağlı kolların krank veya sarkaç olmasına göre hareket açısından üç değişik dört-çubuk mekanizması oluşacaktır:

- i) Sabit uzva bağlı iki uzuv da tam bir dönme yapabilir. Bu tipte dört-çubuk mekanizmasına "çift-krank " veya "çift-kol" denir.
- ii) Sabit uzva bağlı iki uzuv da sadece salınım yapabilir. Bu tipte dört-çubuk mekanizmasına "çift-sarkaç" denir.
- iii) Sabit uzva bağlı uzuvlardan birisi tam bir dönme yapabilir iken, diğer uzuv salınım yapabilir. Bu tipte dört-çubuk mekanizmasına "kol-sarkaç" denir.

Dört-çubuk mekanizmasının hareket açısından değişik bu dört tipi uzuv boyutlarına bağlıdır. Grashof kuralı uzuv boyutlarına bağlı olarak bu değişik dört-çubuk mekanizmasını şu şekilde belirler:

Bir dört uzuvlu dört döner mafsallı zincirde:

$l$  = en uzun uzvun uzuv boyutu

$s$  = en kısa uzvun uzuv boyutu

$p, q$  = diğer uzuvların uzuv boyutları

Uzuv boyutları, mafsal eksenleri arasında kalan mesafedir. Bu tanıma göre:

1. Eğer  $l + s < p + q$  ise (en uzun uzuv boyutu ile en kısa uzvun uzuv boyutu toplamı diğer iki uzvun uzuv boyutlarının toplamından kısa ise):

- a,b) Eğer en kısa uzva komşu uzuvlardan birisi sabit ise, en kısa uzuv krank olmak üzere iki değişik kol sarkaç mekanizması elde edilir
- c) Eğer en kısa uzuv sabit ise, dört-çubuk mekanizması çift kranktır.
- d) Eğer en kısa uzvun karşısındaki uzuv sabit ise, dört-çubuk mekanizması çift sarkaçtır.

2. Eğer  $l + s > p + q$  ise, hangi uzuv sabit olursa olsun sadece değişik salınım açıları olan çift sarkaç mekanizmaları elde edilecektir.

3. Eğer  $l + s = p + q$  ise, üç değişik dört-çubuk mekanizması tipi elde edilir. Ancak bu mekanizmalarda tüm uzuvların bir doğru üzerinde olduğu bir kritik konum oluşacaktır.

Uzuv boyutlarının tümünü bir sabit değer ile çarptığımızda veya böldüğümüzde uzuv boyutları arasında bulunan oran sabit kaldığı müddetçe, mekanizmanın hareket özellikleri değişmeyeceği gibi, uzuvların birbirlerine göre açısal konumları da aynı kalacaktır. Yani, açısal değerler uzuv boyutlarının birbirlerine göre oranlarına bağlı olup, uzuv boyutlarına bağlı değildir.

Dört-çubuk mekanizmaları arasında kol-sarkaç mekanizması makine tasarımında önemli bir yer alır. Bu mekanizma kullanılarak bir elektrik motorunun sürekli bir dönüş hareketi kolayca bir salınım hareketine dönüştürülebilir.

### 3.2.3. Kinematik yer değişim

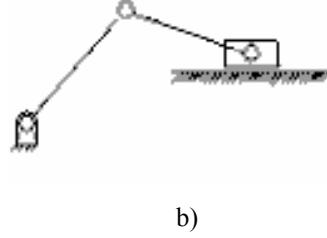
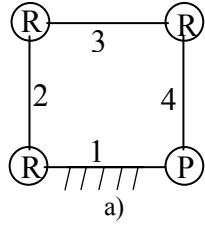
Bir mekanizmanın değişik elemanlarını sabitleyerek topolojik olarak birbirleriyle aynı, ancak görünüm ve fonksiyon olarak farklı mekanizmalar oluşturma işlemidir. Bu yöntem bağıl hareket incelemede çok yararlı olduğu gibi (bu yöntem ile mekanizmaların analizi ve sentezi yapılabilmektedir) aynı zincirden farklı mekanizmaların türetilmesi için kullanılan bir yöntemdir.



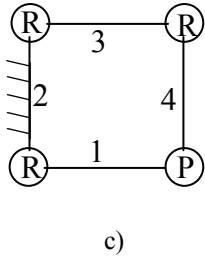
### 3.2.3.1. RRRP zincirinin kinematik yer değişimi

Üç döner ve bir kayar mafsala sahip düzlemsel dört uzuvlu bir PRRR kapalı zincirinden kinematik yer değişim metodu ile elde edilebilecek dört mekanizma Şekil 3.12 'de gösterilmiştir.

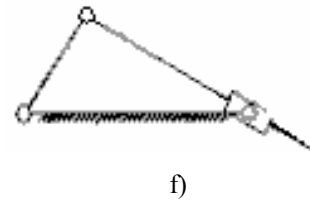
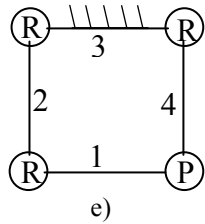
1 no'lu eleman sabitlendiğinde (Şekil 3.12.a) krank biyel mekanizması (1. tip) (Şekil 3.12.b) elde edilir:



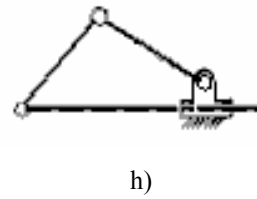
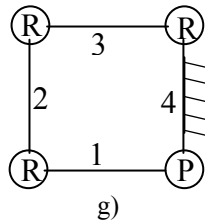
2 no'lu eleman sabitlendiğinde (Şekil 3.12.c) kol-kızak mekanizması (Şekil 3.12.d) elde edilir.



3 no'lu eleman sabitlendiğinde (Şekil 3.12.e) salınan blok mekanizması (Şekil 3.12.f) elde edilir.



4 no'lu eleman sabitlendiğinde (Şekil 3.12.g) krank biyel mekanizması (2. tip) (Şekil 3.12.h) elde edilir.

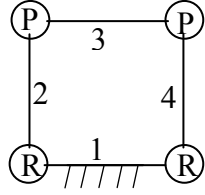


Şekil 3.12. RRRP zincirinin kinematik yer değişimi ile türetilen mekanizmalar

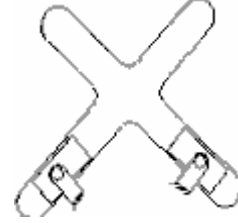
### 3.2.3.2. RPPR zincirinin kinematik yer değişimi

Şekil 3.13.'de iki döner ve iki kayar mafsala sahip RRPP kapalı zincirinden kinematik yer değişim ile elde edilen üç farklı Grübler mekanizması gösterilmektedir.

1 no'lu eleman sabitlendiğinde (Şekil 3.13.a) Oldham kaplini (Şekil 3.13.b) mekanizması elde edilir.

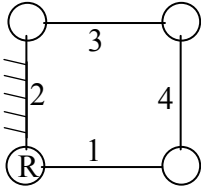


a)

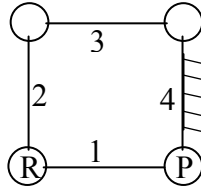


b)

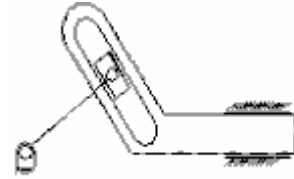
2 veya 4 no'lu elemanlar sabitlendiğinde (Şekil 3.13.c,d) İskoç boyunduruğu (Şekil 3.13.e) mekanizması elde edilir.



c)

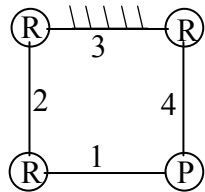


d)



e)

3 no'lu eleman sabitlendiğinde (Şekil 3.13.f) çift kızak (Şekil 3.13.g) mekanizması elde edilir.



f)



g)

Şekil 3.13. RPPR zincirinin kinematik yer değişimi ile türetilen mekanizmalar

### 3.2.3.3. PRPR zincirinin kinematik yer değişimi

İki döner ve iki kayar mafsaldan oluşan eklem sıralaması PRPR şeklinde olan kapalı zincirden (Şekil 3.14.a.) kinematik yer değişim metodu ile elde edilen mekanizmalar Şekil 3.14.'da gösterilmiştir.

Bu mekanizmanın kinematik yer değişiminde birbirinin aynı olan Konkoid hareket mekanizmaları (Şekil 3.14.b.) oluşmaktadır.



Şekil 3.14. PRPR zincirinin kinematik yer değişimi ile türetilen mekanizmalar

### 3.3. Mekanizmaların Dinamiği

Dinamik, cisimlerin hareketiyle uğraşan bir bilim dalıdır. Mekanik sistemlerin hareketleri kinematik ve kinetik diye iki ana grupta incelenir. Kinematik, rijit cismin uzaysal yer değiştirmesinin zamana bağlı bir fonksiyonunun analitik tanımıyla uğraşır. Rijit elemanın kinematığında iki temel problem vardır. İlk problem direkt veya ileri kinematik (forward kinematics) problemi, ikincisi ise ters kinematik (inverse kinematics) problemidir. Rijit elemanlardan oluşan bir kinematik zincirdeki bağımsız değişkenler bağlantı yeri değişkenleri olduğundan ve bir görev de genellikle referans koordinat çerçevesi ile ifade edildiğinden ters kinematik problem daha sık kullanılmaktadır.

Diğer taraftan rijit cisimlerden oluşan bir mekanik sistemin dinamiği, sistem hareketindeki denklemlerin matematiksel formülasyonu ile uğraşır. Hareketin dinamik denklemleri, sistemin dinamik davranışını tanımlayan bir dizi matematiksel denklemden oluşur. Bu türden denklemler, sistem hareketinin bilgisayar simülasyonunda, sistemin kinematik tasarımı ve yapısının değerlendirilmesinde yararlıdır. Rijit cisimlerden oluşan mekanik bir sistemin gerçek dinamik modeli, Newton ve Lagrangian mekaniği gibi bilinen fiziksel kanunlardan elde edilebilir:

#### 3.3.1. Newton yasaları

Isaac Newton (1642-1727), hareketin üç kanununu 1686 yılında yayınlanan Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Doğal bilimlerin matematik

prensipleri ) ya da kısa adıyla Principia adlı makalesinde ortaya atmıştır. Parçacığın hareketinin dinamiğini üç ifade yazarak tanımlamıştır.

Bir sistemin dinamiği, sistemin kinematiği ve sistem üzerine etki eden kuvvetler arasındaki ilişkidir. Rijit cisim dinamiğine yönelik genel prensiplerin doğru bir şekilde tanımlanması ilk kez şuan ki klasik mekaniğin de temelini oluşturan Newton tarafından yayınlanmıştır. Newton Yasaları olarak bilinen bu prensipler, tamamen deneysel gözlemlere dayanmakta ve matematiksel kanıttan yoksundur ama bu yasaların uymadığı bir olay da rapor edilmemiştir. Bu nedenle bu yasalar kabul edilmiş gerçekler olarak sayılabilir.

### 3.3.1.1. Newton'un birinci yasası

Başlangıçta düz bir çizgide sabit hızla hareket eden veya duran bir nesne, dengesiz kuvvetlere maruz kalmıyor ise kendi halinde kalacaktır. Newton aynı zamanda hareketin miktarını, hız ve madde miktarı olan iki faktörün çarpımı olan Momentum olarak tanımlar.

$$\vec{P} = m\vec{V} \quad (3.16)$$

burada m, cismin madde miktarıdır,  
V cismin hız değerinin ifadesidir,  
P ise lineer momentum ifadesidir.

Birinci yasada aynı zamanda sabit hız (V) ve sabit (m) kütle değerleri olması durumunda, Momentum (P) değişmeden durur bu nedenle Newton'un birinci yasası, "Momentumun korunumu yasası" olarak da bilinir. Birinci yasa, rijit cismin açısal harekete sahip olması durumunda da uygulanabilir:

$$\vec{H} = I\vec{W} \quad (3.17)$$

burada I, atalet momentidir,  
 $\vec{W}$  açısal hız vektörüdür, ve  
 $\vec{H}$  açısal momentumdur.

Bu denkleme göre Atalet ve açısal hızda herhangi bir değişikliğin olmaması durumunda açısal momentumun değeri korunur. İlk yasadın, statik bir cismin lineer

ve açısal momentlerinin korunduğu sonucuna varılabilir, yani statik bir cismin üzerine etkiyen kuvvetlerin toplamı ve momentlerin toplamı sıfıra eşittir:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} &= 0 \\ \sum \vec{\tau} &= 0\end{aligned}\quad (3.18)$$

(3.18) no'lu denklemde  $F$  , dış kuvvet;  $\tau$  ise dış momenttir.

### 3.3.1.2. Newton'un ikinci yasası

Newton'un ikinci yasası rijit cismin genel hareketini tanımlar. Bir cismin üzerine sıfırdan farklı net bir kuvvetin etki etmesiyle, cisim, net kuvvetle aynı yönde ve kuvvetin miktarıyla orantılı bir şekilde ivme kazanır.

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} &= m.\vec{a} \\ \sum \vec{M} &= I.\vec{\alpha}\end{aligned}\quad (3.19)$$

Dinamik koşullarda kütle tanımlı; bir cismin harekete karşı göstermiş olduğu dirençtir ve bu aynı zamanda hareketli cismin bir atalet özelliğidir. Bir cismin dönmeye karşı göstermiş olduğu direnç “kütle atalet momenti” olarak adlandırılır.

Newton'un ikinci yasası parçacıkların hareketini tanımlar fakat parçacıklar hipotetikler (varsayımlı), gerçekçi değildirler. Gerçekçi cisimler sonlu boyutlara sahiptirler. Euler yasası sonlu boyutlardaki rijit cisimlerin hareketini tanımlar, bu tanımlamada cisimler dönme ve öteleme hareketlerinin her ikisini de yapabilirler,ve böylece bu tanımlama daha gerçekçidir.

### 3.3.1.3. Newton'un üçüncü yasası

Her kuvvetin bir reaksiyonu vardır ve bu reaksiyon kuvvet orijinal kuvvetle aynı doğrultuda, zıt yönlü ve eşit miktardadır. Bir cismin veya sistemin dinamik davranışlarının belirlenmesinde genellikle Newton Euler yasasını kullanırız. Henüz ekseriyetle sabit olan kütle ve kütle atalet momenti, kolaylıkla ölçülebilir değerlerdir. Böylece, kuvvet ve ivmenin değişken olarak yer aldığı iki çeşit problemle karşılaşılabilir:

**a.) İleri Dinamik Problem (Forward Dynamics):** Bu problem türünde ivmeler verilir ve kuvvetlerin bulunması gerekir. Kütle ve ivmenin çarpımı işlemiyle basit bir şekilde çözüm gerçekleşir. Bu problem cebirsel denklemlerle çözülür ve bu nedenle kolaydır.

**b.) Ters Dinamik Problem (Inverse Dynamics):** Bu problem türünde kuvvetler verilir ve ivmeler sorulur. İvmeyi bulmak için hareket denklemindeki eşitliğin her iki tarafını da kütle matrisinin tersiyle çarparız. Basit bir denklemde; ters kütle matrisinin hesaplanması kolaylıkla yapılabilir. Çok serbestlik dereceli bir sistemde, her bir serbestlik için bir denklem oluşur. Böylece, kütle ifadeleri için bir kare matrisi oluşturulmasıyla bir takım denklemlere sahip oluruz. Sonra, kütle matrisinin tersi bulunur ve eşitliğin her iki tarafıyla çarpılır ve böylece ara hesaplamaların yapılmasıyla ivme değerleri bulunmuş olur. Dinamik analizin sonunda elde ettiğimiz ivme değerleri hala çok fazla anlamlı değildir. Genellikle hız ve konum denklemlerine ihtiyaç duyarız. İvme denklemlerinin iki kez ardı ardına integrallerinin alınmasıyla konum veya pozisyon denklemleri elde edilir. İntegrasyon zor bir işlemdir çoğu kez de imkansızdır. Bu nedenle, çözümlemede genellikle, gerçek değere yakın sonuçlar veren nümerik integrasyon metotları kullanılır. Ters Dinamik problem zordur, çok fazla aritmetik işlem gerektirir ve hata yapma olasılığı yüksektir.

### 3.3.2. Lagrange denklemleri

#### 3.3.2.1. Holonomik sistemler için Lagrange denklemi

Dinamik sistemler için hareket denklemleri aşağıda görüldüğü gibi Lagrange denklemleri tarzında özelleştirilebilir:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \quad (3.20)$$

$$j = 1, \dots, n$$

(3.20) no'lu denklemde  $L$ ; Lagrange,  $q_j$ ; genelleştirilmiş koordinatlar, ve  $Q_j$ ;  $j$ . genelleştirilmiş koordinat üzerine etki eden genelleştirilmiş kuvvettir. Sistemin Lagrange denklemleri ile tanımlanmasıyla aşağıdaki denklem elde edilir.

$$L = T - V \quad (3.21)$$

(3.21) no'lu denklemde  $T$ ; sistemin toplam kinetik enerjisi ve  $V$ ; sistemin toplam potansiyel enerjisidir. Lagrange denklemleri yalnızca ortak koordinatın dinamiğini tanımlamaktadır. Bu nedenle  $n$  serbestlik dereceli bir sistem için,  $n$  adet denklem, bütün sistemin dinamik tanımıyla; simültane olarak aynı anda türetilmiştir.

Sistemin Lagrange'ı, her ikisi de sayısal değerler olan kinetik ve potansiyel enerjiler farkıdır. Bu yüzden bir sistemin Lagrange'ı, her bir durumda kullanılan tanımlama aynı olduğu sürece verilen bir başlangıç değeri için aynı değere sahip olacaktır, çünkü bir sistemin Lagrange'ı tek değildir. Eğer  $L(q, \dot{q}, t)$  uygun bir Lagrange ise ve  $F(q, t)$ , zaman ve genelleştirilmiş koordinatlara göre türevi alınabilir bir fonksiyon ise, o zaman;

$$\dot{L}(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + dF / dt \quad (3.22)$$

(3.22) no'lu denklem aynı zamanda sistemin bir Lagrange'ıdır. Örneğin yerçekimsel potansiyel enerjisi, ölçüde bir başlangıç noktası referans alınarak tanımlanmıştır. Eğer aynı sistem için veriler değişmişse Lagrange'ın nümerik ve analitik değerlerinin her ikisi de değişir.

Genelleştirilmiş kuvvet  $Q_j$ ,  $j$ . genelleştirilmiş koordinat üzerine etki eden tüm dış kuvvetlerin net etkisidir. Böylece;

$$Q_j = \sum_k F_k \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \quad (3.23)$$

(3.23) no'lu denklemde  $x$ : sistemin gerçek ve sanal deplasmanlarının pozisyonunu tanımlayan koordinatlar ve  $F_k$ :  $x_k$  koordinatı üzerine uygulanan net dış kuvvetlerdir. Genelleştirilmiş kuvvetler, sistem üzerine etki eden tüm dış

kuvvetlerden oluşurlar. Bu dış kuvvetler, genelleştirilmiş koordinat ve zamanın fonksiyonu olarak gelişigüzel olabilirler.

Mekanik ağların kinematik uyumluluk kavramına genelleştirilmiş kuvvetler ve Lagrange dahildir. Aynı zamanda Newton ve Lagrange denklemleri, hareketin çok sayıdaki diferansiyel denklemlerinde oluşan herhangi bir sayıdaki koordinat için türetilebilir. Sınırlı denklemler ile birlikte denklem sayısı en az sistemin serbestlik derecesi sayısına eşittir ve böylece sistemin dinamiği tam olarak tanımlanmış olur.

### 3.3.2.2. Holonomik olmayan sistemler için Lagrange denklemi

Holonomik olmayan sistemlerde, dinamik sistemin bağımsız olarak integrali alınamayan diferansiyel denklemlerle sınırlı olarak tanımlanmış sistemler söz konusudur. Holonomik olmayan sınırlamalar sınırlılığa uymak için sistem üzerine sınırlı kuvvetleri uygularlar. Sınırlı kuvvetlerin dahil edilmesiyle Lagrange denklemleri aşağıdaki hali alır:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{i=1}^{(m-n)} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \quad (3.24)$$

$$j = 1, \dots, m$$

(3.24) no'lu denklemde  $f_i$  sınırlı denklemler,  $m$  koordinat sayısı ve  $\lambda_i$  belirtilmemiş Lagrange çarpanıdır. Sınırlı denklemler zamanın açık fonksiyonu olabilirler.

Yukarıda bahsedilen gerçek çözüm metotlarının haricinde, gerçek çözüm üreten formülasyonlardan olmayan ama uygulanması daha kolay olan ve gerçek sonuçlara yakın çözümler üreten yaklaşık dinamik metot yaklaşımı bulunmaktadır.

### 3.3.3. Hamilton denklemleri

Dinamik sistemler için hareket denklemleri Hamilton'un kanonik denklemleri formunda aşağıdaki gibi özelleştirilebilir:

$$(3.25)$$



$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

$$\dot{p}_j - Q_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (3.26)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (3.27)$$

Yukarıdaki denklemlerde Q genelleştirilmiş kuvvetler, H Hamilton, L Lagrange ve  $p_j$  birleşik momentumlar,  $q_j$  genelleştirilmiş koordinat fonksiyonları,  $\dot{q}_j$  genelleştirilmiş hızlar ve t zamandır.

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \dot{p}_j \quad (3.28)$$

Hamilton aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$H(q, p, t) = \sum_j \dot{q}_j p_j - L(q, \dot{q}, t) \quad (3.29)$$

Eğer Lagrange zamandan bağımsızsa ve potansiyel enerji hızdan bağımsızsa, Hamilton denklemi aşağıdaki gibi olur:

$$H = T + V \quad (3.30)$$

Hamilton denklemlerinin mekanik sistemlere uygulanması için ilk olarak bir takım genelleştirilmiş koordinat tanımlanır ve Lagrange formüle edilir. Böylece birleştirilmiş momentum denklemi (3.28) denklemi yardımıyla türetilir. Momentumlar ve Lagrange bilindiği andan itibaren kanonik denklemlerdeki yerlerine yazılarak Hamilton denklemi formüle edilir.

Hamilton metodunda “n” serbestlik dereceli bir sistem için “2n” ikinci dereceden diferansiyel denklemler üretilir. İlk kanonik denklem momentumdan hızların elde edilmesinde kullanılır. İkinci denklem ile dinamiğin prensipleri birleştirilir. (3.25)-(3.27) denklemleri formundaki Hamilton formülasyonu korunumlu ve holonomik sistemleri tanımlayabilir. Korunumlu olmayan ve non-holonomik sistemler için sınır denklemleri bir takım hareket denklemlerini de kapsamalıdır.

### 3.3.4. Yaklaşık dinamik metot

1976 yılında Rooney ve Rai tarafından geliştirilen bu dinamik analiz metoduyla sistem dinamiğinin analitik olarak tanımlanmasına yönelik farklı bir yaklaşım getirilmiştir. 1973 yılında Jones tarafından yayınlanan makalede belirtildiği gibi geliştirilen bu metot, birçok non-lineer cebirsel denklemin simültane olarak çözümlerinin gerçekleşmesi esasına sahiptir. Bu metot ile Newton'un II. Yasasından yola çıkılarak çözümler üretilir.

$$\ddot{q}_j = \frac{1}{m_j} \bar{F}_j \quad (3.31)$$

(3.31) no'lu denklemde gösterilen  $\bar{F}_j$ :  $q_j$  koordinatı yönünde uygulanan aktif net kuvvet,  $m_j$ : kütle veya atalet momenti değerleridir. Sistem dinamiğinin tanımlanmasında kullanılan  $q_j$  koordinat sayısı olan m sayısı sistemin sahip olduğu serbestlik derecesi sayısı olan n sayısını geçebilir. Koordinatlar arasında mevcut (m-n) adet bir takım  $f$  kinematik sınır denklemleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$f_i(q_l - q_j - q_m) = 0 \quad (3.32)$$

$$i = 1, 2, \dots, (m - n)$$

Bu çözüm aynı zamanda takip edilen sınır denklemlerine de uygulanmıştır. Bu tipteki çeşitli metotlar Gradient metotları olarak bilinmektedirler. Sınırlı fonksiyon  $f_i$  tam yani gerçek çözüm üreten denklemlerde sıfırdır ama burada yaklaşık çözüm yapıldığından dolayı normal olarak sıfırdan farklıdır. Bu nedenle (3.31) no'lu denklemde yer alan  $\bar{F}_j$  kuvvet bileşeni iki terimden oluşmuştur ve bu durumda (3.31) denklemi aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$\ddot{q}_j = \frac{1}{m_j} (\bar{Q}_j + \bar{P}_j) \quad (3.33)$$

Burada  $Q_j$  aynı zamanda (3.23) denklemindeki tanımlamayla aynıdır ve  $P_j$  ise  $q_j$  yönündeki tüm sınır kuvvetlerinin bileşkesidir yani;

$$\bar{P}_j = \sum_{i=1}^{m-n} \bar{P}_{ji} \quad (3.34)$$

$$i = 1, 2, \dots, (m-n)$$

Burada  $P_{ji}$  (3.32) denklemiyle tanımlanmış olan  $i$ . sınırlı kinematik üzerine uygulanan  $P_j$ 'nin  $i$ . bileşenidir. Aynı zamanda ilgili hata fonksiyonunun anlık büyüklüğüyle orantılı ve onunla ters yöndedir:

$$\bar{P}_{ji} = -\beta \frac{\partial f_i}{\partial q_i} f_i \quad (3.35)$$

$\beta$  orantı sabiti büyük bir sayıdır. Limit alınması durumunda,  $\beta$  sonsuza doğru giderken  $f_i$ 'deki hata sifıra doğru yaklaşacaktır ve üretilen  $\beta f_i$  değeri (3.24) formundaki denklemde Lagrange denklemindeki belirtilmemiş çarpana eşit olacaktır. Nihayet (3.31) no'lu denklem aşağıdaki hali alır:

$$\ddot{q}_j = \frac{1}{m_j} (\bar{Q}_j - \beta \sum \frac{\partial f_i}{\partial q_j} f_i) \quad (3.36)$$

Yukarıdaki ifade (3.24) denkleminde eşdeğerdir. (3.36) no'lu denklemin matris tarzında ifadesi:

$$\ddot{q} = m^{-1} [\bar{Q} - \beta J^T f] \quad (3.37)$$

Burada  $\ddot{q}$  ivme vektörüdür,  $J^T f_i$ 'nin jakobiyen matrisinin tersidir,  $m^{-1}$  kütle veya atalet matrisinin tersidir,  $\bar{Q}$  işleyen genelleştirilmiş kuvvet vektörüdür ve  $f f_i$  uzayındaki hata bileşenleri vektörüdür.

Bu metodun uygulanması kolaydır ve üretilen denklemler herhangi bir formdaki tam denklemlerden daha basittir. Sınırlamalarda sabit bir hata durumu

vardır yani; (3.35) denklemi asla sıfır değildir fakat  $\beta$  değerinin uygun seçilmesiyle pratikte ihmal edilebilir düzeydeki hatalara indirgenir.

### 3.3.5. Metotların karşılaştırılması

Serbestlik derecesi “n” olan bir sistemin dinamiği n adet ikinci dereceden diferansiyel denklem ile formülize edilebilmektedir. Sistem için tanımlanabilecek koordinat sayısı serbestlik derecesi sayısı olan n sayısına eşit veya daha büyük sayıda olmalıdır. Tanımlanan koordinat sayısı olan “m” sayısı serbestlik derecesi sayısı n’den büyük ise sistemdeki bağımlı koordinatlar arasındaki ilişkiyi tanımlayan (m-n) kadar cebirsel veya diferansiyel sınır denklemi ortaya çıkacaktır.

Holonomik sistemler için Lagrange tarzındaki çözümlemede hareket denklemi sayısı minimuma indirgenir ki bu serbestlik derecesine veya serbestleştirilmiş koordinat sayısına eşit sayıdadır. Bu metotla yapılan çözümleme sonucunda serbestlik derecesi sayısı olan n sayısına eşit sayıdaki bağımsız koordinatlar veya giriş parametrelerine yönelik hareket denklemlerine ulaşılmakta iken Yaklaşık dinamik çözüm metodunda; sistemi tanımlayan geliştirilmiş koordinat sayısı olan m sayısı n sayısından daha büyüktür ve bu nedenle çözümlerin sonunda, bağımsız giriş parametrelerine ek olarak (m-n) adet bağımlı koordinatın hareket denklemlerine de ulaşırlı.

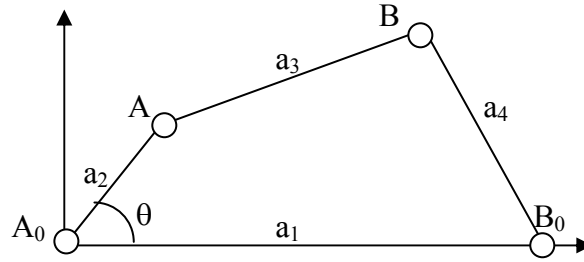
Lagrange yöntemi ile yapılan gerçek çözümlerde elde edilen hareket denklemleri yaklaşık çözüm yöntemine kıyasla daha karmaşık ve çok fazla cebirsel ifadeler içermektedir. Bu nedenle simültane olarak gerçekleşen nümerik integrasyon işlemlerinden elde edilen değerler daha fazla CPU işlem zamanı alır. Yaklaşık dinamik çözüm metodu aynı parametreler için incelendiğinde ise daha sade ve basit bir formülasyon akışı, daha az sayıda cebirsel ifadeler ve daha kısa CPU işlem zamanında gerçekleşen nümerik integrasyon işlemleri gibi avantajlara sahiptir. Yaklaşık dinamik çözüm yöntemi ile elde edilen değerler tolere edilebilir seviyedeki bazı hataları da barındırmaktadır. Araştırma bulguları ve tartışma bölümünde incelenecek olan örnek uygulamalarda bu farklar gerek formülasyon aşamasında ve gerekse sonuçlar bazındaki grafiksel gösterimlerle ortaya konacaktır.

Hareket denklemlerinin formülasyonundaki Hamilton yaklaşımında sonuç denklemleri daha kompleks ve karmaşıktır. Hamilton'un kanonik denklemlerinin integrasyonu genelleştirilmiş deplasmanları ve momentumu verir. Genelleştirilmiş momentumun ise simülasyon ve kontrol problemlerinde yeri yoktur ve aynı zamanda genelleştirilmiş koordinat veya genelleştirilmiş hızlar kadar anlamlı değildir.

Mekanik sistemlerin gerçek hareket denklemlerinin türetilmesinde, Lagrange metodu diğer Newton ve Hamilton metotlarına kıyasla daha sade, anlaşılması kolay ve türetilen diferansiyel denklemlerinin türevleri daha kolaydır. Bu tez çalışmasında Lagrange metodunun getirdiği kolaylıklar göz önünde bulundurulmuştur ve gerçek hareket denklemlerinin türetilmesi işlemlerinde Lagrange metodu tercih edilmiştir.

## 4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

## 4.1. Mekanizmaların Dinamiği



Şekil 4.1. Dört çubuk mekanizması

Şekil 4.1.'de görülen dört çubuk mekanizmasının koordinatlarını tanımlayan denklemler aşağıdaki gibidir:

$$x_2 = a_2 \cos \theta_2$$

$$y_2 = a_2 \sin \theta_2$$

$$x_3 = a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos \theta_3$$

$$y_3 = a_2 \sin \theta_2 + a_3 \sin \theta_3$$

$$x_4 = a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos \theta_3 + a_4 \cos \theta_4$$

$$y_4 = a_2 \sin \theta_2 + a_3 \sin \theta_3 + a_4 \sin \theta_4$$

(4.1)

İncelenen mekanizma tek serbestlik derecelidir bu nedenle konum parametrelerinden birisi bağımsız parametre olacak ve uzuv boyutlarının bilinen değerler olduğu düşünüldüğünde diğer bilinmeyen açılar bağımlı parametrelerdir. Bu mekanizma için devre kapalılık denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos \theta_3 = a_1 + a_4 \cos \theta_4 \quad (4.2)$$

$$a_2 \sin \theta_2 + a_3 \sin \theta_3 = a_4 \sin \theta_4$$

Bu iki denklemden verilen bir  $\theta_2$  açısı değerine göre  $\theta_3$  ve  $\theta_4$  değerlerini bulabilmek için yaygın olarak kullanılan Freudenstein denklemleri kullanılabilir.

$$\theta_4 = 2 \arctan \left[ \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right] \quad (4.3)$$

(4.3) no'lu denklem Freudenstein denklemi olarak adlandırılmakta olup denklemde yer alan diskriminantın artı veya eksi işaret almasına göre iki değişik  $\theta_4$  değeri verecektir. Bu, mekanizmanın iki farklı şekilde monte edilmesi ile ilgilidir. Freudenstein denkleminde yer alan simgelerin açılımları aşağıdaki gibidir:

$$K_1 = \frac{a_1}{a_2}, \quad K_2 = \frac{a_1}{a_4}, \quad K_3 = \frac{(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2)}{2a_4a_2} \quad (4.4)$$

$$A = \cos \theta_2 (1 - K_2) + K_3 - K_1$$

$$B = -2 \sin \theta_2 \quad (4.5)$$

$$C = \cos \theta_2 (1 + K_2) + K_3 + K_1$$

Dikkat edilir ise,  $\theta_2$  bağımsız parametre değeri ve uzuv boyutları biliniyor ise A,B ve C parametre değerleri hesaplanabilir. Benzer yöntem kullanılarak devre kapalılık denkleminde  $\theta_4$  açısı yok edilir ve  $\theta_3$  açısı için  $\theta_2$  bağımsız parametresine göre aynı şekilde elde edilebilir (veya  $\theta_2$  değeri ile birlikte bu değere göre bulunan  $\theta_4$  açı değeri denklemlerdeki yerlerinde kullanılarak  $\theta_3$  açısı değeri bulunabilir). (4.6) denkleminde  $\theta_3$  açısı  $\theta_2$  açısına bağlı olarak türetilmiştir.

$$a_2 \cos \theta_2 + a_3 \cos \theta_3 = a_1 + \sqrt{a_4^2 - (a_2 \sin \theta_2 + a_3 \sin \theta_3)^2} \quad (4.6)$$

$\theta_3$  ve  $\theta_4$  açılarının bulunmasının ardından mekanizmanın hareket denklemlerini Lagrange metodu yardımıyla oluşturmak istersek;

$$L = \frac{1}{2}m_2V_2^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_3V_3^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}m_4V_4^2 + \frac{1}{2}I_4\dot{\theta}_4^2 - m_2gy_2 - m_3gy_3 - m_4gy_4 \quad (4.7)$$

(4.7) no'lu Lagrange denkleminin içerisinde  $\theta_2$  bağımsız açısına bağlı olarak bulunan  $\theta_3$  ve  $\theta_4$  açılarının eşitliklerinin ve bunların kullanımıyla elde edilen hız ifadelerinin denklemdeki yerlerine yazıldığı düşünülürse formüllerin çok karışacağı ve hareket denklemlerine ulaşabilmek için yapılacak diğer işlemlerin zorluğu görülecektir. Mekanizma dinamiği konusu bu tez çalışmasının kapsamı dışındadır ve sadece açık zincirlere göre zorluğu vurgulanmak istendiğinden dolayı sistemin Lagrange denklemi oluşturulmuştur.

#### 4.2. Açık Zincirlerin Dinamiği

Açık zincirli yapılar genellikle robot manipülatörü olarak adlandırılmakta olup açık kinematik zincirli kollar ile kapalı zincir yapılı mekanizmalar birbirlerinden hem yapı olarak hem de hareket denklemlerinin formülasyonu yönünden farklıdırlar. Açık zincirli ardışık elemanlardan oluşan bir sistemin hareket denklemlerinin türetilmesi kapalı zincir yapılı mekanizmalara göre daha basit olduğu gibi açık zincirli mekanizmaların serbestlik dereceleri mekanizmalara göre daha büyüktür.

Sadece döner mafsallardan oluşan toplam dört elemanlı bir açık zincirde üç hareketli eleman vardır ve serbestlik derecesi de yine üçtür. Eğer en uçtaki elemanın en uç noktası dördüncü bir döner eklem ile toprağa bağlanırsa sistem dört çubuk mekanizması gibi davranır ve bu yeni durumda sistemin serbestlik derecesi yalnızca birdir. Aynı sistem için açık zincirden kapalı zincirin elde edilmesi yaklaşımı direkt kapalı zincire göre diferansiyel denklem sayısını arttırmış olsa da ortaya çıkan diferansiyel denklemlerin çözümü kapalı zincirdeki denklemlere nazaran çok daha basittir. Bu tezde açık zincirle çalışmanın belirtilen avantajları dikkate alınarak açık zincirli yapılardan kapalı zincirli mekanizmalara geçim yaklaşımı benimsenmiştir.

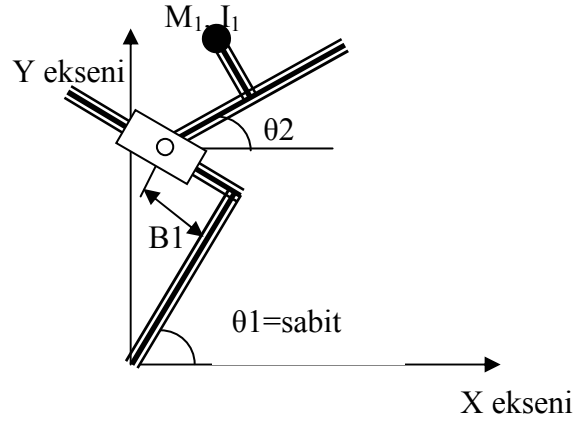
##### 4.2.1. Sanal eklemler metodu

Bu çalışmada her bir eleman çifti arasında biri kayar ve diğeri döner mafsal olmak üzere eklem çifti ile birbirlerine bağlanmış 6 serbestlik dereceli üç hareketli rijit elemanın oluşturduğu açık kinematik zincir söz konusudur. Elemanlar arasındaki her bir eklem çiftlerinden birisi gerçek veya aktif iken diğeri eklem sanal veya hayali



duruma getirilecektir. Bu metottaki yaklaşıma göre, gerçek eklem uygulanan bir dış kuvvet veya bir tork ile keyfi olarak tahrik edilirken aynı noktadaki diğer sanal eklem, üzerine uygulanan uygun miktardaki durdurma kuvveti veya durdurma torku ile başlangıç konumunda tutularak sabitlenir ve eklem hızı sıfırda tutulmak suretiyle kontrol edilmektedir. Bu yaklaşım Lagrange ve yaklaşık dinamik formülasyonları ile elde edilen matematiksel model ile uyum içerisinde olup “Sanal eklemler metodu” olarak adlandırılmaktadır.

#### 4.2.2. Tek elemanlı iki serbestlik dereceli P-R sisteminin dinamiği



Şekil 4.2. Tek elemanlı ve iki serbestlik dereceli P-R açık kinematik zincirine ait gösterim

Şekil 4.2.'de görüldüğü gibi sistemimiz toprak elemanı hariç tek elemanlıdır. Sistemde toprak ve normal eleman arasında bir eklem çifti olup bunlardan biri döner ve diğeri prizmatik olmak üzere sistemimiz iki serbestlik dereceli olarak tasarlanmıştır. Sistemin matematik modelinin oluşturulması esnasında kolaylık için; ağırlık merkezlerinin elemanların uç noktalarında toplandığı varsayımı yapılmıştır.

##### 4.2.2.1. Sistemin Lagrange metodu ile dinamik modellenmesi

2 serbestlik dereceli bu sistemde genelleştirilmiş koordinat olarak,  $B_1$  ve  $\theta_2$  seçilmiştir. Öncelikli olarak Lagrange ifadesinin oluşturulabilmesi için sistemin kinetik ve potansiyel enerjilerinin bulunması gereklidir.

Sistemdeki hareketli tek eleman kütle ve ataletle sahip olduğundan dolayı kinetik enerji terimi olan  $T$  ifadesi 2 bileşenden oluşacaktır. Toprak elemanına bağlı

olan uzunluk ağırlık merkezinin yani  $M_2$  noktasının kartezyen koordinatlardaki pozisyonları aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} X_2 &= A_1 * \cos[\theta_1] - B_1 * \sin[\theta_1] + A_2 * \cos[\theta_2] \\ Y_2 &= A_1 * \sin[\theta_1] + B_1 * \cos[\theta_1] + A_2 * \sin[\theta_2] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Her bir kütle için kartezyen koordinatlarda lineer hız bileşenleri yukarıdaki pozisyon denklemlerinin zamana göre birinci türevlerinin alınmasıyla bulunur.

Böylece kütle merkezlerinin hızları aşağıdaki gibi bulunur:

$$\vec{V}_2^2 = \vec{x}_2^2 + \vec{y}_2^2 \quad (4.9)$$

Burada  $\dot{\theta}_1$  = sabit olduğundan dolayı türevi de sıfır olacaktır.

$$\frac{dx_2}{dt} = -\sin(\theta_1) * \dot{B}_1 - A_2 * \sin(\theta_2) * \dot{\theta}_2 \quad (4.10)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \cos(\theta_1) * \dot{B}_1 + A_2 * \cos(\theta_2) * \dot{\theta}_2$$

$$V_2^2 = \dot{B}_1^2 + A_2^2 * \dot{\theta}_2^2 + 2 * \dot{B}_1 * A_2 * \dot{\theta}_2 * \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (4.11)$$

O halde Kinetik enerji denklemi aşağıdaki gibi oluşur:

$$\begin{aligned} T &= 0.5 * M_2 * (\dot{B}_1^2 + A_2^2 * \dot{\theta}_2^2 + 2 * \dot{B}_1 * A_2 * \dot{\theta}_2 * \cos(\theta_1 - \theta_2)) \\ &+ 0.5 * I_2 * \dot{\theta}_2^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Potansiyel enerji denklemi olan V:

$$V = M_2 * G * Y_2 = M_2 * G * (A_1 * \sin[\theta_1] + B_1 * \cos[\theta_1] + A_2 * \sin[\theta_2]) \quad (4.13)$$

Böylece Lagrange denklemi aşağıdaki hali alır:

$$L = T - V \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} L &= 0.5 * M_2 * (\dot{B}_1^2 + A_2^2 * \dot{\theta}_2^2 + 2 * \dot{B}_1 * A_2 * \dot{\theta}_2 * \cos(\theta_1 - \theta_2)) \\ &+ 0.5 * I_2 * \dot{\theta}_2^2 - M_2 * G * (A_1 * \sin[\theta_1] + B_1 * \cos[\theta_1] + A_2 * \sin[\theta_2]) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Lagrange denkleminin bulunmasının ardından genelleştirilmiş koordinatlarımız olan  $B1$  ve  $2$  değişkenleri için (3.20) no'lu denklemden başlanılarak Lagrange tarzındaki genel hareket denklemleri bulunur:

Sistemimiz 2 serbestlik derecelidir ve her serbestlik derecesini tanımlayan bir hareket denklemi vardır. O halde, 2 adet hareket denklemi vardır ve bunlardan biri  $B1$  ve diğeri  $2$  koordinatındaki harekettir.  $B1$  koordinatı için genel denklem aşağıdaki gibi oluşur:

$$\begin{aligned} B\dot{1} * [M2] + \theta\ddot{2} * [M2 * A2 * \text{Cos}(\theta1 - \theta2)] = FB1 + F_{dur.B1} * MF2 \\ + M2 * A2 * \theta\dot{2} * \text{Sin}(\theta1 - \theta2) * (\theta\dot{1} - \theta\dot{2}) - M2 * G * \text{Cos}(\theta1) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Yukarıda görülen genel denklemde eşitliğin sağ tarafındaki ifadeler sırasıyla motor tahrik kuvveti, eklemin sanal olması durumunda uygulanacak olan uygun durdurma kuvveti, merkezkaç kuvvetleri ve yerçekimi kuvvetidir.

$2$  koordinatındaki hareketin denklemi de aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \theta\ddot{2} * [M2 * A2^2 + I2] + B\dot{1} * [M2 * A2 * \text{Cos}(\theta1 - \theta2)] = \tau2 + \tau_{dur.b2} * MF1 \\ + M2 * B\dot{1} * A2 * \text{Sin}(\theta1 - \theta2) * (\theta\dot{1} - \theta\dot{2}) - M2 * G * A2 * \text{Cos}(\theta2) \\ + M2 * B\dot{1} * A2 * \theta\dot{2} * \text{Sin}(\theta1 - \theta2) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Yukarıda görülen genel denklemde eşitliğin sağ tarafındaki ifadeler sırasıyla motor tahrik momenti veya motor torku, eklemin sanal olması durumunda uygulanacak olan uygun durdurma momenti, yerçekiminin etkileridir.

Genelleştirilmiş kısıtlama kuvvetleri, uygun mevcudiyet faktörleri tarafından aktif hale getirilirler ve bunlar dış kuvvet sürücülerinde olduğu gibi aynı formatta her bir serbestlik derecesinin hareket denkleminde eklenmelidirler. Ayrıca, dönel eklemliler bir serbestlik derecesini süren dönel bir sürücünün olması durumunda, onun reaksiyonu bir önceki dönel eklemliler eleman üzerinde ters yönlü bir moment etkisi oluşturur. Sistemdeki toprağa bağlı eleman sayısı 1 olduğundan bu reaksiyon etkisi direkt olarak toprağa iletilmektedir ve bunu denklemlerimize yazmaya gerek yoktur. Bu etkilerin de dahil edilmesiyle genelleştirilmiş koordinatların hareketlerini

tanımlayan Lagrange tarzındaki hareket denklemlerini aşağıdaki gibi matris formunda gösterebiliriz:

$$|M| * \begin{vmatrix} B\ddot{\theta} \\ \theta\ddot{\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} FB1 + F_{dur.B1} * MF2 + \phi_{B1} \\ \tau_2 + \tau_{dur.2} * MF1 + \phi_{\theta_2} \end{vmatrix} \quad (4.18)$$

Yukarıdaki denklemde yer alan  $F_{dur.B1}, \tau_{dur.2}$  değerleri sanal eklemler için uygulanacak olan genelleştirilmiş durdurma kuvveti ve genelleştirilmiş durdurma torkudur.

Sistemimiz tek elemanlı ve iki serbestlik dereceli olmasına rağmen serbestlik derecesinden biri ters yönde uygulanan uygun kuvvet veya tork ile sınırlanmakta veya durdurulmaktadır ve sistemimiz böylece tek serbestlik derecesine sahipmiş gibi davranmaktadır. Şimdi sanal eklemlere uygulanması gereken durdurma kuvvet ve tork değerini aşağıdaki durumlar için hesaplayalım:

MF1=0 ve MF2=1 olması durumunda; 1 no'lu eklem olan prizmatik eklem sanal hale gelir ve uygulanan durdurma kuvveti ile uçtaki eleman ile bir önceki eleman olan toprak arasında yer alan öteleme hareketi kabiliyeti kısıtlanmış veya durdurulmuş olur dolayısıyla bu eklemin ivmesi sıfır olur.  $B\ddot{\theta} = 0$  değerinin yukarıdaki matris formundaki denkleme yazılmasıyla  $F_{dur.B1}$  durdurma kuvvetinin anlık değeri hesaplanabilir:

$$F_{dur.B1} = M(1,1) * (B\ddot{\theta} = 0) + M(1,2) * \theta\ddot{\theta} - FB1 - \phi_{B1} \quad (4.19)$$

Yukarıda elde edilen denklemin (4.16) no'lu denklemde yerine yazılmasıyla B1 koordinatı için bulunan hareket denkleminin nihai hali elde edilir.

MF1=1 ve MF2=0 olması durumunda; 2 no'lu eklem olan döner eklem sanal hale gelir ve uygulanan durdurma momenti ile bu eklemin açılma ivmesi sıfır olur.  $\theta\ddot{\theta} = 0$  değerinin yukarıdaki matris formundaki denkleme yazılmasıyla  $\tau_{dur.2}$  ifadesinin değeri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\tau_{dur.2} = M(2,1) * B\ddot{\theta} + M(2,2) * (\theta\ddot{\theta} = 0) - \tau_2 - \phi_{\theta_2} \quad (4.20)$$

Yukarıda elde edilen denklemin (4.17) no'lu hareket denkleminde yerine yazılmasıyla 2 koordinatı için genel hareket denklemi elde edilir.

#### 4.2.2.2. Sistemin yaklaşık modellemesi

Bu sistemin kinematiğinin incelenebilmesi için aşağıdaki gibi 4 adet geliştirilmiş koordinat tanımlanmıştır.

$$q = [B_1, \theta_2, x_2, y_2]^T \quad (4.21)$$

Burada gösterilen  $\theta$ : x ekseninden saatin tersine doğru pozitif olmak üzere uzuvlar arasındaki mutlak açıdır;  $x_2$  ve  $y_2$ : 2 uzvunun kütle merkezinin koordinatlarını ifade etmektedir. Sistem 2 serbestlik derecelidir ve bu nedenle ( $m-n=4-2=2$ ) 2 adet sınır denklemi vardır:

$$\begin{aligned} F1 &= X2 - A1 * \text{Cos}[\theta1] + B1 * \text{Sin}[\theta1] - A2 * \text{Cos}[\theta2] \\ F2 &= Y2 - A1 * \text{Sin}[\theta1] - B1 * \text{Cos}[\theta1] - A2 * \text{Sin}[\theta2] \end{aligned} \quad (4.22)$$

Yukarıdaki denklemler hata fonksiyonlarının büyüklükleridir ve yaklaşık dinamikte asla sıfır olmazlar fakat mili metrik küsuratlı büyüklüklere indirgenerek ihmal edilebilir düzeye getirilirler. Transpos jakobiyen matrisi aşağıdaki gibi oluşur:

$$j = \begin{vmatrix} \text{Sin}(\theta1) & A2 * \text{Sin}(\theta2) & 1 & 0 \\ -\text{Cos}(\theta1) & -A2 * \text{Cos}(\theta2) & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4.23)$$

Genelleştirilmiş dış kuvvet vektörü aşağıdaki gibi oluşur:

$$Q = \begin{vmatrix} FB1 + F_{dur.B2} * MF2 \\ \tau_2 + \tau_{dur.2} * MF1 - M2 * G * A2 * \text{Cos}(\theta2) \\ 0 \\ -M2 * G \end{vmatrix} \quad (4.24)$$

Yukarıda yer alan jakobiyen matris ve genelleştirilmiş dış kuvvet vektörü değerlerinin (3.36) no'lu denklemde yerleştirilmesiyle sistem dinamiğinin

tanımlanması için aşağıda görülen 4 adet ikinci dereceden diferansiyel denklem oluşur:

$$B\ddot{1} = 1/M2 * [(FB1 + F_{dur.B1} * MF2) - \beta * (\text{Sin}\theta_1 * f_1 - \text{Cos}\theta_1 * f_2)] \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_2 = 1/I A^* [\tau_2 + \tau_{dur.2} * MF1 - M2 * G * A2 * \text{Cos}(\theta_2) \\ - \beta * (A2 * \text{Sin}\theta_2 * f_1 - A2 * \text{Cos}\theta_2 * f_2)] \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\ddot{x}_2 = -\beta * f_1^* / M2 \quad (4.27)$$

$$\ddot{y}_2 = -G - \beta * f_2^* / M2 \quad (4.28)$$

Yukarıdaki denklemlerde yer alan  $I_{AI}$ : 1 no'lu uzvun toprak elemanı etrafındaki kütle atalet momenti değeridir.

Sanal eklemlere uygulanması gerekecek durdurma kuvvet ve tork değerini aşağıdaki durumlar için hesaplayalım:

MF1=0 ve MF2=1 olması durumunda; 1 no'lu eklem olan prizmatik eklem sanal hale gelir ve uygulanan durdurma kuvveti ile uçtaki eleman ile bir önceki eleman olan toprak arasında yer alan öteleme hareketi kabiliyeti kısıtlanmış veya durdurulmuş olur dolayısıyla bu eklemin ivmesi sıfır olur.  $B\ddot{1} = 0$  değerinin yukarıdaki matris formundaki denkleme yazılmasıyla  $F_{dur.B1}$  durdurma kuvvetinin anlık değeri hesaplanabilir:

$$F_{dur.B1} = \beta * (\text{Sin}\theta_1 * f_1 - \text{Cos}\theta_1 * f_2) - FB1 \quad (4.29)$$

Yukarıda elde edilen denklemin (4.25) no'lu denklemde yerine yazılmasıyla B1 koordinatı için bulunan hareket denkleminin nihai hali elde edilir.

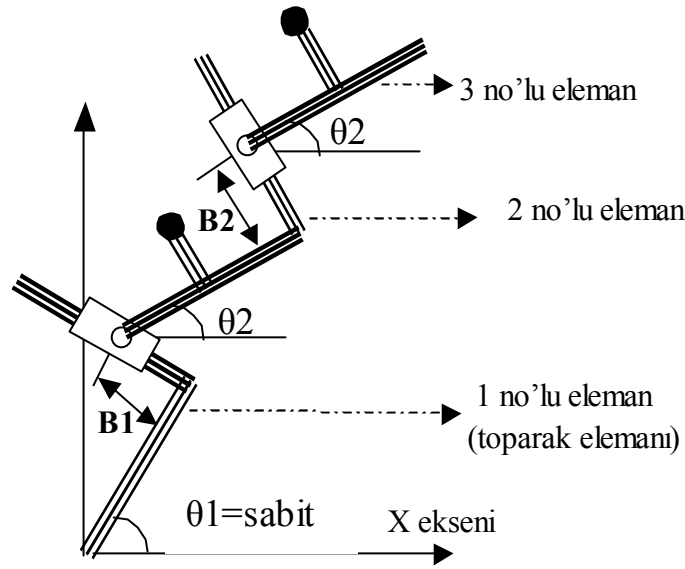
MF1=1 ve MF2=0 olması durumunda; 2 no'lu eklem olan döner eklem sanal hale gelir ve uygulanan durdurma momenti ile bu eklemin açısız ivmesi sıfır olur.

$\theta\ddot{2} = 0$  değerinin yukarıdaki matris formundaki denkleme yazılmasıyla  $\tau_{dur.2}$  ifadesinin değeri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\tau_{dur.2} = -\tau_2 + M2.G.A2.Cos\theta_2 + \beta(A2.Sin\theta_2.f_1 - A2.Cos\theta_2.f_2) \quad (4.30)$$

Yukarıda elde edilen denklemin (4.26) no'lu hareket denkleminde yerine yazılmasıyla 2 koordinatı için genel hareket denklemi elde edilir.

#### 4.2.3. İki elemanlı dört serbestlik dereceli P-R-P-R sisteminin dinamiği



Şekil 4.3. İki elemanlı ve toplam dört serbestlik dereceli P-R-P-R açık kinematik zincirine ait gösterim

Şekil 4.3.'de görüldüğü gibi sistemimiz toprak elemanı hariç iki elemanlı olarak tasarlanmıştır. Sistemde toprak ve normal eleman arasında bir eklem çifti olup bunlardan biri döner ve diğeri prizmatik olmak üzere sistemimiz 4 serbestlik derecelidir. Bu sistem döner ve kayar eklemlere konacak eklem motorlarının uygun kontrolleriyle 2 serbestlik dereceli olarak modellenebilir

##### 4.2.3.1. Sistemin Lagrange metodu ile dinamik modellenmesi

4 serbestlik dereceli bu sistemde genelleştirilmiş koordinat olarak,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  seçilmiştir. Öncelikli olarak yukarıda formülleri verilen Lagrange ifadesinin

oluşturulabilmesi için sistemin kinetik ve potansiyel enerjilerinin bulunması gereklidir.

Toprak elemanına bağlı olan uzvun ağırlık merkezinin yani  $M_2$  noktasının kartezyen koordinatlardaki pozisyonlarını tanımlayan denklemler aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
 X_2 &= A1.Cos[ \theta_1 ] - B1.Sin[ \theta_1 ] + P2.Cos[ \theta_2 ] - R2.Sin( \theta_2 ) \\
 Y_2 &= A1.Sin[ \theta_1 ] + B1.Cos[ \theta_1 ] + P2.Sin[ \theta_2 ] + R2.Cos[ \theta_2 ] \\
 X_3 &= A1.Cos[ \theta_1 ] - B1.Sin[ \theta_1 ] + A2.Cos[ \theta_2 ] - B2.Sin( \theta_2 ) \\
 &+ P3. Cos[ \theta_3 ] - R3. Sin[ \theta_3 ] \\
 Y_3 &= A1.Sin[ \theta_1 ] + B1.Cos[ \theta_1 ] + A2.Sin[ \theta_2 ] + B2.Cos[ \theta_2 ] \\
 &+ P3. Sin[ \theta_3 ] + R3. Cos[ \theta_3 ]
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Her bir kütle için kartezyen koordinatlarda lineer hız bileşenleri yukarıdaki pozisyon denklemlerinin zamana göre birinci türevlerinin alınmasıyla bulunur. Böylece kütle merkezlerinin hızları aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
 \vec{V}_2^2 &= \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \\
 \vec{V}_3^2 &= \dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Burada  $\theta_1$ =sabit olduğundan dolayı türevi de sıfır olacaktır.



$$\begin{aligned}\frac{dx_2}{dt} &= -\sin(\theta_1).\dot{B}1 - P2.\sin(\theta_2).\dot{\theta}_2 - R2.\cos(\theta_2).\dot{\theta}_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= \cos(\theta_1).\dot{B}1 + P2.\cos(\theta_2).\dot{\theta}_2 - R2.\sin(\theta_2).\dot{\theta}_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= -\sin(\theta_1).\dot{B}1 - A2.\sin(\theta_2).\dot{\theta}_2 - \dot{B}2.\sin(\theta_2) - B2.\cos(\theta_2).\dot{\theta}_2 \\ &\quad - P3.\sin(\theta_3).\dot{\theta}_3 - R3.\cos(\theta_3).\dot{\theta}_3 \\ \frac{dy_3}{dt} &= \cos(\theta_1).\dot{B}1 + A2.\cos(\theta_2).\dot{\theta}_2 + \dot{B}2.\cos(\theta_2) - B2.\sin(\theta_2).\dot{\theta}_2 \\ &\quad + P3.\cos(\theta_3).\dot{\theta}_3 - R3.\sin(\theta_3).\dot{\theta}_3\end{aligned}\quad (4.33)$$

O halde kinetik enerji denklemi aşağıdaki gibi oluşur:

$$T=0.5.[m_2.V_2^2 + m_3.V_3^2 + I_2.w_2^2 + I_3.w_3^2] \quad (4.34)$$

Potansiyel enerji denklemi olan V:

$$\begin{aligned}V &= m_2.g.y_2 + m_3.g.y_3 \\ &= m_2.g.(A_1.\sin\theta_1 + B_1.\cos\theta_1 + P_2.\sin\theta_2 + R_2.\cos\theta_2) \\ &\quad + m_3.g.(A_1.\sin\theta_1 + B_1.\cos\theta_1 + A_2.\sin\theta_2 + B_2.\cos\theta_2 \\ &\quad + P_3.\sin\theta_3 + R_3.\cos\theta_3)\end{aligned}\quad (4.35)$$

Yukarıda türetilen denklemlerin (3.19) no'lu denklemde yazılmasıyla Lagrange denklemi elde edilir.

Sistemimiz 4 serbestlik derecelidir ve her serbestlik derecesini tanımlayan bir hareket denklemi vardır. O halde, 4 adet hareket denklemi vardır. Bu hareket denklemleri 4.1.1'de türetildiği gibi (3.18) no'lu denklemden başlanılarak Lagrange tarzında türetilmiştir. Türetilen denklemler çözümlemede kullanılan qbasic programlama dilinde hazırlanan benzetim programında ayrıntılı olarak yer

almaktadır. Her bir koordinatı tanımlayan hareket denklemleri program içerisine yazılmak suretiyle istenilen grafikler elde edilmiştir.

Genelleştirilmiş kısıtlama kuvvetleri, uygun mevcudiyet faktörleri tarafından aktif hale getirilirler ve bunlar dış kuvvet sürücülerinde olduğu gibi aynı formatta her bir serbestlik derecesinin hareket denklemine eklenmelidirler. Ayrıca, dönel eklemler bir serbestlik derecesini süren dönel bir sürücünün olması durumunda, onun reaksiyonu bir önceki dönel eklemler eleman üzerinde ters yönlü bir moment etkisi oluşturur. Bu etkilerin de dahil edilmesiyle genelleştirilmiş koordinatların hareketlerini tanımlayan Lagrange tarzındaki hareket denklemlerini aşağıdaki gibi matris formunda gösterebiliriz:

$$|M| * \begin{Bmatrix} B\ddot{1} \\ \ddot{\theta 2} \\ \ddot{B 2} \\ \ddot{\theta 3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} FB1 + F_{dur.B1} \cdot MF2 + \phi_{B1} \\ \tau 2 - \tau 3 + \tau_{dur.2} \cdot MF1 - \tau_{dur.3} \cdot MF3 + \phi_{\theta 2} \\ FB2 + F_{dur.B2} \cdot MF4 + \phi_{B2} \\ \tau 3 + \tau_{dur.3} \cdot MF3 + \phi_{\theta 3} \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

Yukarıdaki denklemde yer alan  $F_{dur.B1}, \tau_{dur.2}$  değerleri sanal eklemler için uygulanacak olan genelleştirilmiş durdurma kuvveti ve genelleştirilmiş durdurma torkudur.

Sistemimiz toprak elemanı hariç iki elemanlı ve dört serbestlik dereceli olmasına rağmen serbestlik derecesinden ikisi ters yönde uygulanan uygun kuvvet veya tork ile sınırlanmakta veya durdurulmaktadır ve sistemimiz böylece iki serbestlik derecesine sahipmiş gibi davranmaktadır.

Sanal eklemlere uygulanması gereken durdurma kuvvet ve tork değerlerinin hesaplanması aşağıda belirtildiği gibidir:

MF1=0 ve MF2=1 olması durumunda; 1 no'lu eklem olan prizmatik eklem sanal hale gelir ve uygulanan durdurma kuvveti ile uçtaki eleman ile bir önceki eleman olan toprak arasında yer alan öteleme hareketi kabiliyeti kısıtlanmış veya durdurulmuş olur dolayısıyla bu eklemin ivmesi sıfır olur.  $B\ddot{1} = 0$  değerinin

yukarıdaki matris formundaki denkleme yazılmasıyla  $F_{dur.B1}$  durdurma kuvvetinin anlık değeri hesaplanabilir:

$$F_{dur.B1} = M(1,1).(B\ddot{1} = 0) + M(1,2).\theta\ddot{2} + M(1,3).\ddot{B}2 + M(1,4).\theta\ddot{3} - FB1 - \phi_{B1} \quad (4.37)$$

Yukarıda elde edilen denklemin yerine yazılmasıyla B1 koordinatı için genel hareket denklemi elde edilir.

MF1=1 ve MF2=0 olması durumunda; 2 no'lu eklem olan döner eklem sanal hale gelir ve uygulanan durdurma momenti ile bu eklemün açısıl ivmesi sıfır olur.  $\theta\ddot{2} = 0$  değerinin yukarıdaki matris formundaki denkleme yazılmasıyla  $\tau_{dur.2}$  değeri bulunur.

$$\tau_{dur.2} = M(2,1).B\ddot{1} + M(2,3).\ddot{B}2 + M(2,4).\theta\ddot{3} - \tau_2 - \tau_3 + \tau_{dur.3}.MF3 - \phi_{\theta 2} \quad (4.38)$$

MF3=0 ve MF4=1 olması durumunda; 3 no'lu eklem olan prizmatik eklem sanal hale gelir ve uygulanan durdurma kuvveti ile uçtaki eleman ile bir önceki eleman arasında yer alan öteleme hareketi kabiliyeti kısıtlanmış veya durdurulmuş olur dolayısıyla bu eklemün ivmesi sıfır olur.  $B\ddot{2} = 0$  değerinin yukarıdaki matris formundaki denkleme yazılmasıyla  $F_{dur.B2}$  durdurma kuvvetinin anlık değeri hesaplanabilir.

$$F_{dur.B2} = M(1,1).B\ddot{1} + M(1,2).\theta\ddot{2} + M(1,4).\theta\ddot{3} - FB2 - \phi_{B2} \quad (4.39)$$

MF3=1 ve MF4=0 olması durumunda; 4 no'lu eklem olan döner eklem sanal hale gelir ve uygulanan durdurma momenti ile bu eklemün açısıl ivmesi bir önceki elemanın açısıl hızına eşit olur.  $\theta\ddot{3} = \theta\ddot{2}$  değerinin yukarıdaki matris formundaki denkleme yazılmasıyla  $\tau_{dur.3}$  değeri bulunur.

$$\tau_{dur.3} = M(2,1).B\ddot{1} + M(2,2).\theta\ddot{2} + M(2,3).\ddot{B}2 + M(2,4).\theta\ddot{2} - \tau_3 - \phi_{\theta 3} \quad (4.40)$$

Türetilen bu denklemin (4.40)  $\theta 3$  koordinatına ait genel hareket denkleminde yerine yerleştirilmesiyle en son hareket denklemi elde edilir.

#### 4.2.2.2. Sistemin yaklaşık modellemesi

Bu sistemin kinematığının incelenebilmesi için aşağıdaki gibi 8 adet geliştirilmiş koordinat tanımlanmıştır.

$$q = [B_1, \theta_2, B_2, \theta_3, x_2, y_2, x_3, y_3]^T \quad (4.41)$$

Burada gösterilen  $\theta$ : x ekseninden saatin tersine doğru pozitif olmak üzere uzuvlar arasındaki mutlak açıdır;  $x_2$  ve  $y_2$ : 2 uzvunun kütle merkezinin koordinatlarını ifade etmektedir. Sistem 2 serbestlik derecelidir ve bu nedenle ( $m-n=8-4=4$ ) 4 adet sınır denklemi vardır:

Öncelikle kütle ağırlık merkezlerinin kartezyen koordinatlardaki eşitlikleri aşağıdaki gibi yazılır :

$$\begin{aligned} X_2 &= A1.\cos[\theta_1] - B1.\sin[\theta_1] + P2.\cos[\theta_2] - R2.\sin(\theta_2) \\ Y_2 &= A1.\sin[\theta_1] + B1.\cos[\theta_1] + P2.\sin[\theta_2] + R2.\cos[\theta_2] \\ X_3 &= A1.\cos[\theta_1] - B1.\sin[\theta_1] + A2.\cos[\theta_2] - B2.\sin(\theta_2) \\ &+ P3.\cos[\theta_3] - R3.\sin[\theta_3] \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} Y_3 &= A1.\sin[\theta_1] + B1.\cos[\theta_1] + A2.\sin[\theta_2] + B2.\cos[\theta_2] \\ &+ P3.\sin[\theta_3] + R3.\cos[\theta_3] \end{aligned}$$

Sistemin hata fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} F1 &= X_2 - A1.\cos[\theta_1] + B1.\sin[\theta_1] - P2.\cos[\theta_2] + R2.\sin(\theta_2) \\ F2 &= Y_2 - A1.\sin[\theta_1] - B1.\cos[\theta_1] - P2.\sin[\theta_2] - R2.\cos[\theta_2] \\ F3 &= X_3 - A1.\cos[\theta_1] + B1.\sin[\theta_1] - A2.\cos[\theta_2] + B2.\sin(\theta_2) \\ &- P3.\cos[\theta_3] + R3.\sin[\theta_3] \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$F4 = Y_3 - A1.Sin[ \theta_1 ] - B1.Cos[ \theta_1 ] - A2.Sin[ \theta_2 ] - B2.Cos[ \theta_2 ] \\ - P3. Sin[ \theta_3 ] - R3. Cos[ \theta_3 ]$$

Yukarıdaki denklemler hata fonksiyonlarının büyüklükleridir ve yaklaşık dinamikte asla sıfır olmazlar fakat mili metrik küsuratlı büyüklüklere indirgenerek ihmal edilebilir düzeye getirilebilirler. Sistemin Transpos jakobiyen matrisi aşağıdaki gibi oluşur:

$$J^T = \begin{pmatrix} \sin(\theta_1) & -\cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & -\cos(\theta_1) \\ (P_2 \sin \theta_2 & (-P_2 \cos \theta_2 & (A_2 \sin \theta_2 & (-A_2 \cos \theta_2 \\ +R_2 \cos \theta_2) & +R_2 \sin \theta_2) & +B_2 \cos \theta_2) & +B_2 \sin \theta_2) \\ 0 & 0 & \sin(\theta_2) & -\cos(\theta_2) \\ 0 & 0 & (P_3 \sin \theta_3 & (-P_3 \cos \theta_3 \\ +R_3 \cos \theta_3) & +R_3 \sin \theta_3) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

Genelleştirilmiş kuvvet vektörü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$Q = \begin{pmatrix} FB_1 + F_{dur.B1}.MF2 \\ \tau_2 + \tau_{dur.2}.MF1 - \tau_3 - \tau_{dur.3}.MF3 - m_2.g.(P_2.Cos \theta_2 - R_2.Sin \theta_2) \\ FB_2 + F_{dur.B2}.MF4 \\ \tau_3 + \tau_{dur.3}.MF3 \\ 0 \\ -m_2.g \\ 0 \\ -m_3.g \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Yukarıda yer alan jakobiyen matris ve genelleştirilmiş dış kuvvet vektörü değerlerinin 15 no'lu denkleme yerleştirilmesiyle sistem dinamiğinin tanımlanması için aşağıda görülen 8 adet ikinci dereceden diferansiyel denklem oluşur:

$$B\ddot{1} = 1/M2.[(FB1 + F_{dur.B1}.MF2) - \beta.(Sin \theta_1.(f_1 + f_3) \\ - Cos \theta_1.(f_2 + f_4))] \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_2 = & 1/I_A \cdot [\tau_2 + \tau_{dur.2} \cdot MF1 - \tau_3 - \tau_{dur.3} \cdot MF3 \\ & - m_2 \cdot g \cdot (P_2 \cdot \cos\theta_2 - R_2 \cdot \sin\theta_2) - \beta \cdot (\sin\theta_2 \cdot (f_1 \cdot P_2 + f_2 \cdot R_2 \\ & + f_3 \cdot A_2 + f_4 \cdot B_2) + \cos\theta_2 \cdot (f_1 \cdot R_2 - f_2 \cdot P_2 + f_3 \cdot B_2 - f_4 \cdot A_2))] \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\ddot{B}2 = 1/M3 \cdot [(FB2 + F_{dur.B2} \cdot MF4) - \beta \cdot (\sin\theta_2 \cdot f_3 - \cos\theta_2 \cdot f_4)] \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_3 = & 1/I_3 \cdot [\tau_3 + \tau_{dur.3} \cdot MF3 - \beta \cdot (\sin\theta_3 \cdot (f_3 \cdot P_3 + f_4 \cdot R_3) \\ & + \cos\theta_3 \cdot (f_3 \cdot R_3 - f_4 \cdot P_4))] \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\ddot{x}_2 = -\beta \cdot f_1 / m_2 \quad (4.50)$$

$$\ddot{y}_2 = -g - \beta \cdot f_2 / m_2 \quad (4.51)$$

$$\ddot{x}_3 = -\beta \cdot f_3 / m_3 \quad (4.52)$$

$$\ddot{y}_3 = -g - \beta \cdot f_4 / m_3 \quad (4.53)$$

Yukarıda gösterilen (4.46) ve (4.53) arasındaki denklemler, sistemin hareketini tanımlayan genelleştirilmiş koordinatların hareket denklemleridir. Sanal eklemlere uygulanması gereken durdurma kuvvet ve tork değerlerinin hesaplanması 4.2.1 bölümünde belirtildiği gibidir.

MF1=0 ve MF2=1 olması durumunda; 1 no'lu eklem olan prizmatik eklem sanal hale gelir ve uygulanan durdurma kuvveti ile uçtaki eleman ile bir önceki eleman olan toprak arasında yer alan öteleme hareketi kabiliyeti kısıtlanmış veya durdurulmuş olur dolayısıyla bu eklemin ivmesi sıfır olur.  $B\ddot{I} = 0$  değerinin yukarıdaki matris formundaki denkleme yazılmasıyla  $F_{dur.B1}$  durdurma kuvvetinin anlık değeri hesaplanabilir:

$$F_{dur.B1} = -FB1 + \beta \cdot (\sin\theta_1 \cdot (f_1 + f_3) - \cos\theta_1 \cdot (f_2 + f_4)) \quad (4.54)$$

Yukarıda elde edilen denklemin yerine yazılmasıyla B1 koordinatı için genel hareket denklemi elde edilmiş olur

MF1=1 ve MF2=0 olması durumunda; 2 no'lu eklem olan döner eklem sanal hale gelir ve uygulanan durdurma momenti ile bu eklem açısız ivmesi sıfır olur.  $\theta_2 = 0$  değerinin yukarıdaki matris formundaki denkleme yazılmasıyla  $\tau_{dur.2}$  değeri bulunur.

$$\begin{aligned} \tau_{dur.2} = & -\tau_2 + \tau_3 + \tau_{dur.3} \cdot MF3 + m_2 \cdot g \cdot (P_2 \cdot \cos\theta_2 - R_2 \cdot \sin\theta_2) \\ & + \beta \cdot (\sin\theta_2 \cdot (f_1 \cdot P_2 + f_2 \cdot R_2 + f_3 \cdot A_2 + f_4 \cdot B_2) \\ & + \cos\theta_2 \cdot (f_1 \cdot R_2 - f_2 \cdot P_2 + f_3 \cdot B_2 - f_4 \cdot A_2)) \end{aligned} \quad (4.55)$$

MF3=0 ve MF4=1 olması durumunda; 3 no'lu eklem olan prizmatik eklem sanal hale gelir ve uygulanan durdurma kuvveti ile uçtaki eleman ile bir önceki eleman arasında yer alan öteleme hareketi kabiliyeti kısıtlanmış veya durdurulmuş olur dolayısıyla bu eklem ivmesi sıfır olur.  $B_2 = 0$  değerinin yukarıdaki matris formundaki denkleme yazılmasıyla  $F_{dur.B2}$  durdurma kuvvetinin anlık değeri hesaplanabilir.

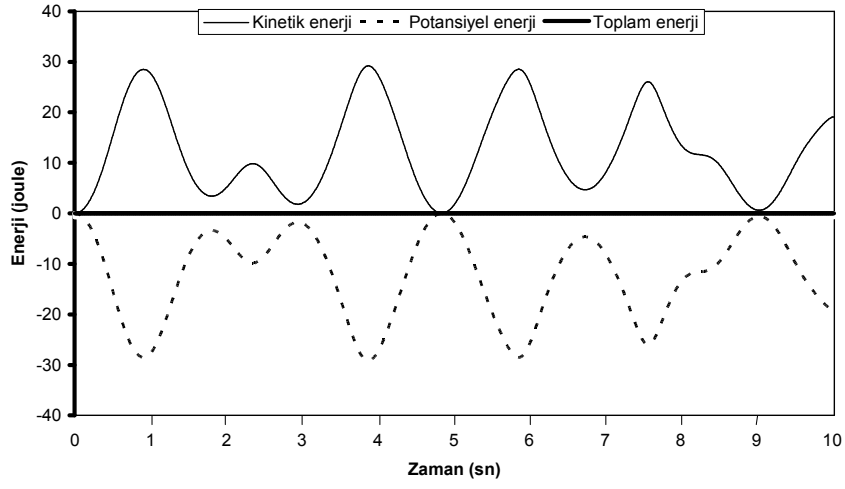
$$F_{dur.B2} = -FB2 + \beta \cdot (\sin\theta_2 \cdot f_3 - \cos\theta_2 \cdot f_4) \quad (4.56)$$

MF3=1 ve MF4=0 olması durumunda; 4 no'lu eklem olan döner eklem sanal hale gelir ve uygulanan durdurma momenti ile bu eklem açısız ivmesi bir önceki elemanın açısız hızına eşit olur.  $\theta_3 = \theta_2$  değerinin yukarıdaki matris formundaki denkleme yazılmasıyla  $\tau_{dur.3}$  değeri bulunur.

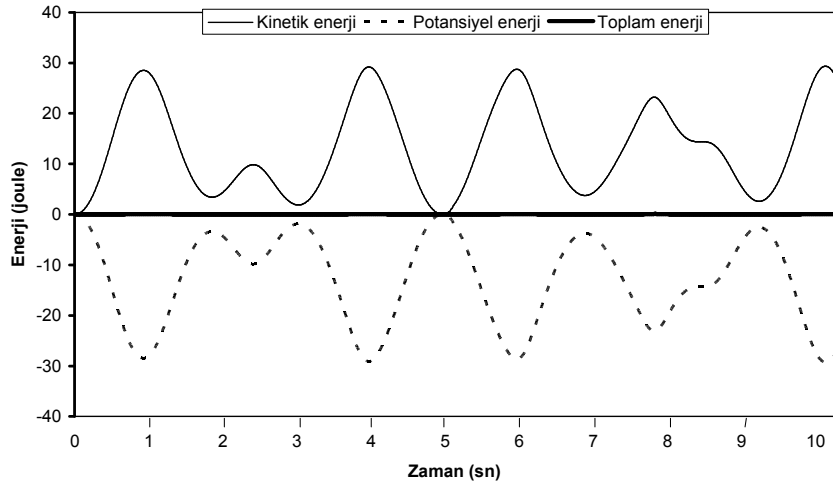
$$\begin{aligned} \tau_{dur.3} = & \ddot{\theta}_2 \cdot I_3 - \tau_3 + \beta \cdot (\sin\theta_3 \cdot (f_3 \cdot P_3 + f_4 \cdot R_3) \\ & + \cos\theta_3 \cdot (f_3 \cdot R_3 - f_4 \cdot P_3)) \end{aligned} \quad (4.57)$$

#### 4.2.2.3. Uygulamalar

Aşağıdaki şekilde yaklaşık dinamik metotla modellenen ikili sarkaca ait kinetik, potansiyel ve toplam enerjilere ait grafikler gösterilmektedir. Enerjinin korunumu yasası gereğince toplam enerji sabittir ve toplam enerjinin zamana göre değişimi sıfırdır.

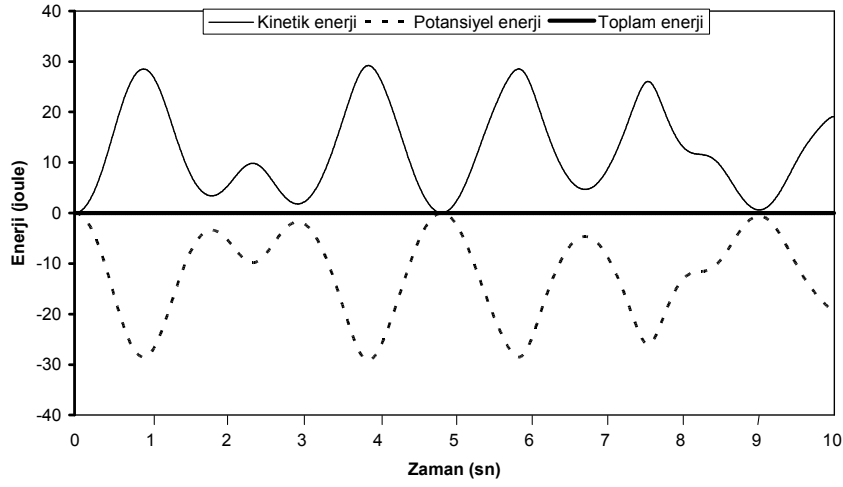


Şekil 4.4. Lagrange tarzında modellenen ikili sarkacın enerji grafikleri



Şekil 4.5. Yaklaşık tarzda modellenen ikili sarkacın enerji grafikleri



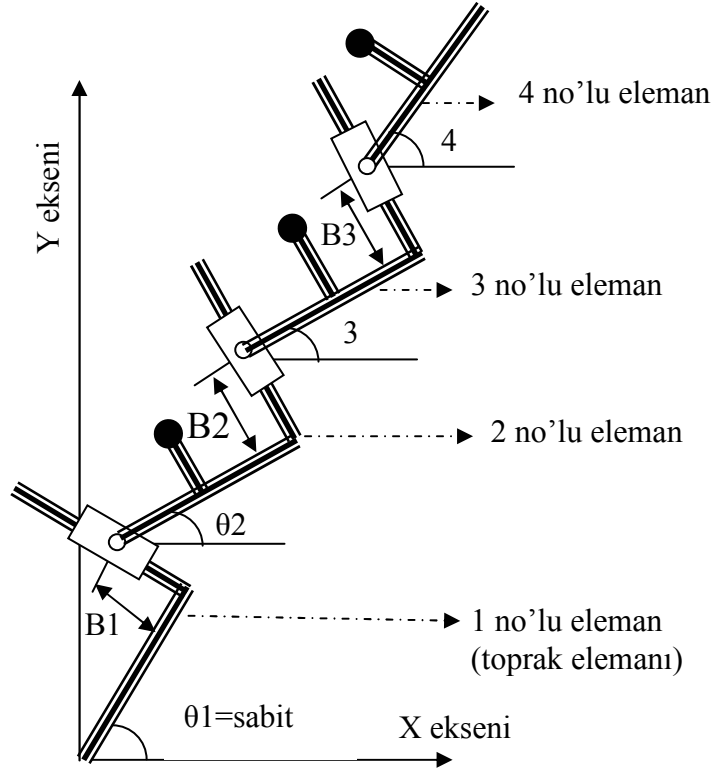


Şekil 4.6. Sanal eklemler metodu ile Lagrange tarzında modellenen ikili sarkacın enerji grafikleri

Yukarıda gösterilmiş olan her üç grafik de incelendiğinde üç farklı metotla modellenmiş olan sistemden elde edilen sonuçların iyi bir uyum sağladığı söylenebilir.

Hazırlanan programın çıktısındaki değerler incelendiğinde toplam enerjinin sabit kaldığı, potansiyel enerji azalırken kinetik enerjinin aynı oranda arttığı gözlemlenmiştir. Kayıpların ihmal edildiği ve sadece kinetik ve potansiyel enerjilerin toplamı olarak alınan toplam enerji ifadesinin zamana göre birinci türevi alındığında sıfır sonucuna ulaşıldığı her üç grafikten de görülmektedir.

## 4.2.4. Üç elemanlı altı serbestlik dereceli P-R-P-R-P-R sisteminin dinamiği



**Şekil 4.7.** Üç elemanlı ve toplam altı serbestlik dereceli P-R-P-R-P-R açık kinematik zincirine ait gösterim

Şekil 4.7.'de görüldüğü gibi sistemimiz toprak elemanı hariç üç hareketli elemana sahiptir. Sistemde eleman çiftleri arasında bir eklem çifti olup bunlardan biri döner ve diğeri prizmatik olmak üzere sistemimiz toplam 6 serbestlik derecelidir. Bu sistem döner ve kayar eklemlere konacak eklem motorlarının uygun kontrolleriyle 3 serbestlik dereceli olarak modellenmelidir.

#### 4.2.4.1. Sistemin Lagrange metodu ile dinamik modellenmesi

6 serbestlik dereceli bu sistemde genelleştirilmiş koordinat olarak,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  seçilmiştir. Öncelikli olarak yukarıda formülleri verilen Lagrange ifadesinin oluşturulabilmesi için sistemin kinetik ve potansiyel enerjilerinin bulunması gereklidir.

Her bir elemanın kütle ağırlık merkezlerinin kartezyen koordinatları (4.54) aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
X_2 &= A1.Cos[ \theta_1 ] - B1.Sin[ \theta_1 ] + P2.Cos[ \theta_2 ] - R2.Sin( \theta_2 ) \\
Y_2 &= A1.Sin[ \theta_1 ] + B1.Cos[ \theta_1 ] + P2.Sin[ \theta_2 ] + R2.Cos[ \theta_2 ] \\
X_3 &= A1.Cos[ \theta_1 ] - B1.Sin[ \theta_1 ] + A2.Cos[ \theta_2 ] - B2.Sin( \theta_2 ) \\
&+ P3. Cos[ \theta_3 ] - R3. Sin[ \theta_3 ] \\
Y_3 &= A1.Sin[ \theta_1 ] + B1.Cos[ \theta_1 ] + A2.Sin[ \theta_2 ] + B2.Cos[ \theta_2 ] \\
&+ P3. Sin[ \theta_3 ] + R3. Cos[ \theta_3 ] \\
X_4 &= A1.Cos[ \theta_1 ] - B1.Sin[ \theta_1 ] + A2.Cos[ \theta_2 ] - B2.Sin( \theta_2 ) \\
&+ A3. Cos[ \theta_3 ] - B3. Sin[ \theta_3 ] + P4.Cos( \theta_4 ) - R4.Sin( \theta_4 ) \\
Y_4 &= A1.Sin[ \theta_1 ] + B1.Cos[ \theta_1 ] + A2.Sin[ \theta_2 ] + B2.Cos[ \theta_2 ] \\
&+ A3. Sin[ \theta_3 ] + B3. Cos[ \theta_3 ] + P4.Sin( \theta_4 ) + R4.Cos( \theta_4 )
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Her bir kütlenin kartezyen koordinatlarda lineer hız bileşenleri yukarıdaki pozisyon denklemlerinin zamana göre birinci türevlerinin alınmasıyla bulunur. Böylece kütle merkezlerinin hızları aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
\vec{V}_2^2 &= \vec{x}_2^2 + \vec{y}_2^2 \\
\vec{V}_3^2 &= \vec{x}_3^2 + \vec{y}_3^2
\end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
\vec{V}_4^2 &= \vec{x}_4^2 + \vec{y}_4^2 \\
\frac{dx_2}{dt} &= -Sin(\theta_1). \dot{B}1 - P2.Sin(\theta_2). \dot{\theta}_2 - R2.Cos(\theta_2). \dot{\theta}_2
\end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = Cos(\theta_1). \dot{B}1 + P2.Cos(\theta_2). \dot{\theta}_2 - R2.Sin(\theta_2). \dot{\theta}_2$$

$$\begin{aligned}\frac{dx_3}{dt} &= -\sin(\theta_1).\dot{B}1 - A2.\sin(\theta_2).\dot{\theta}_2 - \dot{B}2.\sin(\theta_2) \\ &- B2.\cos(\theta_2).\dot{\theta}_2 - P3.\sin(\theta_3).\dot{\theta}_3 - R3.\cos(\theta_3).\dot{\theta}_3\end{aligned}\quad (4.61)$$

$$\begin{aligned}\frac{dy_3}{dt} &= \cos(\theta_1).\dot{B}1 + A2.\cos(\theta_2).\dot{\theta}_2 + \dot{B}2.\cos(\theta_2) \\ &- B2.\sin(\theta_2).\dot{\theta}_2 + P3.\cos(\theta_3).\dot{\theta}_3 - R3.\sin(\theta_3).\dot{\theta}_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx_4}{dt} &= -\sin(\theta_1).\dot{B}1 - A2.\sin(\theta_2).\dot{\theta}_2 - \dot{B}2.\sin(\theta_2) \\ &- B2.\cos(\theta_2).\dot{\theta}_2 - A3.\sin(\theta_3).\dot{\theta}_3 - \dot{B}3.\sin(\theta_3) \\ &B3.\cos(\theta_3).\dot{\theta}_3 - P4.\sin(\theta_4).\dot{\theta}_4 - R4.\cos(\theta_4).\dot{\theta}_4\end{aligned}\quad (4.62)$$

$$\begin{aligned}\frac{dy_4}{dt} &= \cos(\theta_1).\dot{B}1 + A2.\cos(\theta_2).\dot{\theta}_2 + \dot{B}2.\cos(\theta_2) \\ &- B2.\sin(\theta_2).\dot{\theta}_2 + A3.\cos(\theta_3).\dot{\theta}_3 + \dot{B}3.\cos(\theta_3) \\ &- B3.\sin(\theta_3).\dot{\theta}_3 + P4.\cos(\theta_4).\dot{\theta}_4 - R4.\sin(\theta_4).\dot{\theta}_4\end{aligned}$$

Sistemimize ait kinetik enerji denklemi aşağıdaki gibi oluşur:

$$T = \frac{1}{2} \cdot [m2.V_2^2 + m3.V_3^2 + m4.V_4^2 + I_2.\dot{\theta}_2^2 + I_3.\dot{\theta}_3^2 + I_4.\dot{\theta}_4^2] \quad (4.63)$$

Potansiyel enerji denklemi olan V:

$$V = m2.g.y2 + m3.g.y3 + m4.g.y4 \quad (4.64)$$

Yukarıda türetilen denklemlerin (3.19) no'lu denklemde yazılmasıyla Lagrange denklemi elde edilir.

Sistemimiz 6 serbestlik derecelidir ve her serbestlik derecesini tanımlayan bir hareket denklemi vardır. O halde, 6 adet hareket denklemi vardır. Bu hareket denklemleri 4.2.1.1'de türetildiği gibi (3.18) no'lu denklemde başlanılarak Lagrange tarzında türetilmiştir. Türetilen denklemler diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü ve hareketin benzetimi için hazırlanmış olan qbasic programlama dilindeki benzetim programında ayrıntılı olarak yer almaktadır. Her bir koordinatı tanımlayan hareket denklemleri program içerisine yazılmak suretiyle istenilen grafikler elde edilmiştir.

Genelleştirilmiş kısıtlama kuvvetleri, uygun mevcudiyet faktörleri tarafından aktif hale getirilirler ve bunlar dış kuvvet sürücülerinde olduğu gibi aynı formatta her bir serbestlik derecesinin hareket denkleminde eklenmelidirler. Ayrıca, dönel eklemler bir serbestlik derecesini süren dönel bir sürücünün olması durumunda, onun reaksiyonu bir önceki dönel eklemler üzerinde ters yönlü bir moment etkisi oluşturur. Bu etkilerin de dahil edilmesiyle genelleştirilmiş koordinatların hareketlerini tanımlayan Lagrange tarzındaki hareket denklemlerini aşağıdaki gibi matris formunda gösterebiliriz:

$$|M|^* \begin{pmatrix} B\ddot{1} \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{B}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ B\ddot{3} \\ \ddot{\theta}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} FB1 + F_{dur.B1} \cdot MF2 + \phi_{B1} \\ \tau_2 - \tau_3 + \tau_{dur.2} \cdot MF1 - \tau_{dur.3} \cdot MF3 + \phi_{\theta_2} \\ FB2 + F_{dur.B2} \cdot MF4 + \phi_{B2} \\ \tau_3 - \tau_4 + \tau_{dur.3} \cdot MF3 - \tau_{dur.4} \cdot MF5 + \phi_{\theta_3} \\ FB3 + F_{dur.B3} \cdot MF6 + \phi_{B3} \\ \tau_4 + \tau_{dur.4} \cdot MF5 + \phi_{\theta_4} \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

Yukarıdaki denklemde yer alan  $F_{dur.B1}, \tau_{dur.2}$  gibi değerler sanal eklemler için uygulanacak olan genelleştirilmiş durdurma kuvvetleri ve genelleştirilmiş durdurma torklarıdır.

Sistemimiz toprak elemanı hariç üç elemanlı ve altı serbestlik dereceli olmasına karşın serbestlik derecesinden üçü ters yönde uygulanan uygun kuvvet veya tork ile sınırlanmakta veya durdurulmaktadır ve sistemimiz böylece üç serbestlik derecesine sahipmiş gibi davranmaktadır.

Sanal eklemlere uygulanması gereken durdurma kuvvet ve tork değerlerinin hesaplanması aşağıda belirtildiği gibidir:

MF1=0 ve MF2=1 olması durumunda; 1 no'lu eklem olan prizmatik eklem sanal hale gelir ve uygulanan durdurma kuvveti ile uçtaki eleman ile bir önceki eleman olan toprak arasında yer alan öteleme hareketi kabiliyeti kısıtlanmış veya durdurulmuş olur dolayısıyla bu eklemin ivmesi sıfır olur.  $B\ddot{1} = 0$  değerinin yukarıdaki matris formundaki denkleme yazılmasıyla  $F_{dur.B1}$  durdurma kuvvetinin anlık değeri hesaplanabilir:

$$F_{dur.B1} = M(1,1).(B\ddot{1} = 0) + M(1,2).\theta\ddot{2} + M(1,3).\ddot{B}2 + M(1,4).\theta\ddot{3} + M(1,5).\ddot{B}3 + M(1,6).\theta\ddot{4} - FB1 - \phi_{B1} \quad (4.66)$$

Yukarıda elde edilen denklemin yerine yazılmasıyla B1 koordinatı için genel hareket denklemi elde edilmiş olur

MF1=1 ve MF2=0 olması durumunda; 2 no'lu eklem olan döner eklem sanal hale gelir ve uygulanan durdurma momenti ile bu eklemün açısıl ivmesi sıfır olur.  $\theta\ddot{2} = 0$  değerinun yukarıdaki matris formundaki denkleme yazılmasıyla  $\tau_{dur.2}$  değeri bulunur.

MF3=0 ve MF4=1 olması durumunda; 3 no'lu eklem olan prizmatik eklem sanal hale gelir ve uygulanan durdurma kuvveti ile uçtaki eleman ile bir önceki eleman arasında yer alan öteleme hareketi kabiliyeti kısıtlanmış veya durdurulmuş olur dolayısıyla bu eklemün ivmesi sıfır olur.  $B\ddot{2} = 0$  değerinun yukarıdaki matris formundaki denkleme yazılmasıyla  $F_{dur.B2}$  durdurma kuvvetinin anlık değeri hesaplanabilir.

MF3=1 ve MF4=0 olması durumunda; 4 no'lu eklem olan döner eklem sanal hale gelir ve uygulanan durdurma momenti ile bu eklemün açısıl ivmesi bir önceki elemanın açısıl hızına eşit olur.  $\theta\ddot{3} = \theta\ddot{2}$  değerinun yukarıdaki matris formundaki denkleme yazılmasıyla  $\tau_{dur.3}$  değeri bulunur.

#### 4.2.4.2. Sistemin yaklaşık modellemesi

Bu sistemin kinematiğinin incelenebilmesi için aşağıdaki gibi 12 adet genelleştirilmiş koordinat tanımlanmıştır.

$$q = [B_1, \theta_2, B_2, \theta_3, B_3, \theta_4, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4]^T \quad (4.67)$$

Burada gösterilen  $\theta$ : x ekseninden saatin tersine doğru pozitif olmak üzere uzuvlar arasındaki mutlak açıdır; x ve y ise ilgili uzvun kütle merkezinin koordinatlarını ifade etmektedir. Sistem 6 serbestlik derecelidir ve sistemi

tanımlamak için toplam 12 adet koordinat tanımlanmıştır bu durumda ( $m-n=12-6 = 6$ ) 6 adet sınır denklemi vardır:

Öncelikle kütle ağırlık merkezlerinin kartezyen koordinatlardaki eşitlikleri aşağıdaki gibi yazılır :

$$X_2 = A1.Cos[ \theta_1 ] - B1.Sin[ \theta_1 ] + P2.Cos[ \theta_2 ] - R2.Sin( \theta_2 )$$

$$Y_2 = A1.Sin[ \theta_1 ] + B1.Cos[ \theta_1 ] + P2.Sin[ \theta_2 ] + R2.Cos[ \theta_2 ]$$

$$X_3 = A1.Cos[ \theta_1 ] - B1.Sin[ \theta_1 ] + A2.Cos[ \theta_2 ] - B2.Sin( \theta_2 ) \\ + P3. Cos[ \theta_3 ] - R3. Sin[ \theta_3 ]$$

$$Y_3 = A1.Sin[ \theta_1 ] + B1.Cos[ \theta_1 ] + A2.Sin[ \theta_2 ] + B2.Cos[ \theta_2 ] \\ + P3. Sin[ \theta_3 ] + R3. Cos[ \theta_3 ] \quad (4.68)$$

$$X_4 = A1.Cos[ \theta_1 ] - B1.Sin[ \theta_1 ] + A2.Cos[ \theta_2 ] - B2.Sin( \theta_2 ) \\ + A3. Cos[ \theta_3 ] - B3. Sin[ \theta_3 ] + P4.Cos( \theta_4 ) - R4.Sin( \theta_4 )$$

$$Y_4 = A1.Sin[ \theta_1 ] + B1.Cos[ \theta_1 ] + A2.Sin[ \theta_2 ] + B2.Cos[ \theta_2 ] \\ + A3. Sin[ \theta_3 ] + B3. Cos[ \theta_3 ] + P4.Sin( \theta_4 ) + R4.Cos( \theta_4 )$$

Sistemin hata fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$F1 = X_2 - A1.Cos[ \theta_1 ] + B1.Sin[ \theta_1 ] - P2.Cos[ \theta_2 ] + R2.Sin( \theta_2 )$$

$$F2 = Y_2 - A1.Sin[ \theta_1 ] - B1.Cos[ \theta_1 ] - P2.Sin[ \theta_2 ] - R2.Cos[ \theta_2 ]$$

$$F3 = X_3 - A1.Cos[ \theta_1 ] + B1.Sin[ \theta_1 ] - A2.Cos[ \theta_2 ] + B2.Sin( \theta_2 ) \\ - P3. Cos[ \theta_3 ] + R3. Sin[ \theta_3 ] \quad (4.69)$$

$$F4 = Y_3 - A1.Sin[ \theta_1 ] - B1.Cos[ \theta_1 ] - A2.Sin[ \theta_2 ] - B2.Cos[ \theta_2 ] \\ - P3. Sin[ \theta_3 ] - R3. Cos[ \theta_3 ]$$

$$F5 = X_4 - A1.Cos[ \theta_1 ] + B1.Sin[ \theta_1 ] - A2.Cos[ \theta_2 ] + B2.Sin( \theta_2 ) \\ - A3. Cos[ \theta_3 ] + B3. Sin[ \theta_3 ] - P4.Cos( \theta_4 ) + R4.Sin( \theta_4 )$$

$$F_6 = Y_4 - A_1 \cdot \sin[\theta_1] - B_1 \cdot \cos[\theta_1] - A_2 \cdot \sin[\theta_2] - B_2 \cdot \cos[\theta_2] \\ - A_3 \cdot \sin[\theta_3] - B_3 \cdot \cos[\theta_3] - P_4 \cdot \sin(\theta_4) - R_4 \cdot \cos(\theta_4)$$

Yukarıdaki denklemler hata fonksiyonlarının büyüklükleridir ve yaklaşık dinamikte asla sıfır olmazlar fakat mili metrik küsuratlı büyüklüklere indirgenerek ihmal edilebilir düzeye getirilebilirler. Sistemin Transpos jakobiyen matrisi aşağıdaki gibi oluşur:

$$J^T = \begin{pmatrix} \sin(\theta_1) & -\cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & -\cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & -\cos(\theta_1) \\ (P_2 \sin \theta_2 & (-P_2 \cos \theta_2 & (A_2 \sin \theta_2 & (-A_2 \cos \theta_2 & (A_2 \sin \theta_2 & (-A_2 \cos \theta_2 \\ +R_2 \cos \theta_2) & +R_2 \sin \theta_2) & +B_2 \cos \theta_2) & +B_2 \sin \theta_2) & +B_2 \cos \theta_2) & +B_2 \sin \theta_2) \\ 0 & 0 & \sin(\theta_2) & -\cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) & -\cos(\theta_2) \\ 0 & 0 & (P_3 \sin \theta_3 & (-P_3 \cos \theta_3 & (A_3 \sin \theta_3 & (-A_3 \cos \theta_3 \\ +R_3 \cos \theta_3) & +R_3 \sin \theta_3) & +B_3 \cos \theta_3) & +B_3 \sin \theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\theta_3) & -\cos(\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (P_4 \sin \theta_4 & (-P_4 \cos \theta_4 \\ +R_4 \cos \theta_4) & +R_4 \sin \theta_4) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

Genelleştirilmiş kuvvet vektörü olan  $Q$ , (4.71) no'lu matris formundaki ifadelerle aşağıda belirtildiği gibi elde edilir:



$$Q = \begin{pmatrix} FB_1 + F_{dur.B1} \cdot MF2 \\ \tau_2 + \tau_{dur.2} \cdot MF1 - \tau_3 - \tau_{dur.3} \cdot MF3 - m_2 \cdot g \cdot A_2 \cdot \cos(\theta_2) \\ FB_2 + F_{dur.B2} \cdot MF4 \\ \tau_3 + \tau_{dur.3} \cdot MF3 - \tau_4 - \tau_{dur.4} \cdot MF5 \\ FB_3 + F_{dur.B3} \cdot MF6 \\ \tau_4 + \tau_{dur.4} \cdot MF5 \\ 0 \\ -m_2 \cdot g \\ 0 \\ -m_3 \cdot g \\ 0 \\ -m_4 \cdot g \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

Yukarıda yer alan jakobiyen matris ve genelleştirilmiş dış kuvvet vektörü değerlerinin 15 no'lu denklemden yerleştirilmesiyle sistem dinamiğinin tanımlanması için aşağıda görülen 12 adet ikinci dereceden diferansiyel denklem oluşur:

$$\ddot{B}_1 = 1/M2 \cdot [(FB1 + F_{dur.B1} \cdot MF2) - \beta \cdot (\sin\theta_1 \cdot (f_1 + f_3 + f_5) - \cos\theta_1 \cdot (f_2 + f_4 + f_6))] \quad (4.72)$$

$$\ddot{\theta}_2 = 1/I_A \cdot [\tau_2 + \tau_{dur.2} \cdot MF1 - \tau_3 - \tau_{dur.3} \cdot MF3 - m_2 \cdot g \cdot (P_2 \cdot \cos\theta_2 - R_2 \cdot \sin\theta_2) - \beta \cdot (\sin\theta_2 \cdot (f_1 \cdot P_2 + f_2 \cdot R_2 + f_3 \cdot A_2 + f_4 \cdot B_2 + f_5 \cdot A_2 + f_6 \cdot B_2) + \cos\theta_2 \cdot (f_1 \cdot R_2 - f_2 \cdot P_2 + f_3 \cdot B_2 - f_4 \cdot A_2 + f_5 \cdot B_2 - f_6 \cdot A_2))] \quad (4.73)$$

$$\ddot{B}_2 = 1/M3 \cdot [(FB2 + F_{dur.B2} \cdot MF4) - \beta \cdot (\sin\theta_2 \cdot (f_3 + f_5) - \cos\theta_2 \cdot (f_4 + f_6))] \quad (4.74)$$

$$\ddot{\theta}_3 = 1/I_3 \cdot [\tau_3 + \tau_{dur.3} \cdot MF3 - \tau_4 - \tau_{dur.4} \cdot MF5 - \beta \cdot (\sin\theta_3 \cdot (f_3 \cdot P_3 + f_4 \cdot R_3 + f_5 \cdot A_3 + f_6 \cdot B_3) + \cos\theta_3 \cdot (f_3 \cdot R_3 - f_4 \cdot P_4 + f_5 \cdot B_3 - f_6 \cdot A_3))] \quad (4.75)$$

$$\ddot{B}_3 = 1/M4 \cdot [FB3 + F_{dur.B3} \cdot MF6 - \beta \cdot (\sin\theta_3 \cdot f_5 - \cos\theta_3 \cdot f_6)] \quad (4.76)$$

$$\ddot{\theta}_4 = 1/I_4 \cdot [\tau_4 + \tau_{dur.4} \cdot MF5 - \beta \cdot (\sin\theta_4 \cdot (f_5 \cdot P_4 + f_6 \cdot R_4) + \cos\theta_4 \cdot (f_5 \cdot R_4 - f_6 \cdot P_4))] \quad (4.77)$$

$$\ddot{x}_2 = -\beta \cdot f_1 / m_2 \quad (4.78)$$

$$\ddot{y}_2 = -g - \beta \cdot f_2 / m_2 \quad (4.79)$$

$$\ddot{x}_3 = -\beta \cdot f_3 / m_3 \quad (4.80)$$

$$\ddot{y}_3 = -g - \beta \cdot f_4 / m_3 \quad (4.81)$$

$$\ddot{x}_4 = -\beta \cdot f_5 / m_4 \quad (4.82)$$

$$\ddot{y}_4 = -g - \beta \cdot f_6 / m_4 \quad (4.83)$$

Sanal eklemlere uygulanması gereken durdurma kuvvet ve tork değerlerinin hesaplanması aşağıdaki gibidir:

MF1=0 ve MF2=1 olması durumunda; 1 no'lu eklem olan prizmatik eklem sanal hale gelir ve uygulanan durdurma kuvveti ile uçtaki eleman ile bir önceki eleman olan toprak arasında yer alan öteleme hareketi kabiliyeti kısıtlanmış veya durdurulmuş olur dolayısıyla bu eklemin ivmesi sıfır olur.  $B\ddot{1} = 0$  değerinin yukarıdaki matris formundaki denkleme yazılmasıyla  $F_{dur.B1}$  durdurma kuvvetinin anlık değeri hesaplanabilir:

$$F_{dur.B1} = -FB1 + \beta \cdot (\sin\theta_1 \cdot (f_1 + f_3 + f_5) - \cos\theta_1 \cdot (f_2 + f_4 + f_6)) \quad (4.84)$$

Yukarıda elde edilen denklemin yerine yazılmasıyla B1 koordinatı için genel hareket denklemi elde edilmiş olur

MF1=1 ve MF2=0 olması durumunda; 2 no'lu eklem olan döner eklem sanal hale gelir ve uygulanan durdurma momenti ile bu eklemin açısal ivmesi sıfır olur.  $\theta\ddot{2} = 0$  değerinin yukarıdaki matris formundaki denkleme yazılmasıyla  $\tau_{dur.2}$  değeri bulunur.

$$\begin{aligned} \tau_{dur.2} = & -\tau_2 + \tau_3 + \tau_{dur.3} \cdot MF3 + m_2 \cdot g \cdot (P_2 \cdot \cos\theta_2 - R_2 \cdot \sin\theta_2) \\ & + \beta \cdot (\sin\theta_2 \cdot (f_1 \cdot P_2 + f_2 \cdot R_2 + f_3 \cdot A_2 + f_4 \cdot B_2 + f_5 \cdot A_2 + f_6 \cdot B_2) \\ & + \cos\theta_2 \cdot (f_1 \cdot R_2 - f_2 \cdot P_2 + f_3 \cdot B_2 - f_4 \cdot A_2 + f_5 \cdot B_2 - f_6 \cdot A_2)) \end{aligned} \quad (4.85)$$

MF3=0 ve MF4=1 olması durumunda; 3 no'lu eklem olan prizmatik eklem sanal hale gelir ve uygulanan durdurma kuvveti ile uçtaki eleman ile bir önceki eleman arasında yer alan öteleme hareketi kabiliyeti kısıtlanmış veya durdurulmuş olur dolayısıyla bu eklemin ivmesi sıfır olur.  $B\ddot{2} = 0$  değerinin yukarıdaki matris

formundaki denkleme yazılmasıyla  $F_{dur.B2}$  durdurma kuvvetinin anlık değeri hesaplanabilir.

$$F_{dur.B2} = -FB2 + \beta.(Sin\theta_2.(f_3 + f_5) - Cos\theta_2.(f_4 + f_6)) \quad (4.86)$$

MF3=1 ve MF4=0 olması durumunda; 4 no'lu eklem olan döner eklem sanal hale gelir ve uygulanan durdurma momenti ile bu eklem açısız ivmesi bir önceki elemanın açısız hızına eşit olur.  $\theta\ddot{3} = \theta\ddot{2}$  değerinin yukarıdaki matris formundaki denkleme yazılmasıyla  $\tau_{dur.3}$  değeri bulunur.

$$\tau_{dur.3} = \ddot{\theta}_2.I_3 - \tau_3 + \tau_4 + \tau_{dur.4}.MF5 + \beta.(Sin\theta_3.(f_3.P_3 + f_4.R_3 + f_5.A_3 + f_6.B_3) + Cos\theta_3.(f_3.R_3 - f_4.P_4 + f_5.B_3 - f_6.A_3)) \quad (4.87)$$

MF5=0 ve MF6=1 olması durumunda; 5 no'lu eklem olan prizmatik eklem sanal hale gelir ve uygulanan durdurma kuvveti ile uçtaki eleman ile bir önceki eleman arasında yer alan öteleme hareketi kabiliyeti kısıtlanmış veya durdurulmuş olur dolayısıyla bu eklem ivmesi sıfır olur.  $B\ddot{3} = 0$  değerinin yukarıdaki matris formundaki denkleme yazılmasıyla  $F_{dur.B3}$  durdurma kuvvetinin anlık değeri hesaplanabilir.

$$F_{dur.B3} = -FB3 + \beta.(Sin\theta_3.f_5 - Cos\theta_3.f_6) \quad (4.88)$$

MF5=1 ve MF6=0 olması durumunda; 6 no'lu eklem olan döner eklem sanal hale gelir ve uygulanan durdurma momenti ile bu eklem açısız ivmesi bir önceki elemanın açısız hızına eşit olur.  $\theta\ddot{4} = \theta\ddot{3}$  değerinin yukarıdaki matris formundaki denkleme yazılmasıyla  $\tau_{dur.4}$  değeri bulunur.

$$\tau_{dur.4} = \ddot{\theta}_3.I_4 - \tau_4 + \beta.(Sin\theta_4.(f_5.P_4 + f_6.R_4) + Cos\theta_4.(f_5.R_4 - f_6.P_4)) \quad (4.89)$$

Hata fonksiyonları denklemlerinin çözümü herhangi bir tam denklem çözümünden daha basittir. Bu denklemlerin integrasyonunun hesaba dayalı bir şekilde sayısal olarak çözümü zor değildir, fakat belirsiz hataların varlığından dolayı, bir takım tam denklemlerin integrasyonundan daha uzun sürebilir.  $\beta$  terimi büyük bir değer olarak seçilmelidir;  $\beta$  değeri sonsuza doğru giderken denklemin hata

fonksiyonu sıfıra doğru ilerler ve bu çözüm yaklaşımı hareketin tam denklemlerindeki çözümlere denk olur. Ortaya çıkan zorluklardan biri; hata fonksiyonları üzerinde yüksek titreşim genliği ve yüksek frekansın ortaya çıkması, düzeltici yöndeki sonsuz büyüklükteki sınır kuvvetlerinin kontrol dışına çıkması gibi durumların kontrolü altında çözümdür.

### 4.3. Açık Zincirlerden Kapalı Mekanizma Zincirlerinin Oluşturulması

Önceki bölümlerde örnek olarak çalıştığımız sistemlerin tamamı açık kinematik zincirli kol veya robot kolu sistemlerinden oluşmuştur. Bu sistemlerin Grüber mekanizması haline getirilebilmesi için öncelikli olarak sistemlerimizin kapalı kinematik zincir haline getirilmesi gerekir. En son incelediğimiz sistemimiz toprak elemanı ile birlikte toplam 4 elemanlıydı. Bu sistemin uç noktasındaki elemanın ucuna bir yay bağlarsak bu noktayı yaydan gelecek olan x ve y yönündeki bağ kuvvetleriyle toprak elemanına bağlayabiliriz.

Düzlemsel RRR açık kinematik zincirli sistemin uç noktaya eklenen bir yay vasıtasıyla 4 elemanlı kapalı bir mekanizma haline getirilmesiyle mekanizma serbestlik derecemiz 1 olacaktır.

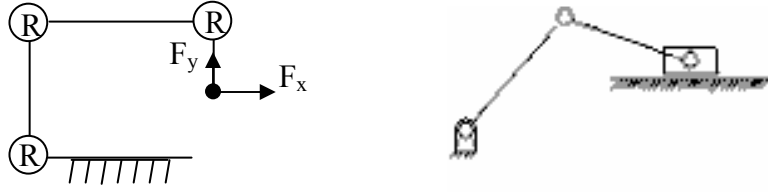
Elde edilen kapalı zincirli tek serbestlik dereceli mekanizma Materyal ve Metot kısmında belirtilen Grüber mekanizması şartlarını sağladığından dolayı 4 elemanlı Grüber mekanizması olarak adlandırılabilir. Bu yöntemle bir serbestlik dereceli dört elemanlı Grüber mekanizmalarının elde ediliş şekilleri aşağıdaki gibi belirtilebilir:

#### 4.3.1. Açık zincirden dört çubuk mekanizmasının elde edilişi

Dört elemanlı ve dört döner mafsallı bir dört çubuk mekanizmasının elde edilişi aşağıda gösterildiği gibidir:

Altı serbestlik dereceli açık zincirden dört döner eklemlili dört çubuk mekanizmasının elde edilebilmesi için öncelikle uygulanacak mevcudiyet faktörleriyle tüm kayar eklemler sanal hale getirilmelidir daha sonra da açıkta sallanan en uçtaki elemanın x ve y yönünde uygulanacak olan bağ kuvvetleri yardımıyla toprak elemanına bağlantısı yapılır. Uygulanacak bu bağ kuvvetleri için

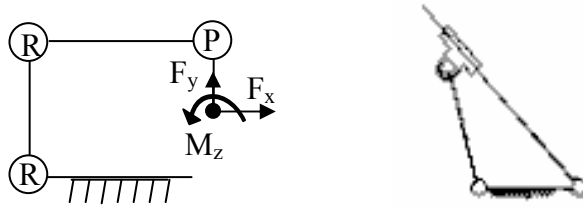




Şekil 4.9. Krank-biyel mekanizması (1. tip) elde edilmesi

#### 4.3.3. Kol kızak mekanizmasının elde edilmesi

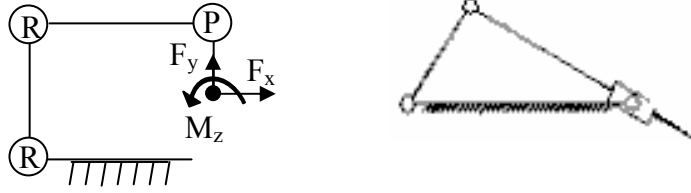
Şekilde görülen mekanizmasının oluşturulabilmesi için öncelikle mevcudiyet faktörleri  $MF_1=0$ ,  $MF_2=1$ ,  $MF_3=0$ ,  $MF_4=1$ ,  $MF_5=1$ ,  $MF_6=0$  şeklinde düzenlenmelidir. Dördüncü elemanın uç noktasının toprağa bağlandığı kısımda sadece bir dönme hareketi vardır. Bu nedenle bu noktadaki x ve y yönündeki hareketin önlenmesi için iki adet bağ kuvveti uygulanmalıdır. L3 uzvunun boyu sıfır yapılarak çözüm yapılabilir.



Şekil 4.10. Kol kızak mekanizmasının elde edilmesi

#### 4.3.4. Salınan blok mekanizmasının elde edilmesi

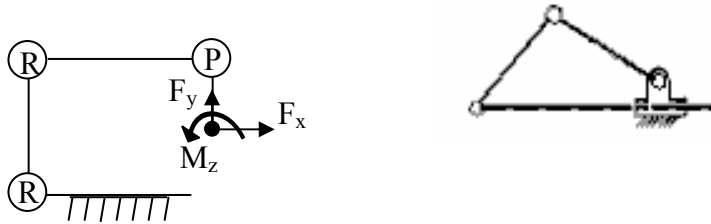
Şekilde görülen mekanizmasının oluşturulabilmesi için öncelikle mevcudiyet faktörleri  $MF_1=0$ ,  $MF_2=1$ ,  $MF_3=0$ ,  $MF_4=1$ ,  $MF_5=1$ ,  $MF_6=0$  şeklinde düzenlenmelidir. Dördüncü elemanın uç noktasının toprağa bağlandığı kısımda sadece bir dönme hareketi vardır. Bu nedenle bu noktadaki x ve y yönündeki hareketin önlenmesi için iki adet bağ kuvveti uygulanmalıdır. L4 uzvunun boyunun sıfır alınmasıyla çözümlenebilir.



Şekil 4.11. Salınan blok mekanizmasının elde edilmesi

#### 4.3.5. Krank biyel mekanizması (2. tip) elde edilmesi

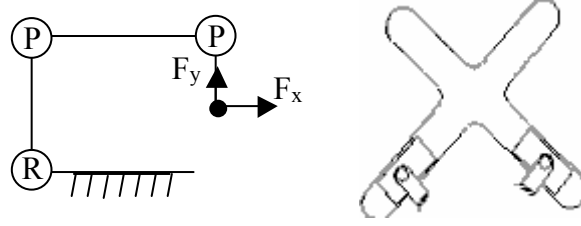
Şekilde görülen mekanizmasının oluşturulabilmesi için öncelikle mevcudiyet faktörleri,  $MF1=0$ ,  $MF2=1$ ,  $MF3=0$ ,  $MF4=1$ ,  $MF5=0$ ,  $MF6=1$  şeklinde düzenlenmelidir. Dördüncü elemanın uç noktasının toprağa bağlandığı kısımda sadece bir kayma hareketi vardır. Bu nedenle bu noktadaki y yönündeki hareketin ve bu noktadaki dönmenin önlenmesi için bir adet bağ kuvveti ve bir adet bağ momenti uygulanmalıdır.



Şekil 4.12. Krank biyel mekanizması (2. tip) elde edilmesi

#### 4.3.6. Oldham kaplini mekanizması elde edilmesi

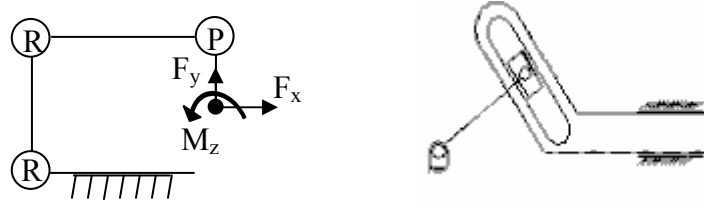
Şekilde görülen mekanizmasının oluşturulabilmesi için öncelikle mevcudiyet faktörleri  $MF1=0$ ,  $MF2=1$ ,  $MF3=1$ ,  $MF4=0$ ,  $MF5=1$ ,  $MF6=0$  şeklinde düzenlenmelidir. Dördüncü elemanın uç noktasının toprağa bağlandığı kısımda sadece bir dönme hareketi vardır. Bu nedenle bu noktadaki x ve y yönündeki hareketin önlenmesi için iki adet bağ kuvveti uygulanmalıdır. Çözümleme için e L2 ve L4 uzvunun boyu sıfır alınabilir.



Şekil 4.13. Oldham kaplini mekanizması elde edilmesi

#### 4.3.7. İskoç boyunduruğu mekanizması elde edilmesi

Şekilde görülen mekanizmasının oluşturulabilmesi için öncelikle mevcudiyet faktörleri  $MF1=0$ ,  $MF2=1$ ,  $MF3=0$ ,  $MF4=1$ ,  $MF5=1$ ,  $MF6=0$  şeklinde düzenlenmelidir. Dördüncü elemanın uç noktasının toprağa bağlandığı kısımda sadece bir kayma hareketi vardır. Bu nedenle bu noktadaki  $y$  yönündeki hareketin ve bu noktadaki dönmenin önlenmesi için bir adet bağ kuvveti ve bir adet bağ momenti uygulanmalıdır. Ayrıca çözümlemede  $L3$  uzvunun boyu sıfır alınabilir.



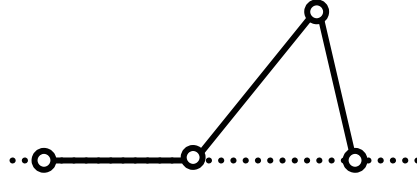
Şekil 4.14. İskoç boyunduruğu mekanizması elde edilmesi

#### 4.3.8. Çift kızak mekanizması elde edilmesi

Şekilde görülen mekanizmasının oluşturulabilmesi için öncelikle mevcudiyet faktörleri  $MF1=1$ ,  $MF2=0$ ,  $MF3=0$ ,  $MF4=1$ ,  $MF5=0$ ,  $MF6=1$  şeklinde düzenlenmelidir. Dördüncü elemanın uç noktasının toprağa bağlandığı kısımda sadece kayma hareketi vardır. Bu nedenle bu noktadaki  $y$  yönündeki hareketin ve bu noktadaki dönmenin önlenmesi için bir adet bağ kuvveti ve bir adet bağ momenti uygulanmalıdır. Ayrıca çözümlemede  $L2$  ve  $L4$  uzuvlarının boyları sıfır alınmalıdır.







Şekil 4.17. Dört çubuk mekanizması

Şekil 4.17 'de görülen mekanizmaya ait sabit parametreler şu şekildedir:

$$g = 9.81 \text{ kg.m/s}^2, \pi = 3.14159265, m_2 = 1.0 \text{ kg}, m_3 = 1.0 \text{ kg}, m_4 = 1.0 \text{ kg}$$

$$L_1 = 0.0 \text{ m}, L_2 = 1.0 \text{ m}, L_3 = 2.5 \text{ m}, L_4 = 2.0 \text{ m}, P_2 = 1.0 \text{ m}, q_2 = 0.0 \text{ m}$$

$$p_3 = 2.5 \text{ m}, q_3 = 0.0 \text{ m}, p_4 = 2.0 \text{ m}, q_4 = 0.0 \text{ m}, \theta_1 = 0.0 \cdot \pi$$

$$I_2 = 1.0 \text{ kg.m}^2, I_3 = 1.0 \text{ kg.m}^2, I_4 = 1.0 \text{ kg.m}^2$$

Hareketin başlangıç şartları için aşağıdaki değerler yazılmalıdır:

$$y(1) = 0.0 \text{ (B1 değişkeninin konumu)}$$

$$y(2) = 0.0 \text{ (B1 değişkeninin hızı)}$$

$$y(3) = 0.0 \text{ ( 2 değişkeninin konumu)}$$

$$y(4) = 0.0 \text{ ( 2 değişkeninin hızı)}$$

$$y(5) = 0.0 \text{ (B2 değişkeninin konumu)}$$

$$y(6) = 0.0 \text{ (B2 değişkeninin hızı)}$$

$$y(7) = 51.31781 \text{ ( 3 değişkeninin konumu)}$$

$$y(8) = 0.0 \text{ ( 3 değişkeninin hızı)}$$

$$y(9) = 0.0 \text{ (B3 değişkeninin konumu)}$$

$$y(10) = 0.0 \text{ (B3 değişkeninin hızı)}$$

$$y(11) = -77.3643 \text{ ( 4 değişkeninin konumu)}$$

$$y(12) = 0.0 \text{ ( 4 değişkeninin hızı)}$$

X ve y yönünde uygulanan bağ kuvvetleri aşağıdaki gibidir:

$$XSET = 3.0$$

$$YSET = 0.0$$

$$kats = 10\ 000\ 000$$

$$FX = -(X4K - XSET) \cdot kats$$

$$FY = -(Y4K - YSET) \cdot kats$$

$$FB1 = 0.0$$

$$FB2 = 0.0$$

$$FB3 = 0.0$$

$$tork2 = -FX \cdot (L2 \cdot \sin(y(3)) + y(5) \cdot \cos(y(3)) + L3 \cdot \sin(y(7)) + y(9) \cdot \cos(y(7)) + p4 \cdot \sin(y(11))) + FY \cdot (L2 \cdot \cos(y(3)) - y(5) \cdot \sin(y(3)) + L3 \cdot \cos(y(7)) - y(9) \cdot \sin(y(7)) + p4 \cdot \cos(y(11)))$$

$$tork3 = -FX \cdot (L3 \cdot \sin(y(7)) + y(9) \cdot \cos(y(7)) + p4 \cdot \sin(y(11))) + FY \cdot (L3 \cdot \cos(y(7)) - y(9) \cdot \sin(y(7)) + p4 \cdot \cos(y(11)))$$

$$tork4 = -FX \cdot (p4 \cdot \sin(y(11))) + FY \cdot (p4 \cdot \cos(y(11)))$$

#### 4.3.10.2. Dört elemanlı RRRP eklemli (krank-biyel mekanizması) Grübler mekanizmasının oluşturulması

Şekil 4.18'de görülen mekanizmayı elde edebilmek için açık zincir üzerine uygulanması gereken mevcudiyet faktörleri; MF1 = 0 (kayar eklem sanal), MF2 = 1 (döner eklem aktif), MF3 = 0 (kayar eklem sanal), MF4 = 1 (döner eklem aktif), MF5 = 0 (kayar eklem sanal), MF6 = 1 (döner eklem aktif) şeklinde uygulanır. Mekanizmaya ait sabit parametreler ise şu şekildedir.

$$g = 9.81 \text{ kg.m/s}^2, \pi = 3.14159265, m2 = 1.0 \text{ kg}, m3 = 1.0 \text{ kg}, m4 = 1.0 \text{ kg}$$

$$L1 = 0.0 \text{ m}, L2 = 1.0 \text{ m}, L3 = 4.0 \text{ m}, L4 = 0.0 \text{ m}$$

$$P2 = 1.0 \text{ m}, q2 = 0.0 \text{ m}, p3 = 4.0 \text{ m}, q3 = 0.0 \text{ m}, p4 = 0.0 \text{ m}, q4 = 0.0 \text{ m}$$

$$\theta1 = 0.0 \cdot \pi, I2 = 1.0 \text{ kg.m}^2, I3 = 1.0 \text{ kg.m}^2, I = 1.0 \text{ kg.m}^2$$



Şekil 4.18. Krank biyel mekanizması

Hareketin başlangıç şartları için aşağıdaki değerler yazılmalıdır:

$$y(1) = 0.0 \text{ (B1 değişkeninin konumu)}$$

$$y(2) = 0.0 \text{ (B1 değişkeninin hızı)}$$

$$y(3) = 90.0^0 \text{ ( 2 değişkeninin konumu)}$$

$$\begin{aligned}
y(4) &= 0.0 \text{ ( 2 değişkeninin hızı)} \\
y(5) &= 0.0 \text{ (B2 değişkeninin konumu)} \\
y(6) &= 0.0 \text{ (B2 değişkeninin hızı)} \\
y(7) &= -14.47751 \text{ ( 3 değişkeninin konumu)} \\
y(8) &= 0.0 \text{ ( 3 değişkeninin hızı)} \\
y(9) &= 0.0 \text{ (B3 değişkeninin konumu)} \\
y(10) &= 0.0 \text{ (B3 değişkeninin hızı)} \\
y(11) &= 0.0 \text{ ( 4 değişkeninin konumu)} \\
y(12) &= 0.0 \text{ ( 4 değişkeninin hızı)}
\end{aligned}$$

Şekil 4.18’de görülen krank biyel mekanizmasının oluşturulabilmesi için y eksenini boyunca olası hareket ve bu noktadaki dönme tamamen önlenmeli x yönündeki hareket ise serbest bırakılarak bu ekseninde kayma hareketinin oluşması sağlanmıştır. Bu mekanizmayı oluşturabilmek için açık zincirdeki üçüncü hareketli elemanın boyu sıfır alınmıştır. Açık zincir üzerine uygulanması gereken bağ kuvvet ve momentleri aşağıda gösterilmiştir:

$$XSET = 3.87298 \text{ m, } YSET = 0.0 \text{ m, } AÇI.SET=0.0$$

$$\text{katsayı} = 10\,000\,000$$

$$FX = -(X4K - XSET) \cdot \text{katsayı}$$

$$FY = 0.0$$

$$TORKZ = -(y(11) - AÇI.SET) \cdot \text{katsayı}$$

$$FB1 = 0.0, FB2 = 0.0, FB3 = 0.0$$

$$\begin{aligned}
\text{tork2} &= -FX \cdot (L2 \cdot \sin(y(3)) + y(5) \cdot \cos(y(3)) + L3 \cdot \sin(y(7)) + y(9) \cdot \\
&\cos(y(7)) + p4 \cdot \sin(y(11))) + FY \cdot (L2 \cdot \cos(y(3)) - y(5) \cdot \sin(y(3)) + \\
&L3 \cdot \cos(y(7)) - y(9) \cdot \sin(y(7)) + p4 \cdot \cos(y(11)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{tork3} &= -FX \cdot (L3 \cdot \sin(y(7)) + y(9) \cdot \cos(y(7)) + p4 \cdot \sin(y(11))) + FY \cdot \\
&(L3 \cdot \cos(y(7)) - y(9) \cdot \sin(y(7)) + p4 \cdot \cos(y(11)))
\end{aligned}$$

$$\text{tork4} = -FX \cdot (p4 \cdot \sin(y(11))) + FY \cdot (p4 \cdot \cos(y(11))) + TORKZ$$

## 5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Hata fonksiyonları denklemlerinin çözümü herhangi bir tam denklem çözümünden daha basittir. Bu denklemlerin integrasyonunun hesaba dayalı bir şekilde sayısal olarak çözümü zor değildir, fakat belirsiz hataların varlığından dolayı, bir takım tam denklemlerin integrasyonundan daha uzun sürebilir.  $\beta$  terimi büyük bir değer seçildiğinde;  $\beta$  değeri sonsuza doğru giderken hata fonksiyonu sıfıra doğru ilerler ve bu çözüm yaklaşımı hareketin tam denklemlerindeki çözümlere denk olmaktadır.

Ortaya çıkan zorluklardan biri; hata fonksiyonları üzerinde yüksek titreşim genliği ve yüksek frekansın ortaya çıkması, düzeltici yöndeki sonsuz büyüklükteki sınır kuvvetlerinin kontrol dışına çıkması gibi durumların kontrolü altında çözümdür. Herhangi bir titreşim gibi durumları önlemek için  $\beta$  ifadesinin bir kapalı döngü kontrol sisteminde uygun bir değerde tutulmalıdır. Buradaki hatanın büyüklüğündeki artış çözüm metodunu tolere edilebilir limitlerden uzaklaştırma eğilimindedir.  $\beta$  değerinin yüksek ve titreşimleri elimine edebilecek bir değerde tutulması için sınırlı kuvvet bileşeni denklemine bir sönümleme bileşeni eklenebilir. Bu sönümleme terimi sistemin dinamiğini etkilemez, ama yalnız bir kapalı döngü kontrol sisteminde türev kazancına benzer.

Kullanılacak tekniğin seçimindeki önemli bir bakış açısı da hesaplama zamanlarının kıyas edilebilmesi veya diğer sözlerle işlemin bilgisayarda yapılması esnasında bilgisayarın CPU işlem zamanlarının değerlendirilmesidir. Denklem sayısı arttıkça nümerik integrasyon için gereken hesaplama zamanı da artış göstermektedir.

Yaklaşık modellemede kullanılan yaklaşık dinamik çözüm metodu daha farklı mekanizmalar için kullanılabilir. Bu tez çalışmasında değinilmeyen uzaysal mekanizmaların yaklaşık modellenmesi gibi çalışmalarda bu metodun uygulanması yapılabilir.

## KAYNAKLAR

- ALICI, G., and BAYSEÇ, S., 1993. Two dimensional step guidance of a dynamic load avoiding residual vibrations by a point positioning robot manipulator. Proceeding of 1993 Summer Computer Simulation Conference, Boston, Massachusetts, USA pp.425-428.
- BAYSEÇ, S., 1983. Simulation of the dynamics of hydraulically actuated planar manipulators. Ph.D. Thesis (CNAALiverpool Polytechnic, UK).
- BAYSEÇ, S., and ALICI, G., 1996. Approximate Solution Methods for the Dynamic Equation of Planar Robot Manipulators. University of Gaziantep, Mechanical Engineering Department, Gaziantep-TURKEY.
- BAYSEÇ, S., and KAPUCU, S., 1996. Comparison of Simulation Effectiveness of Motion Equation Generation Methods for Articulated Rigid Body Systems. University of Gaziantep, Mechanical Engineering Department, Gaziantep-TURKEY.
- BAYSEÇ, S., and JONES, J.R., 1997. A generalised approach for the modelling of articulated open chain planar linkages. *Robotica* 15:523-531.
- JONES, J.R., 1997. A comparison of the dynamic performance of tuned and non-tuned multiharmonic cams. 2nd IFToMM Symposium on Linkages and Computer Aided Design Methods, Bucharest, Romania 3(2):553-564.
- SÖYLEMEZ, E., 2000. Mekanizma Tekniği. Prestij Ajans Matbaacılık Basım Yayın Sanayii ve Ticaret Ltd., Ankara, 434s.
- WALKER, M.W., and ORION, D.E., 1982. Efficient dynamic computer simulation of robotic mechanisms. *ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 104:205-211.

## ÖZGEÇMİŞ

01.01.1981 yılında Şanlıurfa'nın Birecik ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini aynı yerde tamamladı. Aynı yıl girmiş olduğu sınavla, 1998-1999 Eğitim Öğretim yılında Harran Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümüne kayıt yaptırdı. 2002 - Temmuz döneminde Harran Üniversitesi'nden Makine Mühendisi olarak mezun oldu. 2002 – 2003 Eğitim Öğretim yılı Güz Döneminde Makine Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans eğitimine başladı. 7 Ekim 2002 tarihinde Harran Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümünde 33. madde kapsamında Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı

## EKLER

Aşağıda, Runge Kutta yöntemini esas alarak; verilen diferansiyel denklemlerin simultane olarak çözümünde kullanılan q basic programlama dilinde yazılmış DRKGS (IBM firmasınınca geliştirilmiştir) programı yer almakta olup bu programa eklenen kodlarla; modellenen sisteme ait hareket özelliklerinin elde edildiği ve benzetiminin yapıldığı programlar üretilmiştir.

```
SUB drkgs (prmt(), y(), dery(), ndim, ihlf, aux()) STATIC
FOR i = 1 TO ndim
aux(8, i) = 6.666666666666667D-02 * dery(i)
NEXT i
x = prmt(1)
xend = prmt(2)
h = prmt(3)
prmt(5) = 0
CALL fct(x, y(), dery())
REM error test
IF (h * (xend - x)) < 0 THEN 38
IF (h * (xend - x)) = 0 THEN 37
IF (h * (xend - x)) > 0 THEN 2
REM preparations for runge-kutta method
2 a(1) = .5
a(2) = .292893218813453#
a(3) = 1.70710678118655#
a(4) = .1666666666666666#
b(1) = 2
b(2) = 1
b(3) = 1
b(4) = 2
c(1) = .5
c(2) = .292893218813453#
c(3) = 1.70710678118655#
c(4) = .5
REM preperation of first runge-kutta step
FOR i = 1 TO ndim
aux(1, i) = y(i)
aux(2, i) = dery(i)
aux(3, i) = 0
aux(6, i) = 0
NEXT i
irec = 0
```



```

h = h + h
ihlf = -1
istep = 0
iend = 0
REM start of a runge -kutta step
4 IF ((x + h - xend) * h) < 0 THEN 7
IF ((x + h - xend) * h) = 0 THEN 6
IF ((x + h - xend) * h) > 0 THEN 5
5 h = xend - x
6 iend = 1
REM recording of initial values of this step
7 CALL outp(x, y(), dery(), irec, ndim, prmt())
IF (prmt(5)) <> 0 THEN 40
IF (prmt(5)) = 0 THEN 8
8 itest = 0
9 istep = istep + 1
REM start of innermost runge-kutta loop
j = 1
10 aj = a(j)
bj = b(j)
cj = c(j)
FOR i = 1 TO ndim
IF (INKEY$ = CHR$(27)) THEN 40
r1 = h * dery(i)
r2 = aj * (r1 - bj * aux(6, i))
y(i) = y(i) + r2
r2 = r2 + r2 + r2
11 aux(6, i) = aux(6, i) + r2 - cj * r1
NEXT i
IF (j - 4) < 0 THEN 12
IF (j - 4) >= 0 THEN 15
12 j = j + 1
IF (j - 3) <> 0 THEN 13
IF (j - 3) = 0 THEN 14
13 x = x + .5 * h
14 CALL fct(x, y(), dery())
GOTO 10
REM end of innermost runge-kutta loop
REM test of accuracy
IF (itest) <= 0 THEN 16
15 IF (itest) > 0 THEN 20
REM in case itest=0 there is no possibility for testing of accuracy
16 FOR i = 1 TO ndim

```

```

17 aux(4, i) = y(i)
NEXT i
itest = 1
istep = istep + istep - 2
18 ihlf = ihlf + 1
x = x - h
h = .5 * h
FOR i = 1 TO ndim
y(i) = aux(1, i)
dery(i) = aux(2, i)
aux(6, i) = aux(3, i)
NEXT i
GOTO 9
REM in case itest=1 testing of accuracy is possible
20 imod = istep / 2
IF (istep - imod - imod) <> 0 THEN 21
IF (istep - imod - imod) = 0 THEN 23
21 CALL fct(x, y(), dery())
FOR i = 1 TO ndim
aux(5, i) = y(i)
22 aux(7, i) = dery(i)
NEXT i
GOTO 9
REM computation of test value delt
23 delt = 0
FOR i = 1 TO ndim
24 delt = delt + aux(8, i) * ABS(aux(4, i) - y(i))
NEXT i
IF (delt - prmt(4)) <= 0 THEN 28
IF (delt - prmt(4)) > 0 THEN 25
REM error is too great
IF (ihlf - 10) < 0 THEN 26
25 IF (ihlf - 10) >= 0 THEN 36
26 FOR i = 1 TO ndim
27 aux(4, i) = aux(5, i)
NEXT i
istep = istep + istep - 4
x = x - h
iend = 0
GOTO 18
REM result values are good
28 CALL fct(x, y(), dery())
FOR i = 1 TO ndim

```

```

aux(1, i) = y(i)
aux(2, i) = dery(i)
aux(3, i) = aux(6, i)
y(i) = aux(5, i)
29 dery(i) = aux(7, i)
NEXT i
CALL outp(x - h, y(), dery(), ihlf, ndim, prmt())
IF (prmt(5)) <> 0 THEN 40
IF (prmt(5)) = 0 THEN 30
30 FOR i = 1 TO ndim
y(i) = aux(1, i)
31 dery(i) = aux(2, i)
NEXT i
irec = ihlf
IF iend <= 0 THEN 32
IF iend > 0 THEN 39
REM increment gets doubled
32 ihlf = ihlf - 1
istep = istep / 2
h = h + h
IF ihlf >= 0 THEN 33
IF ihlf < 0 THEN 4
33 imod = istep / 2
IF (istep - imod - imod) <> 0 THEN 4
IF (istep - imod - imod) = 0 THEN 34
IF (delt - .02 * prmt(4)) <= 0 THEN 35
34 IF (delt - .02 * prmt(4)) > 0 THEN 4
35 ihlf = ihlf - 1
istep = istep / 2
h = h + h
GOTO 4
REM returns to calling program
36 ihlf = 11
CALL fct(x, y(), dery())
GOTO 39
37 ihlf = 12
GOTO 39
38 ihlf = 13
39 CALL outp(x, y(), dery(), ihlf, ndim, prmt())
40 END SUB

```

## ÖZET

Açık zincirli kinematik zincirlerin ve mekanizmaların hareket denklemlerinin türetilerek matematik modellerinin oluşturulması tasarımcıların kontrol ve hareket profili belirlemede fikirlerini üzerinde uyguladıkları önemli bir araçtır. Matematiksel model sistemin karakteristiklerini içerip dinamik davranışını belirleyicidir. Birçok uygulamada kontrol donanım ve yazılımının işlem hızı sürücü motorlarından çok daha yüksek olduğundan bunların modellenmesi genellikle aranmaz. Bu çalışmada açık kinematik zincirlerin hareket denklemlerinin elde edilmesi konusunda Newton-Euler, Lagrange ve Hamilton metotları ile gradient metotları içerisinde yer alan yaklaşık dinamik çözüm metodu incelenmiştir. Bu tez çalışmasında döner ve prizmatik eklemlerli robot manipülatörlerinin mümkün olan topolojileri incelenmiştir. Kolaylık olsun diye sadece düzlemsel sistemler göz önünde bulundurulmuştur. Sistemin fiziksel modelinde her bir eleman çifti arasında biri döner ve diğeri prizmatik olmak üzere iki serbestlik dereceli olarak birbirine bağlanmış toplam altı serbestlik dereceli sistem varsayılmıştır. Elemanlar arasındaki eklem çiftlerinden biri gerçek diğeri sanaldır. Öncelikle 3 adet hareketli elemanın birbirine peş peşe birisi döner, diğeri kayar olmak üzere iki adet eklem ile bağlanmasından oluşan bir açık zincir türetilmekte ve uç nokta uygun kuvvetler ile sabit bir nokta etrafında dönecek yada bir kızak boyunca öteleme yapacak şekilde kontrol edilerek bu zincirden kapalı mekanizma zincirleri elde edilmektedir. Elde edilen mekanizmalar 4 elemanlı Gröbler tipi mekanizmalardır.

## SUMMARY

Mathematical models of open kinematic chains and mechanisms provide the designer with the most valuable resource on which ideas about control and motion design can be tested or performance of a non existing sketch can be before a prototype is manufactured. The mathematical model of the system includes the characteristics of system and is definitive of their dynamic behaviour. In most applications, the response of the controller is much faster than the drives and hence its model is generally not required. Newton-Euler, Lagrange and Hamilton methods and a formulation based on gradient methods are examined and tested for the generation of motion equations of the system. In this MSc Thesis a model to cover all possible topologies of robot manipulators composed of prismatic and revolute joints is presented. For simplicity, only planar systems are considered. The physical model assumes three moving rigid links in articulation with one revolute and one prismatic joint between each link pair, forming a six degrees of freedom open chain linkage. Among each joint pair, one is real and other fictitious. This MSc. Thesis presents a technique which yields approximate dynamics equations of an open chain composed of 3 moving links connected to each other by a pair of joints successively, one revolute and the other prismatic. The tip of the open chain is constrained to do some certain motions like rotation about a fixed point or translation along a slideway. This converts the open chain into a closed loop to represent mechanisms. The mechanisms obtainable are 4 link Gröbler Type mechanisms.