



**T.C.  
HARRAN ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**SİMETRİK ARALIKTA SZASZ-KANTOROVICH OPERATÖRLERİNİN  
YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ**

**Rumeysa YILMAZ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ŞANLIURFA  
2026**



**T.C.  
HARRAN ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**SİMETRİK ARALIKTA SZASZ-KANTOROVICH OPERATÖRLERİNİN  
YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ**

**Rumeysa YILMAZ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN: Prof. Dr. Aydın İZGİ**

**ŞANLIURFA  
2026**

## **TEŞEKKÜR**

Çalışmalarımız boyunca desteklerini esirgemeyen,engin bilgileriyle beni bilgilendiren çok kıymetli ve saygıdeğer hocam Prof. Dr. Aydın İzgi'ye teşekkür ederim. Ayrıca, tez jürisinde bulunan ve tezin son halini almasında önemli katkıları bulunan Prof. Dr. Kudusi Kayaduman, Dr. Öğr. Üyesi Döne Karahan Dinsever hocalarıma da teşekkürü borç bilirim. Son olarak bana her koşulda ve her durumda destek olan aileme çok teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

|                                                      |     |
|------------------------------------------------------|-----|
| ÖZET .....                                           | i   |
| ABSTRACT .....                                       | ii  |
| ÇİZELGELER DİZİNİ .....                              | iii |
| ŞEKİLLER DİZİNİ .....                                | iv  |
| 1. GİRİŞ .....                                       | 1   |
| 1.1. Tanım .....                                     | 3   |
| 1.2. Temel Kavramlar .....                           | 3   |
| 1.2.1. Operatör .....                                | 3   |
| 1.2.2. Lineer Operatör .....                         | 4   |
| 1.2.3. Pozitif Operatör .....                        | 4   |
| 1.2.4. Fonksiyon Sınıfları .....                     | 4   |
| 1.2.5. Norm .....                                    | 5   |
| 1.2.6. Düzgün Yakınsaklık .....                      | 5   |
| 1.2.7. Korovkin Teoremi .....                        | 5   |
| 1.2.8. Süreklilik Modülü .....                       | 8   |
| 1.2.9. Lipschitz .....                               | 9   |
| 1.2.10. Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky Eşitsizliği ..... | 9   |
| 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR .....                           | 11  |
| 3. GEREÇ ve YÖNTEM .....                             | 19  |
| 4. BULGULAR .....                                    | 20  |
| 5. TARTIŞMA .....                                    | 41  |
| 6. SONUÇLAR .....                                    | 42  |
| 7. ÖNERİLER .....                                    | 43  |
| KAYNAKLAR .....                                      | 44  |
| ÖZ GEÇMİŞ .....                                      | 47  |

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

#### SİMETRİK ARALIKTA SZASZ-KANTOROVICH OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Rumeysa YILMAZ

HARRAN ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Aydın İZGİ

Yıl: 2026, Sayfa: 47

Kullanışı bakımından zor olan fonksiyonları, daha rahat işlem yapabileceğimiz fonksiyonlara dönüştürmek yaklaşım teorisinin ilgi alanıdır. Genelde esas fonksiyon uzayının alt uzayından bu fonksiyonlar alınır ve bu fonksiyonlar, operatörler kullanılarak, daha çok türevlenebilme, integrallenebilme gibi özelliklere sahip fonksiyonlara dönüştürülür. Bunu düşünerek Weierstrass 1885 yılında kapalı ve sınırlı (veya kompakt) bir aralıkta sürekli fonksiyona, aynı aralıkta yakınsayan polinomun var olacağını iddia etmiş ve kanıtlamıştır. Birçok matematikçi bu polinomun varlığını düşünerek toplam şeklinde polinomlar dizisi tanımlamıştır. Burada araştıracağımız , Otto-Szasz tarafından  $[0, \infty)$  aralığında üretilen Szasz Operatörü olarak bilinen bir polinomlar dizisidir. Bu çalışmamızda  $(-\infty, \infty)$  'a genişleyen  $[-b_s, b_s]$  aralıklarında tanımlı operatör ile yaklaşım ve yaklaşım özelliklerini inceleyeceğiz.

**ANAHTAR KELİMELE:** Yaklaşım hızı, Szasz- Kantorovich Operatörleri, Korovkin Teoremi, Korovkin Yaklaşım Şartları, Lineer pozitif operatörler

## ABSTRACT

### MASTER'S THESIS

## PROPERTIES APPROXIMATION SZASZ-KANTOROVICH OPERATORS ON THE SYMMETRICAL INTERVALS

Rumeysa YILMAZ

HARRAN UNIVERSITY  
GRADUATE SCHOOL  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Thesis Advisor: Prof. Aydın İZGİ

Year: 2026, Page: 47

Transforming functions that are difficult to work with into more manageable functions is the primary focus of approximation theory. Generally, these functions are chosen from a subspace of the main function space and are transformed using operators into functions with enhanced properties, such as differentiability and integrability. With this in mind, Weierstrass claimed and proved in 1885 that for any continuous function on a closed and bounded (or compact) interval, there exists a polynomial that converges to it on the same interval. Considering the existence of such a polynomial, many mathematicians defined sequences of polynomials in summation form. The subject of our investigation here is a sequence of polynomials known as the Szasz Operator, which was introduced by Otto-Szasz on the interval  $[0, \infty)$ . In this study, we will examine the approximation and approximation properties of the operator defined on the intervals  $[-b_s, b_s]$  extending to  $(-\infty, \infty)$ .

**KEYWORDS:** Rate Of Approximation, Szasz-Kantorovich Operators, Korovkin Theorem, Conditions Of Korovkin Approximation, Linear Positive Operators

## ÇİZELGELER DİZİNİ

|              |                 |    |
|--------------|-----------------|----|
| Çizelge 4.1. | Tablo . . . . . | 40 |
|--------------|-----------------|----|

## ŞEKİLLER DİZİNİ

|            |                                                                                                                                                                                                                              |    |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 2.1. | Normal EKG dalga formu ile $n = 4$ ile Bézier-Bernstein eğrileri modeli kullanılarak yapılan EKG simülasyonu arasındaki karşılaştırma . . . . .                                                                              | 14 |
| Şekil 2.2. | Kontrol noktalarının konumu . . . . .                                                                                                                                                                                        | 14 |
| Şekil 2.3. | Normal EKG dalga formu ile Bézier-Bernstein modeli kullanılarak $n = 50$ ile yapılan EKG simülasyonu arasındaki karşılaştırma . . . . .                                                                                      | 15 |
| Şekil 2.4. | Manipülâtörün şematik görünümü . . . . .                                                                                                                                                                                     | 16 |
| Şekil 2.5. | Önerilen kontrolörün blok diyagramı . . . . .                                                                                                                                                                                | 16 |
| Şekil 2.6. | Robotik Manipülâtör iç yapısı . . . . .                                                                                                                                                                                      | 17 |
| Şekil 2.7. | Beynin beyaz madde (beynin içinde), gri madde (beyin korteksinin yüzeyini çevreleyen) ve beyin omurilik sıvısı (beyin yapılarının çoğunu kaplayan ve merkezi sinir sisteminin içinde bulunan) açısından nöroanatomi. . . . . | 17 |
| Şekil 4.1. | Bazı değerler için grafik . . . . .                                                                                                                                                                                          | 39 |

## 1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi basit olmayan fonksiyonlarda daha basit veya daha işlenebilir fonksiyonlarla yaklaşık olarak ifade etme yöntemlerini inceleyen bir daldır. Temel amacı genellikle karmaşık olan bir fonksiyonun yerine, onu belirli hata sınırı içinde yaklaşık olarak temsil eden daha basit bir fonksiyon bulmaktır. Bunlar polinom, trigonometrik seri gibi fonksiyonlar olabilmektedir.

Bu teoremin kökleri Antik Yunan'a dayanmakla beraber modern yaklaşım teorisi özellikle 18. ve 19. yüzyılda gelişmeye başlamıştır. Bu gelişmelerin en önemlileri 1885 yılında Weierstrass tarafından ifade edilmiştir. Weierstrass 'Her sürekli fonksiyonun kompakt bir aralıkta polinomlarla yaklaşık olarak ifade edilebileceğini' göstermiştir.

Weierstrass'ın bu teoreminin ispatı üzerine birçok matematikçi bunun üzerine çalışmıştır. Bunlardan Bernstein 1912 yılında Bernstein operatörleri ile bu teoremin daha anlaşılır bir ispatını yapmıştır.

$$B_n(h; \eta) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \eta^k (1 - \eta)^{n-k} h\left(\frac{k}{n}\right) \quad , 0 \leq \eta \leq 1 \quad , h \in C[0, 1] \quad (1)$$

şeklindedir. (Bernstein, 1912)

Bernstein polinomlarının pek çok genelleme ve modifikasyonu yapılmıştır.

Bernstein operatörlerin özelliklerinden biri, yakınsama fonksiyonlarının tekilliklere veya süreksizliklere sahip olmasıdır. Bunu gidermek için Kantorovich, tekilliklere veya süreksizliklere sahip olabilen fonksiyonları içeren Lebesgue integrallenebilir fonksiyon uzayı için aşağıdaki Bernstein-Kantorovich operatörlerini tanıtmıştır,

$$K_n(f; x) = (n+1) \sum_{k=0}^n b_{n,k}(x) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t) dt \quad \forall x \in [0, 1] \quad n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

$$(b_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k})$$

şeklindedir. (L.V. Kantorovich ,1930)

Chlodowsky (1937) tarafından ilk defa,  $[0, \infty)$  aralığı üzerinde Bernstein polinomları

modifiye edilmiş ve bu polinomların yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Bernstein Chlodowsky polinomlar dizisi olarak adlandırılan bu polinomlar dizisi  $b_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

şartlarını sağlayan monoton artan reel terimli pozitif sayı dizisi olmak üzere

$$C_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}b_n\right) c_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} \quad 0 \leq x \leq b_n \quad (3)$$

olarak tanımlıdır. (Chlodowsky, 1937)

1950’de Szász operatörü tanımına şöyledir.. Bu Bernstein operatörlerinin pozitif yarı eksene taşınmış halidir. Bernstein polinomlarından faydalanarak O. Szasz tarafından Szász operatörü,

$$S_n(f, x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (4)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (O. Szasz ,1950)

Szász-Kantorovich operatörü ise Szász operatörünün ’integral’ ile bir modifikasyonu-  
dur. Totik tarafından 1983 yılında şu şekilde tanımlanmıştır:

Szász-Kantorovich operatörü

$$K_n(f, x) = ne^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \quad x \in [0, \infty) \quad (5)$$

(Totik, 1983)

Simetrik aralıkta ilk çalışma (A.Çilo, 2012) yılında ve bununla ilgili kongre sunumu (Çilo vd. , 2012) tarafından yapılmıştır. Daha sonra bu operatörle ilgili bazı makaleler ve tezler yapılmıştır. Bunlardan bazıları şunlardır:

\* [-1, 1] aralığında Bernstein polinomlarının yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızı

(A. Çilo, 2012)

\* [-1, 1] aralığında Bernstein-Schurer operatörlerinin yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızı (G. Keleş, 2018)

\* Simetrik Aralık Üzerindeki Bernstein-Kantorovich Polinomlarının Bir Modifikasyonu (N. Ayla Damar, 2025)

İki değişkenli aralıkta şunlar yapılmıştır:

\*Üçgensel Bölgede İki Değişkenli Bernstein Durrmeyer Tipindeki Operatörün Yaklaşımı (H. Çiçek, 2022)

\* $[-1, 1] \times [-1, 1]$  Bölgesi Üzerindeki İki Değişkenli Bernstein-Durrmeyer Polinomlarının Yaklaşımı (E. Acar, 2022)

\*Üçgensel bölgede iki değişkenli bernstein-kantorovich operatörü ile yaklaşım  
(R. Aslan, 2020)

Bu çalışmalardan esinlenerek Szasz-Kantorovich operatörü simetrik aralıkta ilk defa bu tezde ele alınmıştır.

Burada da (5) 'teki operatörün  $u \in [-b_s, \infty)$  aralığında tanımlanmış hali aşağıda verilmiştir.

### 1.1. Tanım

$$q_s^j(u) = e^{-su} \frac{(su)^j}{j!}, \quad R_s(h, u) = \frac{s}{b_s} \sum_{j=0}^{\infty} q_s^j \left( \frac{u}{b_s} + 1 \right) \int_{\frac{j-s}{s}b_s}^{\frac{j+1-s}{s}b_s} h(v) dv \quad (6)$$

Bu çalışmada verilen yukarıdaki operatörün bazı yaklaşım özellikleri ele alınacaktır.

### 1.2. Temel Kavramlar

Burada verilen bazı kavramları kullanarak tanım ve teoremleri vereceğiz. Bazı tanım ve teoremlerde, genel oldukları için kaynak belirtmeyeceğiz. Bunlar ileride işimize yarayabilecek olan Tanım ve Teoremlerdir.

#### 1.2.1. Operatör

##### Tanım

$V$  ve  $W$  reel değerli fonksiyon uzayı olmak üzere  $L : V \rightarrow W$  şeklinde tanımlanan dönüşümlere operatör denir. (Butzer and Nessel, 1971)

Bu operatör tanımından yararlanarak şimdi Lineer operatör tanımını verelim.

### 1.2.2. Lineer Operatör

#### Tanım

$V$  ve  $W$  reel değerli fonksiyon uzayları olsun.  $L : V \rightarrow W$  şeklindeki  $L$  operatörü  $\forall f, g \in V$  ve  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  olmak üzere;

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

eşitliğini sağlıyorsa  $L$  operatörüne lineer operatör denir (Korovkin, 1960). Operatör, Lineer Operatör tanımlarından yararlanarak Lineer Pozitif Operatör tanımını verelim.

### 1.2.3. Pozitif Operatör

#### Tanım

Bir  $f$  fonksiyonu ve bu fonksiyon üzerinde etkili bir  $L$  operatörü göz önüne alınsın. Eğer  $L$  operatörü, negatif olmayan her  $f$  fonksiyonunu ( $f \geq 0$ ) yine negatif olmayan bir fonksiyona dönüştürüyor yani

$$L(f) \geq 0$$

koşulunu sağlıyorsa, bu operatör pozitif operatör olarak adlandırılır (Korovkin, 1960). Bir operatörün hem lineerlik hem de pozitiflik şartlarını eş zamanlı olarak taşıması durumunda ise bu operatöre **lineer pozitif operatör** adı verilir.

### 1.2.4. Fonksiyon Sınıfları

#### Tanım

Bazı fonksiyon sınıfları aşağıda verilmiştir:

$M_f$  sayısı  $f$  fonksiyonuna bağımlı bir sabit olmak üzere;  $[a, b]$  aralığındaki tüm sınırlı fonksiyonların kümesi

$$B[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \in [a, b] \text{ için } |f(x)| \leq M_f\}$$

şeklinde tanımlanır. Aynı aralık üzerinde tanımlı ve sürekli olan fonksiyonların oluşturduğu sınıf

$$C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f, [a, b] \text{ 'de sürekli}\}$$

ile gösterilir. Hem süreklilik hem de sınırlılık şartını birlikte sağlayan fonksiyonların kümesi ise bu iki sınıfın arakesiti olup

$$C_B [a, b] = C[a, b] \cap B[a, b]$$

şeklindedir.

### 1.2.5. Norm

#### Tanım

Tanım bölgesi  $[a, b]$  kapalı aralığı olan, sürekli ve reel değerli tüm fonksiyonların meydana getirdiği küme  $C[a, b]$  fonksiyon uzayı olarak tanımlanır.

Bu uzay üzerinde bir  $f \in C[a, b]$  fonksiyonunun normu (büyüklüğü)

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

şeklindedir.

### 1.2.6. Düzgün Yakınsaklık

#### Tanım

Sınırlı ve kapalı bir  $[a, b]$  aralığında tanımlanmış bir  $h_n$  fonksiyon dizisi ile bir  $h$  limiti verilsin. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n - h\|_{C[a,b]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a,b]} |h_n(x) - h(x)| = 0$$

eşitliği gerçekleşiyorsa,  $h_n$  dizisinin  $h$  fonksiyonuna  $C[a, b]$  uzayında düzgün (üniform) yakınsaktır denir. Bu yakınsama türü

$$h_n(x) \Rightarrow h(x)$$

şeklinde gösterilmektedir (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

Korovkin Teoremi olarak adlandırılan Lineer Pozitif Operatörlerin düzgün yakınsama şartları ise aşağıdaki Teoremde verilmiştir.

### 1.2.7. Korovkin Teoremi

#### Teorem

$h \in C[a, b]$  olmak üzere, fonksiyon tüm reel ekseninde  $|h(x)| < M_h$  şartıyla sınırlı olsun. Eğer  $T_n : C[a, b] \rightarrow B[a, b]$  biçiminde tanımlı bir  $(T_n)$  lineer pozitif operatör dizisi, her  $x \in [a, b]$  elemanı için aşağıdaki üç şartı aynı anda gerçekliyorsas:

$$i) T_n(1; x) \Rightarrow 1$$

$$ii) T_n(t; x) \Rightarrow x$$

$$iii) T_n(t^2, x) \Rightarrow x^2$$

bu durumda  $[a, b]$  aralığı üzerinde  $T_n(h; x) \Rightarrow h(x)$  yakınsaması elde edilir (Korovkin, 1953).

### İspat

Kabul edelim ki  $h \in C[a, b]$  olsun. Ele alınan  $h$  fonksiyonunun süreklilik özelliğinden dolayı, keyfi seçilen her pozitif  $\epsilon$  sayısı için öyle bir  $\delta > 0$  sayısı bulunabilir ki;  $|t - x| \leq \delta$  eşitsizliğini sağlayan değerler için  $|h(t) - h(x)| < \epsilon$  kalır. Öte yandan,  $|t - x| > \delta$  durumu söz konusu olduğunda,  $|h(x)| < M_h$  sınırlılık koşulu ve üçgen eşitsizliği yardımıyla

$$|h(t) - h(x)| \leq |h(t)| + |h(x)| \leq 2M_h \quad (1.6)$$

bağıntısına ulaşılır. Benzer şekilde,  $|t - x| > \delta$  varsayımı altında  $\frac{|t-x|}{\delta} > 1$  olacağı açıktır. Buradan hareketle

$$\frac{(t-x)^2}{\delta^2} > 1 \quad (1.7)$$

eşitsizliği kolayca yazılabilir.

Sonuç olarak, (1.6) ve (1.7) ifadeleri bir arada değerlendirildiğinde,

$$|h(t) - h(x)| \leq 2M_h \leq 2M_h \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \quad |h(t) - h(x)| \leq 2M_h \leq 2M_h \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

şeklinde yazılabilir.

O halde;

$$|t - x| \leq \delta \text{ için } |h(t) - h(x)| < \epsilon$$

$|t - x| > \delta$  için  $|h(t) - h(x)| < 2M_h \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$  elde ettik. Dolayısıyla  $\forall t \in \mathbb{R}$  ve  $\forall x \in [a, b]$  için

$$|h(t) - h(x)| < \epsilon + 2M_h \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \quad (1.8)$$

şeklindedir.

Şimdi (i), (ii) ve (iii) koşullarını sağlayan  $(T_n)$  operatör dizisinin,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(h) - h\|_{C[a,b]} = 0$  olduğunu gösterelim. Lineerlikten :

$$\begin{aligned} |T_n(h(t); x) - h(x)| &= |T_n(h(t); x) - h(x) + T_n(h(x); x) - T_n(h(x); x)| \\ &= |T_n(h(t); x) - T_n(h(x); x) + T_n(h(x); x) - h(x)| \\ &= |T_n((h(t) - h(x)); x) + h(x)(T_n(1; x) - 1)| \end{aligned} \quad (7)$$

'dir. Burada üçgen eşitsizliğini kullanırsak:

$$|T_n(h(t); x) - h(x)| \leq |T_n((h(t) - h(x)); x)| + |h(x)| |T_n(1; x) - 1| \quad (8)$$

yazılabilir.  $T$  lineer pozitif bir operatör olduğundan  $T$  lineer pozitif bir operatör olduğu takdirde  $|T(h)| \leq T(|h|)$  eşitsizliği vardır. ' lemmasından

$$|T_n(h(t); x) - h(x)| \leq T_n(|h(t) - h(x)|; x) + |h(x)| |T_n(1; x) - 1| \quad (9)$$

eşitsizliği sağlanır.  $|h(x)| < M_h$  den

$$|T_n(h(t); x) - h(x)| \leq T_n(|h(t) - h(x)|; x) + M_h |T_n(1; x) - 1| \quad (10)$$

yazılabilir. Lineer pozitif operatörler monoton artan olmasından dolayı  $(T_n)$  monoton artan olup burada (1.8)'ün kullanılmasıyla,

$$|T_n(h(t); x) - h(x)| \leq T_n \left( \epsilon + \frac{2M_h}{\delta^2} (t-x)^2; x \right) + M_h |T_n(1; x) - 1| \quad (11)$$

bulunur. Diğer taraftan  $(T_n)$  'in lineerliğinden

$$\begin{aligned}
T_n \left( \epsilon + \frac{2M_h}{\delta^2}(t-x)^2; x \right) &= T_n(\epsilon; x) + T_n \left( \frac{2M_h}{\delta^2}(t-x)^2; x \right) \\
&= \epsilon T_n(1; x) + \frac{2M_h}{\delta^2} T_n(t^2 - 2xt + x^2; x) \\
&= \epsilon T_n(1; x) + \frac{2M_h}{\delta^2} [T_n(t^2; x) - x^2 - x^2 + 2x^2 - 2xT_n(t; x) + x^2 T_n(1; x)] \quad (12) \\
&= \epsilon T_n(1; x) + \frac{2M_h}{\delta^2} [T_n(t^2; x) - x^2 + 2x^2 - 2xT_n(t; x) + x^2 T_n(1; x) - x^2] \\
&= \epsilon T_n(1; x) + \frac{2M_h}{\delta^2} [(T_n(t^2; x) - x^2) + 2x(x - T_n(t; x)) + x^2(T_n(1; x) - 1)]
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu son ifadenin (11)'de kullanılmasıyla;

$$\begin{aligned}
|T_n(h(t); x) - h(x)| &\leq \epsilon T_n(1; x) + \frac{2M_h}{\delta^2} [(T_n(t^2; x) - x^2) \\
&\quad + 2x(x - T_n(t; x)) + x^2(T_n(1; x) - 1)] + M_h |T_n(1; x) - 1| \quad (13)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada (i), (ii), (iii) koşullarının kullanılmasıyla

$$|T_n(h(t); x) - h(x)| < \epsilon \quad (14)$$

bulunur. O halde:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |T_n(h(t); x) - h(x)| = 0 \quad (15)$$

dır. İspat tamamlanır. (Korovkin 1953)

### 1.2.8. Süreklilik Modülü

#### Tanım

$h \in C[a, b]$  sürekli bir fonksiyon olsun.  $h$  fonksiyonunun  $[a, b]$  aralığında tanımlı süreklilik modülü  $\omega(h, \delta)$ ,  $\delta > 0$  için aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\omega(h, \delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta, x, y \in [a, b]} |h(x) - h(y)|$$

Bu tanım, fonksiyonun  $[a, b]$  aralığında  $\delta$  uzaklık içinde ne kadar değiştiğini ölçer.  $\omega(h, \delta)$  azaldıkça, fonksiyonun daha düzgün davrandığı (uniform continuity) anlaşılır. Süreklilik modülünün bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
i) \quad & w(h, \delta) \geq 0 \\
ii) \quad & \lim_{\delta \rightarrow 0} w(h, \delta) = 0 \\
iii) \quad & m \in \mathbb{N} \quad \text{için} \quad w(h, m\delta) \leq mw(h, \delta) \\
iv) \quad & \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad \text{için} \quad w(h, \lambda\delta) \leq (1 + \lambda)w(h, \delta) \\
v) \quad & |h(t) - h(x)| \leq w(h, |t - x|) \\
vi) \quad & |h(t) - h(x)| \leq \left(1 + \frac{|t - x|}{\delta}\right) w(h, \delta)
\end{aligned} \tag{16}$$

(Altomare ve Campiti, 1994)

Süreklilik Modülü Tanımından hareketle Lipschitz koşulu tanımı şu şekilde verilmiştir.

### 1.2.9. Lipschitz

#### Tanım

Bir  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu için, sabit bir  $M > 0$  varsa ve tüm  $x, y \in [a, b]$ ,  $0 < \alpha \leq 1$  için

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|^\alpha$$

eşitsizliği sağlanıyorsa,  $f$  fonksiyonu Lipschitz sürekli (veya kısaca Lipschitz) denir.

Bu fonksiyonların sınıfı  $Lip_M(\alpha)$  ile gösterilir.

Buradaki  $M$  sabiti, fonksiyonun Lipschitz sabiti olarak adlandırılır. Bu özellik, fonksiyonun belirli bir hızdan daha hızlı değişmeyeceğini garanti eder. (I.P. Natanson, 1964)

Son olarak birçok yerde karşımıza çıkan ve burada da işimize yarayabilecek olan Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky Eşitsizliği bu şekildedir.

### 1.2.10. Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky Eşitsizliği

#### Tanım

$T : U \rightarrow V$  lineer pozitif operatör olmak üzere,  $1 < \alpha, \beta < \infty$  ve  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$

için her  $h, l \in U$  olmak üzere

$$T(|hl|) \leq (T(|h|^\alpha))^{(1/\alpha)} \cdot (T(|l|^\beta))^{(1/\beta)}$$

Eğer Hölder eşitsizliğinde  $(\alpha = \beta = 2)$  alınırsa

$$|T(hl; x)| \leq \sqrt{(L(h^2; x))} \sqrt{(T(l^2; x))}$$

eşitsizliğine "Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky Eşitsizliği" denir. (Natanson 1964)

## 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bernstein 1912 yılında Bernstein operatörleri ile Weierstrass teoreminin daha açıklayıcı bir ispatını aşağıdaki polinomları kullanarak yapmıştır.

$$B_n(h; \eta) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \eta^k (1-\eta)^{n-k} h\left(\frac{k}{n}\right), \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad h \in C[0, 1] \quad (17)$$

şeklindedir. (Bernstein, 1912)

Chlodowsky 1937 yılında Bernstein operatörlerinin bir modifikasyonunu verdi. Bununla Bernstein operatörlerinin  $[0, \infty)$  aralığında da çalışılmasını sağladı. (Chlodowsky, 1937)

Bernstein operatörlerin özelliklerinden biri, yakınsama fonksiyonlarının tekilliklere veya süreksizliklere sahip olmasıdır. Bunu gidermek için Kantorovich, tekilliklere veya süreksizliklere sahip olabilen fonksiyonları içeren Lebesgue integrallenebilir fonksiyon uzayı için aşağıdaki Bernstein-Kantorovich operatörlerini tanıtmıştır,

$$K_n(h; \mu) = (n+1) \sum_{k=0}^n b_{n,k}(\mu) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} h(t) dt, \quad \forall \mu \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N} \quad (18)$$

$$(b_{n,k}(\mu) = \binom{n}{k} \mu^k (1-\mu)^{n-k}) \quad (19)$$

şeklindedir. (L.V. Kantorovich, 1930)

Chlodowsky (1937), Bernstein polinomlarını  $[0, \infty)$  aralığına taşıyarak ilk genelleştirmeyi yapmış ve elde ettiği bu yeni yapının yaklaşım niteliklerini ayrıntılı olarak ele almıştır.

Bernstein-Chlodowsky polinomlar dizisi şeklinde isimlendirilen bu dizi  $b_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

şartlarını sağlayan monoton artan reel terimli pozitif sayı dizisi olmak üzere

$$C_n(h; \mu) = \sum_{k=0}^n h\left(\frac{k}{n} b_n\right) c_n^k \left(\frac{\mu}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{\mu}{b_n}\right)^{n-k}, \quad 0 \leq \mu \leq b_n \quad (20)$$

olarak tanımlıdır. (Chlodowsky, 1937)

Bunun yanı sıra Szász 1950 yılında Bernstein polinomlarından esinlenerek Szász operatörünü tanımlamıştır. Bu Bernstein operatörlerinin pozitif yarı açık aralıktaki bir halidir.

$$S_n(h, \eta) = e^{-n\eta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\eta)^k}{k!} h \left( \frac{k}{n} \right) \quad (21)$$

(O. Szasz, 1950)

Szász-Kantorovich operatörü ise Szász operatörünün integrallenebilen fonksiyonlar için bir modifikasyonudur. 1983 yılında Totik tarafından tanımlanmıştır.

$$K_n(f, \eta) = ne^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \quad (22)$$

(Totik, 1983)

sırasıyla Szász operatörü ve Szász-Kantorovich operatörü şeklindedir. Burada da Szász-Kantorovich operatörünün simetrik aralıktaki bir operatörünün yaklaşım özelliklerini inceleyeceğiz.

Bu tez boyunca

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} b_s &= \infty \\ \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b_s^2}{s} &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

şartları bu şekilde kullanılacaktır.

H. Çiçek vd. bu şekilde verilen ağırlıklı uzaylarda Szasz-Kantorovich operatörünü tanıttı ve yaklaşım özelliklerini inceledi. (H. Çiçek vd., 2022)

$$Z_a(j; t) = \frac{a(a+d)}{(a+c)} e^{-at} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(at)^h}{h!} \int_{\frac{h}{a} \frac{(a+c)}{(a+d)}}^{\frac{(h+1)}{a} \frac{(a+c)}{(a+d)}} j(i) di \quad ; 0 \leq i < \infty \quad (24)$$

$c, d \in \mathbb{R}$  ve  $0 \leq c \leq d$  'dir.

Not: Burada tanımlanan Szasz-Kantorovich tipi operatör lineer ve pozitifdir.

Yine R. aslan vd. q-Szász-Kantorovich-Chlodowsky operatörlerini ağırlıklı uzaylarda tanıttılar ve yaklaşım özelliklerini incelediler. (R. Aslan vd. , 2020)

$$P_n(h, q; x) = \frac{[n+1]_q^2}{[n]_q b_n} \sum_{k=0}^{\infty} q^{-k} S_{n,k}^q(x) \int_{\frac{[k]_q [n]_q b_n}{[n+1]_q^2}}^{\frac{[k+1]_q [n]_q b_n}{[n+1]_q^2}} h(t) d_q t \quad (25)$$

Burada

$$S_{n,k}^q(x) = \frac{[n]_q^k x^k}{b_n^k [k]_q!} E_q \left( -[n]_q \frac{x}{b_n} \right), \quad q \in (0, 1), x \in (0, b_n] \quad (26)$$

$$n \rightarrow \infty \implies \frac{b_n}{[n+1]_q} \rightarrow 0$$

olarak tanımlanmıştır.

Bu operatörlerle alakalı bir çok çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan bazıları şu şekildedir:

On the statistical approximation of q-Bernstein-Kantorovich operators on the symmetric interval. ( Döne K. Dinsever, 2024)

Approximation properties of Bernstein-Kantorovich type operators of two variables. Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics ( Döne K. Dinsever, 2019)

Genelleştirilmiş q- Szasz- Mirajkan- Kantorovich Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri Ve Yaklaşım Hızı ( B. Öztel, 2023 )

Ağırlıklı Uzaylarda Szasz Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri Ve Yakınsaklık Oranı ( A. Ilıkkan, 2005)

Chlodowsky-Taylor polinomlarıyla yaklaşım (S. Atak, 2012)

Bernstein- Stancu Polinomlarıyla Yaklaşım (Y. Döne, 2011)

Bernstein ve Bernstein-Chlodovsky Polinomlarının Varyasyon Yarınormunda Yakınsaklıkları (R. Demiray, 2013)

Modifiye (p, q)-Bernstein Tipi Operatörlerin Yaklaşım Özellikleri (E. Çevik, 2019)

Operatörün kullanım alanlarından bazıları Robotik manipülatörler, EKG dalga formları, Alzaymırdır. Birkaç şekilde örnek gösterebiliriz.

Şekil 2.1, 2.2, 2.3 EKG dalga formları ile ilgilidir. Diğerleri Robotik manipülatörlerle,

sonuncusu ise Alzaymır ile ilgilidir.

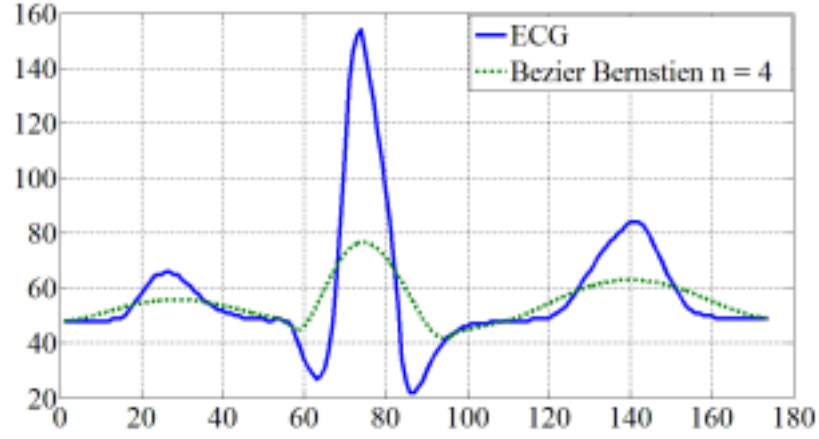


Fig. 5. A comparison between the normal ECG waveform and the ECG simulation by using Bézier-Bernstein curves model with  $n = 4$ .

**Şekil 2.1.** Normal EKG dalga formu ile  $n = 4$  ile Bézier-Bernstein eğrileri modeli kullanılarak yapılan EKG simülasyonu arasındaki karşılaştırma

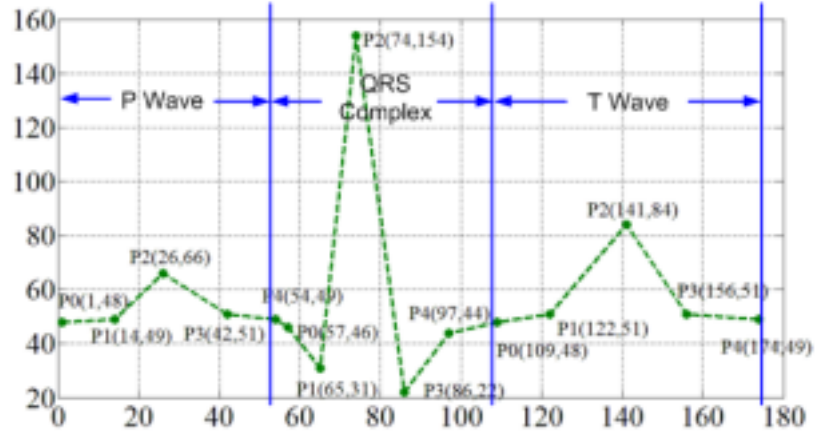


Fig. 4. The position of control points.

**Şekil 2.2.** Kontrol noktalarının konumu

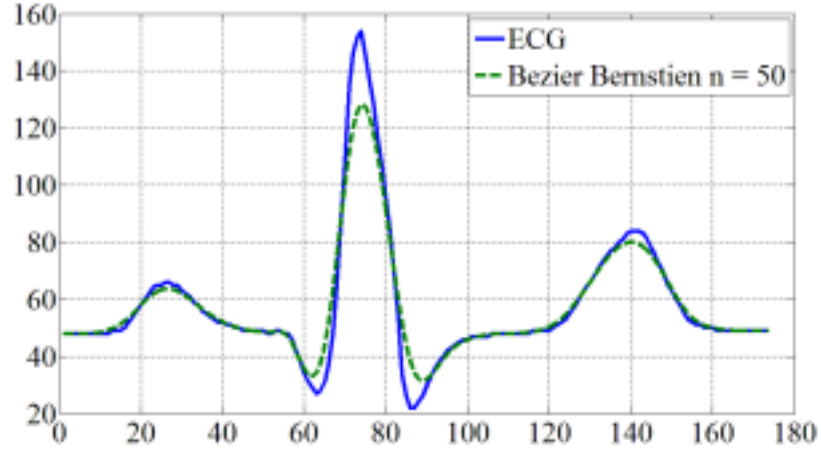


Fig. 6. A comparison between the normal ECG waveform and the ECG simulation by using Bézier-Bernstein model with  $n = 50$ .

**Şekil 2.3.** Normal EKG dalga formu ile Bézier-Bernstein modeli kullanılarak  $n = 50$  ile yapılan EKG simülasyonu arasındaki karşılaştırma

Şekil 2.1, 2.2, 2.3 ( V.Chutchavong vd. , 2014) 'den alınmıştır.

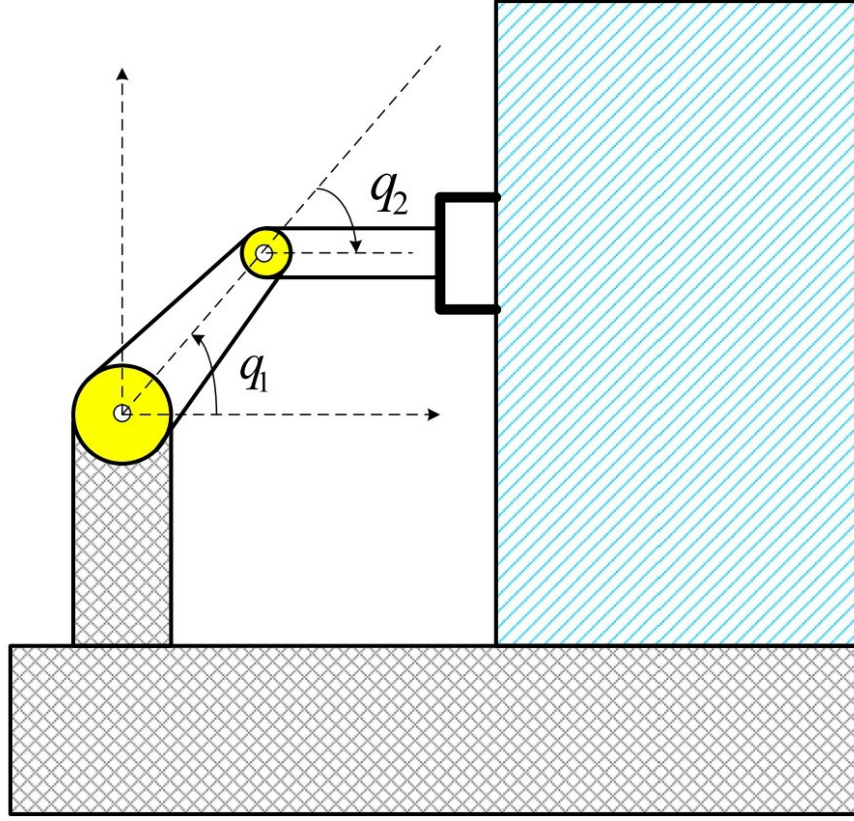


Fig. 1. A schematic view of the manipulator.

Şekil 2.4. Manipulatörün şematik görünümü

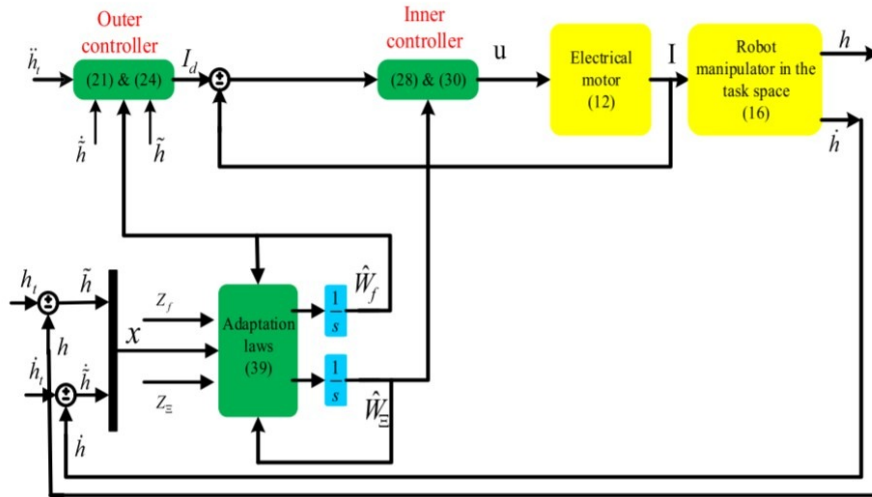
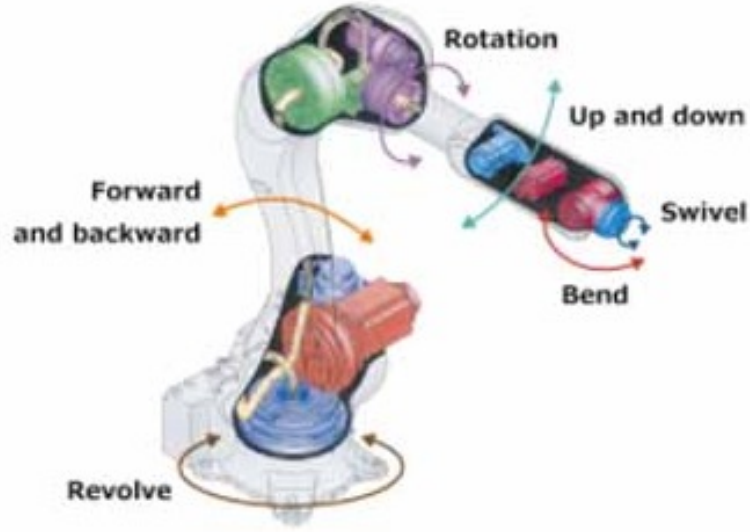


Fig. 2. Block-diagram of the proposed controller.

Şekil 2.5. Önerilen kontrolörün blok diyagramı



Şekil 2.6. Robotik Manipulatör iç yapısı

Şekil 2.4 ve 2.5 ( A. Izadbakhsh vd., 2020) 'den alınmıştır.

Şekil 2.6 Kawaski (Şirket) 'den alınmıştır.

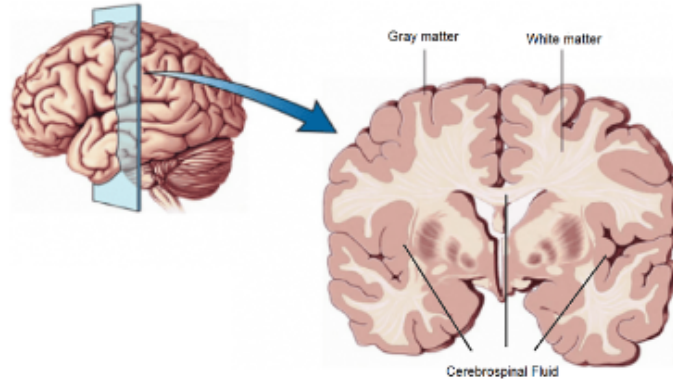


FIGURE 1 Neuroanatomy of the brain with respect to white matter (inside the brain), gray matter (surrounds the surface of the cerebral cortex) and cerebrospinal fluid (pervades most of the brain structures and is found internally in the central nervous system). Image taken from [https://operativeneurosurgery.com/lth/exe/detail.php?id=white\\_matter&media=whitematter.png](https://operativeneurosurgery.com/lth/exe/detail.php?id=white_matter&media=whitematter.png). [Colour figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

Şekil 2.7. Beynin beyaz madde (beynin içinde), gri madde (beyin korteksinin yüzeyini çevreleyen) ve beyin omurilik sıvısı (beyin yapılarının çoğunu kaplayan ve merkezi sinir sisteminin içinde bulunan) açısından nöroanatomi.

Şekil 2.7 ( D. Costarelli vd. , 2023 ) 'den alınmıştır.

Biz bu kullanım alanlarını detaylı şekilde incelemedik. Ancak önümüzdeki çalışmalarda bu alanlara daha kapsamlı bakmayı düşünüyoruz.

### 3. GEREÇ ve YÖNTEM

#### Materyal

Bu çalışmada tez ile ilgili kaynaklardan, kitap, ilgili tezlere ulaşabileceğimiz internet sitelerinden, dergilerden ve makalelerden yararlandık. Grafik çizimleri için ise Mapple programını kullandık.

#### Yöntem:

Burada tanımlayacağımız  $R_s(h; u)$  operatörü için daha önce tanımlanmış ve gerekli işlemler yapılmış olan benzer operatörleri inceledik. Operatörümüz için gerekli nümerik değerleri çizelge olarak verip Mapple ile grafik oluşturduk.

#### 4. BULGULAR

Burada  $R_s(h, u)$  operatörü tanımlayıp yaklaşım özelliklerini inceleyeceğiz. Önce Lineer pozitif olduğunu göstereceğiz. Daha sonra operatörün düzgün yakınsaklığını göstermek için Korovkin teoremini kullanarak süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızının hesaplanmasının yanı sıra bu operatörün merkezi momentlerini tanımlayarak Voronoskaja tipi teoremi, Lipschitz koşulunu ispatlayacağız.  $R_s(h, u)$  operatörünün  $h$  fonksiyonuna yaklaşımının bazı  $s$  ve  $u$  değerleri için nümerik değerler çizelgesini hazırlayacağız.

(6) 'da tanımlamış olduğumuz:

$$q_s^j(u) = e^{-su} \frac{(su)^j}{j!}$$

$$R_s(h, u) = \frac{s}{b_s} \sum_{j=0}^{\infty} q_s^j \left( \frac{u}{b_s} + 1 \right) \int_{\frac{j-s}{s}b_s}^{\frac{j+1-s}{s}b_s} h(v) dv \quad (27)$$

lineer pozitif operatörüne  $R_s(h, u)$  operatörü denir.  $u \in [-b_s, \infty)$  aralığındadır. Şimdi verdiğimiz operatörün lineer ve pozitif olduğunu gösterelim.

##### Lineerlik İspatı

Operatörün lineer olması için  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ve  $h_1, h_2 \in C[-b_s, \infty)$  olmak üzere aşağıdaki eşitliği sağlaması gerekir:

$$R_s(\alpha h_1 + \beta h_2, u) = \alpha R_s(h_1, u) + \beta R_s(h_2, u) \quad (28)$$

Yerine yazarsak:

$$R_s(\alpha h_1 + \beta h_2, u) = \frac{s}{b_s} \sum_{j=0}^{\infty} q_s^j \left( \frac{u}{b_s} + 1 \right) \int_{\frac{j-s}{s}b_s}^{\frac{j+1-s}{s}b_s} [\alpha h_1(v) + \beta h_2(v)] dv \quad (29)$$

$$= \frac{s}{b_s} \sum_{j=0}^{\infty} q_s^j \left( \frac{u}{b_s} + 1 \right) \left[ \alpha \int_{\frac{j-s}{s}b_s}^{\frac{j+1-s}{s}b_s} h_1(v) dv + \beta \int_{\frac{j-s}{s}b_s}^{\frac{j+1-s}{s}b_s} h_2(v) dv \right] \quad (30)$$

$$= \alpha \frac{s}{b_s} \sum_{j=0}^{\infty} q_s^j \left( \frac{u}{b_s} + 1 \right) \int_{\frac{j-s}{s}b_s}^{\frac{j+1-s}{s}b_s} h_1(v) dv \quad (31)$$

$$+ \beta \frac{s}{b_s} \sum_{j=0}^{\infty} q_s^j \left( \frac{u}{b_s} + 1 \right) \int_{\frac{j-s}{s} b_s}^{\frac{j+1-s}{s} b_s} h_2(v) dv \quad (32)$$

$$= \alpha R_s(h_1, u) + \beta R_s(h_2, u) \quad (33)$$

olup lineerliđi göstermiř olunuz.

### Pozitif İspatı

Operatörün pozitif olması için,

$$h(v) \geq 0 \quad \forall v \Rightarrow R_s(h, u) \geq 0 \quad \forall u \in [-b_s, \infty) \quad (34)$$

kořulunun sađlanması gerekir.

Eğer  $h(v) \geq 0$  ise, o zaman her  $j \in \mathbb{N}$  için,

$$\int_{\frac{j-s}{s} b_s}^{\frac{j+1-s}{s} b_s} h(v) dv \geq 0 \quad (35)$$

ayrıca,

$$q_s^j \left( \frac{u}{b_s} + 1 \right) \geq 0 \quad , \quad \frac{s}{b_s} > 0 \quad (36)$$

olduğundan, her terim pozitif veya sıfırdır:

$$q_s^j \left( \frac{u}{b_s} + 1 \right) \int_{\frac{j-s}{s} b_s}^{\frac{j+1-s}{s} b_s} h(v) dv \geq 0 \quad (37)$$

Dolayısıyla, tüm toplam da pozitif olur:

$$R_s(h, u) \geq 0 \quad (38)$$

olur. O halde  $R_s(h; u)$  operatörü lineer pozitif opratördür.

Burada  $R_s(h; u)$  operatörüne  $[-b_s, \infty)$  aralığının,  $t > 1$  olmak üzere  $[-t, t]$  kompakt alt aralığı üzerinde yaklaşım özellikleri ele alınacaktır.

#### 4.1. Lemma

(6) ' da tanımladığımız operatör için  $-b_s \leq u \leq b_s$  için aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$\begin{aligned}
i) \quad R_s(1, u) &= 1 \\
ii) \quad R_s(v, u) &= u + \frac{b_s}{2s} \\
iii) \quad R_s(v^2, u) &= u^2 + \frac{2b_s u}{s} + \frac{b_s^2}{3s^2} \\
iv) \quad R_s(v^3, u) &= u^3 + b_s u^2 \frac{9}{2s} + b_s^2 u \frac{6s+15}{2s^2} + b_s^3 \frac{26s+1}{4s^3} \\
v) \quad R_s(v^4, u) &= u^4 + \frac{8b_s u^3}{5s} + \frac{3b_s^2(2s+5)}{s^2} u^2 + \frac{2b_s^3(8s+3)}{s^3} u + \frac{(15s^2+25s+1)b_s^4}{5s^4}
\end{aligned} \tag{39}$$

**İspat**

$$R_s(h, u) = \frac{s}{b_s} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} \int_{\frac{j-s}{s}b_s}^{\frac{j+1-s}{s}b_s} h(v) dv \tag{40}$$

şeklinde olur.

i)  $h(v)=1$  için sonucu bulalım.

$$R_s(1, u) = \frac{s}{b_s} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} \int_{\frac{j-s}{s}b_s}^{\frac{j+1-s}{s}b_s} 1 dv \tag{41}$$

$$= \frac{s}{b_s} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} \left( \frac{j+1-s}{s} b_s - \frac{j-s}{s} b_s \right) \tag{42}$$

$$= \frac{s}{b_s} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} \frac{b_s}{s} \tag{43}$$

$$= e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} \tag{44}$$

$$= e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} e^{s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \tag{45}$$

$$= 1 \tag{46}$$

ii) Şimdi  $h(v)=v$  için bulalım.

$$R_s(v, u) = \frac{s}{b_s} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} \int_{\frac{j-s}{s}b_s}^{\frac{j+1-s}{s}b_s} v dv \quad (47)$$

$$I = \int_{\frac{j-s}{s}b_s}^{\frac{j+1-s}{s}b_s} v dv \quad (48)$$

'i hesaplayalım.

$$I = \frac{v^2}{2} \Big|_{\frac{j-s}{s}b_s}^{\frac{j+1-s}{s}b_s} \quad (49)$$

$$= \frac{\left(\frac{j+1-s}{s}b_s\right)^2 - \left(\frac{j-s}{s}b_s\right)^2}{2} \quad (50)$$

$$= \frac{(j-s)^2 + 2(j-s) + 1 - (j-s)^2}{2s^2} b_s^2 \quad (51)$$

$$= \frac{2(j-s) + 1}{2s^2} b_s^2 \quad (52)$$

$$R_s(v, u) = \frac{b_s}{s} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} \frac{[2(j-s) + 1]}{2} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{b_s}{s} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} j - \frac{b_s}{s} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} s \\ &\quad + \frac{b_s}{2s} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{b_s}{s} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{(j-1)!} - b_s e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} e^{s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} + \frac{b_s}{2s} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} e^{s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \\ &\quad (55) \end{aligned}$$

j yerine j+1 alırsak

$$= \frac{b_s}{s} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} s \left(\frac{u}{b_s}+1\right) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{(j)!} - b_s + \frac{b_s}{2s} \quad (56)$$

$$= b_s e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \left(\frac{u}{b_s} + 1\right) e^{s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \quad (57)$$

$$= u + \frac{b_s}{2s} \quad (58)$$

şeklinde olur.

iii) Şimdi  $h(v) = v^2$  için bulalım.

$$R_s(v^2, u) = \frac{s}{b_s} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s} + 1\right)\right]^j}{j!} \int_{\frac{j-s}{s}b_s}^{\frac{j+1-s}{s}b_s} v^2 dv \quad (59)$$

$$I = \int_{\frac{j-s}{s}b_s}^{\frac{j+1-s}{s}b_s} v^2 dv \quad (60)$$

diyelim.

$$\begin{aligned} &= \frac{v^3}{3} \Big|_{\frac{j-s}{s}b_s}^{\frac{j+1-s}{s}b_s} = \frac{1}{3} \left( \left( \frac{j+1-s}{s} b_s \right)^3 - \left( \frac{j-s}{s} b_s \right)^3 \right) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{s^3} ((j+1-s)^3 b_s^3 - (j-s)^3 b_s^3) \\ &= \frac{b_s^3}{3s^3} ((j+1-s)^3 - (j-s)^3) \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{b_s^3}{3s^3} (3(j-s)^2 + 3(j-s) + 1) \\ &= \frac{b_s^3}{s^3} \left( (j-s)^2 + (j-s) + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{b_s^3}{s^3} \left( j^2 + j - 2js + s^2 - s + \frac{1}{3} \right) \end{aligned} \quad (62)$$

O halde

$$I = \frac{b_s^3}{s^3} \left( j^2 + j(1-2s) + s^2 - s + \frac{1}{3} \right) \quad (63)$$

olur. I'yı yerine yazalım.

$$R_s(v^2, u) = \frac{s}{b_s} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} \frac{b_s^3}{s^3} \left(j^2 + j(1-2s) + s^2 - s + \frac{1}{3}\right) \quad (64)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{b_s^2}{s^2} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} j^2 + \frac{b_s^2}{s^2} (1-2s) e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} j \\ &\quad + \frac{b_s^2}{s^2} \left(s^2 - 2s + \frac{1}{3}\right) e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{b_s^2}{s^2} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} j(j-1) + \frac{b_s^2}{s^2} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} j \\ &\quad + \frac{b_s^2}{s^2} (1-2s) e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} j \quad (66) \\ &\quad + \frac{b_s^2}{s^2} \left(s^2 - 2s + \frac{1}{3}\right) e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{b_s^2}{s^2} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{(j-2)!} + \frac{b_s^2}{s^2} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{(j-1)!} \\ &\quad + \frac{b_s^2}{s^2} (1-2s) e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{(j-1)!} \quad (67) \\ &\quad + \frac{b_s^2}{s^2} \left(s^2 - 2s + \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Sırasıyla toplam ifadesi altındaki j yerine j+2 , j+1 ve j+1 alınırsa

$$\begin{aligned}
&= \frac{b_s^2}{s^2} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \left[ s \left( \frac{u}{b_s} + 1 \right) \right]^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[ s \left( \frac{u}{b_s} + 1 \right) \right]^j}{(j)!} + \frac{b_s^2}{s^2} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} s \left( \frac{u}{b_s} + 1 \right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[ s \left( \frac{u}{b_s} + 1 \right) \right]^j}{(j)!} \\
&\quad + \frac{b_s^2}{s^2} (1-2s) e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} s \left( \frac{u}{b_s} + 1 \right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[ s \left( \frac{u}{b_s} + 1 \right) \right]^j}{(j)!} \\
&\quad + \frac{b_s^2}{s^2} \left( s^2 - 2s + \frac{1}{3} \right)
\end{aligned} \tag{68}$$

$$= b_s^2 \left( \frac{u}{b_s} + 1 \right)^2 + \frac{b_s^2}{s} \left( \frac{u}{b_s} + 1 \right) + \frac{b_s^2}{s} \left( \frac{u}{b_s} + 1 \right) (1-2s) + \frac{b_s^2}{s^2} \left( s^2 - 2s + \frac{1}{3} \right) \tag{69}$$

$$R_s(v^2, u) = u^2 + \frac{2b_s u}{s} + \frac{b_s^2}{3s^2} \tag{70}$$

olarak elde edilir.

iv) Şimdi de  $h(v) = v^3$  için hesaplayalım.

$$R_s(v^3, u) = \frac{s}{b_s} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \frac{\left[ s \left( \frac{u}{b_s} + 1 \right) \right]^j}{j!} \int_{\frac{j-s}{s}b_s}^{\frac{j+1-s}{s}b_s} v^3 dv \tag{71}$$

$$I = \int_{\frac{j-s}{s}b_s}^{\frac{j+1-s}{s}b_s} v^3 dv \tag{72}$$

diyelim. O zaman

$$I = \frac{v^4}{4} \Big|_{\frac{j-s}{s}b_s}^{\frac{j+1-s}{s}b_s} \tag{73}$$

$$= \frac{1}{4} \left( \left( \frac{(j+1-s)b_s}{s} \right)^4 - \left( \frac{(j-s)b_s}{s} \right)^4 \right) = \frac{b_s^4}{4s^4} ((j+1-s)^4 - (j-s)^4) \tag{74}$$

$$\begin{aligned}
&(j+1-s)^4 - (j-s)^4 = (a+1)^4 - a^4 \\
&= 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1 = 4(j-s)^3 + 6(j-s)^2 + 4(j-s) + 1
\end{aligned} \tag{75}$$

(burada  $a = j - s$ )

O halde

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\frac{j-s}{s}b_s}^{\frac{j+1-s}{s}b_s} v^3 dv = \frac{b_s^4}{4s^4} [4(j-s)^3 + 6(j-s)^2 + 4(j-s) + 1] \\
 &= \frac{b_s^4}{4s^4} [4j^3 + (6-12s)j^2 + (12s^2-12s+4)j + (-4s^3+6s^2-4s+1)]
 \end{aligned} \tag{76}$$

I integralini denklemde yerine yazarsak:

$$\begin{aligned}
 R_s(v^3, u) &= \frac{s}{b_s} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} \frac{b_s^4}{4s^4} \\
 &\quad [4j^3 + (6-12s)j^2 + (12s^2-12s+4)j + (-4s^3+6s^2-4s+1)]
 \end{aligned} \tag{77}$$

Şimdi  $j^3 = j(j-1)(j-2) + 3j^2 + 2j$ 'yi yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{b_s^3}{s^3} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} j(j-1)(j-2) + \frac{3b_s^3}{s^3} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} j^2 \\
 &\quad + \frac{2b_s^3}{s^3} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} j + (6-12s) \frac{b_s^3}{4s^3} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} j^2 \\
 &\quad + (12s^2-12s+4) \frac{b_s^3}{4s^3} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} j \\
 &\quad + (-4s^3+6s^2-4s+1) \frac{b_s^3}{4s^3} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!}
 \end{aligned} \tag{78}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b_s^3}{s^3} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right)^j}{j!} j(j-1)(j-2) + \frac{9-6s}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right)^j}{j!} j^2 \right. \\
&\quad \left. + (3s^2 - 3s + 3) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right)^j}{j!} j + \frac{-4s^3 + 6s^2 - 4s + 1}{4} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right)^j}{j!} \right] \quad (79)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b_s^3}{s^3} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \left[ \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\left(s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right)^j}{j!} (j(j-1)(j-2)) + \frac{9-6s}{2} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\left(s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right)^j}{j!} (j(j-1)) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{9-6s}{2} + 3s^2 - 3s + 3\right) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right)^j}{j!} j + \right. \\
&\quad \left. \frac{-4s^3 + 6s^2 - 4s + 1}{4} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right)^j}{j!} \right] \quad (80)
\end{aligned}$$

Şimdi sırasıyla toplam ifadesi altındaki j yerine j+3 , j+2 ve j+1 alınırsa:

$$\begin{aligned}
&= \frac{b_s^3}{s^3} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right)^{j+3}}{j!} + \frac{9-6s}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right)^{j+2}}{j!} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{9-6s}{2} + 3s^2 - 3s + 3\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right)^{j+1}}{j!} \right. \\
&\quad \left. + \frac{-4s^3 + 6s^2 - 4s + 1}{4} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right)^j}{j!} \right] \quad (81)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b_s^3}{s^3} \left(s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right)^3 + \frac{b_s^3}{s^3} \frac{9-6s}{2} \left(s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right)^2 + \\
&\quad \frac{b_s^3}{s^3} \left(\frac{9-6s}{2} + 3s^2 - 3s + 3\right) s\left(\frac{u}{b_s}+1\right) + \frac{b_s^3}{s^3} \frac{-4s^3 + 6s^2 - 4s + 1}{4} \quad (82)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b_s^3}{s^3} \left[ s^3 \left( \frac{u}{b_s} + 1 \right)^3 + \frac{9-6s}{2} s^2 \left( \frac{u}{b_s} + 1 \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{9-6s}{2} + 3s^2 - 3s + 3 \right) s \left( \frac{u}{b_s} + 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{-4s^3 + 6s^2 - 4s + 1}{4} \right] \tag{83}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b_s^3}{s^3} \left[ s^3 \left( \frac{u^3}{b_s^3} + \frac{3u^2}{b_s^2} + \frac{3u}{b_s} + 1 \right) + \frac{9-6s}{2} s^2 \left( \frac{u^2}{b_s^2} + \frac{2u}{b_s} + 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{6s^2 - 12s + 15}{2} \left( \frac{su}{b_s} + s \right) + \frac{-4s^3 + 6s^2 - 4s + 1}{4} \right] \tag{84}
\end{aligned}$$

$$= u^3 + b_s u^2 \frac{9}{2s} + b_s^2 u \frac{6s+15}{2s^2} + b_s^3 \frac{26s+1}{4s^3} \tag{85}$$

v) Şimdi de  $h(v) = v^4$  için hesaplayalım.

$$R_s(v^4, u) = \frac{s}{b_s} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \frac{\left[ s \left( \frac{u}{b_s} + 1 \right) \right]^j}{j!} \int_{\frac{j-s}{s} b_s}^{\frac{j+1-s}{s} b_s} v^4 dv \tag{86}$$

$$I = \int_{\frac{j-s}{s} b_s}^{\frac{j+1-s}{s} b_s} v^4 dv \tag{87}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(j+1-s)^5 - (j-s)^5}{5s^5} b^5 \\
&= \frac{[(j-s)+1]^5 - (j-s)^5}{5s^5} b^5 \\
&= \frac{(x+1)^5 - x^5}{5s^5} b^5 \\
&= \frac{x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 - x^5}{5s^5} b^5 \\
&= \frac{5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1}{5s^5} b^5 \\
&= \frac{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + \frac{1}{5}}{s^5} b^5 \\
&= \frac{(j-s)^4 + 2(j-s)^3 + 2(j-s)^2 + (j-s) + \frac{1}{5}}{s^5} b^5 \\
&= \frac{j^4 + j^3(2-4s) + j^2(2-6s+6s^2) + j(1-4s+6s^2-4s^3) + (s^4-2s^3+2s^2-s+\frac{1}{5})}{s^5} b^5 \tag{88}
\end{aligned}$$

olur. Burada (x=j-s). I 'yı yerine yazarsak:

$$R_s(v^4, u) = \frac{s}{b_s} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} \cdot \frac{j^4 + j^3(2-4s) + j^2(2-6s+6s^2) + j(1-4s+6s^2-4s^3) + \left(s^4-2s^3+2s^2-s+\frac{1}{5}\right)b^5}{s^5} \quad (89)$$

Şimdi  $j^4 = j(j-1)(j-2)(j-3) + 6j^3 - 11j^2 + 6j$ ,  $j^3 = j(j-1)(j-2) + 3j^2 + 2j$  ve  $j^2 = j(j-1)$  yerine yazıp tekrar yazarsak:

$$R_s(v^4, u) = \frac{b_s^4}{s^4} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{j!} \left[ j(j-1)(j-2)(j-3) \right. \\ \left. + (8-4s)j(j-1)(j-2) \right. \\ \left. + (-3-18s+6s^2)j(j-1) \right. \\ \left. + (6+4(1-2s)+2-6s+6s^2+1-4s+6s^2-4s^3)j \right. \\ \left. + \left(s^4-2s^3+2s^2-s+\frac{1}{5}\right) \right] \quad (90)$$

$$= \frac{b_s^4}{s^4} \sum_{j=4}^{\infty} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{(j-4)!} + (8-4s) \frac{b_s^4}{s^4} \sum_{j=3}^{\infty} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{(j-3)!} \\ + (-3-18s+6s^2) \frac{b_s^4}{s^4} \sum_{j=2}^{\infty} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{(j-2)!} \\ + (6+4(1-2s)+2-6s+6s^2+1-4s+6s^2-4s^3) \frac{b_s^4}{s^4} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^j}{(j-1)!} \\ + \left(s^4-2s^3+2s^2-s+\frac{1}{5}\right) \frac{b_s^4}{s^4} \quad (91)$$

Sırayla toplam ifadesi altındaki j yerine j+4, j+3, j+2 ve j+1 alınırsa

$$\begin{aligned}
&= \frac{b_s^4}{s^4} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^{j+4}}{j!} + (8-4s) \frac{b_s^4}{s^4} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^{j+3}}{j!} \\
&\quad + (-3-18s+6s^2) \frac{b_s^4}{s^4} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^{j+2}}{j!} \\
&\quad + (6+4(1-2s)+2-6s+6s^2+1-4s+6s^2-4s^3) \frac{b_s^4}{s^4} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)} \frac{\left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^{j+1}}{j!} \\
&\quad + \left(s^4-2s^3+2s^2-s+\frac{1}{5}\right) \frac{b_s^4}{s^4}
\end{aligned} \tag{92}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b_s^4}{s^4} \left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^4 + (8-4s) \frac{b_s^4}{s^4} \left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^3 + (-3-18s+6s^2) \frac{b_s^4}{s^4} \left[s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right]^2 \\
&\quad + (6+4(1-2s)+2-6s+6s^2+1-4s+6s^2-4s^3) s \left(\frac{u}{b_s}+1\right) \\
&\quad + \left(s^4-2s^3+2s^2-s+\frac{1}{5}\right) \frac{b_s^4}{s^4}
\end{aligned} \tag{93}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b_s^4}{s^4} \left[ \left(s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right)^4 + (8-4s) \left(s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right)^3 + (-3-18s+6s^2) \left(s\left(\frac{u}{b_s}+1\right)\right)^2 \right. \\
&\quad \left. + (13-18s+12s^2-4s^3) s \left(\frac{u}{b_s}+1\right) + \left(s^4-2s^3+2s^2-s+\frac{1}{5}\right) \right]
\end{aligned} \tag{94}$$

$$= u^4 + \frac{8b_s u^3}{5s} + \frac{3b_s^2(2s+5)}{s^2} u^2 + \frac{2b_s^3(8s+3)}{s^3} u + \frac{(15s^2+25s+1)b_s^4}{5s^4} \tag{95}$$

#### 4.2. Teorem

$h \in C_B[-b_s, b_s]$  ise  $R_s(h, u)$  operatörü  $h$  fonksiyonuna  $[-t, t]$ , ( $t>1$ ) aralığında düzgün yakınsaktır.

#### İspat

Operatörün Korovkin şartlarını sağladığını gösterelim.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|R_s(v^m, u) - u^m\|_{C[-t, t]} = 0, \quad m = 0, 1, 2. \quad (96)$$

1.  $m=0$  için

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|R_s(1, u) - 1\|_{C[-t, t]} \quad (97)$$

Lemma 4.1'den:

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} \max_{u \in [-t, t]} |1 - 1| = 0 \quad (98)$$

olup ilk şart sağlanır.

1.  $m=1$  için:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|R_s(v, u) - u\|_{C[-t, t]} \quad (99)$$

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} \|u + \frac{b_s}{2s} - u\|_{C[-t, t]} = \lim_{s \rightarrow \infty} \max_{u \in [-t, t]} \left| \frac{b_s}{2s} \right| = 0 \quad (100)$$

olur.

1.  $m=2$  için

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|R_s(v^2, u) - u^2\|_{C[-t, t]} \quad (101)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left\| u^2 + \frac{2b_s u}{s} + \frac{b_s^2}{3s^2} - u^2 \right\|_{C[-t, t]} = \lim_{s \rightarrow \infty} \max_{u \in [-t, t]} \left| \frac{2b_s u}{s} + \frac{b_s^2}{3s^2} \right| = \lim_{s \rightarrow \infty} \left| \frac{2tb_s}{s} + \frac{b_s^2}{3s^2} \right| \\ &\leq \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(2t+1)b_s^2}{s} = 0 \end{aligned}$$

olur. Korovkin şartları sağlandığından verilen operatör  $h$  fonksiyonuna istenen aralıkta düzgün yakınsar.

#### 4.3. Lemma

$R_s(h; u)$  operatörünün merkezi momentleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
i) R_s((v-u)^0; u) &= 1 \\
ii) R_s((v-u)^1; u) &= \frac{b_s}{2s} \\
iii) R_s((v-u)^2; u) &= \frac{b_s u}{s} + \frac{b_s^2}{3s^2} \\
iv) R_s((v-u)^3; u) &= b_s^2 u \frac{6s+13}{2s^2} + b_s^3 \frac{26s+1}{4s^3} \\
v) R_s((v-u)^4; u) &= \frac{3b_s^2 u^2}{s^2} + \frac{5b_s^3(6s+5)u}{s^3} + \left( \frac{3b_s^2}{s} + \frac{5b_s}{s^2} + \frac{b_s^2}{5s^3} \right)
\end{aligned} \tag{102}$$

### İspat

$$\begin{aligned}
i) R_s((v-u)^0; u) &= R_s(1; u) = 1 \\
ii) R_s((v-u)^1; u) &= R_s(v; u) - uR_s(1; u) = u + \frac{b_s}{2s} - u = \frac{b_s}{2s} \\
iii) R_s((v-u)^2; u) &= R_s(v^2; u) - 2uR_s(v; u) + u^2 \\
&= u^2 + \frac{2b_s u}{s} + \frac{b_s^2}{3s^2} - 2u \left( u + \frac{b_s}{2s} \right) + u^2 \\
&= \frac{b_s u}{s} + \frac{b_s^2}{3s^2} \\
iv) R_s((v-u)^3; u) &= R_s(v^3 - 3v^2u + 3vu^2 - u^3; u) \\
&= R_s(v^3; u) - 3uR_s(v^2, u) + 3u^2R_s(v; u) - u^3 \\
&= u^3 + b_s u^2 \frac{9}{2s} + b_s^2 u \frac{6s+15}{2s^2} + b_s^3 \frac{26s+1}{4s^3} \\
&\quad - 3u \left( u^2 + \frac{2b_s u}{s} + \frac{b_s^2}{3s^2} \right) + 3u^2 \left( u + \frac{b_s}{2s} \right) - u^3
\end{aligned} \tag{103}$$

(104)

$$\begin{aligned}
&= u^3 + b_s u^2 \frac{9}{2s} + b_s^2 u \frac{6s+15}{2s^2} + b_s^3 \frac{26s+1}{4s^3} \\
&\quad - 3u \left( u^2 + \frac{2b_s u}{s} + \frac{b_s^2}{3s^2} \right) + 3u^2 \left( u + \frac{b_s}{2s} \right) - u^3 \\
&= u^3 + b_s u^2 \frac{9}{2s} + b_s^2 u \frac{6s+15}{2s^2} + b_s^3 \frac{26s+1}{4s^3} \\
&\quad - 3u^3 - \frac{6b_s u^2}{s} - \frac{b_s^2 u}{s^2} + 3u^3 + \frac{3b_s u^2}{2s} - u^3 \\
&= \left( \frac{9}{2} - 6 + \frac{3}{2} \right) \frac{b_s u^2}{s} + \left( \frac{6s+15}{2s^2} - \frac{2}{2s^2} \right) b_s^2 u + b_s^3 \frac{26s+1}{4s^3} \\
&= 0 \frac{b_s u^2}{s} + b_s^2 u \frac{6s+13}{2s^2} + b_s^3 \frac{26s+1}{4s^3} \\
&= b_s^2 u \frac{6s+13}{2s^2} + b_s^3 \frac{26s+1}{4s^3}
\end{aligned} \tag{105}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}) R_s((v-u)^4; u) \\
&= R_s(v^4 - 4v^3u + 6v^2u^2 - 4vu^3 + u^4; u) \\
&= R_s(v^4; u) - 4u R_s(v^3; u) + 6u^2 R_s(v^2; u) - 4u^3 R_s(v; u) + u^4 R_s(1; u)
\end{aligned} \tag{106}$$

$$\begin{aligned}
&= u^4 + \frac{8b_s u^3}{s} + \frac{6b_s^2 u^2}{s} - \frac{3b_s^2 u^2}{s^2} - \frac{24b_s^3 u}{s^2} + \frac{13b_s^3 u}{s^3} - \frac{19b_s^4}{s^2} + \frac{12b_s^4}{s^3} + \frac{b_s^4}{5s^4} \\
&\quad - 4u \left( u^3 + b_s u^2 \frac{9}{2s} + b_s^2 u \frac{6s+15}{2s^2} + b_s^3 \frac{26s+1}{4s^3} \right) \\
&\quad + 6u^2 \left( u^2 + \frac{2b_s u}{s} + \frac{b_s^2}{3s^2} \right) - 4u^3 \left( u + \frac{b_s}{2s} \right) + u^4
\end{aligned} \tag{107}$$

$$= \frac{3b_s^2 u^2}{s^2} + \frac{5b_s^3(6s+5)u}{s^3} + \left( \frac{3b_s^2}{s} + \frac{5b_s}{s^2} + \frac{b_s^2}{5s^3} \right) \tag{108}$$

şeklindedir.

#### 4.4. Lemma

$$\begin{aligned}
i) \quad & \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{b_s^2} R_s((v-u); u) = \frac{1}{2} \\
ii) \quad & \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{b_s^2} R_s((v-u)^2; u) = u \\
iii) \quad & \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2}{b_s^4} R_s((v-u)^4; u) = 0
\end{aligned} \tag{109}$$

#### 4.5. Teorem

$R_s(h; u)$  operatörünün  $u \in [-t, t]$  olmak üzere  $h \in C[-t, t]$  fonksiyonuna olan yaklaşım hızı şöyledir:

$$|R_s(h; u) - h(u)| \leq C\omega(h; \frac{b_s}{\sqrt{s}}) \tag{110}$$

#### İspat

$h$  sınırlı ve sürekli bir fonksiyon olduğundan süreklilik modülü özelliklerinden

$$|h(v) - h(u)| \leq \left(1 + \frac{|v-u|}{\delta_s}\right) \omega(h; \delta_s) \tag{111}$$

'dir.

Verdiğimiz operatörü her iki tarafa uygularsak  $R_s(h; u)$  lineer ve pozitif olduğundan

$$\begin{aligned}
|R_s(h; u) - h(u)| & \leq |R_s(h(v) - h(u); u)| \\
& \leq R_s(|h(v) - h(u)|; u) \\
& \leq R_s\left(\left(1 + \frac{|v-u|}{\delta_s}\right) \omega(h; \delta_s); u\right) \\
& \leq \omega(h; \delta_s) \left\{ R_s(1, u) + \frac{1}{\delta_s} R_s(|v-u|, u) \right\}
\end{aligned}$$

Cauchy-Schwartz-Bunyakovsky eşitsizliğinden

$$|R_s(h; u) - h(u)| \leq \omega(h; \delta_s) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_s} \sqrt{R_s((v-u)^2, u)} \right\} \tag{112}$$

Lemma 4.3 iii) 'den ve  $u \in [-t, t]$  olduğundan

$$\begin{aligned}
|R_s(h; u) - h(u)| &\leq \omega(h; \delta_s) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_s} \sqrt{\frac{b_s u}{s} + \frac{b_s^2}{3s^2}} \right\} \\
&\leq \omega(h; \delta_s) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_s} \sqrt{\frac{b_s t}{s} + \frac{b_s^2}{s}} \right\} \\
&\leq \omega(h; \delta_s) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_s} \sqrt{\frac{(t+1)b_s^2}{s}} \right\} \\
&\leq \omega(h; \delta_s) \left\{ 1 + \frac{\sqrt{t+1}}{\delta_s} \sqrt{\frac{b_s^2}{s}} \right\} \\
&\leq (1 + \sqrt{t+1}) \omega(h; \sqrt{\frac{b_s^2}{s}})
\end{aligned}$$

$\delta_s = \frac{b_s}{\sqrt{s}}$  seçilirse sonuç elde edilir.

$$\leq C \omega \left( h; \frac{b_s}{\sqrt{s}} \right) \quad (113)$$

Burada  $C = 1 + \sqrt{t+1}$  dir.

#### 4.6. Teorem

$h \in Lip_M \alpha[-t, t]$  ise bu takdirde  $|R_s(h, u) - h(u)| \leq M' \left( \frac{b_s^2}{s} \right)^{\frac{\mu}{2}}$   
 $M' = M 3^{\mu/2}$  dır.

#### İspat

$R_s(h; u)$  operatörünün lineer pozitif oluşundan

$$|R_s(h, u) - h(u)| \leq R_s(|h(v) - h(u)|; u)$$

yazılabilir. (2.2) den

$$|R_s(h, u) - h(u)| \leq R_s(M|v - u|^\mu; u)$$

Cauchy-Schwartz-Bunyakovsky eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
|R_s(h; u) - h(u)| &\leq M [R_s((v - u)^2; u)]^{\mu/2} \\
&= M \left[ \frac{b_s^2 u}{s} + \frac{b_s^2}{S} \right]^{\frac{\mu}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq M \left[ \frac{b_s^2}{s} (t+1) \right]^{\frac{\mu}{2}} \\
&\leq M(t+1)^{\frac{\mu}{2}} \left( \frac{b_s^2}{s} \right)^{\frac{\mu}{2}} \\
&\leq M' \left( \frac{b_s^2}{s} \right)^{\frac{\mu}{2}}
\end{aligned}$$

Burada  $M' = M(t+1)^{\frac{\mu}{2}}$

#### 4.7. Teorem (Voronovskaya Tip Teorem)

$h, h', h'' \in C^2[-b_s, b_s]$  olmak üzere  $R_s$  operatörü için şu asimtotik yaklaşımı vardır .

:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{b_s^2} (R_s(h; u) - h(u)) = \frac{1}{2!} h''(u) \quad (114)$$

#### İspat

Taylor açılımından

$$\begin{aligned}
h(t) &= h(u) + (t-u)h'(u) + \frac{1}{2}(t-u)^2 h''(u) + T_m(t, u)(t-u)^2 \\
h(t) - h(u) &= (t-u)h'(u) + \frac{1}{2}(t-u)^2 h''(u) + T_m(t, u)(t-u)^2
\end{aligned} \quad (115)$$

Burada  $T_m(t, u) = \frac{1}{3!} h'''(u)(t-u)^3 + \frac{1}{4!} h^{(4)}(u)(t-u)^4 + \dots$  kalan terimdir.

$K_m(t, u)$  sürekli ve  $\lim_{t \rightarrow u} K_m(t, u) = 0$  olur. (\*)

$$\begin{aligned}
R_s(h(t); u) - h(u) &= R_s((t-u); u)h'(u) + \frac{1}{2!} R_s((t-u)^2; u)h''(u) \\
&\quad + R_s(K_m(t, u)(t-u)^2, u) \\
&= \frac{b_s}{2s} h'(u) + \frac{1}{2} \left( \frac{b_s u}{s} + \frac{b_s^2}{3s^2} \right) h''(u) + R_s(K_m(t, u)(t-u)^2, u)
\end{aligned}$$

olur. Her tarafı  $\frac{s}{b_s^2}$  ile çarparsak

$$\frac{s}{b_s^2} (R_s(h(t); u) - h(u)) = \frac{1}{2b_s} h'(u) + \frac{1}{2} \left( \frac{u}{b_s} + \frac{1}{3s} \right) h''(u) + \frac{s}{b_s^2} R_s(K_m(t, u)(t-u)^2, u) \quad (116)$$

yazılabilir.  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b_s^2}{s} = 0$  olduğundan  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b_s}{s} = 0$  olur.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{b_s^2} (R_s(h(t); u) - h(u)) = \frac{1}{2} h'(u) + \frac{u}{2} h''(u) + \left( \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{b_s^2} R_s(K_m(t, u)(t - u)^2) \right) \quad (117)$$

şeklinde olur. Burada  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{b_s^2} R_s(K_m(t, u)(t - u)^2) = 0$  olduğunu göstermemiz gerekir.

Cauchy- Schwarz-Bunyakovsky eşitsizliğinden:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{b_s^2} R_s(K_m(t, u)(t - u)^2) &\leq \lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt{R_s(K_m^2(t, u), u)} \sqrt{\frac{s^2}{b_s^4} R_s((t - u)^4, u)} \quad (118) \\ &\leq \lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt{R_s(K_m^2(t, u), u)} \sqrt{-\frac{2}{b_s^2} u^2 + \frac{(6s + 15)}{sb_s} u + \frac{(15s^2 + 25s + 1)}{5s^2}} \\ &\leq \sqrt{3} \lim_{s \rightarrow \infty} \sqrt{R_s(K_m^2(t, u), u)} \end{aligned}$$

(\*) dan  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{b_s^2} R_s(K_m(t, u)(t - u)^2) = 0$ .

Voronovskaya teoremi ile ilgili bir örnek verelim.

$h(u) = u^4$  alırsak  $h'(u) = 4u^3$ ,  $h''(u) = 12u^2$

$$R_s(t^4, u) = u^4 + \frac{8b_s u^3}{5s} + \frac{3b_s^2(2s + 5)}{s^2} u^2 + \frac{2b_s^3(8s + 3)}{s^3} u + \frac{(15s^2 + 25s + 1)b_s^4}{5s^4} \quad (119)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{b_s^2} (R_s(t^4; u) - u^4) \\ = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{b_s^2} \left( \frac{8b_s u^3}{5s} + \frac{3b_s^2(2s + 5)}{s^2} u^2 + \frac{2b_s^3(8s + 3)}{s^3} u + \frac{(15s^2 + 25s + 1)b_s^4}{5s^4} \right) \quad (120) \end{aligned}$$

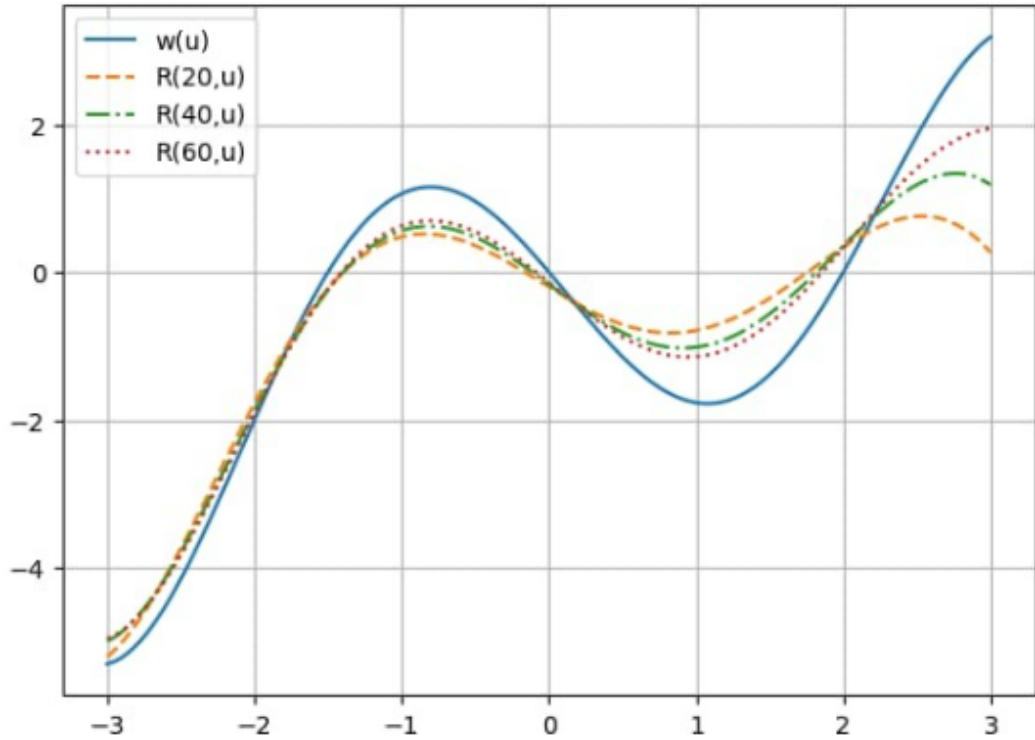
$$= \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{8}{5b_s} u^3 + 3\left(2 + \frac{5}{s}\right) u^2 + 2\left(\frac{8}{s} + \frac{3}{s^2}\right) b_s u + \left(\frac{3}{s} + \frac{5}{s^2} + \frac{1}{5s^3}\right) b_s^2 \right) \quad (121)$$

$$= 6u^2 = \frac{1}{2}h''(u) \quad (122)$$

olur.

### Grafik

Bu grafik ve nümerik tablo için kullanılan fonksiyon  $w(u) = \left(u - \frac{3}{2}\right)(u+2)\sin\left(\frac{\pi u}{4}\right)$  ve  $b_s = \ln(1+s)$ ,  $p(s, j, u) = \frac{s}{b_s} e^{(-su)} \frac{(su)^j}{j!}$  tir.



Şekil 4.1. Bazı değerler için grafik

Grafikte operatör ile fonksiyon arasındaki farkın yüksek olduğu -0.8 ile 1.2 noktaları kullanılarak, farklı  $s$  değerleri için  $|R_s(h; u) - h(u)|$  nicelikleri hesaplanmış ve aşağıdaki tablolarda listelenmiştir.

Çizelge 4.1. Tablo

| $s \setminus u$ | $u = -0.8$ | $u = 1.2$ |
|-----------------|------------|-----------|
| 10              | 0.69059    | 1.27771   |
| $10^2$          | 0.36550    | 0.53685   |
| $10^3$          | 0.09414    | 0.12321   |
| $10^4$          | 0.01758    | 0.02149   |
| $10^5$          | 0.00281    | 0.00329   |

## 5. TARTIŞMA

Bu çalışmada elde edilen teorik bulgular, klasik Szasz-Kantorovich operatörlerinin yaklaşım özelliklerinin genişletilerek literatüre katkı sağlandığını göstermektedir. Özellikle operatörün merkezi momentleri ve Korovkin tipi yaklaşım teoremleri üzerinden yapılan incelemeler, kurulan yapının integrallenebilir fonksiyon sınıfları üzerindeki yakınsama hızını ve hassasiyetini göstermektedir. Literatürdeki mevcut sonuçlarla karşılaştırıldığında, ele alınan simetrik ve modifiye edilmiş aralıklar üzerindeki bu yaklaşım davranışının fonksiyonların süreklilik modülü ve Korovkin koşullarıyla uyum içinde olduğu görülmektedir.

## 6. SONUÇLAR

Szasz- Kantorovich Operatörlerinin  $[-b_s, b_s]$  Simetrik aralıkta yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

İlgili operatörün lineer pozitif bir yapıya sahip olduğu ortaya konmuştur. Operatörün Korovkin teoremi koşullarını karşıladığı ve  $f$  fonksiyonuna düzgün yakınsadığı ispatlandıktan sonra, merkezi momentleri hesaplanmış ve bu doğrultuda aşağıdaki eşitliklere ulaşılmıştır.

$$\begin{aligned}
 i) \quad R_s(1, u) &= 1 \\
 ii) \quad R_s(v, u) &= u + \frac{b_s}{2s} \\
 iii) \quad R_s(v^2, u) &= u^2 + \frac{2b_s u}{s} + \frac{b_s^2}{3s^2} \\
 iv) \quad R_s(v^3, u) &= u^3 + b_s u^2 \frac{9}{2s} + b_s^2 u \frac{6s+15}{2s^2} + b_s^3 \frac{26s+1}{4s^3} \\
 v) \quad R_s(v^4, u) &= u^4 + \frac{8b_s u^3}{5s} + \frac{3b_s^2(2s+5)}{s^2} u^2 + \frac{2b_s^3(8s+3)}{s^3} u + \frac{(15s^2+25s+1)b_s^4}{5s^4}
 \end{aligned} \tag{123}$$

Elde edilen merkezi momentler ile  $R_s(h, u)$  operatörünün asimptotik yaklaşım davranışları analiz edilmiş ve aşağıdaki eşitlik ispatlanmıştır. Sonra ise, süreklilik modülü kullanılarak operatörün yaklaşım hızı belirlenmiş ve bu şekilde bu eşitsizliğe ulaşılmıştır.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{b_s^2} (R_s(h; u) - h(u)) = \frac{1}{2!} h''(u) \tag{124}$$

Süreklilik modülünden faydalanılarak  $R_s(h, u)$  operatörünün yaklaşım hızı belirlenmiş ve bu şekilde aşağıdaki eşitsizlik elde edilmiştir.

$$|R_s(h; u) - h(u)| \leq C \omega(h; \frac{b_s}{\sqrt{s}}) \tag{125}$$

**7. ÖNERİLER**

Çalıştığımız operatörün Durrmeyer tiplisi de tanımlanıp çalışılabilir. Ayrıca çalıştığımız Kantorovich tipindeki operatör yukarıda örneklerini verdiğimiz EKG, Robotik Manipülatör, Alzaymır'da çalışılabilir.

Biz bu konuyu kompakt bir bölgede çalıştık. Ağırlıklı uzaylarda da çalışmayı düşünüyoruz.

## KAYNAKLAR

- Acar, E. (2022).  *$[-1, 1] \times [-1, 1]$  Bölgesi Üzerinde İki Değişkenli Bernstein-Durrmeyer Polinomlarının Yaklaşımı* [dok. tezi, PhD Thesis].
- Acar, E., & Izgi, A. (2017). Approximation by Composition of  $q$ -Szász-Mirakyan and  $q$ -Durrmeyer-Chlodowsky Operators. *Turk. J. Math. Comput. Sci.*, 7, 83–89.
- Agrawal, P. N., & Ispir, N. (2016). Degree of Approximation for Bivariate Chlodowsky–Szász–Charlier Type Operators. *Results. Math.*, 69, 369–385.
- Aktuğlu, H., Kara, M., & Baytunç, E. (2024).  $\psi$ -Bernstein–Kantorovich operators. *Mathematical Methods In The Applied Sciences*, 1124–1141.
- Altomare, F., & Campiti, M. (1994). *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications*. de Gruyter.
- Aslan, R. (2014). *Ağırlıklı Uzaylarda Kantorovich-Chlodowsky-Szász Tipi Operatörlerin Yaklaşımı ve Yaklaşım Hızı* [Y. L. tezi, Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 29s].
- Aslan, R. (2020). *Üçgensel bölgede iki değişkenli bernstein-kantorovich operatörü ile yaklaşım* [dok. tezi, PhD Thesis].
- Aslan, R., & Izgi, A. (2020). Ağırlıklı Uzaylarda  $q$ -Szász-Kantorovich-Chlodowsky Operatörlerinin Yaklaşımları. *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 36(1), 138–150.
- Atak, S., & İbikli, E. (2012). *Chlodowsky-Taylor polinomlarıyla yaklaşım* [Y. L. tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü].
- Bernstein, S. N. (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Commun. Kharkov Math. Soc.*, 13, 1–2.
- Bohman, H. (1952). On approximation of continuous and of analytic functions. *Ark. Mat.*, 2(1), 43–56.
- Butzer, P. L., & Nessel, R. J. (1971). *Fourier Analysis and Approximation*. Academic Press.
- Chlodowsky, I. (1937). Sur le développement des fonctions définies dans un intervalle infini en séries de polynomes de M. S. Bernstein. *Compositio Mathematica*, 4, 380–393.
- Chutthavong, V., vd. (2014). A mathematical model for ECG waveform using rational Bézier curves and Bernstein polynomials. *IEEE*, 1–5.
- Çevik, E. (2019). *Modifiye  $(p, q)$ -bernstein tipi operatörlerin yaklaşım özellikleri* [Y. L. tezi, Tez].
- Çiçek, H. (2022). *Üçgensel Bölgede İki Değişkenli Bernstein Durrmeyer Tipindeki Operatörün Yaklaşımı* [dok. tezi, PhD Thesis].
- Çiçek, H., J. Zainalabdin & İzgi, A. (2022). A new generalization of Szász-Kantorovich operators on weighted space. *Turkish Journal of Science*, 7(2), 85–106.

- Çilo, A. (2012). *Approximation properties and speed of approximation of Bernstein polynomials in the interval  $[-1,1]$*  [Y. L. tezi, Harran University, Institute of Science] [(In Turkish)].
- Çilo, A., Ural, A., & İzgi, A. (2012). Properties of Approximation and Rate of Approximation Bernstein Polynomials in the range. XXV. *Ulusal Matematik Sempozyumu*.
- Damar, N. A. (2025). *Simetrik Aralık Üzerindeki Bernstein-Kantorovich Polinomlarının Bir Modifikasyonu* [dok. tezi, PhD Thesis].
- Demiray, R. (2013). *Convergence in the Variation Seminorm Of Bernstein And Bernstein Chlodovsky Polynomials* [Y. L. tezi, Master Science, In The Department Of Mathematics].
- Dinsever, D. K., & İzgi, A. (2019). Approximation properties of Bernstein-Kantorovich type operators of two variables. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 68(2), 2313–2323.
- Dinsever, D. K., & Ozbay, M. (2024). On the statistical approximation of  $q$ -Bernstein-Kantorovich operators on the symmetric interval. *Journal of Contemporary Applied Mathematics*, 14(2).
- Döne, Y. (2011). *Bernstein- Stancu Polinomlarıyla Yaklaşım* [Y. L. tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı].
- Hacısalıhoğlu, H. H., & Hacıyev, A. H. (1995). *Lineer Pozitif Operatörlerle Yaklaşım Teorisine Giriş*. Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.
- Ilıkkın, A. (2005). *Ağırlıklı Uzaylarda Szasz Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri Ve Yakınsaklık Oranı* [Y. L. tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı].
- Izadbakhsh, A., Khorashadizadeh, S., & Ghandali, S. (2020). Robust adaptive impedance control of robot manipulators using Szász–Mirakyan operator as universal approximator. *ISA transactions*, 106, 1–11.
- İzgi, A. (2012). Approximation By Composition Of Szasz-Mirakyan and Durrmeyer-Chlodowsky Operators. *Eurasian Math. J.*, 3(1), 63–71.
- İzgi, A., & Serenbay, S. K. (2020). Approximation by complex Chlodowsky-Szasz-Durrmeyer operators in compact disks. *Creat. Math. Inform.*, 29(1), 37–44.
- Kantorovich, L. V. (1930). Sur certains développements suivant les polynomes de la forme de S. Bernstein, I, II. *CR Acad. URSS*, 563–568, 595–600.
- Karaisa, A., & Aral, A. (2016). Some Approximation Properties of Kantorovich Variant of Chlodowsky Operators Based on  $q$ -integer. ., 65, 97–119.
- Kawasaki. (t.y.). Şirket (Şekil 2.6) [Web/Görsel Kaynağı].
- Keleş, G. S. (2018).  *$[-1, 1]$  aralığında Bernstein-Schurer operatörlerinin yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızı* [dok. tezi, PhD Thesis].
- Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 90, 961–964.

- Korovkin, P. P. (1960). *Linear Operators and Approximation Theory*. Gordon; Breach.
- Lohaj-Misini, A., Trupaj, B., & Rexhepi, S. (2022). Generalized Szasz-Chlodowsky Type Operators Involving d-Orthogonal Brenke Polynomials For Functions With One And Two Variables. *Palestine Journal of Mathematics*, 11(2), 114–128.
- Natanson, I. P. (1955). *Theory of Functions of a Real Variable. Vol I*. Ungar.
- Natanson, I. P. (1964). *Theory of Functions of a Real Variable. Vol II*. Ungar.
- Öztel, B. (2023). *Genelleştirilmiş q-Szasz Mirajkan Kantorovich Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri Ve Yaklaşım Hızı* [dok. tezi, PhD Thesis].
- Szász, O. (1950). Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval. *J. Res. Nat. Bur. of Standards*, 45, 239–245.
- Totik, V. (1983). Approximation by Szasz–Mirakjan–Kantorovich operators in  $L_p(p > 1)$ . *Analysis Mathematica*, 9(2), 147–167.