T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PARA-HERMİTYEN MANİFOLDLARIN Bİ SLANT ALTMANİFOLDLARI ÜZERİNE

MEHMET FATİH TEZCANLAR

MATEMATİK

Şanlıurfa
2025

T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PARA-HERMİTYEN MANİFOLDLARIN Bİ SLANT ALTMANİFOLDLARI ÜZERİNE

MEHMET FATİH TEZCANLAR

MATEMATİK
Tez Danışmanı: Prof. Dr. MEHMET GÜLBAHAR

Şanlıurfa
2025

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PARA-HERMİTYEN MANİFOLDLARIN Bİ-SLANT ALTMANİFOLDLARI ÜZERİNE

Mehmet Fatih TEZCANLAR

Harran Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Mehmet GÜLBAHAR
Yıl: 2026, sayfa: 50

Bu tezde, kompleks ve para-Hermityen manifoldlar üzerinde tanımlanan slant, bi-slant ve semi-slant altmanifold kavramları incelenmiştir. Bu tez, yedi bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde bi-slant altmanifoldlar literatürde yapılan başlıca çalışmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde, kompleks yapılar ve altmanifoldların geometrisi hakkında temel tanım ve teoremler sunulmuştur. Hermityen manifoldların bi-slant altmanifoldlarının çeşitli örnekler üzerinden bu altmanifoldların geometrik özellikleri tartışılmıştır. Üçüncü bölümde, para-Hermityen manifoldların altmanifoldlar teorisi ele alınmış ve bi-slant altmanifoldların temel özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde, Para-Hermityen manifoldların bi-slant bir altmanifoldun θ-slant olabilmesi için sağlanması gereken koşullar belirlenmiştir. Bu tezin geriye kalan bölümlerinde, tartışma, sonuçlar ve öneriler kısımlarına yer verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Kompleks manifold, para-Hermityen manifold, bi-slant altmanifold.

ABSTRACT

MSc Thesis

ON BI-SLANT SUBMANIFOLDS OF PARA-HERMİTİAN MANIFOLDS

Mehmet Fatih TEZCANLAR

Harran University
Graduate School of Graduate Education Institute
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Mehmet GÜLBAHAR
Year: 2026, page: 50

In the present thesis, the notions of slant, bi-slant and semi-slant submanifolds Hermitian and para-Hermitian manifolds are examined. This thesis consists of seven chapters. In the first section, main studies on bi-slant submanifolds in the literature are mentioned. In the second section, basic definitions and theorems on the geometry of complex structures and submanifolds are presented. The geometric properties of bi-slant submanifolds of Hermitian manifolds are discussed through various examples. In the third chapter, the submanifold theory of para-Hermitian manifolds is discussed and the basic properties of bi-slant submanifolds are investigated. In the fourth chapter, the conditions for a bi-slant submanifold of a Para-Hermitian manifold to be slant are determined. The remaining chapters of this thesis include discussion, conclusions, and recommendations.

KEYWORDS: Complex manifold, para-Hermitian manifold, bi-slant submanifold.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitim sürecinde değerli bilgi, rehberlik ve desteği ile bana yol gösteren, akademik birikimini tevazusuyla her zaman örnek aldığım danışmanım Prof. Dr. Mehmet GÜLBAHAR hocama en içten teşekkürlerimi sunarım. Yüksek lisans sürecinde bana Latex'i öğreten ve lisans eğitimim boyunca bana büyük katkılarda bulunan Prof. Dr. Tanfer TANRIVERDİ hocama gönülden teşekkür ederim. Yüksek lisans sürecinde desteklerinden dolayı görev yapmakta olduğum Eyyübiye İlçe Sağlık Müdürlüğü Aile Hekimliği İzleme Değerlendirme birimindeki tüm ekip arkadaşlarıma yürekten teşekkür ederim. Bu zorlu süreçte her daim sabır, anlayış ve desteği ile yanımda olan sevgili eşim Emine TEZCANLAR'a, her başarımda payı olan, bana güç ve motivasyon kaynağı olan kızlarım Fatma Nur ve Meryem'e sonsuz teşekkür ederim. Onların sevgisi ve desteği bu çalışmayı tamamlamamda en büyük ilham kaynağım olmuştur.

1. GİRİŞ

Hermityen manifoldların ve Kaehler manifoldların altmanifoldları teorisi, yüzeyler ve eğriler teorisi gibi matematikçiler tarafından yaygın olarak çalışılmaktadır. Bu manifoldların invaryant altmanifoldları (Calabi, 1953a; Calabi, 1953b) tarafından, anti-invaryant altmanifoldları (Chen ve Ogiue, 1974) tarafından çalışılmıştır.

$(\widetilde{M}, \widetilde{g}, J)$ hemen hemen Hermityen manifoldu, $\widetilde{g}$ Hermityen metriği ve J hemen hemen kompleks yapısı ile verilsin. $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, J)$ hemen hemen Hermityen manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. Her X teğet vektör alanı için

$$JX = TX + NX$$

yazılsın. Burada, TX vektörü JX in teğet kısmı, NX vektörü ise JX in normal kısmıdır. Eğer $T = 0$ ise M altmanifoldu invaryant, $N = 0$ ise anti-invaryant olarak isimlendirilir.

1990 yılında B. Y. Chen (Chen, 1990), invaryant ve anti-invaryant altmanifoldunun bir genellemesi olarak slant altmanifoldlar kavramını şöyle ifade etmiştir.

Her X teğet vektörü için JX ile M nin teğet uzayı arasındaki açı θ sabit ise M altmanifolduna slant altmanifoldu denir. $\theta = 0$ ise M altmanifoldu invaryant bir altmanifold, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise M altmanifoldu anti-invaryant bir altmanifold olur.

Bu tanımdan esinlenerek slant distribüsyonların geometrisi (Cabrerizo vd., 2000) tarafından incelenmiştir. Hermityen manifoldların altmanifoldlarının teğet uzayı üzerinde tanımlanan distribüsyonların invaryant, anti-invaryant ve slant olması durumları göz önüne alınarak CR-altmanifold, semi-invaryant ve hemi-slant altmanifoldlar tanıtılmış ve bu altmanifoldların geometrisi çeşitli yazarlar tarafından incelenmiştir (Chen, 1981; Chen, 2001; Papaghuic, 2009; Sahin, 2009).

CR-altmanifold, semi-invaryant, hemi-slant ve slant altmanifoldların bir genellemesi olarak ele alınabilecek bi-slant altmanifoldlar ilk olarak A. Carriazo (Carriazo, 2000) tarafından tanıtılmıştır.

Semi-Riemann geometride, para-Hermityen manifoldlar kavramı ilk olarak (Rasevskii, 1948) ve (Libermann, 1954) tarafından tanıtılmıştır. Para-Hermityen manifoldlar üzerinde hemen hemen çarpım yapısına ve hemen hemen Hermityen metriğe sahip manifoldlardır. Para-Hermityen manifoldların slant altmanifoldları (Alegre ve Carriazo, 2017) tarafından çalışılmıştır. Bu altmanifoldların bi-slant, semi-slant ve hemi-slant altmanifoldlarını karakterize eden teoremler (Alegre ve Carriazo, 2019) tarafından elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasında aşağıda verilen problemlerin cevabı aranmıştır:

- Para-Hermityen manifoldların (θ, θ) bi-slant altmanifoldlarının θ-slant bir altmanifold olması için hangi koşullar gereklidir.
- Para-Hermityen manifoldların (θ_1, θ_2) bi-slant altmanifoldlarının $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ slant bir altmanifold olması için hangi koşullar gereklidir.
- Para-Hermityen manifoldların (θ_1, θ_2), $\theta_1 \neq \theta_2$ koşulunu sağlayan bi-slant altmanifoldları slant bir altmanifold olabilir mi?

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1. Kompleks Yapılar

Tanım 2.1 *I dönüşümü V üzerinde tanımlı birim dönüşüm olmak üzere V vektör uzayı üzerinde $J^2 = -I$ ile tanımlı J lineer endomorfizmine bir kompleks yapı denir (Hsiung, 1995).*

Önerme 2.2 *Bir J kompleks yapıya sahip V reel vektör uzayının boyutu çifttir (Martin, 1991).*

Önerme 2.3 *J, boyutlu $2n$ olan reel bir vektör uzayı V üzerinde tanımlı bir kompleks yapısı olsun. Bu durumda $\{X_1, \ldots, X_n\}$ lineer bağımsız vektörler ise*

$$\{X_1, \ldots, X_n, JX_1, \ldots, JX_n\}$$

kümesi V üzerinde bir bazıdır (Kobayashi ve Nomizu, 1969).

Teorem 2.4 *$\mathbb{R}^{2n}$, J kompleks yapısına sahip $2n-$boyutlu reel bir vektör uzayı olmak üzere $\mathbb{R}^{2n}$ ile $\mathbb{C}^n$ uzayları birbirine izomorftur (Okubu, 1987).*

Tanım 2.5 *$\mathbb{R}^{2n}$ nin kompleks yapısı $J_0 : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$,*

$$J_0(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = (y_1, \ldots, y_n, -x_1, \ldots, -x_n)$$

ile verilsin. Burada tanımlanan J_0 tensörüne kanonik kompleks yapı denir ve J_0 tensörüne karşılık gelen matris $[J_0]$ olmak üzere

$$[J_0] = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$$

dır (Kobayashi ve Nomizu, 1969).

Tanım 2.6 *$\mathbb{C}^n$ nin bir W açık alt cümlesi üzerinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon f olsun. $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, için $p = z_0 \in W$ noktasında*

$$\lim_{\Delta z_k \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z_k) - f(z_0)}{\Delta z_k}$$

limit değeri her k *için mevcut ve* $\Delta z_k, \Delta x_k$ *ve* Δy_k *yaklaşımından bağımsız ise* f *fonksiyonuna holomorfiktir denir.* f *holomorfik bir fonksiyon ise* $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial y_k}, \ \frac{\partial u}{\partial y_k} = -\frac{\partial v}{\partial x_k}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitliklere Cauchy-Riemann denklemleri adı verilir.

$W \subset \mathbb{C}^n$ *kümesi üzerinde verilen kompleks değerli* f *fonksiyonu Cauchy-Riemann denklemlerini sağlarsa bu fonksiyon holomorfik bir fonksiyon olur (Okubu, 1987).*

Tanım 2.7 M *bir Hausdorff uzay olmak üzere* M *de* $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in I$ *açık altkümeleri verilsin. Eğer* $\forall p \in M$ *noktasında*

$$\Psi_\alpha : U_\alpha \subset M \to W_\alpha \subset \mathbb{C}^n$$

homeomorfizmaları mevcut olup $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ *için*

$$\Psi_\alpha o \Psi_\beta^{-1} : \Psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \Psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta),$$
$$\Psi_\beta o \Psi_\alpha^{-1} : \Psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \Psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümleri holomorfik ise M *ye kompleks bir manifold denir. Burada* $\{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ *kümesi* M *nin holomorfik koordinat komşuluğu sistemi olarak isimlendirilir (Yano ve Kon, 1984).*

Tanım 2.8 $\{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ *kümesi* M *kompleks manifoldunun holomorfik koordinat komşuluğu sistemi olsun. Bu durumda,* $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ *için*

$$\Psi(p) = (z_1(p), \ldots, z_n(p))$$

tanımlanırsa $z_i(p)$ *sayısına lokal koordinatlar ve* $(z_1, \ldots, z_n)$ *sistemine lokal koordinat sistemi olarak isimlendirilir.*

T_pM nin bir bazı $\left\{\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial y_k}\right\}$, $k \in \{1, ..., n\}$ olmak üzere $J : T_pM \to T_pM$ dönüşümü $J(\frac{\partial}{\partial x_k}) = \frac{\partial}{\partial y_k}$ ve $J(\frac{\partial}{\partial y_k}) = -\frac{\partial}{\partial x_k}$ ile tanımlanırsa J dönüşümüne T_pM üzerinde bir kompleks yapıdır denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.9 *M reel $2n$-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold ve $\forall p \in M$ için $J_p : T_pM \to T_pM$ lineer dönüşümü $J^2 = -I$ eşitliğini sağlıyorsa bu tensöre M üzerinde hemen hemen kompleks bir yapı denir. M manifolduna ise J hemen hemen kompleks yapıyla birlikte hemen hemen kompleks bir manifold adı verilir (Yano ve Kon, 1984).*

Teorem 2.10 *Hemen hemen kompleks manifoldların boyutu çiftir (Kobayashi ve Nomizu, 1969).*

Tanım 2.11 *M hemen hemen kompleks bir manifold ve M nin hemen hemen kompleks yapısı J olsun. M üzerinde bir Riemann metriği g olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \tag{2.1}$$

şartını sağlayan g metriğine M üzerinde hemen hemen Hermityen bir metrik adı verilir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.12 *M hemen hemen kompleks bir manifold olmak üzere M üzerinde g Hermityen metriği tanımlı ise (M, g) ikilisine hemen hemen Hermityen bir manifold denir. M bir kompleks manifold ve M üzerinde (2.1) eşitliğini sağlayan g metriği tanımlı ise (M, g) ikilisine Hermityen bir manifold denir (Yano ve Kon, 1984).*

2.2. Kompleks Manifoldların Bi-Slant Altmanifoldları

Tanım 2.13 *$(\overline{M}, \overline{g})$ ve (M, g) sırası ile m ve n boyutlu Riemann manifoldları olsun. $i : M \to \overline{M}$ immersiyonu göz önüne alalım. $\forall p \in M$ için*

$$g_p(u, v) = \overline{g}_{i(p)}(i_*u, i_*v)$$

ise (M, g) manifolduna $(\overline{M}, \overline{g})$ manifoldunun bir altmanifoldu denir. $m-n$ sayısına ise M altmanifoldun ek boyutu denir. Eğer ek boyut $m - n = 1$ ise (M, g) altmanifolduna hiperyüzey denir (Şahin, 2012).

(M, g), $(\overline{M}, \overline{g})$ Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. $T_p\overline{M}$ uzayı için

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^{\perp}$$

veya

$$T\overline{M} = TM \oplus TM^{\perp}$$

eşitlikleri yazılabilir (Şahin, 2012).

Tanım 2.14 *$(\widetilde{M}, \widetilde{g}, J)$ üçlüsü bir hemen hemen Hermityen manifold ve (M, g) ise bu manifoldun bir alt manifoldu olsun. Her $p \in M$ noktası ve her $X_p \in T_pM$ tanjant vektörü için JX_p ile T_pM tanjant uzayı arasındaki açı $\theta(X_p)$, $(0 \leq \theta(X_p) \leq \pi/2)$ sabit ise M altmanifoldun bir slant altmanifold, θ açısına ise slant açı adı verilir (Chen, 1990).*

- *Eğer $\theta = 0$ ise (M, g) slant altmanifolduna kompleks altmanifold veya invaryant altmanifold,*
- *$\theta = \pi/2$ ise (M, g) slant altmanifolduna totally reel altmanifold veya anti-invaryant altmanifold,*
- *$\theta \in (0, \pi/2)$ ise (M, g) slant altmanifolduna proper slant altmanifold*

adı verilir.

Örnek 2.15 $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ *uzayı üzerinde*

$$J(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$$

hemen hemen kompleks yapısı verilsin. Burada $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $\mathbb{R}^4$ ün lokal kordinat sistemidir. $\mathbb{R}^4$ ün bir altmanifoldu

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 = 0,\ x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

verilsin. Bu durumda,

$$\Gamma(TM) = span\left\{X_1 = \frac{\partial}{\partial x_3},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x_4}\right\}$$

ve

$$\Gamma(TM^{\perp}) = span\left\{X_3 = \frac{\partial}{\partial x_1},\ X_4 = \frac{\partial}{\partial x_2}\right\}$$

bulunur. O halde,

$$JX_1 = \frac{\partial}{\partial x_4} = X_2 \text{ ve } JX_2 = \frac{\partial}{\partial X_3} = -X_1$$

olduğundan $\forall X \in \Gamma(TM)$ *için* $JX \in \Gamma(TM)$ *olur. Böylece* M *altmanifoldu invaryant bir altmanifoldtur.*

Örnek 2.16 *Örnek 2.15 de verilen hemen hemen Hermityen manifold* $(\mathbb{R}^4, J)$ *göz önüne alınsın.* $(\mathbb{R}^4, J)$ *üzerinde*

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_2 = x_4 = 0,\ x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

altmanifoldu verilsin. Bu durumda

$$\Gamma(TM) = span \left\{ X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$$

ve

$$\Gamma(TM^{\perp}) = span \left\{ X_3 = \frac{\partial}{\partial x_2},\ X_4 = \frac{\partial}{\partial x_4} \right\}$$

olur. $JX_1 = X_3$ *ve* $JX_2 = X_4$ *olduğundan* $\forall X \in T_pM$ *için* $JX \in T_p^{\perp}M$ *olur. Bu ise* M *nin anti-invaryant bir altmanifold olduğunu gösterir.*

Örnek 2.17 $\mathbb{R}^4$ *uzayında hemen hemen kompleks bir yapı*

$$J(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_4, -x_3, x_2, x_1)$$

ile verilsin. $\mathbb{R}^4$ *uzayının bir altmanifoldu*

$$M = \{(x_1 \cos\theta, x_1 \sin\theta, x_2 \cos\theta, x_2 \sin\theta) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ , \theta \in (0, \pi/2)\}$$

tanımlansın. Bu durumda,

$$\Gamma(TM) = span \left\{ X_1 = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial x_2},\ X_2 = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x_3} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial x_4} \right\}$$

ve

$$\Gamma(TM^{\perp}) = span \left\{ X_3 = -\sin\theta \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial x_2},\ X_4 = -\sin\theta \frac{\partial}{\partial x_3} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial x_4} \right\}$$

olur. Burada,

$$\widetilde{g}(JX_1, X_2) = \sin 2\theta,\ \ \widetilde{g}(JX_1, X_4) = \cos 2\theta,\ \widetilde{g}(JX_2, X_3) = -\cos 2\theta$$

eşitliklerinden

$$JX_1 = \sin 2\theta X_2 + \cos 2\theta X_4 \quad ve \quad JX_2 = -\sin 2\theta X_1 - \cos 2\theta X_3$$

elde edilir. Bu ise M *altmanifoldunun* $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\theta$ *slant açılı bir slant altmanifold olduğunu gösterir.*

(M, g), $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, J)$ hemen hemen Hermityen manifoldunun slant bir altmanifoldu olsun. Bu halde herhangi bir X teğet vektör alanı için JX vektörü

$$JX = TX + FX$$

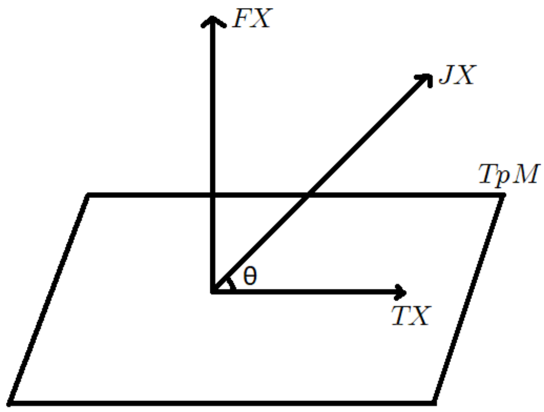
biçiminde yazabiliriz. Burada, TX vektörü JX vektörünün teğet kısmı, FX ise JX vektörünün normal kısmıdır.

Teorem 2.18 (M, g) *slant altmanifoldu için*

$$T^2X = (-\cos^2\theta)X \tag{2.2}$$

eşitliği sağlanır (Chen, 1990).

İspat. JX ile TX arasındaki açı θ olduğundan



Şekil 1

$$\cos\theta = \frac{\widetilde{g}(JX, TX)}{\|JX\|\,\|TX\|} = \frac{g(TX, TX)}{\sqrt{g(X, X)}}$$

elde edilir. Son eşitlikten

$$g(TX, TX) = (\cos^2\theta)g(X, X)$$

olur. Böylece

$$\widetilde{g}(TX, JX) = (\cos^2\theta)g(X, X)$$

yazılabilir. Son eşitlikten

$$\widetilde{g}(JTX, X) = (-\cos^2\theta)g(X, X)$$

elde edilir. Bu ise $g(T^2X, X) = (-\cos^2\theta)g(X, X)$ olduğunu gösterir.

Teorem 2.19 *$\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ kümesi M üzerinde bir lokal ortanormal çatı alanı olmak üzere M, θ-slant olması için gerek ve yeter koşul*

$$\sum_{i=1}^{n} \widetilde{g}(JX_j, X_i)\, \widetilde{g}(JX_k, X_i) = \delta_{jk}\cos^2\theta$$

eşitliği sağlanır. Burada, $j, k \in \{1, 2, ..., n\}$ ve δ_{jk} Kronocker deltasıdır (Maeda, vd. 1993).

İspat. M, θ-slant bir altmanifold ise

$$\begin{aligned}
JX_1 &= (\cos\theta)X_2 + FX_1, \\
JX_2 &= (\cos\theta)X_1 + FX_2, \\
&\vdots \\
JX_{n-1} &= (\cos\theta)X_n + FX_{n-1}, \\
JX_n &= (\cos\theta)X_{n-1} + FX_{n-1}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitliklerden teoremin ispatı açıktır.

Tanım 2.20 *(M, g) Riemann manifoldunda*

$$\begin{aligned}
D : M &\longrightarrow T_pM \\
p &\longrightarrow D_p \subset T_pM
\end{aligned}$$

dönüşümüne bir distribüsyon adı verilir (Boothby, 2003).

Tanım 2.21 *$(M, g), (\widetilde{M}, \widetilde{g}, J)$ hemen hemen Hermityen manifoldun bir altmanifoldu olsun. Eğer $JD = D$ ise D ye kompleks ya da invaryant distribüsyon, $JD \subseteq T_pM^{\perp}$ ise D ye totally reel ya da anti-invaryant distribüsyon denir. $\forall p \in M$ ve $\forall X_p \in D_p$ için JX_p ile D_p arasındaki açı $\theta_D(X_p)$ sabit ise D distribüsyonuna slant distribüsyon denir (Cabrerizo vd., 2000).*

D distribüsyonu θ_D slant açılı bir distribüsyon olsun.

- $\theta_D = 0$ ise D distribüsyonu invaryant bir distribüsyon olur.
- $\theta_D = \frac{\pi}{2}$ ise D distribüsyonu anti-invaryant bir distribüsyon olur.

Örnek 2.22 $\mathbb{R}^6$ *uzayından hemen hemen kompleks bir yapı*

$$J(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (-x_5, x_6, -x_3, x_4, x_1, x_6)$$

ile verilsin. $\mathbb{R}^6$ *uzayının bir altmanifoldu*

$$M = \left\{(x_1 \cos\theta, x_1 \sin\theta, x_2, x_2, x_3, x_4) : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})\right\}$$

tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned}\Gamma(TM) &= span\left\{X_1 = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x_1} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial x_2},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4},\right. \\ &\qquad \left. X_3 = \frac{\partial}{\partial x_5}, X_4 = \frac{\partial}{\partial x_4}\right\}\end{aligned}$$

ve

$$\Gamma(TM^{\perp}) = span\left\{X_5 = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial x_2},\ X_6 = \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4}\right\}$$

olur. Burada,

$$D_1 = span\{X_1, X_3\}, \quad D_2 = span\{X_2, X_4\}.$$

alınırsa

$$\tilde{g}(JX_1, X_3) = \cos\theta,\ \tilde{g}(JX_3, X_1) = -\cos\theta,\ \tilde{g}(JX_2, X_4) = \tilde{g}(JX_4, X_2) = 0$$

olduğundan D_1, θ açılı bir slant distribüsyondur ve D_2 ise anti-invaryant bir distribüsyondur.

(M, g) üzerinde D_1 ve D_2 iki distribüsyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}JX &= TX + FX \\ &= PTX + QTX + FX\end{aligned}$$

yazılabilir. Son eşitlikte $PTX \in D_1$ ve $QTX \in D_2$ dir. Eğer D_1 slant bir distribüsyon ise Theorem 2.18 den

$$(PT)^2 X = (-\cos^2\theta)X \tag{2.3}$$

eşitliğinin sağladığı gösterilebilir (Cabrerizo vd., 2000).

Tanım 2.23 *(M, g), $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, J)$ hemen hemen Hermityen manifoldunun bir altmanifoldu olsun. $TM = D_1 \oplus D_2$ olacak şekilde D_1 ve D_2 distribüsyonları verilsin:*

- *D_1 distribüsyonu invaryant, D_2 distribüsyonu anti-invaryant ise M ye bir CR altmanifold (Chen, 1981),*
- *D_1 distribüsyonu invaryant, D_2 distribüsyonu slant ise M ye bir semi-slant altmanifold (Papaghuic, 1983),*
- *D_1 distribüsyonu anti-invaryant, D_2 distribüsyonu slant ise M ye hemi-slant altmanifold (Sahin, 2009),*
- *D_1 distribüsyonu θ_1-slant, D_2 distribüsyonu θ_2-slant ise M ye (θ_1, θ_2) bi-slant bir altmanifold (Carriazo, 2000)*

denir.

Bu tanımdan aşağdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.24 *(M, g), $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, J)$ hemen hemen Hermityen manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Bu durumda,*

i) M nin bir CR altmanifoldu olması için gerek ve yeter koşul M nin $(0, \frac{\pi}{2})$ bi-slant olmasıdır.

ii) M nin semi-slant olması için gerek ve yeter koşul M nin $(0, \theta_2)$, $\theta_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, bi-slant olmasıdır.

iii) M nin anti-slant olması için gerek ve yeter koşul M nin $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ olmak üzere $\left(\frac{\pi}{2}, \theta_2\right)$ bi-slant olmasıdır.

Bi-slant altmanifold örnekleri için aşağdaki grafik gösterim yöntemini kullanacağız.

1) M altmanifoldunun boyutu n ve $\widetilde{M}$ nın boyutu m olmak üzere $B = \{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$, ortanormal bir çatı alanı için $X_1, X_2, \ldots, X_n$, M nin teğet uzayında $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots, X_m$ ise M nin normal uzayında yatan vektörleri göstersin.

2) B kümesinin herbir vektör alanın indeksi bir köşeyi ifade etsin.

3) Grafikte $\widetilde{g}(JX_i, X_j) \neq 0$ koşulu sağlayan her X_i ve X_j vektörü bir kenar tanımlansın.

4) X_i ile X_j nin oluşturduğu kenarın uzunluğu $[\widetilde{g}(JX_i, X_j)]^2$ ile gösterilsin.

$\mathbb{R}^{2n}$ uzayında J hemen hemen kompleks yapısı

$$J = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

ile tanımlansın.

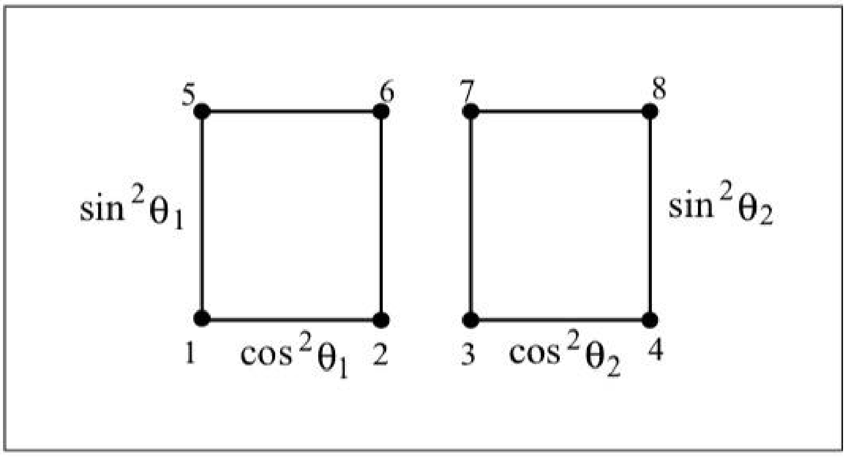
Örnek 2.25 $\mathbb{R}^8$ *uzayında* $\theta_1, \theta_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *için* M *altmanifoldu*

$$\varphi_1(u, v, w, s) = (u\ \cos\theta_1, u\sin\theta_1, w\cos\theta_2, w\sin\theta_2, v, 0, s, 0)$$

ile verilsin. Bu durumda,

$$X_1 = \cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_2},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x_5},\ X_3 = \cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + \sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_4},$$
$$X_4 = \frac{\partial}{\partial x_7},\ X_5 = \frac{\partial}{\partial x_6},\ X_6 = \sin\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \cos\theta_1 \frac{\partial}{\partial x_2},\ X_7 = \frac{\partial}{\partial x_8},$$
$$X_8 = \sin\theta_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - \cos\theta_2 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

olur. $\Gamma(TM) =$ *span* $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ *ve* $\Gamma(TM^{\perp}) =$ *span* $\{X_5, X_6, X_7, X_8\}$ *olur. Bu altmanifold için aşağdaki grafik sunumunu elde ederiz:*



Şekil 2 (Carriazo, 2000)

$D_1 = span\{X_1, X_2\}$, $D_2 = span\{X_3, X_4\}$ olsun. Bu durumda M nin (θ_1, θ_2) bi-slant altmanifold olduğu grafikten görülür (Carriazo, 2000).

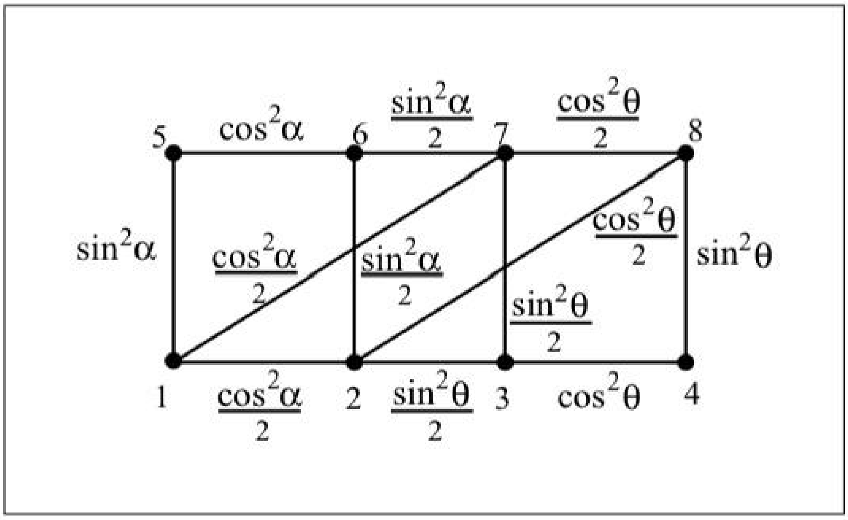
Örnek 2.26 *$\alpha, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ için $\cos\theta = (\cos\alpha)\sqrt{2}$ olsun. $\mathbb{R}^8$ uzayının bir M altmanifoldu*

$$\varphi_2(u,v,w,s) = (u\ \cos\alpha, u\sin\alpha, w\ \cos\theta, w\sin\theta, v, 0, s, v)$$

ile tanımlansın. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
X_1 &= \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x_1} + \sin\alpha\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x_5} + \frac{\partial}{\partial x_8}\right),\\
X_3 &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial x_3} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial x_4}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial x_7}\\
X_5 &= \frac{\partial}{\partial x_6}, \quad X_6 = \sin\alpha\frac{\partial}{\partial x_1} - \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x_2},\\
X_7 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x_5} - \frac{\partial}{\partial x_8}\right), \quad X_8 = \sin\theta\frac{\partial}{\partial x_3} - \cos\theta\frac{\partial}{\partial x_4}
\end{aligned}$$

olup aşağdaki grafiği elde ederiz.



Şekil 3 (Carriazo, 2000)

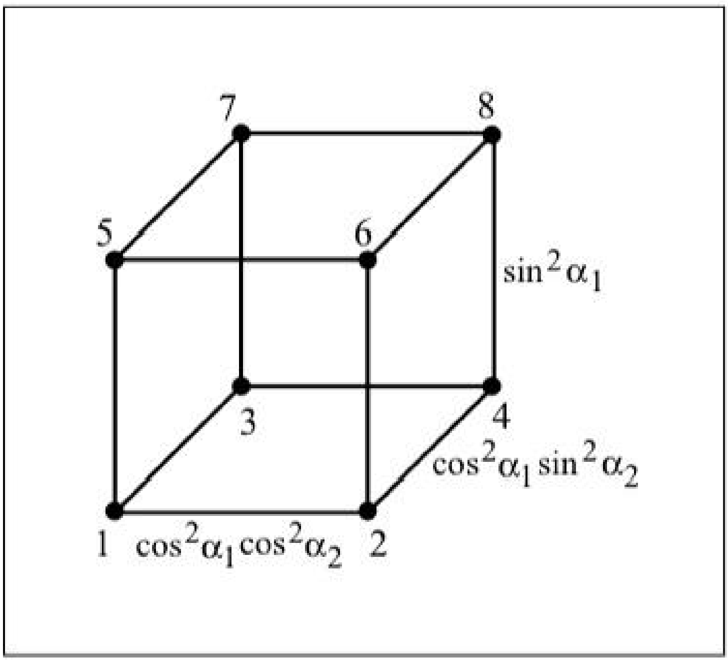
$D_1 = span\{X_1, X_2\}$, $D_2 = span\{X_3, X_4\}$ olsun. Böylece M, (θ, θ) bi-slant altmanifoldtur. Fakat M slant bir altmanifold değildir (Carriazo, 2000).

Örnek 2.27 $\alpha_1, \alpha_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *için* $\mathbb{R}^8$ *de ortanormal bir çatı*

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_4}, \\
X_2 &= \frac{\partial}{\partial x_5}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_7}, \\
X_4 &= -\cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_4}, \\
X_5 &= \cos\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_6} + \sin\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_8}, \quad X_6 = -\sin\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \\
X_7 &= -\sin\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + \cos\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_4}, \quad X_8 = -\sin\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_6} + \cos\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_8}
\end{aligned}
$$

alınırsa aşağıdaki grafik elde edilir.

Ayrıca, $D_1 = span\{X_1, X_2\}$, $D_2 = span\{X_3, X_4\}$ *alınırsa ve* $\cos^2\theta = \cos^2\alpha_1 \cos^2\alpha_2$ *seçilirse* M*, hem* (θ, θ) *bi-slant altmanifold hem de* α_1*-slant altmanifold olur (Carriazo, 2000).*



Şekil 4 (Carriazo, 2000)

Yukarıda verilen örneklerden aşağıdaki durumlar ortaya çıkar.

- M, (θ, θ) bi-slant altmanifold ise aynı zamanda θ-slant olabilir.
- M, (θ, θ) bi-slant altmanifold ise M, θ-slant olmayabilir.

- M, (θ, θ) bi-slant altmanifold ise M, $\alpha \neq \theta$ için α-slant olabilir.
- M, (θ_1, θ_2) bi-slant ve M, slant bir altmanifold değildir.

Bu durumlar göz önüne alındığında aşağıdaki problem ortaya çıkar.

Problem 2.28 *Bir bi-slant altmanifoldun slant bir altmanifold olması için gerekli koşullar nelerdir?*

Lemma 2.29 *M, (θ_1, θ_2) bi-slant altmanifold olsun. Bu durumda $\forall X \in TM$ için aşağdaki eşitlik sağlanır (Carriazo, 2000).*

$$\begin{aligned} T^2X &= (-\cos^2\theta_1)P_1X + P_2TP_1TP_1X + P_1TP_2TP_1X + P_2TP_2TP_1X + \\ &\quad P_1TP_1TP_2X + P_2TP_1TP_2X + P_1TP_2TP_2X - (\cos^2\theta_2)P_2X. \qquad (2.4) \end{aligned}$$

İspat. Her $X \in TM$ için $P_1X \in D_1$ ve $P_2X \in D_2$ olmak üzere

$$X = P_1X + P_2X$$

yazılabilir. Böylece,

$$TX = TP_1X + TP_2X = P_1TP_1X + P_2TP_1X + P_1TP_2X + P_2TP_2X$$

olur. Son eşitliğe tekrar T uygulanırsa

$$\begin{aligned} T^2X &= TP_1TP_1X + TP_2TP_1X + TP_1TP_2X + TP_2TP_2X \\ &= P_1TP_1TP_1X + P_2TP_1TP_1X + P_1TP_2TP_1X \\ &\quad + P_2TP_2TP_1X + P_1TP_1TP_2X + P_2TP_1TP_2X \\ &\quad + P_1TP_2TP_2X + P_2TP_2TP_2X \qquad (2.5) \end{aligned}$$

bulunur. (2.3) eşitliğinden

$$(P_1T)^2P_1X = (-\cos^2\theta_1)P_1X \qquad (2.6)$$

ve

$$(P_2T)^2P_2X = (-\cos^2\theta_2)P_2X \qquad (2.7)$$

yazılabilir. (2.6) ve (2.7) eşitlikleri (2.5) de yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 2.30 *M, (θ_1, θ_2) bi-slant altmanifold olsun. M altmanifoldunun θ-slant olması için gerek ve yeter koşul*

$$P_2TP_1TP_1 + P_2TP_2TP_1 = 0, \tag{2.8}$$

$$P_1TP_1TP_2 + P_1TP_2TP_2 = 0, \tag{2.9}$$

$$P_1TP_2TP_1 = \left(\cos^2\theta_1 - \cos^2\theta\right) P_1, \tag{2.10}$$

$$P_2TP_1TP_2 = \left(\cos^2\theta_2 - \cos^2\theta\right) P_2 \tag{2.11}$$

eşitlikleri sağlanır (Carriazo, 2000).

İspat. M, θ-slant altmanifold olsun. Bu durumda, D_1 ve D_2 distribüsyonları üzerinde, sırasıyla, $\left\{X_1^1, X_2^1, \ldots, X_{d_1}^1\right\}$ ve $\left\{X_1^2, X_2^2, \ldots, X_{d_2}^2\right\}$ ortonormal bazları verilsin. Burada boy$D_1 = d_1$ ve boy$D_2 = d_2$ dir. $X_i^1 \in D_1$ ve $X_k^2 \in D_2$, $i = \{1, 2, \ldots, d_1\}$ ve $k = \{1, 2, \ldots, d_k\}$ için

$$D_1 = \text{span}\left\{X_1^1, (\sec\theta_1)P_1TX_1^1, \ldots, X_{d_1-1}^1, (\sec\theta_1)P_1TX_{d_1-1}^1\right\}$$

ve

$$D_2 = \text{span}\left\{X_1^2, (\sec\theta_2)P_2TX_1^2, \ldots, X_{d_2-1}^2, (\sec\theta_2)P_2TX_{d_2-1}^2\right\}$$

seçilebilir. (2.4) eşitliğinde X yerine $X_i^1 \in D_1$ yazılırsa

$$T^2X_i^1 = (-\cos^2\theta_1)P_1X_i^1 + P_2TP_1TP_1X_i^1 + P_1TP_2TP_1X_i^1 + P_2TP_2TP_1X_i^1$$

elde edilir. Son eşitlikte (2.2) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}(-\cos^2\theta)X_i^1 &= (-\cos^2\theta_1)P_1X_i^1 + P_2TP_1TP_1X_i^1 + P_1TP_2TP_1X_i^1 \\ &\quad + P_2TP_2TP_1X_i^1\end{aligned}$$

olur. $X_i^1 \in D_1$ olduğundan

$$P_2TP_1TP_1X_i^1 + P_2TP_2TP_1X_i^1 = 0 \tag{2.12}$$

ve

$$P_1TP_2TP_1X_i^1 = (\cos^2\theta_1 - \cos^2\theta)P_1X_i^1 \tag{2.13}$$

bulunur. (2.12) ve (2.13) eşitlikleri $\forall X_i^2 \in D_2$ için doğru olduğundan (2.8) ve (2.10) eşitlikleri elde edilir.

(2.4) eşitliğinde X yerine $X_i^2 \in D_2$ yazılarak ve yukarıdaki ispat yöntemine benzer bir yol izleyerek (2.9) ve (2.11) eşitlikleri elde edilebilir.

Problem 2.31 *Bir (θ_1, θ_2) bi-slant altmanifoldun $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ eşitliğini sağlayan θ-slant bir altmanifold olması için hangi şartlar gereklidir.*

Teorem 2.32 *M, $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ olacak şekilde bir bi-slant altmanifold olsun. M, θ-slant bir altmanifold olması için gerek ve yeter koşul $\forall X \in D_1$ ve $\forall Y \in D_2$ için*

$$g(JX, Y) = 0 \tag{2.14}$$

eşitliği sağlanır (Carriazo, 2000).

İspat. M, θ-slant ise $X_j^1 \in D_1$ ve $X_i^2 \in D_2$ için Theorem 2.19 kullanılırsa

$$\sum_{i=1}^{m} g^2(JX_j^1, X_i^2) = \cos^2\theta$$

yazılabilir. boy $D_1 = d_1$ ve boy $D_2 = m - d_1$ olmak üzere, son eşitlik

$$\sum_{i=1}^{d_1} g^2(JX_j^1, X_i^2) + \sum_{i=d_1+1}^{m} g^2(JX_j^1, X_i^2) = \cos^2\theta \tag{2.15}$$

olarak yazılabilir. M, (θ_1, θ_2) bi-slant altmanifold olduğu göz önüne alınırsa (2.15) eşitliğinden

$$\cos^2\theta_1 + \sum_{i=d_1+1}^{m} g^2(JX_j^1, X_i^2) = \cos^2\theta \tag{2.16}$$

bulunur. $\theta = \theta_1$ olduğundan

$$\sum_{i=d_1+1}^{m} g^2(JX_j^1, X_i^2) = 0 \tag{2.17}$$

elde edilir. (2.17) eşitliği $X_j^1 \in D_1$ ve $X_i^2 \in D_2$ için doğru olduğundan (2.14) sağlanır.

Tersine (2.14) sağlanırsa bu durumda $i \neq j$ için $P_j T P_i = 0$ olup (2.8)-(2.11) eşitliği sağlanır. Bu ise M nin θ-slant olduğunu gösterir.

Uyarı 2.33 *Dikkat edilecek olursa, Örnek 2.26 da verilen bi-slant altmanifold, (2.14) eşitliğini sağlar.*

Problem 2.34 *boy $D_1 = d_1$ ve boy $D_2 = d_2$ olmak üzere M, (θ_1, θ_2) bi-slant altmanifold olsun. $d_1 = d_2$ ve $\theta_1 \neq \theta_2$ ise M slant bir altmanifold olabilir mi?*

Bu problemin cevabı aşağıdaki teoremde verilecektir.

Teorem 2.35 *M, (θ_1, θ_2) bi-slant altmanifold olsun. $d_1 = d_2 \neq 0$ ve M slant bir altmanifold ise $\theta_1 = \theta_2$ dir (Carriazo, 2000).*

İspat. Teorem 2.32 den $X_j^1 \in D_1$ ve $X_i^2 \in D_2$ için

$$d_1 \cos^2 \theta_1 + \sum_{j=1}^{d_1}\sum_{i=1}^{d_2} g^2(TX_j^1, X_i^2) = d_1 \cos^2 \theta \tag{2.18}$$

ve

$$d_2 \cos^2 \theta_2 + \sum_{j=1}^{d_2}\sum_{i=1}^{d_1} g^2(TX_j^2, X_i^1) = d_2 \cos^2 \theta \tag{2.19}$$

yazılabilir. (2.18) ve (2.19) dan

$$d_1(\cos^2 \theta - \cos^2 \theta_1) = d_2(\cos^2 \theta - \cos^2 \theta_2)$$

elde edilir. $d_1 = d_2$ ise $\theta_1 = \theta_2$ olur. Bu ise ispatı tamamlar.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Para-Hermityen Manifoldların Altmanifoldları

Tanım 3.1 *V, reel bir vektör uzayı ve V üzerinde simetrik bilineer dönüşüm g olsun. $0 \neq \xi \in V$ olmak üzere her $v \in V$ için*

$$g(\xi, v) = 0 \tag{3.1}$$

ise g metriğine V üzerinde dejenere bir metrik denir. (3.1) eşitliğini sağlayan $\xi \neq 0$ vektörü mevcut değilse g metriğine non-dejeneredir denir (Duggal ve Bejancu 1996).

Tanım 3.2 *V reel vektör uzayında $g|_w$ nın negatif tanımlı olduğu en geniş W alt uzayının boyutuna V üzerinde g metriğinin indeksi denir (Duggal ve Bejancu 1996).*

Tanım 3.3 *V reel bir vektör uzayı, g, V üzerinde non-dejenere bir metrik olsun. Eğer $v \in V$ vektörü için*

- *$g(v, v) > 0$ veya $v = 0$ ise $v \in V$ vektörüne space-like vektör,*
- *$g(v, v) < 0$ ise $v \in V$ vektörüne time-like vektör,*
- *$g(v, v) = 0$ ise $v \neq 0$ vektörüne null ya da lightlike vektör*

adı verilir (O'Neil, 1983).

Tanım 3.4 *$\widetilde{M}$, reel m-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olsun.*

$$\widetilde{g}_p \;\; : \;\; T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, non-dejenere, (0,2) tipindeki $\widetilde{g}$ tensör alanına M üzerinde metrik tensör denir. Eğer M manifoldu bir $\widetilde{g}$ metrik tensörü ile donatılmış ise M ye bir semi-Riemann manifold denir (O'Neil, 1983).

Tanım 3.5 *$(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ bir semi-Riemann manifold olsun. $\widetilde{g}$ metrik tensörünün indeksine $\widetilde{M}$ nın indeksi denir ve $\widetilde{M}$ nin indeksi ind $(\widetilde{M})$ ile gösterilir (O'Neil 1983).*

ind$(\widetilde{M}) = q$ *olsun. Bu durumda* $0 \leq q \leq$ *boy* $\widetilde{M}$ *dir. Özel olarak* $q = 0$ *ise* M *manifolduna bir Riemann manifoldu,* $q = 1$ *ve boy* $\widetilde{M} > 2$ *ise* $\widetilde{M}$ *manifolduna bir Lorentz manifoldu denir (O'Neil, 1983).*

Tanım 3.6 $\widetilde{M}$*,* $2n$*-boyutlu bir semi-Riemann manifold olsun. Eğer* $\forall X \in \Gamma(T\widetilde{M})$ *için*

$$J^2X = X, \quad \widetilde{g}(JX, Y) + \widetilde{g}(X, JY) = 0 \tag{3.2}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, J)$ *üçlüsene bir para-Hermityen manifold denir (Ivanov ve Zamkovoy, 2008).*

Tanım 3.7 M*,* $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, J)$ *hemen hemen para-Hermityen bir manifold olsun. Eğer* $\widetilde{\nabla}_X J = 0$ *eşitliği* $\forall X \in \Gamma(T\widetilde{M})$ *için sağlanıyorsa bu manifolda para-Kahler manifold adı verilir (Ivanov ve Zamkovoy, 2008).*

(M, g), $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, J)$ nin bir altmanifoldu olsun. $\forall X \in \Gamma(TM)$ ve $\forall V \in \Gamma(TM^{\perp})$ için

$$JX = TX + FX \text{ ve } JV = tV + fV \tag{3.3}$$

yazılabilir. Burada, $TX, tV \in \Gamma(TM)$ ve $FX, fV \in \Gamma(TM^{\perp})$ dir.

JX ile TX vektörleri arasındaki açı θ olsun. Bu durumda

$$\cos\theta = \frac{\widetilde{g}(JX, TX)}{\|JX\| \ \|TX\|} = \frac{\|TX\|^2}{\|JX\| \ \|TX\|} = \frac{\|TX\|}{\|JX\|} \tag{3.4}$$

olur. (3.2) eşitliğinden

$$\widetilde{g}(JX, JX) = -\widetilde{g}(X, J^2X) = g(X, X) \tag{3.5}$$

olup (3.5) eşitliği (3.4) de yerine yazılırsa

$$\cos\theta = \frac{\|TX\|}{\|X\|} \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.6) eşitliğin yarı-Riemann manifoldlar üzerindeki her X tanjant vektörü için yazılamaz. Çünkü, X null bir vektör olduğunda (3.6) eşitliği tanımsız olur. Bundan dolayı para-Hermityen manifoldların slant altmanifoldlarının tanımı aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 3.8 *(M,g), $(\tilde{M},\tilde{g},J)$ para-Hermityen manifoldun bir altmanifoldu olsun. Her X time-like veya space-like vektörü için*

$$\frac{\|TX\|}{\|JX\|} = sabit \tag{3.7}$$

ise (M,g) manifolduna θ-slant altmanifold adı verilir.

Not edelim ki M invaryant bir altmanifold ise $J \equiv T$ veya $\theta = 0$, M anti-invaryant bir altmanifold ise $J \equiv F$ veya $\theta = \frac{\pi}{2}$ olur. Hem invaryant hemde anti-invaryant altmanifoldlar slant altmanifoldların özel bir durumudur. $\theta \neq 0$ ve $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ olacak şekilde θ-slant altmanifoldlara proper slant altmanifold denir (Alegre ve Carriazo, 2017).

Önerme 3.9 *M, $(\widetilde{M},\widetilde{g},J)$ para-Hermityen manifoldun 2-boyutlu proper slant bir altmanifoldu olsun. $\{e_1,e_2\}$ kümesi M üzerinde ortanormal bir çatı alanı olsun. Bu durumda aşağdaki üç durum gerçekleşir:*

1) Te_1 time-like ve $|\mu| > 1$ ise Fe_1 space-like vektördür.

2) Te_1 time-like ve $|\mu| < 1$ ise Fe_1 time-like vektördür.

3) Te_1 space-like ise Fe_1 time-like vektördür.

Burada, $Te_1 = \mu e_2$ ve $\mu \neq 0$ ve $\mu \neq \mp 1$ dir (Alegre ve Carriazo, 2017).

İspat. (3.3) ve (3.5) eşitliklerinden

$$g(e_1,e_1) = \widetilde{g}(Je_1,Je_1) = g(Te_1,Te_1) + \widetilde{g}(Fe_1,Fe_1)$$

olup bu eşitlikte $Te_1 = \mu e_2$ yazılırsa

$$\widetilde{g}(Fe_1,Fe_1) = (1-\mu^2)g(e_1,e_1) \tag{3.8}$$

elde edilir. (3.8) eşitliğinden önermede verilen 3 durumun ispatı kolaylıkla elde edilebilir.

Önerme 3.9 den proper slant altmanifoldların 3 farklı tipi aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 3.10 (M, g), $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, J)$ *para-Hermityen manifoldun bir proper slant bir altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağdaki üç tip mevcuttur.*

Tip 1 *Herhangi bir X space-like (time-like) vektörü için TX time-like (space-like) ve $\frac{\|TX\|}{\|JX\|} > 1$ dir.*

Tip 2 *Herhangi bir X space-like (time-like) vektörü için TX time-like (space-like) ve $\frac{\|TX\|}{\|JX\|} < 1$ dir.*

Tip 3 *Herhangi bir X space-like (time-like) vektörü için TX space-like (time-like) dır (Alegre ve Carriazo, 2017).*

Uyarı 3.11 *Semi-Riemann manifoldların non-dejenere altmanifoldlarının Wirtinger açısı (slant açısı) bu alt manifold üzerindeki tüm vektör alanları için tanımlanamaz. Bu durum, Tanım 3.10 da görülmektedir (Alegre ve Carriazo, 2017).*

Uyarı 3.12 *Her space-like veya time-like X vektör alanı için $g(TX, TX) = 0$ veya $g(TX, TX) = g(JX, JX)$ olsun. Bu durumda, $F = 0$ veya $T = 0$ olur ki M sırasıyla, invaryant veya anti-invaryant altmanifold olur. Eğer $TX \neq 0$ ve TX null bir vektör ise bu durumda X yerine $X + Y$ yazılırsa*

$$g(T(X+Y), T(X+Y)) = 2g(TX, TY) = 0$$

elde edilir ki bu ise g nin non-dejenere olması ile çelişir (Alegre ve Carriazo, 2017).

Teorem 3.13 (M, g), $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, J)$ *para-Hermityen manifoldun bir altmanifoldu olsun. Bu durumda,*

(1) M, Tip 1 slant altmanifold olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir space-like (time-like) vektör alanı X ve time-like (space-like) TX vektör alanı için $\lambda \in (1, +\infty)$ sabiti mevcuttur öyleki

$$T^2 = \lambda I_n$$

dir. Burada, $\lambda = \cosh^2 \theta$ ve $\theta > 0$ dır.

(2) *M, Tip 2 slant altmanifold olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir space-like (time-like) vektör alanı X ve time-like (space-like) TX vektör alanı için $\lambda \in (0,1)$ sabiti mevcuttur öyleki*

$$T^2 = \lambda I_n$$

dır. Burada, $\lambda = \cos^2\theta$ ve $0 < \theta < 2\pi$ dir.

(3) *M, Tip 3 slant altmanifold olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir space-like (time-like) vektör alanı X ve time-like (space-like) TX vektör alanı için $\lambda \in (-\infty, 0)$ sabiti mevcuttur öyleki*

$$T^2 = \lambda I_n$$

dır. Burada, $\lambda = -\sinh^2\theta$ ve $\theta > 0$ dır (Alegre ve Carriazo, 2017).

İspat. M, Tip 1 slant bir altmanifold olsun. Bu durumda, X space-like ve TX time-like seçilebilir. Ayrıca, $\frac{\|TX\|}{\|JX\|} > 1$ olsun. Bu durumda, TX ve JX time-like vektörler olduğundan

$$\cosh\theta = \frac{\sqrt{-g(TX,TX)}}{\sqrt{-g(JX,JX)}} \tag{3.9}$$

yazılabilir. (3.9) eşitliğinden her X vektörü için sağlandığından X yerine TX yazılabilir. Bu durumda,

$$\cosh\theta = \frac{\|T^2X\|}{\|JTX\|} = \frac{\|T^2X\|}{\|TX\|} \tag{3.10}$$

elde edilir. Öte yandan

$$\begin{aligned} g(T^2X, X) &= g(JTX, X) = -g(TX, JX) \\ &= -g(TX,TX) = \|TX\|^2 \end{aligned} \tag{3.11}$$

dır. (3.9), (3.10) ve (3.11) eşitliklerinden

$$g(T^2X,X) = \|TX\|^2 = \|JX\|^2\cosh^2\theta = \|JX\|^2\frac{\|T^2X\|^2}{\|TX\|^2} \tag{3.12}$$

olup

$$\|TX\|^2 = \|JX\|\left\|T^2X\right\| \tag{3.13}$$

bulunur. Burada, X ve T^2X space-like olduğundan bu vektörler aynı doğrultudadır. Gerçekten $T^2 = T$ ve $JTX = TX + FTX$, $JX = TX + FX$ olduğu göz önüne alınırsa T^2X ile X aynı doğrultuda olduğu görülür. Böylece $T^2X = \lambda X$, $\lambda = \cosh^2\theta$ elde edilir.

Eğer Y time-like ve TY space-like seçilirse (3.9) eşitliği

$$\cosh\theta = \frac{\|TY\|}{\|JY\|} = \frac{\sqrt{g(TY,TY)}}{\sqrt{g(JY,JY)}} \tag{3.14}$$

olup benzer olarak $T^2X = \lambda X$, $\lambda = \cosh^2\theta$ olduğu görülür.

(1) ifadesinin tersinin ispatı açıktır.

Şimdi kabul edelim ki M, Tip 2 slant altmanifold olsun. Bu durumda herhangi bir space-like veya time-like X vektör alanı için $\frac{\|TX\|}{\|JX\|} < 1$ eşitliği sağlanırsa

$$\cos\theta = \frac{\|TX\|}{\|JX\|} = \frac{\sqrt{-g(TX,TX)}}{\sqrt{-g(JX,JX)}} \tag{3.15}$$

elde edilir. İspatın geriye kalanı Tip 1 slant durumun ispatına benzer.

M, Tip 3 slant altmanifold olsun. X ile TX space-like ise $\theta > 0$ olmak üzere

$$\sinh\theta = \frac{\|TX\|}{\|JX\|} = \frac{\sqrt{g(TX,TX)}}{\sqrt{-g(JX,JX)}} \tag{3.16}$$

olur. İspatın geriye kalan kısmı Tip 1 slant durumuna benzer şekilde yapılabilir.

Önerme 3.14 *(M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g},J)$ para-Hermityen manifoldun bir altmanifoldu olsun. Bu durumda, aşağıdaki durumlar gerçekleşir.*

(1) M, Tip 1 slant altmanifold ise $tFX = (-\sinh^2\theta)X$ eşitliği her space-like (time-like) X vektörü için sağlanır.

(2) M, Tip 2 slant altmanifold ise $tFX = (\sinh^2\theta)X$ eşitliği her space-like (time-like) X vektörü için sağlanır.

(3) M, Tip 3 slant altmanifold ise $tFX = (\cosh^2\theta)X$ eşitliği her space-like (time-like) X vektörü için sağlanır (Alegre ve Carriazo, 2017).

İspat. Herhangi bir X vektör alanı için

$$\begin{aligned} X &= J^2X = J(JX) = J(TX + FX) \\ &= JTX + JFX \\ &= T^2X + FTX + tFX + fFX \end{aligned}$$

yazılabilir. Son eşitliğin teğet ve normal kısımları göz önüne alınırsa

$$T^2X + tFX = X, \;\; FTX + fFX = 0 \tag{3.17}$$

elde edilir. M, Tip 1 slant ise

$$tFX = X - T^2X = (1 - \cosh^2\theta)X = (-\sinh^2\theta)X,$$

M, Tip 2 slant ise

$$tFX = X - T^2X = (1 - \cos^2\theta)X = (\sin^2\theta)X,$$

M, Tip 3 slant ise

$$tFX = X - T^2X = (1 + \sinh^2\theta)X = (\cosh^2\theta)X$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Örnek 3.15 $\mathbb{R}^4$ *uzayı üzerinde* J *tensörü*

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \;\; ve \;\; Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

için

$$JX = (x_2, x_1, x_4, x_3)$$

ve semi-Riemann metriği

$$g(X, Y) = x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$$

olarak verilsin. Bu durumda,

$$J^2 = I_4$$

ve

$$g(JX, Y) = x_2y_1 - x_1y_2 + x_4y_3 - x_3y_4 = -g(X, JY)$$

olur. Bu ise $(\mathbb{R}^4, g, J)$ *nin bir para-Hermityen bir manifold olduğunu gösterir (Alegre ve Carriazo, 2017).*

Örnek 3.16 $(\mathbb{R}^4, g, J)$, *Örnek 3.15 de verilen para-Hermityen manifold olsun.* $a, b \in \mathbb{R}$ *için*

$$X(u,v) = (u \sin a, v \sin b, u \cos a, v \cos b)$$

ile tanımlı M *altmanifoldu verilsin. Bu durumda,* M *nin teğet uzayı*

$$X_u = (\sin a, 0, \cos a, 0),\ X_v = (0, \sin b, 0, \cos b)$$

ve normal uzayı

$$N_1 = (-\cos a, 0, \sin a, 0),\ N_2 = (0, -\cos b, 0, \sin b)$$

vektörleri tarafından gerilir.

$$JX_u = -\sin a \sin b - \cos a \cos b = -\cos(a-b)$$

olup $TX_u = -\cos(a-b)X_v$ *olup* $T^2 = \cos^2(a-b)I_4$ *bulunur. Burada,* X_u *space-like ve* TX_u *time-like olup* M*, Tip 2 slant bir altmanifoldtur (Alegre ve Carriazo, 2017).*

Örnek 3.17 $(\mathbb{R}^4, g, J)$, *Örnek 3.15 de verilen para-Hermityen manifold olsun.* $a, b \in \mathbb{R}$ *ve* $a^2 + b^2 \neq 0$ *olmak üzere*

$$X(u,v) = (au, v, bu, v)$$

ile tanımlı M *altmanifoldu verilsin. Bu durumda,* M *nin teğet uzayı*

$$X_u = (a, 0, b, 0),\ X_v = (0, 1, 0, 1)$$

ve normal uzayı

$$N_1 = (b, 0, -a, 0),\ N_2 = (0, -1, 0, 1)$$

vektörleri tarafından gerilir.

$$JX_u = (0, a, 0, b)\ ,\ JX_v = (1, 0, 1, 0)$$

$$g(JX_u, X_v) = -a - b = -(a+b)$$

$$g(JX_u, X_u) = 0$$

ve

$$T(X_u) = \frac{g(JX_u, X_u)}{g(X_u, X_u)}X_u + \frac{g(JX_u, X_v)}{g(X_u, X_u)}X_v = \frac{a+b}{2}X_v$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$T(X_u) = \frac{a+b}{a^2+b^2}X_u$$

bulunabilir. Ayrıca,

$$T^2(X_u) = T(\frac{(a+b)}{2}X_v) = \frac{(a+b)^2}{2(a^2+b^2)}X_u$$

$$T^2(X_v) = \frac{(a+b)^2}{2(a^2+b^2)}X_v$$

ve

$$T^2 = \frac{(a+b)^2}{2(a^2+b^2)}I_4$$

bulunur. Burada X_u vektörü space-like, TX_u vektörü time-like olup

$$0 < \lambda = \frac{(a+b)^2}{2(a^2+b^2)} < 1$$

ve M, Tip 2 slant bir altmanifoldtur (Alegre ve Carriazo, 2017).

Örnek 3.18 $(\mathbb{R}^4, g, J)$, *Örnek 3.15 de verilen para-Hermityen manifold olsun. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a^2 + b^2 \neq 1$ olmak üzere*

$$X(u, v) = (au, v, bu, u)$$

ile tanımlı M altmanifoldu verilsin. Bu durumda, M nin teğet uzayı

$$X_u = (a, 0, b, 1),\ X_v = (0, 1, 0, 0)$$

ve normal uzayı

$$N_1 = (b, 0, -a, 0),\ N_2 = (1, 0, 0, 0)$$

vektörleri tarafından gerilir.

$$JX_u = (0, a, 1, b),\ JX_v = (1, 0, 0, 0)$$

$$g(JX_u, X_v) = -a,\ g(JX_u, X_u) = 0$$

$$g(X_u, X_u) = a^2 + b^2 - 1,\ g(X_v, X_v) = -1$$

ve

$$T(X_u) = \frac{g(JX_u, X_u)}{g(X_u, X_u)} X_u + \frac{g(JX_u, X_v)}{g(X_u, X_u)} X_v = \frac{-b}{a^2 + b^2 - 1} X_u + aX_v$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$T(X_v) = \frac{a}{a^2 + b^2 - 1} X_u$$

bulunur. Ayrıca,

$$T^2(X_u) = T(\frac{-b}{a^2 + b^2 - 1} X_u + aX_v) = \frac{a^2}{a^2 + b^2 - 1} X_u$$

ve

$$T^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2 - 1} I_4$$

bulunur. Böylece

$$\lambda = \frac{a^2}{a^2 + b^2 - 1}$$

olur. Son eşitlikten aşağıdaki durumlar elde edilir.

(1) $a^2 + b^2 > 1$ *ve* $b^2 < 1$ *ise* $\lambda > 1$ *olup* M*, Tip 1 slant bir altmanifoldtur.*

(2) $a^2 + b^2 > 1$ *ve* $b^2 > 1$ *ise* $1 > \lambda > 0$ *olup* M*, Tip 2 slant bir altmanifoldtur.*

(3) $a^2 + b^2 < 1$ *ise* $\lambda < 0$ *olup* M*, Tip 3 slant bir altmanifoldtur (Alegre ve Carriazo, 2017).*

Teorem 3.19 M*,* $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, J)$ *hemen hemen para-Hermityen manifoldunun slant bir altmanifoldu olsun.*

(1) M*, Tip 1 slant ise* $j = \frac{1}{\cosh\theta} T$ *,* M *üzerinde para-Hermityen bir yapı belirtir.*

(2) M*, Tip 2 slant ise* $j = \frac{1}{\cos\theta} T$ *,* M *üzerinde para-Hermityen bir yapı belirtir.*

(3) M*, Tip 3 slant ise* $j = \frac{1}{\sinh\theta} T$ *,* M *üzerinde para-Hermityen bir yapı belirtir (Alegre ve Carriazo, 2017).*

İspat. M, Tip 1 slant bir altmanifold ve $\forall\ X \in \Gamma(TM)$ için $j(X) = \frac{1}{\cosh\theta}TX$ ise

$$j(j(X)) = j(\frac{1}{\cosh\theta}TX) = \frac{1}{\cosh\theta}j(TX) = \frac{1}{\cosh^2\theta}T^2X$$

olup son eşitlikte $T^2X = \cosh^2\theta X$ olduğu yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa (1) ispatı elde edilir.

Benzer şekilde (2) ve (3) ün ispatı verilebilir.

$(\widetilde{M}, \widetilde{g}, J)$ para-Hermityen manifoldun üzerinde D non-dejenere bir distribüsyon olsun. Herbir null olmayan X vektörünü

$$JX = P_DX + P_D^{\perp}X$$

biçiminde yazılabilir. Burada, $P_DX \in D$ ve $P_D^{\perp}X \in D^{\perp}$ dir.

Tanım 3.20 *Her null olmayan X vektörü için $g(P_DX, P_DX)/\widetilde{g}(JX, JX)$ oranı sabit ise D distribüsyonuna bir slant distribüsyon denir (Alegre ve Carriazo, 2019).*

Slant açısı sıfıra eşit ise D distribüsyonu invaryant bir distribüsyon, slant açısı $\frac{\pi}{2}$ ise D distribüsyonu anti-invaryant bir distribüsyon olur. İnvaryant ve anti-invaryant olmayan slant bir distribüsyona proper slant bir distribüsyon denir (Alegre ve Carriazo, 2019).

Teorem 3.21 *D, $\widetilde{M}$ para-Hermityen manifoldunun üzerinde bir distribüsyon olsun. Bu durumda,*

(1) Eğer D invaryant bir distribüsyon ise $\forall X \in D$ için $\|P_DX\| = \|JX\|$ dir.

(2) Eğer D anti-invaryant bir distribüsyon ise $\forall X \in D$ için $\|P_DX\| = 0$ dır (Alegre ve Carriazo, 2019).

Tanım 3.10 da kullanılan notasyonlara benzer bir düşünce ile slant distribüsyonlar için aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.22 *D bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, J)$ para-Hermityen manifoldun proper slant distribüsyon olsun. Bu durumda, aşağıdaki üç tip mevcuttur.*

***Tip 1** Herhangi bir X space-like (time-like) vektörü için $P_D X$, time-like (space-like) ve $\frac{\|P_D X\|}{\|JX\|} > 1$ dir.*

***Tip 2** Herhangi bir X space-like (time-like) vektörü için $P_D X$, time-like (space-like) ve $\frac{\|P_D X\|}{\|JX\|} < 1$ dir.*

***Tip 3** Herhangi bir X space-like(time-like) vektörü için $P_D X$ space-like (time-like) dır (Alegre ve Carriazo, 2019).*

Teorem 3.13 da kullanılan notasyonlara benzer bir düşünce ile slant distribüsyonlar için aşağıdaki tanım verilebilir.

Teorem 3.23 *D bir $(\widetilde{M}, \tilde{g}, J)$ para-Hermityen manifoldun proper slant distribüsyonu olsun. Bu durumda*

(1) D, Tip 1 slant bir distribüsyon olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir space-like (time-like) vektör alanı X ve time-like (space-like) $P_D X$ vektör alanı için $\lambda \in (1, +\infty)$ sabiti mevcuttur öyle ki

$$P_D^2 = \lambda I_n$$

dir. Burada $\lambda = \cos h^2\theta$ ve $\theta > 0$ dır.

(2) D, Tip 2 slant distribüsyon olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir space-like (time-like) vektör alanı X ve time-like (space-like) $P_D X$ vektör alanı için $\lambda \in (0, 1)$ sabiti mevcuttur öyle ki

$$P_D^2 = \lambda I_n$$

dır. Burada, $\lambda = \cos^2\theta$ ve $0 < \theta < 2\pi$ dir.

(3) D, Tip 3 slant distribüsyon olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir space-like (time-like) vektör alanı X ve time-like (space-like) $P_D X$ vektör alanı için $\lambda \in (-\infty, 0)$ sabiti mevcuttur öyle ki

$$P_D^2 = \lambda I_n$$

dır. Burada $\lambda = -\sin h^2\theta$ ve $\theta > 0$ dır (Alegre ve Carriazo, 2019).

Tanım 3.24 *$(\widetilde{M}, \widetilde{g}, J)$ para-Hermityen bir manifold M, $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, J)$ manifoldun bir altmanifoldu olsun. $TM = D_1 \oplus D_2$ olacak şekilde D_1 ve D_2 slant distribüsyonlar ise bu altmanifolda bi-slant altmanifold denir. Burada,*

1. *D_1 invaryant ise M manifolduna semi-slant altmanifold adı verilir.*
2. *D_2 anti-invaryant ise M manifolduna hemi-slant altmanifold adı verilir (Alegre ve Carriazo, 2019).*

Örnek 3.25 *$\mathbb{R}^4$ uzayı üzerinde aşağıdaki para-Kaehler yapıları göz önüne alalım: $\forall X, Y \in \mathbb{R}^4$ için*

$$JX = (x_2, x_1, x_4, x_3),\ \widetilde{g}(X, Y) = x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$$

ve

$$J_1X = (x_3, x_4, x_1, x_2),\ \widetilde{g}_1(X, Y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4$$

verilsin. Bu durumda, $(\mathbb{R}^4, \widetilde{g}, J)$ ve $(\mathbb{R}^4, \widetilde{g}_1, J_1)$ manifoldaları birer para-Hermityen manifold olur. $\mathbb{R}^8$ uzayında

$$J_2 = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}, \quad \widetilde{g}_2 = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix},$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}, \quad \widetilde{g}_3 = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix},$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{g}_4 = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_1 \end{pmatrix}$$

tanımlanırsa $(\mathbb{R}^8, \widetilde{g}_k, J_k)$, $(k \in \{2, 3, 4\})$ birer para-Kaehler manifold olur (Alegre ve Carriazo, 2019).

Örnek 3.26 *$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $a^2 + b^2 \neq 1$, $c^2 + d^2 \neq 1$ olsun.*

$$\varphi(u_1, v_1, u_2, v_2) = (au_1, v_1, bu_1, u_1, cu_2, v_2, du_2, u_2)$$

ile tanımlı altmanifoldun teğet uzayı

$$\begin{aligned} X_1 &= (a,0,b,1,0,0,0,0) = a\frac{\partial}{\partial x_1} + b\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4} \\ X_2 &= (0,1,0,0,0,0,0,0) = \frac{\partial}{\partial x_2} \\ X_3 &= (0,0,0,0,c,0,d,1) = c\frac{\partial}{\partial x_5} + d\frac{\partial}{\partial x_7} + \frac{\partial}{\partial x_8} \\ X_4 &= (0,0,0,0,0,1,0,0) = \frac{\partial}{\partial x_6} \end{aligned}$$

vektörleri tarafından gerilir. $D_1 = span\,\{X_1, X_2\}$ *ve* $D_2 = span\,\{X_3, X_4\}$ *alınırsa*

$$\begin{aligned} JX_1 &= (0,a,1,b,0,0,0,0) = a\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} + b\frac{\partial}{\partial x_4} \\ JX_2 &= (1,0,0,0,0,0,0,0) = \frac{\partial}{\partial x_1} \\ JX_3 &= (0,0,0,0,0,c,1,d) = c\frac{\partial}{\partial x_6} + \frac{\partial}{\partial x_7} + d\frac{\partial}{\partial x_8} \\ JX_4 &= (0,0,0,0,1,0,0,0) = \frac{\partial}{\partial x_5} \end{aligned}$$

olup

$$\widetilde{g}(X_1, X_1) = a^2 + b^2 - 1, \quad \widetilde{g}(X_2, X_2) = -1, \qquad \widetilde{g}(JX_1, X_2) = -a$$
$$\widetilde{g}(JX_3, X_4) = -c, \quad \widetilde{g}(X_3, X_3) = c^2 + d^2 - 1, \quad \widetilde{g}(X_4, X_4) = -1$$

eşitlikleri elde edilir. Direkt bir hesaplama ile

$$P_{D_1}X_1 = aX_2, \quad P_{D_1}X_2 = \frac{a}{a^2+b^2-1}X_1,$$
$$P_{D_2}X_1 = \frac{c}{c^2+d^2-1}X_1, \quad P_{D_2}X_2 = cX_2$$

bulunur. Bu eşitliklerden

$$P_{D_1}^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2-1}I_{d_1} \ \ ve \ \ P_{D_2}^2 = \frac{c^2}{c^2+d^2-1}I_{d_2}$$

olup bu altmanifold $(\mathbb{R}^8, \widetilde{g}_2, J_2)$ *para-Hermityen manifoldunun aşağıdaki tabloda verildiği gibi bir bi-slant altmanifoldu olur (Alegre ve Carriazo, 2019).*

	D_1	D_2
Tip 1	$a^2+b^2>1$ ve $b^2<1$	$c^2+d^2>1$ ve $d^2<1$
Tip 2	$a^2+b^2>1$ ve $b^2>1$	$c^2+d^2>1$ ve $d^2>1$
Tip 3	$a^2+b^2<1$	$c^2+d^2<1$

Tablo 1 (Alegre ve Carriazo, 2019)

Örnek 3.27 *$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $a^2 - b^2 \neq 1$, $c^2 - d^2 \neq 1$ olsun. $\mathbb{R}^8$ uzayında*

$$\varphi(u_1, v_1, u_2, v_2) = (u_1, av_1, bv_1, v_1, u_2, cu_2, dv_2, u_2)$$

ile tanımlı altmanifoldun teğet uzayı

$$X_{u_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_{v_1} = a\frac{\partial}{\partial x_2} + b\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4},$$
$$X_{u_2} = \frac{\partial}{\partial x_5} + c\frac{\partial}{\partial x_6} + \frac{\partial}{\partial x_8}, \quad X_{v_2} = d\frac{\partial}{\partial x_7}$$

vektörleri tarafından gerilir. $D_1 =$ span $\{X_{u_1}, X_{v_1}\}$ ve $D_2 =$ span $\{X_{u_2}, X_{v_2}\}$ alınırsa bu altmanifold $(\mathbb{R}^8, \tilde{g}_2, J_2)$ uzayında

$$P_{D_1} = \frac{a^2}{1 + a^2 - b^2} I_{d_1} \quad ve \quad P_{D_2} = \frac{c^2}{1 + c^2 - d^2} I_{d_2}$$

olmak üzere aşağıdaki tabloda verildiği gibi bir bi-slant altmanifoldu olur.

	D_1	D_2
Tip 1	$b^2 - a^2 < 1$ ve $b^2 > 1$	$d^2 - c^2 < 1$ ve $d^2 > 1$
Tip 2	$b^2 - a^2 < 1$ ve $b^2 < 1$	$d^2 - c^2 < 1$ ve $d^2 < 1$
Tip 3	$b^2 - a^2 > 1$	$d^2 - c^2 > 1$

Tablo 2 (Alegre ve Carriazo, 2019)

Bu altmanifold $(\mathbb{R}^8, \tilde{g}_3, J_3)$ uzayında ise

$$P_{D_1} = \frac{a^2}{1 + a^2 - b^2} I_{d_1} \quad ve \quad P_{D_2} = \frac{c^2}{1 + c^2 - d^2} I_{d_2}$$

olmak üzere aşağıdaki tabloda verildiği gibi bir bi-slant altmanifoldu olur.

	D_1	D_2
Tip 1	$b^2 - a^2 > 1$ ve $a^2 > 1$	$d^2 - c^2 < 1$ ve $d^2 > 1$
Tip 2	$b^2 - a^2 > 1$ ve $a^2 < 1$	$d^2 - c^2 < 1$ ve $d^2 < 1$
Tip 3	$b^2 - a^2 < 1$	$d^2 - c^2 > 1$

Tablo 3 (Alegre ve Carriazo, 2019)

Bu altmanifold $(\mathbb{R}^8, \tilde{g}_4, J_4)$ uzayında

$$P_{D_1} = \frac{a^2}{1 + a^2 - b^2} I_{d_1} \quad ve \quad P_{D_2} = \frac{c^2}{1 + c^2 - d^2} I_{d_2}$$

olmak üzere aşağıdaki tabloda verildiği gibi bir bi-slant altmanifoldu olur (Alegre ve Carriazo, 2019).

	D_1	D_2
Tip 1	$b^2 - a^2 > 1$ ve $a^2 > 1$	$d^2 - c^2 > 1$ ve $c^2 > 1$
Tip 2	$b^2 - a^2 > 1$ ve $a^2 < 1$	$d^2 - c^2 > 1$ ve $c^2 < 1$
Tip 3	$b^2 - a^2 < 1$	$d^2 - c^2 < 1$

Tablo 4 (Alegre ve Carriazo, 2019)

4. BULGULAR

4.1. Para-Hermityen Manifoldların Bi-Slant Altmanifoldları Üzerine Bulgular

Bu bölümde para-Hermityen manifoldların bi-slant altmanifoldlarının slant olması durumu incelenecektir.

Şimdi aşağıda verilen problemin çözümü araştırılacaktır.

Problem 4.1 *$(\widetilde{M}, \tilde{g}, J)$ para-Hermityen manifoldun (θ_1, θ_2) bi-slant altmanifoldunun θ-slant bir manifold olması için gereken koşul nedir?*

Teorem 4.2 *M, $(\widetilde{M}, \tilde{g}, J)$ para-Hermityen bir manifoldun (θ_1, θ_2) bi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki tablo elde edilir.*

$(\widetilde{M}, J, \widetilde{g})$	Eşitlik
D_1, Tip 1 D_2, Tip 1	$T^2X = (\cosh^2\theta_1)P_1X + P_2TP_1TP_1X + P_1TP_2TP_1X + P_2TP_2TP_1X$ $+P_1TP_1TP_2X + P_2TP_1TP_2X + P_1TP_2TP_2X + (\cosh^2\theta_2)P_2X$
D_1, Tip 1 D_2, Tip 2	$T^2X = (\cosh^2\theta_1)P_1X + P_2TP_1TP_1X + P_1TP_2TP_1X + P_2TP_2TP_1X$ $+P_1TP_1TP_2X + P_2TP_1TP_2X + P_1TP_2TP_2X + (\cos^2\theta_2)P_2X$
D_1, Tip 1 D_2, Tip 3	$T^2X = (\cosh^2\theta_1)P_1X + P_2TP_1TP_1X + P_1TP_2TP_1X + P_2TP_2TP_1X$ $+P_1TP_1TP_2X + P_2TP_1TP_2X + P_1TP_2TP_2X - (\sinh^2\theta_2)P_2X$
D_1, Tip 2 D_2, Tip 1	$T^2X = (\cos^2\theta_1)P_1X + P_2TP_1TP_1X + P_1TP_2TP_1X + P_2TP_2TP_1X$ $+P_1TP_1TP_2X + P_2TP_1TP_2X + P_1TP_2TP_2X + (\cosh^2\theta_2)P_2X$
D_1, Tip 2 D_2, Tip 2	$T^2X = (\cos^2\theta_1)P_1X + P_2TP_1TP_1X + P_1TP_2TP_1X + P_2TP_2TP_1X$ $+P_1TP_1TP_2X + P_2TP_1TP_2X + P_1TP_2TP_2X + (\cos^2\theta_2)P_2X$
D_1, Tip 2 D_2, Tip 3	$T^2X = (\cos^2\theta_1)P_1X + P_2TP_1TP_1X + P_1TP_2TP_1X + P_2TP_2TP_1X$ $+P_1TP_1TP_2X + P_2TP_1TP_2X + P_1TP_2TP_2X - (\sinh^2\theta_2)P_2X$
D_1, Tip 3 D_2, Tip 1	$T^2X = (-\sinh^2\theta_1)P_1X + P_2TP_1TP_1X + P_1TP_2TP_1X + P_2TP_2TP_1X$ $+P_1TP_1TP_2X + P_2TP_1TP_2X + P_1TP_2TP_2X + (\cosh^2\theta_2)P_2X$
D_1, Tip 3 D_2, Tip 2	$T^2X = (-\sinh^2\theta_1)P_1X + P_2TP_1TP_1X + P_1TP_2TP_1X + P_2TP_2TP_1X$ $+P_1TP_1TP_2X + P_2TP_1TP_2X + P_1TP_2TP_2X + (\cos^2\theta_2)P_2X$
D_1, Tip 3 D_2, Tip 3	$T^2X = (-\sinh^2\theta_1)P_1X + P_2TP_1TP_1X + P_1TP_2TP_1X + P_2TP_2TP_1X$ $+P_1TP_1TP_2X + P_2TP_1TP_2X + P_1TP_2TP_2X - (\sinh^2\theta_2)P_2X$

Tablo 5

İspat. $\forall\, X \in TM$ için $P_1X \in D_1$ ve $P_2X \in D_2$ olmak üzere

$$X = P_1X + P_2X$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} TX &= T(P_1X + P_2X) \\ &= TP_1X + TP_2X \\ &= P_1TP_1X + P_2TP_1X + P_1TP_2X + P_2TP_2X \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğe tekrar T uygulanırsa

$$\begin{aligned} T^2X &= TP_1TP_1X + TP_2TP_1X + TP_1TP_2X + TP_2TP_2X \\ &= P_1TP_1TP_1X + P_2TP_1TP_1X + P_1TP_2TP_1X + P_2TP_2TP_1X \\ &\quad +P_1TP_1TP_2X + P_2TP_1TP_2X + P_1TP_2TP_2X \\ &\quad +P_2TP_2TP_2X \end{aligned} \tag{4.1}$$

bulunur. Son eşitlikte Teorem 3.23 kullanılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.2 de $\theta_1 = 0$ yazılarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.3 *M, $(\widetilde{M}, \tilde{g}, J)$ para-Hermityen bir manifoldun semi-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki tablo elde edilir.*

$(\widetilde{M}, J, \widetilde{g})$	Eşitlik
D_1, Tip 1 D_2, Tip 1	$T^2X = P_1X + P_2TP_1TP_1X + P_1TP_2TP_1X + P_2TP_2TP_1X$ $+P_1TP_1TP_2X + P_2TP_1TP_2X + P_1TP_2TP_2X + \cosh^2\theta_2 P_2X$
D_1, Tip 1 D_2, Tip 2	$T^2X = P_1X + P_2TP_1TP_1X + P_1TP_2TP_1X + P_2TP_2TP_1X$ $+P_1TP_1TP_2X + P_2TP_1TP_2X + P_1TP_2TP_2X + \cos^2\theta_2 P_2X$
D_1, Tip 1 D_2, Tip 3	$T^2X = P_1X + P_2TP_1TP_1X + P_1TP_2TP_1X + P_2TP_2TP_1X$ $+P_1TP_1TP_2X + P_2TP_1TP_2X + P_1TP_2TP_2X - \sinh^2\theta_2 P_2X$
D_1, Tip 2 D_2, Tip 1	$T^2X = P_1X + P_2TP_1TP_1X + P_1TP_2TP_1X + P_2TP_2TP_1X$ $+P_1TP_1TP_2X + P_2TP_1TP_2X + P_1TP_2TP_2X + (\cosh^2\theta_2)P_2X$
D_1, Tip 2 D_2, Tip 2	$T^2X = P_1X + P_2TP_1TP_1X + P_1TP_2TP_1X + P_2TP_2TP_1X$ $+P_1TP_1TP_2X + P_2TP_1TP_2X + P_1TP_2TP_2X + (\cos^2\theta_2)P_2X$
D_1, Tip 2 D_2, Tip 3	$T^2X = P_1X + P_2TP_1TP_1X + P_1TP_2TP_1X + P_2TP_2TP_1X$ $+P_1TP_1TP_2X + P_2TP_1TP_2X + P_1TP_2TP_2X - (\sinh^2\theta_2)P_2X$
D_1, Tip 3 D_2, Tip 1	$T^2X = P_2TP_1TP_1X + P_1TP_2TP_1X + P_2TP_2TP_1X$ $+P_1TP_1TP_2X + P_2TP_1TP_2X + P_1TP_2TP_2X + (\cosh^2\theta_2)P_2X$
D_1, Tip 3 D_2, Tip 2	$T^2X = +P_2TP_1TP_1X + P_1TP_2TP_1X + P_2TP_2TP_1X$ $+P_1TP_1TP_2X + P_2TP_1TP_2X + P_1TP_2TP_2X + (\cos^2\theta_2)P_2X$
D_1, Tip 3 D_2, Tip 3	$T^2X = P_2TP_1TP_1X + P_1TP_2TP_1X + P_2TP_2TP_1X$ $+P_1TP_1TP_2X + P_2TP_1TP_2X + P_1TP_2TP_2X - (\sinh^2\theta_2)P_2X$

Tablo 6

Teorem 4.4 *M, (θ_1, θ_2) bi-slant altmanifoldunun Tip 1 θ-slant bir altmanifold olması için gerek ve yeter koşul*

$$P_2TP_1TP_1 + P_2TP_2TP_1 = 0 \tag{4.2}$$

$$P_1TP_1TP_2 + P_1TP_2TP_2 = 0 \tag{4.3}$$

eşitlikleri ve aşağıdaki tabloda verilen eşitliklerin sağlanması gerekir.

$(\widetilde{M}, J, \widetilde{g})$	Eşitlik
D_1, Tip 1 Slant D_2, Tip 1 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(\cosh^2\theta_1 - \cosh^2\theta\right) P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(\cosh^2\theta_2 - \cosh^2\theta\right) P_2$
D_1, Tip 1 Slant D_2, Tip 2 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(\cosh^2\theta_1 - \cosh^2\theta\right) P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(\cos^2\theta_2 - \cosh^2\theta\right) P_2$
D_1, Tip 1 Slant D_2, Tip 3 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(\cosh^2\theta_1 - \cosh^2\theta\right) P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(-\sinh^2\theta_2 - \cosh^2\theta\right) P_2$
D_1, Tip 2 Slant D_2, Tip 1 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(\cos^2\theta_1 - \cosh^2\theta\right) P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(\cosh^2\theta_2 - \cosh^2\theta\right) P_2$
D_1, Tip 2 Slant D_2, Tip 2 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(\cos^2\theta_1 - \cosh^2\theta\right) P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(\cos^2\theta_2 - \cosh^2\theta\right) P_2$
D_1, Tip 2 Slant D_2, Tip 3 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(\cos^2\theta_1 - \cosh^2\theta\right) P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(-\sinh^2\theta_2 - \cosh^2\theta\right) P_2$
D_1, Tip3 Slant D_2, Tip1 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(-\sinh^2\theta_1 - \cosh^2\theta\right) P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(\cosh^2\theta_2 - \cosh^2\theta\right) P_2$
D_1, Tip 3 Slant D_2, Tip 2 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(-\sinh^2\theta_1 - \cosh^2\theta\right) P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(\cos^2\theta_2 - \cosh^2\theta\right) P_2$
D_1, Tip 3 Slant D_2, Tip 3 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(-\sinh^2\theta_1 - \cosh^2\theta\right) P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(-\sinh^2\theta_2 - \cosh^2\theta\right) P_2$

Tablo 7

İspat. Teorem 3.13 den M, Tip 1 θ-slant bir altmanifold ise

$$T^2X = (\cosh^2\theta)X = (\cosh^2\theta)P_1X + (\cosh^2\theta)P_2X \tag{4.4}$$

yazılabilir. (4.4) eşitliği Teorem 4.2 de verilen Tablo 5 de yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.5 *M, (θ_1, θ_2) bi-slant altmanifoldunun Tip 2 θ-slant bir altmanifold olması için gerek ve yeter koşul (4.2), (4.3) eşitlikleri ve aşağıdaki tabloda verilen eşitliklerin sağlanması gerekir.*

$(\widetilde{M}, J, \widetilde{g})$	Eşitlik
D_1, Tip 1 Slant D_2, Tip 1 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(\cosh^2\theta_1 - \cos^2\theta\right) P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(\cosh^2\theta_2 - \cos^2\theta\right) P_2$
D_1, Tip 1 Slant D_2, Tip 2 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(\cosh^2\theta_1 - \cos^2\theta\right) P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(\cos^2\theta_2 - \cos^2\theta\right) P_2$
D_1, Tip 1 Slant D_2, Tip 3 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(\cosh^2\theta_1 - \cos^2\theta\right) P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(-\sinh^2\theta_2 - \cos^2\theta\right) P_2$
D_1, Tip 2 Slant D_2, Tip 1 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(\cos^2\theta_1 - \cos^2\theta\right) P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(\cosh^2\theta_2 - \cos^2\theta\right) P_2$
D_1, Tip 2 Slant D_2, Tip 2 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(\cos^2\theta_1 - \cos^2\theta\right) P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(\cos^2\theta_2 - \cos^2\theta\right) P_2$
D_1, Tip 2 Slant D_2, Tip 3 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(\cos^2\theta_1 - \cos^2\theta\right) P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(-\sinh^2\theta_2 - \cos^2\theta\right) P_2$
D_1, Tip 3 Slant D_2, Tip 1 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(-\sinh^2\theta_1 - \cos^2\theta\right) P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(\cosh^2\theta_2 - \cos^2\theta\right) P_2$
D_1, Tip 3 Slant D_2, Tip 2 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(-\sinh^2\theta_1 - \cos^2\theta\right) P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(\cos^2\theta_2 - \cos^2\theta\right) P_2$
D_1, Tip 3 Slant D_2, Tip 3 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(-\sinh^2\theta_1 - \cos^2\theta\right) P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(-\sinh^2\theta_2 - \cos^2\theta\right) P_2$

Tablo 8

İspat. Teorem 3.13 den M, Tip 2 θ-slant bir altmanifold ise

$$T^2X = (\cos^2\theta X) = (\cos^2\theta)P_1X + (\cos^2\theta)P_2X \tag{4.5}$$

yazılabilir. (4.5) eşitliği Teorem 4.2 de verilen Tablo 5 de yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.6 *M, (θ_1, θ_2) bi-slant altmanifoldunun Tip 3 θ-slant bir altmanifold olması için gerek ve yeter koşul (4.2), (4.3) eşitlikleri ve aşağıdaki tabloda verilen eşitliklerin sağlanması gerekir.*

$(\widetilde{M}, J, \widetilde{g})$	Eşitlik
D_1, Tip 1 Slant D_2, Tip 1 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(\cosh^2\theta_1 + \sinh^2\theta\right)P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(\cosh^2\theta_2 + \sinh^2\theta\right)P_2$
D_1, Tip 1 Slant D_2, Tip 2 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(\cosh^2\theta_1 + \sinh^2\theta\right)P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(\cos^2\theta_2 + \sinh^2\theta\right)P_2$
D_1, Tip 1 Slant D_2, Tip 3 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(\cosh^2\theta_1 + \sinh^2\theta\right)P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(-\sinh^2\theta_2 + \sinh^2\theta\right)P_2$
D_1, Tip 2 Slant D_2, Tip 1 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(\cos^2\theta_1 + \sinh^2\theta\right)P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(\cosh^2\theta_2 + \sinh^2\theta\right)P_2$
D_1, Tip 2 Slant D_2, Tip 2 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(\cos^2\theta_1 + \sinh^2\theta\right)P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(\cos^2\theta_2 + \sinh^2\theta\right)P_2$
D_1, Tip 2 Slant D_2, Tip 3 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(\cos^2\theta_1 + \sinh^2\theta\right)P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(-\sinh^2\theta_2 + \sinh^2\theta\right)P_2$
D_1, Tip 3 Slant D_2, Tip 1 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(-\sinh^2\theta_1 + \sinh^2\theta\right)P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(\cosh^2\theta_2 + \sinh^2\theta\right)P_2$
D_1, Tip 3 Slant D_2, Tip 2 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(-\sinh^2\theta_1 + \sinh^2\theta\right)P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(\cos^2\theta_2 + \sinh^2\theta\right)P_2$
D_1, Tip 3 Slant D_2, Tip 3 Slant	$P_1TP_2TP_1 = \left(-\sinh^2\theta_1 + \sinh^2\theta\right)P_1$ $P_2TP_1TP_2 = \left(-\sinh^2\theta_2 + \sinh^2\theta\right)P_2$

Tablo 9

İspat. Teorem 3.13 den M, Tip 3 θ-slant bir altmanifold ise

$$T^2X = \sinh^2\theta X = \sinh^2\theta P_1X + \sinh^2\theta P_2X \tag{4.6}$$

yazılabilir. (4.6) eşitliği Teorem 4.2 de verilen Tablo 5 de yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Şimdi aşağıda verilen problemin çözümü araştırılacaktır.

Problem 4.7 *M, $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, J)$ para-Hermityen bir manifoldun (θ_1, θ_2) bi-slant altmanifoldu olsun. M altmanifoldunun $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ olacak şekilde θ-slant bir altmanifold olması için hangi şartlar gerekir?*

Bu problemin cevabını bazı özel durumlar için aşağıdaki teoremler ile vereceğiz.

Teorem 4.8 *M, $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ olacak şekilde bi-slant bir altmanifold olsun. M, sırasıyla, Tip 1 (Tip 2 veya Tip 3) , D_1 Tip 1 (Tip 2 veya Tip 3), D_2 Tip 1 (Tip 2 veya Tip*

3 slant ise $\forall X \in D_1$ *ve* $\forall Y \in D_2$ *için*

$$g(JX, Y) = 0 \tag{4.7}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $X_j^1 \in D_1$ ve $X_i^2 \in D_2$ olmak üzere M altmanifoldu Tip 1 θ-slant altmanifold olsun. Bu durumda,

$$\sum_{i=1}^{m} g^2(JX_j^1, X_i^2) = \cosh^2\theta \tag{4.8}$$

yazılabilir. Son eşitlikte boy$D_1 = d_1$ ve boy$D_2 = m - d_1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\sum_{i=1}^{d_1} g^2(JX_j^1, X_i^2) + \sum_{i=d_1+1}^{m} g^2(JX_j^1, X_i^2) = \cosh^2\theta \tag{4.9}$$

elde edilir. M, (θ_1, θ_2) bi-slant altmanifold olduğundan, (4.9) eşitliğinden

$$\cosh^2\theta_1 + \sum_{i=d_1+1}^{m} g^2(JX_j^1, X_i^2) = \cosh^2\theta \tag{4.10}$$

bulunur. $\theta = \theta_1$ olduğundan

$$\sum_{i=d_1+1}^{m} g^2(JX_j^1, X_i^2) = 0 \tag{4.11}$$

elde edilir. (4.8) ve (4.11) eşitliklerinden (4.7) elde edilir.

M, $X_j^1 \in D_1$ ve $X_i^2 \in D_2$ Tip 2 θ-slant altmanifold olsun. Bu durumda,

$$\sum_{i=1}^{m} g^2(JX_j^1, X_i^2) = \cos^2\theta \tag{4.12}$$

yazılabilir. Son eşitlikte boy$D_1 = d_1$ ve boy$D_2 = m - d_1$ göz önüne alınırsa

$$\sum_{i=1}^{d_1} g^2(JX_j^1, X_i^2) + \sum_{i=d_1+1}^{m} g^2(JX_j^1, X_i^2) = \cos^2\theta \tag{4.13}$$

olur. M, (θ_1, θ_2) bi-slant altmanifold olduğundan, (4.12) eşitliğinden

$$\cos^2\theta_1 + \sum_{i=d_1+1}^{m} g^2(JX_j^1, X_i^2) = \cos^2\theta \tag{4.14}$$

bulunur. $\theta = \theta_1$ olduğundan

$$\sum_{i=d_1+1}^{m} g^2(JX_j^1, X_i^2) = 0 \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.12) ve (4.15) eşitliklerinden (4.7) elde edilir.

M, $X_j^1 \in D_1$ ve $X_i^2 \in D_2$ Tip 3 θ-slant altmanifold olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^{m} g^2(JX_j^1, X_i^2) = -\sinh^2\theta \tag{4.16}$$

yazılabilir. Son eşitlikte boy$D_1 = d_1$ ve boy$D_2 = m - d_1$ göz önüne alınırsa

$$\sum_{i=1}^{d_1} g^2(JX_j^1, X_i^2) + \sum_{i=d_1+1}^{m} g^2(JX_j^1, X_i^2) = -\sinh^2\theta \tag{4.17}$$

olur. M, (θ_1, θ_2) bi-slant altmanifold olduğundan, (4.17) eşitliğinden

$$-\sinh^2\theta_1 + \sum_{i=d_1+1}^{m} g^2(JX_j^1, X_i^2) = -\sinh^2\theta \tag{4.18}$$

bulunur. $\theta = \theta_1$ olduğundan

$$\sum_{i=d_1+1}^{m} g^2(JX_j^1, X_i^2) = 0 \tag{4.19}$$

elde edilir. (4.16) ve (4.19) eşitliklerinden (4.7) elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.8 in ispatına benzer bir yol izlenerek aşağıdaki teoremler elde edilir:

Teorem 4.9 *M, $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ olacak şekilde bi-slant bir altmanifold olsun. M, Tip 1 θ-slant ise $\forall X \in D_1$ ve $\forall Y \in D_2$ için aşağıdaki tabloda verilen eşitlikler sağlanır.*

D_1, Tip 2 slant ise D_2, Tip 2 slant ise	$g(JX, Y) = \cosh^2\theta - \cos^2\theta$
D_1, Tip 3 slant ise D_2, Tip 3 slant ise	$g(JX, Y) = \cosh^2\theta + \sinh^2\theta$

Tablo 10

Teorem 4.10 *M, $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ olacak şekilde bi-slant bir altmanifold olsun. M, Tip 2 θ-slant ise $\forall X \in D_1$ ve $\forall Y \in D_2$ için aşağıdaki tabloda verilen eşitlikler sağlanır.*

D_1, Tip 1 slant ise D_2, Tip 1 slant ise	$g(JX, Y) = \cos^2\theta - \cosh^2\theta$
D_1, Tip 3 slant ise D_2, Tip 3 slant ise	$g(JX, Y) = \cos^2\theta + \sinh^2\theta$

Tablo 11

Teorem 4.11 *M, $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ olacak şekilde bi-slant bir altmanifold olsun. M, Tip 3, $\theta - slant$ ise $\forall X \in D_1$ ve $\forall Y \in D_2$ için aşağıdaki tabloda verilen eşitlikler sağlanır.*

D_1, Tip 1 slant D_2, Tip 1 slant	$g(JX, Y) = -\sinh^2\theta - \cosh^2\theta$
D_1, Tip 2 slant D_2, Tip 2 slant	$g(JX, Y) = -\sinh^2\theta - \cos^2\theta$

Tablo 12

Teorem 4.12 *M, (θ_1, θ_2) bi-slant bir altmanifold olsun. Burada, boy $D_1 = d_1$ ve boy $D_2 = d_2$, $d_1 = d_2 \neq 0$ olmak üzere M Tip 1 (Tip 2 veya Tip 3) slant bir alt manifold olması için aşağıdaki tabloda verilen eşitliklerin sağlanması gerekir:*

$(\widetilde{M}, \widetilde{g}, J)$	M nin slant olmasını gerektiren koşul
D_1, Tip 1 slant D_2, Tip 1 slant	$\theta_1 = \theta_2$
D_1, Tip 1 slant D_2, Tip 2 slant	$\theta_1 = \theta_2 = 0$, M slant değildir
D_1, Tip 1 slant D_2, Tip 3 slant	$\theta_1 = \theta_2 = 0$, M slant değildir.
D_1, Tip 2 slant D_2, Tip 1 slant	M slant değildir
D_1, Tip 2 slant D_2, Tip 2 slant	$\theta_1 = \pm\theta_2$
D_1, Tip 2 slant D_2, Tip 3 slant	$\theta_1 = \theta_2 = 0$, M slant değildir.
D_1, Tip 3 slant D_2, Tip 1 slant	$\theta_1 = \theta_2 = 0$, M slant değildir.
D_1, Tip 3 slant D_2, Tip 2 slant	$\theta_1 = \theta_2 = 0$, M slant değildir.
D_1, Tip 3 slant D_2, Tip 3 slant	$\theta_1 = \theta_2$

Tablo 13

İspat. M, (θ_1, θ_2) bi-slant bir altmanifold ise $X_j^1 \in D_1$ ve $X_i^2 \in D_2$ için D_1 ve D_2 distribüsyonları Tip 1 slant ise

$$\sum_{j=1}^{d_1} \sum_{i=1}^{d_1} g^2(JX_j^1, X_i^2) + \sum_{j=1}^{d_1} \sum_{i=d_1+1}^{n} g^2(JX_j^1, X_i^2) = \sum_{j=1}^{d_1} \cosh^2\theta$$

ve

$$\sum_{j=1}^{d_2} \sum_{i=1}^{d_2} g^2(JX_j^1, X_i^2) + \sum_{j=1}^{d_2} \sum_{i=d_2+1}^{n} g^2(JX_j^1, X_i^2) = \sum_{j=1}^{d_2} \cosh^2\theta$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden

$$d_1 \cosh^2 \theta_1 + \sum_{j=1}^{d_1} \sum_{i=d_1+1}^{n} g^2(JX_j^1, X_i^2) = d_1 \cosh^2 \theta$$

ve

$$d_2 \cosh^2 \theta_2 + \sum_{j=1}^{d_2} \sum_{i=d_2+1}^{n} g^2(JX_j^1, X_i^2) = d_2 \cosh^2 \theta$$

elde edilir. $d_1 = d_2$ alınırsa son iki eşitlikten

$$\cosh^2 \theta - \cosh^2 \theta_1 = \cosh^2 \theta - \cosh^2 \theta_2$$

bulunur. Bu ise $\theta_1 = \theta_2$ olduğunu gösterir.

Şimdi kabul edelim ki D_1 distribüsyonu Tip 1 ve D_2 distribüsyonu Tip 2 slant olsun. Bu durumda,

$$d_1 \cosh^2 \theta_1 + \sum_{j=1}^{d_1} \sum_{i=d_1+1}^{n} g^2(JX_j^1, X_i^2) = d_1 \cosh^2 \theta$$

ve

$$d_2 \cos^2 \theta_2 + \sum_{j=1}^{d_2} \sum_{i=d_2+1}^{n} g^2(JX_j^1, X_i^2) = d_2 \cosh^2 \theta$$

eşitlikleri elde edilir. $d_1 = d_2$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\cosh^2 \theta - \cosh^2 \theta_1 = \cosh^2 \theta - \cos^2 \theta_2$$

olup $\cosh^2 \theta_1 = \cos^2 \theta_2$ bulunur. Burada $\cosh \theta_1 \in [1, \infty]$ ve $\cos \theta_2 \in [-1, 1]$ olduğu göz önüne alındığında $\theta_1 = \theta_2 = 0$ olduğu görülür. Bu ise M nin bi-slant altmanifold olması ile çelişir.

Diğer durumların ispatı benzer şekilde elde edilebilir.

5. TARTIŞMA

Hermityen manifoldların bi-slant altmanifoldların slant bir altmanifold olması için gereken koşulların Teorem 2.30 de verilen (2.8)-(2.11) eşitliklerinin sağlanması gerektiğini A. Carriazzo tarafından (Carriazo, 2000) ispatlanmıştır. Bu durum, para-Hermityen manifoldların bi-slant altmanifoldları için karmaşık durumlara sahiptir. Tanım 3.10 göz önüne alındığında slant altmanifoldlarının üç farklı tipinin olduğu görülür. Bu ise para-Hermityen manifoldların bi-slant altmanifoldlarının slant olmasının üç durumu ile incelenmesi gerektiğini gösterir. Ayrıca bi-slant altmanifoldlar üzerinde tanımlı D_1 ve D_2 slant distribüsyonları ayrı ayrı 3 farklı tipi mevcuttur (bkz. Tanım 3.22). Bu tez çalışmasında;

- bi-slant altmanifoldların Tip 1 slant bir altmanifold olması için gereken eşitlikler Teorem 4.4 de bir tablo yardımı ile verilmiştir.
- bi-slant altmanifoldların Tip 2 slant bir altmanifold olması için gereken eşitlikler Teorem 4.5 de bir tablo yardımı ile verilmiştir.
- bi-slant altmanifoldların Tip 3 slant bir altmanifold olması için gereken eşitlikler Teorem 4.6 de bir tablo yardımı ile verilmiştir.

'Bir (θ_1, θ_2) bi-slant altmanifoldun $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ slant bir altmanifold olması için hangi şartlar gereklidir.' probleminin cevabı olarak Hermityen manifoldların bi-slant altmanifoldlarında $\forall X \in D_1$ ve $\forall Y \in D_2$ için

$$g(JX, Y) = 0$$

eşitliği sağlanması gerekir (bkz. Teorem 2.32). Bu problemin cevabı para-Hermityen manifoldların bi-slant altmanifoldları için

$$g(JX, Y) = 0$$

eşitliğinin sağlaması Teorem 4.8 göz önüne alındığında aşağıdaki özel durumların oluşması gereklidir.

- M, Tip 1 slant bir altmanifold ve D_1 ile D_2, Tip 1 slant distribüsyonlardır.

- M, Tip 2 slant bir altmanifold ve D_1 ile D_2, Tip 2 slant distribüsyonlardır.
- M, Tip 3 slant bir altmanifold ve D_1 ile D_2 Tip 3 slant distribüsyonlardır.

Diğer özel durumlar için farklı eşitliklerin sağlanması gerekir. Bu eşitlikler;

- M, Tip 1 θ slant bir altmanifold ve D_1 ile D_2 distribüsyonları Tip 2 slant veya Tip 3 slant distribüsyonlar olduğunda Teorem 4.9 da verilen tabloda elde edildi.
- M, Tip 2 θ slant bir altmanifold ve D_1 ile D_2 distribüsyonları Tip 1 slant veya Tip 3 slant distribüsyonlar olduğunda Teorem 4.10 da verilen tabloda elde edildi.
- M, Tip 3 θ slant bir altmanifold ve D_1 ile D_2 distribüsyonları Tip 1 slant veya Tip 2 slant distribüsyonlar olduğunda Teorem 4.11 da verilen tabloda elde edildi.

6. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, Para-Hermityen manifoldların bi-slant altmanifoldların slant olması için gereken koşullar araştırılmıştır. Bu tezden, Teorem 4.2, Sonuç 4.3, Teorem 4.4, Teorem 4.5, Teorem 4.6, Teorem 4.8, Teorem 4.9, Teorem 4.10, Teorem 4.11 ve Teorem 4.12 elde edilmiştir.

Theorem 4.12 incelendiğinde aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.1 *M, (θ_1, θ_2) bi-slant bir altmanifold, boy $D_1 = d_1$ ve boy $D_2 = d_2$, $d_1 = d_2 \neq 0$ olsun. Bu durumda,*

1. *D_1, Tip 1 slant ve D_2, Tip 2 slant,*
2. *D_1, Tip 1 slant ve D_2, Tip 3 slant,*
3. *D_1, Tip 2 slant ve D_2, Tip 1 slant,*
4. *D_1, Tip 2 slant ve D_2, Tip 3 slant,*
5. *D_1, Tip 3 slant ve D_2, Tip 1 slant,*
6. *D_1, Tip 3 slant ve D_2, Tip 2 slant*

ise M slant bir altmanifold değildir.

Teorem 2.35 incelendiğinde Hermityen manifoldların bi-slant altmanifoldlarının boy $D_2 = d_2$, $d_1 = d_2 \neq 0$ olmak üzere slant olması için gereken koşulun $\theta_1 = \theta_2$ olması gerekir. Sonuç 6.1 göz önüne alındığında ise para-Hermityen manifoldların bi-slant altmanifoldlarının aynı koşullar altında slant olması için gereken koşulun $\theta_1 = \theta_2$ olması gerekmez. Bu nedenle para-Hermityen manifoldların bi-slant altmanifoldlarının geometrisinin, Hermityen manifoldların bi-slant altmanifoldları geometrisinden farklı sonuçlar içerdiği sonucuna varılır.

7. ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar kullanılarak para-Hermityen manifoldların bi-slant altanifoldları üzerinde Riemann eğrilik tensörü incelenebilir. Nash'ın embedding teoremi göz önüne alınarak para-Hermityen manifoldların bi-slant altmanifoldların içsel ve dışsal invaryantları arasında çeşitli bağıntılar kurulabilir. Bu bağıntılar yardımıyla bi-slant altmanifoldları ve slant altmanifoldları karakterize eden çeşitli eşitlikler ve eşitsizlikler elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Alegre, P., Carriazo, A. (2017). Slant submanifolds of para-Hermitian manifolds. Mediterranean Journal of Mathematics, 14(5), 214.

Alegre, P., Carriazo, A. (2019). Bi-slant submanifolds of para Hermitian manifolds. Mathematics, 7(7), 618.

Boothby, W. M. (2003). An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry, Revised (Vol. 120). Gulf Professional Publishing.

Cabrerizo, J. L., Carriazo, A., Fernandez, L. M., Fernandez, M. (2000). Slant submanifolds in Sasakian manifolds. Glasgow Mathematical Journal, 42(1), 125-138.

Calabi, E. (1953). Isometric imbedding of complex manifolds. Annals of Mathematics, 58(1), 1-23.

Calabi, E. (1953). Metric Riemann surfaces, Annals of Mathematics Studies, 30, 77–85.

Carriazo, A. (2000). Bi-slant immersions, Proceedings ICRAMS, 88–97.

Chen, B. Y. (1981). CR-submanifolds of a Kaehler manifold. I. Journal of Differential Geometry, 16(2), 305-322.

Chen, B. Y. (1990). Geometry of slant submanifolds. Katholieke Universiteit, Leuven.

Chen, B. Y. (2001). Geometry of warped product CR-submanifolds in Kaehler manifolds, II. Monatshefte für Mathematik, 134(2), 103-119.

Chen, B. Y., Ogiue, K. (1974). On totally real submanifolds. Transactions of the American mathematical society, 193, 257-266.

Duggal, K. L., Bejancu, A. (1996). Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds. In Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications (pp. 139-189). Dordrecht: Springer Netherlands.

Hsiung, C. C. (1995). Almost complex and complex structures (Vol. 20). World Scientific.

Ivanov, S., Zamkovoy, S. (2005). Parahermitian and paraquaternionic manifolds. Differential Geometry and its Applications, 23(2), 205-234.

Kobayashi, S., Nomizu, K. (1963). Foundations of differential geometry I, Interscience. New York, 1969.

Libermann, P. (1954). Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 36(1), 27-120.

Maeda, S., Ohnita, Y., Udagawa, S. (1993). On slant immersions into Kähler manifolds. Kodai Mathematical Journal, 16(2), 205-219.

Martin, D. (1991). Manifold Theory, an introduction for mathematical physicists, 81-83.

Martin, D. (1991). Manifold Theory, an introduction for mathematical physicists, 81-83.

O'Neill, B. (1983). Semi-Riemannian geometry with applications to relativity (Vol. 103). Academic press.

Papaghuic, N. (2009), Semi-slant submanifolds of a Kaehlarian manifold, An. St. Univ. Al. I. Cuza. Univ. Iasi, 40, 55-61

Rasevskii, P. K. (1948). The scalar field in a stratified space, Trudy Sem. Vect. Tens. Anal, 6.

Sahin, B. (2009). Warped product submanifolds of Kaehler manifolds with a slant factor. In Annales Polonici Mathematici (Vol. 95, pp. 207-226).
Sahin, B. (2012). Manifoldların Diferensiyel Geometrisi. Nobel Yayın.
Yano, K., Kon, M. (1984). Structures on Manifolds World Scientific Pub.