



**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**SİMETRİK ARALIK ÜZERİNDEKİ BERNSTEİN-KANTOROVİCH
POLİNOMLARININ BİR MODİFİKASYONU**

NURŞİN DAMAR AYLAR

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**ŞANLIURFA
2025**



**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**SİMETRİK ARALIK ÜZERİNDEKİ BERNSTEİN-KANTOROVİCH
POLİNOMLARININ BİR MODİFİKASYONU**

NURŞİN DAMAR AYLAR

**MATEMATİK ANA BİLİMDALİ
Tez Danışmanı: Prof. Dr. AYDIN İZGİ**

**ŞANLIURFA
2025**

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasının her anında yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Aydın İZGİ'ye tezimi yazma konusunda tecrübelerinden yararlandığım bana yardımcı olan sayın Prof. Dr. Haydar ALICI'ya sonsuz teşekkürlerimi arz ederim. Bu süreçte her daim yanımda olup hiçbir desteğini eksik etmeyen annem Ayşe DAMAR'a ve kardeşim Mert Ali DAMAR'a sürecin ortasında hayatıma dahil olduktan sonra bana her desteği sağlamaya çalışan eşim Süleyman AYLA'ya süreç devam ederken hayatıma dahil olan ve benimle her daim gurur duymasını istediğim canım kızım Zümra'ma çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	iii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	v
1.GİRİŞ.....	1
1.1. Temel Kavramlar.....	3
2.ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	16
3.MATERYAL VE YÖNTEM.....	20
4.ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA.....	21
4.1. $N_\delta(f; u)$ operatörünün lineer pozitif operatör olduğunun ispatı.....	21
4.2. $N_\delta(f; u)$ operatörünün korovkin teoreminin varlığının araştırılması.....	22
4.3. $N_\delta(f; u)$ operatörünün merkezci momentleri.....	41
4.4. $N_\delta(f; u)$ operatörünün düzgün yakınsaklığı.....	44
4.5. $N_\delta(f; u)$ operatörü için Voronowakaja tipi bir teorem.....	48
4.6. $N_\delta(f; u)$ operatörünün süreklilik modülüyle yaklaşım hızı.....	54
4.7. $N_\delta(f; u)$ operatörü için Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyonlar ile ilgili bir teorem.....	57
4.8. $N_\delta(f; u)$ operatörü için türevlenebilen fonksiyonların yaklaşım hızı ile ilgili bir teorem..	58
5.SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	65
5.1.Sonuçlar.....	65
5.2.Öneriler.....	66
KAYNAKLAR.....	67
ÖZGEÇMİŞ.....	70

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SİMETRİK ARALIK ÜZERİNDEKİ BERNSTEİN-KANTOROVİCH POLİNOMLARININ BİR MODİFİKASYONU

Nurşin DAMAR AYLA

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Aydın İZGİ
Yıl:2025 , Sayfa:77

Genel olarak bu çalışmada Lineer Pozitif Operatörler dizisi olan $N_\delta(f; u)$ operatörünün yaklaşım özellikleri incelenmekte olup temel özellikleri incelenmiştir. Operatörümüzün düzgün yaklaşımı, Korovkin teoremi kullanılarak gösterilmiştir. Önceki çalışmaları inceleyerek bir genelleme elde ettiğimiz operatörün yaklaşımını, yaklaşım hızını, Voronovskaja tipi asimptotik yaklaşımı ve Lipschitz şartını sağlayan fonksiyonlar için incelenmiştir. $N_\delta(f; u)$ operatörünün yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Verilen operatör için farklı fonksiyonlara yaklaşımı grafik yardımıyla gösterilmiştir. Seçilen bir fonksiyon ise $N_\delta(f; u)$ operatörünün bir fonksiyona yaklaşımının “ δ ” ve “ u ” nun bazı değerleri için nümerik değerleri bulunup, bulunan değerler tablo olarak hazırlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bernstein polinomu, Bernstein- Kantorovich polinomları, Korovkin teoremi, yaklaşım hızı, lineer pozitif operatör

ABSTRACT

Master's Thesis

A MODIFICATION OF BERNSTEIN-KONTOROVICH POLYNOMIALS ON A SYMMETRIC INTERVAL

NURŞİN DAMAR AYLA

Harran University
Institute of Science
Mathematics Department

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Aydın İZGİ
Year: 2025, Page: 77

In general, in this study, the approximation properties of the operator $N_\delta(f; u)$, which is a sequence of Linear Positive Operators, are examined and their basic properties are examined. The smooth approximation of our operator is shown using Korovkin's theorem. By examining previous studies, the approximation of the operator, which we obtained a generalization, is examined for functions that satisfy the approximation speed, Voronowskaja type asymptotic approximation and Lipschitz condition. The approximation properties of the operator $N_\delta(f; u)$ are examined. The approximation of different functions for the given operator is shown with the help of graphics. If a selected function is a function, the numerical values of the approximation of the operator $N_\delta(f; u)$ to a function are found for some values of " δ " and " u ", and the values found are prepared as a table.

Keywords: Bernstein polynomial, Bernstein-Kantorovich polynomials, Korovkin theorem, rate of approximation, linear positive operator

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 4.1. $N_\delta(f; u)$ operatörünün $f(u) = (1 + u^2)\sin\left(\frac{1}{6}u\pi\right)$ fonksiyonuna değişen δ değerleri için yaklaşımının grafiği.....	50
Şekil 4.2. $N_\delta(f; u)$ operatörünün $f(u) = (1 + u^2)\sin(2\pi u)$ fonksiyonuna değişen δ değerleri için yaklaşımın grafiği	50
Şekil 4.3. $N_\delta(f; u)$ operatörünün $f(u) = (1 + u^3)\sin(\pi u)$ fonksiyonuna değişen δ değerleri için yaklaşım grafiği.....	51

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

Çizelge 4.1 $N_\delta(f; u)$ operatörünün farklı δ ve u değerleri için f fonksiyonuna yaklaşımının nümerik tablosu.....	51
---	----

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}[a, b]$	$\{f/f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ süreklidir.}\}$
$\omega(g; \delta)$	g fonksiyonunun süreklilik modülü
$\sum_{j=0}^m c_j$	$c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_n$
$\binom{\delta}{\mathfrak{l}}$	$\frac{\delta!}{(\delta - \mathfrak{J})!\mathfrak{J}!}$
$B_{\delta}(f; u)$	f fonksiyonunun $\delta - inci$ Bernstein polinomu
$_{\delta}(f; u)$	f fonksiyonunun $\delta - inci$ $N_d(f; u)$ polinomu
$\Rightarrow$	Düzgün yakınsama
$\aleph_{n,k}(u)$	operatrmzn $k - inci$ merkezil momenti

1.GİRİŞ

Lineer pozitif operatörlerin yakınsaklığının incelemesi yapılırken matematiğin birçok alanından faydalanılmış olup Özellikle yaklaşım teorisi konusunda fonksiyonel analizden daha fazla yararlanılmıştır. Kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli fonksiyonlara polinomlar ile yaklaşılabilceği, yaklaşım teorisinin üzerinde çalışılan temel çalışmalardan biri olmuştur.

İlk olarak 1885 Weierstrass, kapalı ve sınırlı olan bir aralıkta sürekli fonksiyonlara polinomlar ile yaklaşılabilceğini ispatlamış olup, bu teoremin ispatı ise birçok kişi tarafından yapılmaktadır. Bu ispatlar içerisinde en önemli olanlardan biri olan ve 1912 yılında Bernstein tarafından yapılmış olan ispattır. 1912 yılında Rus Matematikçi Bernstein, Weierstrass'ın tanımlamış olduğu polinomun nasıl olacağı üzerinde çalışmıştır. Ve toplamsal şekilde olan bir polinomlar dizisini aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

$u \in [0,1]$ için;

$$B_{\delta}(f; u) = \sum_{l=0}^{\delta} f\left(\frac{l}{\delta}\right) \binom{\delta}{l} u^l (1-u)^{\delta-l}$$

(Lorentz, 1953).

$u \in [0,1]$, $0 \leq a_{l\delta} \leq 1$ Olduğunda,

$$\mathcal{L}_{\delta}(f; u) = \sum_{l=0}^{\infty} f(a_{l\delta}) P_{l\delta}(u), \quad P_{l\delta}(u) \geq 0$$

pozitif operatör dizisinin $\delta \rightarrow \infty$ için $[0,1]$ aralığında verilmiş olan f fonksiyonuna düzgün yakınsamış olabilmesi için gerek ve yeter koşulları üç tanedir. Bohman ise bunları şu şekilde sıralamıştır;

$$\mathcal{L}_n(1; u) \Rightarrow 1$$

$$\mathcal{L}_n(t; u) \Rightarrow u$$

$$\mathcal{L}_n(t^2; u) \Rightarrow u^2$$

Aşikardır ki Bohman'ın araştırmış olduğu operatörlerin değeri f fonksiyonunun $[0, 1]$ Aralığının dışındaki değerlerinden bağımsızdır.

1953 yılında ise Korovkin, Bohman'ın koşullarının genel halde de geçerli olabileceğini görmüş ve bunun üzerine ise genel bir teorem ispatlamıştır. Daha sonraki zamanlarda ise Bernstein polinomları üzerine farklı çalışmalar yapılmış olup yapılmış olan Bu çalışmalardan biri de Lorentz'in yazdığı (1953) "Bernstein Polynomials" adlı çalışmaların toplandığı kitabı olmuştur.

Bernstein polinomları üzerine yapılmış olan sistematik yaklaşımlar, 1990'lı yıllardan sonra hız kazanmış, Bu konuyla ilgili birçok makaleler yayınlanmıştır. Her geçen gün ise yeni uygulamalar ve genellemeler keşfedilmiştir.

Yaklaşımlar teorisinde, klasik yakınsaklık kavramı ile ilgili çalışmalar devam ederken de, günümüzde ise "istatistiksel yakınsaklık" kavramı da önemli çalışma alanlarından biri olmuştur. İlk olarak 1950 yılında Fast tarafından tanımlanmış olan istatistiksel yakınsaklık kavramını Gadjiev ve Orhan (2002) lineer pozitif operatör dizileri için Korovkin tipli yaklaşım teoremini elde etmek için kullanmışlardır. Bu teorem ile birlikte birden fazla operatörün istatistiksel yaklaşım özellikleri ile yaklaşım hızları da incelenmiştir. (Doğru ve Duman 2006).

Biz bu çalışmamızda;

$u \in [0,1]$ ve $f \in C[-1,1]$ ve

$$\varphi_{\delta}^l(u) = \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \binom{\delta}{l} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u\right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u\right)^{\delta-l} \text{ olmak üzere}$$

$$N_{\delta}(f; u) = \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(\frac{l}{2\delta+1}-1\right)^{\frac{\delta}{\delta+1}}}^{\left(\frac{l+1}{2\delta+1}-1\right)^{\frac{\delta}{\delta+1}}} f(t) dt$$

Şeklinde tanımlanmış olduğumuz operatörün lineer pozitif bir operatör olduğunu, Korovkin teoremi şartlarını sağladığını ve kapalı simetrik aralığı üzerinde düzgün yakınsadığı gösterilecektir. Süreklilik Modülü yardımı ile yaklaşım hızı hesaplanacaktır. Ayrıca bu operatör için bazı teoremler de ispat edilecektir. Bu operatörün merkezci momentleri yardımı ile asimptotik yaklaşımı hesaplanacak olup, $N_\delta(f; u)$ operatörünün f fonksiyonuna yaklaşımı grafikler ile gösterilecek ve son olarak da seçilen bazı fonksiyonlara operatörün yaklaşımı bazı δ ve u değerleri için de nümerik tablosu hazırlanacaktır

1.1 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ise, çalışmamızda kullandığımız bazı tanımlar ve teoremler yer almıştır. Ayrıca burada vereceğimiz tanımlar ise genel geçer tanımlar olduğu için bazılarında kaynak gösterilmemiştir.

Tanım 1.1.1.

U ve V verilmiş olan aynı F cismi üzerinde iki lineer uzay olmak üzere; $\mathcal{L} : U \rightarrow V$ şeklinde tanımlanmış olan dönüşümlere operatör adı verilir. (Bayraktar, 2006).

Tanım 1.1.2.

U ve V tanımlanmış olan aynı F cismi üzerindeki iki lineer uzay olmak üzere $\mathcal{L} : U \rightarrow V$ operatörü $\forall f, g \in U$ ve her $\theta, \beta \in F$ için;

$\mathcal{L}(\theta f + \beta g) = \theta \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g)$ eşitliği sağlanıyor ise o takdirde ifade edilmiş olan $\mathcal{L}$ operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 1.1.3.

U ve V reel değerli fonksiyon uzayı olsun ve kabul edelim ki

$U^+ = \{f \in U : f(u) \geq 0\}, V^+ = \{g \in V : g(v) \geq 0\}$ olsun.

Eğer U' dan V' ye tanımlanmış olan $\mathcal{L}$ operatörü U^+ kümesindeki verilmiş olan herhangi bir f fonksiyonunu V^+ kümesindeki herhangi bir elemana dönüştürüyor ise o takdirde $\mathcal{L}$ operatörüne pozitif operatör denir. Böylece hem lineerlik hem de pozitiflik şartlarını sağlayan operatörlere ise lineer pozitif operatör denir.

Teorem 1.1.1.

Lineer pozitif olan bir operatör monoton artan bir operatördür. Yani;

$$f(u) \leq g(u) \Rightarrow \mathcal{L}(g; u) \geq \mathcal{L}(f; u)$$

Eşitsizliği sağlanmış olur.

İspat 1.1.1.

$\mathcal{L}$ Lineer pozitif operatörü için $\mathcal{L}(U^+) \subset V^+$ sağlanmış olur. Yani $f(u) \geq 0$ olduğunda $\mathcal{L}(f; u) \geq 0$ olur. O halde $\forall u$ için, $f(u) \leq g(u)$ olduğunda, $g(u) - f(u) \geq 0$ sağlanmış olur; ispatın başında da belirtildiği gibi $\mathcal{L}$ operatörü pozitif olduğundan;

$\mathcal{L}(g - f; u) \geq 0$ olur. Ayrıca $\mathcal{L}$ operatörü lineer olduğundan;

$$\mathcal{L}(g; u) - \mathcal{L}(f; u) \geq 0 \Rightarrow \mathcal{L}(g; u) \geq \mathcal{L}(f; u)$$

Sağlanmış olur ve ispat tamamlanmış olur. (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995)

Teorem 1.1.2.

$\mathcal{L}$ Bir lineer pozitif operatör olmak üzere $|\mathcal{L}(f)| \leq \mathcal{L}(|f|)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat 1.1.2.

Verilmiş olan Herhangi bir f fonksiyonu için;

$$-|f| \leq f \leq |f| \tag{1.1}$$

dir. $\mathcal{L}$ Operatörü lineer pozitif olduğundan (Teorem 1.1.1)'den dolayı monoton artan bir operatördür. O halde;

$$\mathcal{L}(-|f|) \leq \mathcal{L}(f) \leq \mathcal{L}(|f|)$$

Yazabiliriz. $\mathcal{L}$ Operatörü lineer olduğundan;

$$\mathcal{L}(-|f|) = -\mathcal{L}(|f|)$$

dir. Elde edilmiş olan bu eşitlik (1.1)'de yerine yazılırsa;

$$-\mathcal{L}(|f|) \leq \mathcal{L}(f) \leq \mathcal{L}(|f|) \Rightarrow |\mathcal{L}(f)| \leq \mathcal{L}(|f|)$$

Olur ki bu da ispatı tamamlamış olur. (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995)

Teorem 1.1.1.

Lineer pozitif olan bir operatör monoton artan bir operatördür. Yani;

$$f(u) \leq g(u) \Rightarrow \mathcal{L}(g;u) \geq \mathcal{L}(f; u)$$

Eşitsizliği sağlanmış olur.

İspat 1.1.1.

$\mathcal{L}$ Lineer pozitif operatörü için $\mathcal{L}(U^+) \subset V^+$ sağlanmış olur. Yani $f(u) \geq 0$ olduğunda $\mathcal{L}(f;u) \geq 0$ olur. O halde $\forall u$ için, $f(u) \leq g(u)$ olduğunda, $g(u) - f(u) \geq 0$ sağlanmış olur; ispatın başında da belirtildiği gibi $\mathcal{L}$ operatörü pozitif olduğundan;

$\mathcal{L}(g - f;u) \geq 0$ olur. Ayrıca $\mathcal{L}$ operatörü lineer olduğundan;

$$\mathcal{L}(g; u) - \mathcal{L}(f;u) \geq 0 \Rightarrow \mathcal{L}(g; u) \geq \mathcal{L}(f; u)$$

Sağlanmış olur ve ispat tamamlanmış olur. (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995)

Teorem 1.1.2.

$\mathcal{L}$ Bir lineer pozitif operatör olmak üzere $|\mathcal{L}(f)| \leq \mathcal{L}(|f|)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat 1.1.2.

Verilmiş olan Herhangi bir f fonksiyonu için;

$$-|f| \leq f \leq |f| \tag{1.1}$$

dir. $\mathcal{L}$ Operatörü lineer pozitif olduğundan (Teorem 1.1.1)'den dolayı monoton artan bir operatördür. O halde;

$$\mathcal{L}(-|f|) \leq \mathcal{L}(f) \leq \mathcal{L}(|f|)$$

Yazabiliriz. $\mathcal{L}$ Operatörü lineer olduğundan;

$$\mathcal{L}(-|f|) = -\mathcal{L}(|f|)$$

dir. Elde edilmiş olan bu eşitlik (1.1)'de yerine yazılırsa;

$$-\mathcal{L}(|f|) \leq \mathcal{L}(f) \leq \mathcal{L}(|f|) \Rightarrow |\mathcal{L}(f)| \leq \mathcal{L}(|f|)$$

Olur ki bu da ispatı tamamlamış olur. (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995)

Tanım 1.1.4.

$l = \{ \mathcal{L}: C[a,b] \rightarrow C[a,b] : \mathcal{L} \text{ lineer pozitif operatör} \}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ olsun. $\mathcal{L}: \mathbb{N} \rightarrow l$ şeklinde tanımlı $\mathcal{L}$ fonksiyonuna lineer pozitif operatör dizisi adı verilir ve $(\mathcal{L}_n)$ şeklinde gösterilir, $\mathcal{L}(\mathbb{N}) = (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \dots)$

Tanım 1.1.5.

$U \subset \mathbb{R}$ ve U üzerinde tanımlanmış olan bütün fonksiyonların kümesi $\mathcal{F}(U)$ olsun.

$$d: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

Şeklinde tanımlı olan d fonksiyonuna bir fonksiyon dizisi denir ve terimleri f_1, f_2, f_3 ile gösterilir, dizi ise (f_n) ile gösterilir.

Tanım 1.1.6.

Verilmiş Kapalı bir $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli olan tüm gerçel değerli fonksiyonlardan oluşmuş olan kümeye $C[a, b]$ fonksiyon uzayı denir.

$f \in C[a, b]$ olmak üzere $C[a, b]$ üzerinde tanımlı norm;

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq u \leq b} |f(u)|$$

Şeklinde verilir.

Tanım 1.1.7.

D bir lineer uzay olsun. $\| \cdot \| : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun u 'deki değerini $\|u\|$ ile göstermiş olalım. Bu fonksiyon için;

$$D 1) \|u\| = 0 \leftrightarrow u = 0$$

$$D 2) \|au\| = |a| \|u\| \quad (a \in F)$$

$$D 3) \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

Şartları sağlanmış oluyor ise verilmiş olan $\| \cdot \|$ fonksiyonuna D de norm denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 1.1.8.

$D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $d \in D$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $|u - d| < \delta$ olduğundan

$|f(u) - f(d)| < \varepsilon$ Olacak şekilde $\delta = \delta_{(\varepsilon)}$ sayısı var ise f fonksiyonuna d noktasında süreklidir denir, (Balcı, 2012).

Tanım 1.1.9.

$U \subset \mathbb{R}$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $u_1, u_2 \in X$ noktaları için

$|u_1 - u_2| < \delta$ Olduğunda $|f(u_1) - f(u_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde yalnızca ε na bağlı $\delta = \delta_{(\varepsilon)}$ sayısı var ise f fonksiyonu verilmiş olan U kümesi üzerinde düzgün süreklidir denir, (Musayev ve arkadaşları, 2007).

Tanım 1.1.10.

U boş olmayan bir küme olsun. $d: U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için;

$$M1) d(u, v) = 0 \Leftrightarrow v = u$$

$$M2) d(u, v) = d(v, u) \text{ (simetri özelliği)}$$

$$M3) d(u, v) \leq d(u, z) + d(z, v) \text{ (üçgen eşitsizliği)}$$

Şartları sağlanıyor ise d ye U da bir metrik ve d ile birlikte U 'a metrik uzay denir ve genellikle (U, d) veya U_d ile gösterilir (Bayraktar, 2006).

Tanım 1.1.11.

$(f_n) \subset C[a, b]$ fonksiyon uzayında tanımlanmış olan bir fonksiyonlar dizisi olmak üzere; (f_n) fonksiyonlar dizisinin bir f fonksiyonuna $C[a, b]$ normunda düzgün yakınsak olabilmesi için;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{C[a, b]} = 0$$

Ya da başka bir ifade ile;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq u \leq b} |f_n(u) - f(u)| = 0$$

Eşitliklerinin sağlanması demektir. Düzgün yakınsama ise $f_n \Rightarrow f$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.12.

(f_n) dizisi verilmiş olan f fonksiyonuna U üzerinde noktasal yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ için ve $\forall$ bir $u \in U$ için $\exists n_0$ öyle ki $\forall n > n_0$ olduğunda $|f_n(u) - f(u)| < \epsilon$ olacak şekilde $n_0(\epsilon, U)$ sayısı vardır (Balcı, 2012).

Tanım 1.1.13.

(f_n) dizisi f fonksiyonuna X üzerinde düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ için $\exists n_0$ öyle ki $\forall n > n_0$ ve $\forall u \in U$ için $|f_n(u) - f(u)| < \epsilon$ olacak şekilde $n(\epsilon)$ sayısı vardır (Balcı, 2012).

Tanım 1.1.14.

$(a, b) \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık ve f fonksiyonu da (a, b) den $\mathbb{R}$ ye tanımlanmış olan bir fonksiyon olsun.

$t, u \in (a, b)$ için

$$\lim_{t \rightarrow u} \frac{f(t) - f(u)}{t - u} = A(u)$$

Sonlu ve limiti varsa, bu $A(u)$ sayısına f fonksiyonunun u noktasındaki türevi denir ve

$f'(u)$ veya $Df(u)$ ya da $\frac{Df(u)}{du}$ ile gösterilir. Bu durumda, f fonksiyonu u noktasında türevlenebilirdir (veya türevlidir) denir. (Musayev ve arkadaşları, 2007).

Tanım 1.1.15.

$n \geq 1$ olmak üzere P_n , n -inci dereceden verilmiş olan bir polinom ve f ile g de $u=0$ noktasında n 'inci mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar olsun.

$$\lim_{u \rightarrow 0} g(u) = 0$$

Olmak üzere;

$$f(u) = P_n(u) + u^n g(u)$$

Yazılabiliyorsa, P_n , $u = 0$ noktasında verilmiş olan f fonksiyonu tarafından üretilen Taylor polinomudur denir.

Tanım 1.1.16.

f fonksiyonu a noktasını takip eden bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun.

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(a)}{r!} (u - a)^r$$

Serisine a noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen Taylor serisi denir.

Tanım 1.1.17.

Lineer $\mathcal{L}$ operatörü U uzayından V uzayına dönüşüm yapabiliyorsa ve $\forall f \in U$ için $\|\mathcal{L}(f; u)\|_v \leq C\|f\|_u$ Eşitsizliğini gerçekleştiriyorsa $\mathcal{L}$ operatörüne sınırlı operatör denir. Bu C sabitlerinin en küçüğüne $\mathcal{L}$ operatörünün normu denir ve $\|\mathcal{L}\|$ ile gösterilir.

(Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995)

Tanım 1.1.18.

$f(n)$ ve $g(n)$ Reel sayılarda tanımlı iki fonksiyon olmak üzere her $n > n_0$ olacak şekilde bir n_0 vardır öyle ki $|f(n)| \leq C|g(n)|$ dir. $f(n) = o(g(n))$ şeklinde gösterilir. Burada C ve n_0 sayıları sabit sayılardır.

Tanım 1.1.19.

f verilmiş olan bir I aralığında tanımlanmış herhangi bir fonksiyon olsun. $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere, her $u_1, u_2 \in I$ için;

$$|f(u_1) - f(u_2)| \leq M|u_1 - u_2|^\alpha$$

Olacak şekilde $M > 0$ varsa, f 'ye Lipschitz sınıfındandır, denir ve $f \in Lip_M(\alpha)$ ile gösterilir.

1. $f \in Lip_M(\alpha)$ ise f fonksiyonu bu aralıkta süreklidir.
2. $\alpha > 1$ için $f \in Lip_M(\alpha)$ ise f sabit fonksiyondur.

Tanım 1.1.20.

$[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar için;

a)

$$\int_a^b |f(u)| du < \infty$$

Şartını sağlamış olan fonksiyonlara $\mathcal{L}_1$ sınıfındandır denir. Bu fonksiyon sınıfı üzerindeki norm

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(u)| du$$

Yazılır.

b) $1 \leq p < \infty$

$$\int_a^b |f(u)|^p du < \infty$$

Şartını sağlayan fonksiyonlara $\mathcal{L}_p$ sınıfındandır denir. Bu fonksiyon sınıfı üzerindeki norm

$\| \cdot \|_p$ ile gösterilir. $f \in \mathcal{L}_p$ ise

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(u)|^p du \right)^{\frac{1}{p}}$$

Yazılır.

Teorem 1.1.3

$p > 1$ ve $q > 0$ reel sayıları

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Şartını sağlasın. Bu durumda $\forall (a_i) \in l_p \quad \forall (b_i) \in l_q$ dizileri için;

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_l b_l \leq \left(\sum_{l=0}^{\infty} |a_l|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} |b_l|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Eşitsizliği Hölder eşitsizliği denir. Burada $p = q = 2$ için bu eşitsizlik Cauchy Schwartz eşitsizliği olarak bilinir.

Teorem 1.1.4. (Korovkin Teoremi):

$$\mathcal{L}_n(1; u) \Rightarrow 1 \quad (1.2)$$

$$\mathcal{L}_n(t; u) \Rightarrow u \quad (1.3)$$

$$\mathcal{L}_n(t^2; u) \Rightarrow u^2 \quad (1.4)$$

Eğer $\mathcal{L}_n$ lineer pozitif operatörler dizisi $[a, b]$ Aralığında (1.2), (1.3) ve (1.4) koşullarını sağlıyor ise o takdirde $C[a, b]$ uzayında olan ve tüm reel ekseninde sınırlı herhangi bir f fonksiyonu için $n \rightarrow \infty$ olduğunda;

$$\mathcal{L}_n(f; u) \Rightarrow f(u) \quad a \leq u \leq b$$

Olur. Ya da bu ifadeye benzer olarak aşağıdaki gösterimi de kullanabiliriz.

$$\|\mathcal{L}_n(f) - f\|_{C[a,b]} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

İspat 1.1.4.

f Fonksiyonu reel ekseninde sınırlı olduğu için öyle bir $M > 0$ sayısı bulabiliriz ki; tüm u 'lar için

$$|f(u)| \leq M \quad (1.5)$$

Sağlanmış olur. Kabul edelim ki, $f \in C[a, b]$ olsun. Sürekli fonksiyonların tanımı gereği

$\forall \varepsilon > 0$ Sayısına karşılık gelen $\delta > 0$ bulabiliriz ki $t \in (-\infty, \infty)$ ve $u \in [a, b]$ için;

$$|t - u| < \delta$$

Olduğunda;

$$|f(t) - f(u)| < \varepsilon \quad (1.6)$$

Sağlanmış olur. (1.6) eşitsizliği; $u, t \in [a, b]$ olduğunda g fonksiyonu $[a, b]$ de sürekli olduğu için, $u \in [a, b]$, $t \notin [a, b]$ olduğunda ise f fonksiyonu a ve b noktalarında, sırasıyla soldan ve sağdan sürekli bir fonksiyon olduğu için gerçekleşir.

$$\forall u \in [a, b]; f(u) \leq M \quad M > 0$$

Vardır.

$$|t - u| \geq \delta \rightarrow \frac{|t - u|}{\delta} \geq 1 \rightarrow 1 \leq \frac{|t - u|}{\delta} \leq \frac{|t - u|^2}{\delta^2}$$

$|t - u| \geq \delta$ Olduğunda ise (1.5) ve üçgen eşitsizliğinden;

$$|f(t) - f(u)| \leq |f(t)| + |f(u)| \leq 2M \leq 2M \frac{|t - u|^2}{\delta^2}$$

Olur. O halde;

$$|t - u| < \delta \text{ için } |f(t) - f(u)| < \varepsilon$$

$$|t - u| \geq \delta \text{ için } |f(t) - f(u)| \leq 2M \frac{|t - u|^2}{\delta^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $u \in [a, b]$ için

$$|f(t) - f(u)| < \varepsilon + 2M \frac{|t - u|^2}{\delta^2} \quad (1.7)$$

dir. Şimdi (1.2), (1.3) ve (1.4) koşullarını gerçekleyen $(\mathcal{L}_n)$ lineer operatör dizisinin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{L}_n(f) - f\|_{C[a, b]} = 0$$

Eşitliğini sağladığını göstermelidir.

$(\mathcal{L}_n)$ operatörünün lineerliğinden;

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_n(f(t); u) - f(u)| &= |\mathcal{L}_n(f(t); u) - f(u) + \mathcal{L}_n(f(u); u) - \mathcal{L}_n(f(u); u)| \\ &= |\mathcal{L}_n(f(t); u) - \mathcal{L}_n(f(u); u) + \mathcal{L}_n(f(u); u) - f(u)| \\ &= |\mathcal{L}_n(f(t) - f(u); u) + f(u)(\mathcal{L}_n(1; u) - 1)| \end{aligned}$$

dir. Burada üçgen eşitsizliğini kullanılarak;

$$|\mathcal{L}_n(f(t); u) - f(u)| \leq |\mathcal{L}_n(f(t) - f(u); u)| + |f(u)| \quad (1.8)$$

Elde edilir. (1.1) 'den

$$|\mathcal{L}_n(f(t); u) - f(u)| \leq |\mathcal{L}_n(f(t) - f(u); u)|$$

Olur, operatör pozitif ve

$$|f(t) - f(u)| \geq 0$$

Olduğundan

$$|\mathcal{L}_n(f(t) - f(u); u)| \leq \mathcal{L}_n(|f(t) - f(u)|; u)$$

Şeklinde yazılır. Bu durumda (1,2) yardımıyla (1,8) eşitsizliği;

$$|\mathcal{L}_n(f(t); u) - f(u)| \leq \mathcal{L}_n(|f(t) - f(u)|; u) + M|\mathcal{L}_n(1; u) - 1|$$

Olarak yazılabilir.

$(\mathcal{L}_n)$ monoton artan olduğundan (1,7)'den;

$$|\mathcal{L}_n(f(t); u) - f(u)| \leq \mathcal{L}_n\left(\left(\varepsilon + 2M\frac{|t - u|^2}{\delta^2}\right); u\right) + M|\mathcal{L}_n(1; u) - 1|$$

Elde edilir.

Öte yandan $(\mathcal{L}_n)$ lineer pozitif olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n\left(\left(\varepsilon + 2M\frac{|t-u|^2}{\delta^2}\right); u\right) &= \mathcal{L}_n(\varepsilon; u) + \mathcal{L}_n\left(2M\frac{(t-u)^2}{\delta^2}; u\right) \\ &= \varepsilon\mathcal{L}_n(1; u) + 2\frac{M}{\delta^2}\mathcal{L}_n|t^2 - 2ut + u^2; u|\end{aligned}$$

$$= \varepsilon\mathcal{L}_n(1; u) + 2\frac{M}{\delta^2}\left\{\mathcal{L}_n(t^2; u) - u^2 - u^2 + 2u^2 - 2u\mathcal{L}_n(t; u) + u^2\mathcal{L}_n(1; u)\right\}$$

$$= \varepsilon\mathcal{L}_n(1; u) + 2\frac{M}{\delta^2}\left\{\mathcal{L}_n(t^2; u) - u^2 + 2u^2 - 2u\mathcal{L}_n(t; u) + u^2\mathcal{L}_n(1; u) - u^2\right\}$$

$$= \varepsilon\mathcal{L}_n(1; u) + 2\frac{M}{\delta^2}\left\{(\mathcal{L}_n(t^2; u) - u^2) - 2u(\mathcal{L}_n(t; u) - u) + u^2(\mathcal{L}_n(1; u) - 1)\right\}$$

Elde edilir.

Bu ifadenin (1,8)' de yerine yazılmasıyla;

$$|\mathcal{L}_n(f(t); u) - f(u)| \leq \varepsilon\mathcal{L}_n(1; u) + 2M\{(\mathcal{L}_n(t^2; u) - u^2) - 2u(\mathcal{L}_n(t; u) - u) + u^2(\mathcal{L}_n(1; u) - 1)\} + M|\mathcal{L}_n(1; u) - 1|$$

Elde edilen bu ifade de (1,2), (1,3) ve (1,4) koşullarının kullanılmasıyla;

$$|\mathcal{L}_n(f(t); u) - f(u)| \leq \varepsilon + \varepsilon 2\frac{M}{\delta^2} = \varepsilon\left(1 + 2\frac{M}{\delta^2}\right)$$

Elde edilen bu ifadeyi her ε ' için

$$|\mathcal{L}_n(f(t); u) - f(u)| < \varepsilon$$

Sağlanır yani;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{L}_n(f) - f\|_{C[c,d]} = 0$$

Olur. Böylece ispat tamamlanmış olur (Korovkin, 1953; Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

Yaklaşım teorisi alanındaki çalışmalar ise ilk olarak Rus matematikçi Chebyshev'in mekanizmaların yapıları kapsamında buhar makineleri ile ilgili çalışmalar yapması ile başlamıştır. 1885 yılında Alman matematikçi Weierstrass, cebirsel ve trigonometrik polinomlar ile sürekli fonksiyonlara yaklaşılabileceğini ifade etmiş ayrıca ispat etmiştir. Yaklaşım teorisinin temel teoremini oluşturan bu ifade aşağıda belirtilmiştir.

$C[a, b]$ sınıfından verilen her f fonksiyonu için keyfi bir $\varepsilon > 0$ cebirsel sayısı ve her $u \in [a, b]$ için;

$$|P_\delta(u) - f(u)| < \varepsilon$$

Olacak şekilde bir

$$P_\delta(u) = \sum_{l=0}^{\delta} c_l u^l$$

polinomu vardır (Pinkus, 2005).

1912 yılında Rus Matematikçi Bernstein, Weierstrass'ın söz ettiği polinomun

$u \in [0,1]$ için;

$$B_\delta(f; u) = \sum_{l=0}^{\delta} f\left(\frac{l}{\delta}\right) \binom{\delta}{l} u^l (1-u)^{\delta-l} \quad (2.1)$$

Biçiminde olduğunu göstermiş olup, Bernstein, tanımladığı ve kendi adıyla anılan bu polinomlarla $[0,1]$ Aralığında tanımlı ve sürekli her f fonksiyonuna yaklaşılabileceğini ispatlamıştır. Aynı zamanda Bernstein polinomları $[0,1]$ Aralığında sınırlı f fonksiyonunun her bir u_0 süreklilik noktasında

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} B_\delta(f; u_0) = f(u_0)$$

Denklemini sağladığını, ayrıca f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sürekli ise (2.1)'in bu aralıkta düzgün olarak sağlandığını göstermiştir.(Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995; Lorentz, 1953).

Sonraki yıllarda ise Bernstein polinomları üzerine ise birçok çalışma yapılmıştır. Bernstein polinomlarının; sayısal analiz, fonksiyonlar teorisi, geometri, mühendislik, tıp bilimleri gibi birden fazla uygulama alanı mevcuttur.

Stancu (1968) $0 \leq \theta \leq \Phi$ eşitsizliğini sağlayan θ ve Φ reel sayıları için Bernstein operatörlerinin bir modifikasyonu olan

$$P_{\delta, l}(u) = \binom{\delta}{l} u^l (1-u)^{\delta-l} \text{ olmak üzere}$$

$$P_{\delta}^{(\theta, \Phi)}(f, u) = \sum_{l=0}^{\delta} P_{\delta, l}(u) f\left(\frac{l+\theta}{\delta+\Phi}\right)$$

Operatörünü tanımlamış ve bu operatörün yaklaşım özelliklerini incelemiştir.

$K_{\delta}: L_1([0,1]) \rightarrow C([0,1])$, her $f \in L_1([0,1])$ ve negatif olmayan herhangi δ için;

$$K_{\delta}(f: u) = (\delta + 1) \sum_{l=0}^{\delta} \binom{\delta}{l} u^l (1-u)^{\delta-l} \int_{\frac{l}{\delta+1}}^{\frac{l+1}{\delta+1}} \binom{\delta}{l} s^l (1-s)^{\delta-l} f(s) ds$$

Lineer pozitif operatörünü Kantorovich tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir (Kantorovich, 1930). Bu operatör Kantorovich operatörü olarak bilinir.

Kantorovich- Stancu tipi operatörleri çalışmıştır.

$$f \in L_1([0,1]) \quad \delta \in \mathbb{N} \text{ Olmak üzere;}$$

$$K_{\delta}^{(\theta, \Phi)}: L_1([0,1]) \rightarrow C([0,1])$$

$$P_{\delta, l}(u) = \binom{\delta}{l} u^l (1-u)^{\delta-l} \text{ Olmak üzere}$$

$$K_{\delta}^{(\theta, \Phi)}(f, u) = (\delta + \Phi + 1) \sum_{l=0}^{\delta} P_{\delta, l}(u) \int_{\frac{l+\theta}{\delta+\Phi+1}}^{\frac{l+\theta+1}{\delta+\Phi+1}} f(s) ds$$

Şeklinde bir lineer pozitif operatör tanımlamıştır.

Durrmeyer, $[0,1]$ Aralığında Bernstein polinomlarının bir modifikasyonunu aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

$$D_{\delta}(f; u) = (\delta + 1) \sum_{l=0}^{\delta} \binom{\delta}{l} u^l (1-u)^{\delta-l} \int_0^1 \binom{\delta}{l} t^l (1-t)^{\delta-l} f(t) dt$$

Bu operatör Bernstein Durrmeyer operatörleri olarak ta bilinmektedir. Bu operatörlerin düzgün fonksiyonlara yaklaşımı ise pek çok matematikçi tarafından çalışılmıştır (Durrmeyer, 1967).

1932 yılında Voronowskaja tarafından f fonksiyonu $[0,1]$ kapalı aralığında sınırlı ve belirlenmiş bir u noktasında 2. türeve sahip ise;

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \delta[f(u) - B_{\delta}(f; u)] = \frac{-u(1-u)}{2} f''(u)$$

Eşitliğin sağlandığı görülmüştür.

1935 yılında ise Popoviciu tarafından $w(f; \delta)$ ile f fonksiyonunun Süreklilik Modülü gösterilmek üzere;

$$|f(u) - B_{\delta}(f; u)| \leq cw \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} \right)$$

Olduğu gösterilmiştir (Popoviciu, 1935).

1937 yılında Chlodovsky tarafından $[0, \infty]$ 'a genişleyen aralıklarda Bernstein polinomlarını genelleştirmiş ve ayrıca yaklaşım özellikleri de incelemiştir (Chlodovsky, 1937).

1938 yılında Kac tarafından ise Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyonlara Bernstein polinomlarıyla yaklaşılabileceğini ispatlamıştır. Bu teoreme göre; $f \in Lip\alpha$ olmak üzere her $\delta \in \mathbb{N}$ ve her $u \in [0,1]$ için;

$$|f(u) - B_{\delta}(f; u)| \leq L \left(\frac{u(1-u)}{\delta} \right)^{\frac{\theta}{2}}$$

Dir. (Kac, 1938)

Bernstein operatörlerinin teorileri hakkında ise sistemli yaklaşımlar 1990'lı yıllardan sonra yayınlanmaya başlanmıştır. Bu konuyla ilgili düzenli olarak bilimsel çalışmalar ve makaleler yayınlanmakta olup ve her geçen zaman yeni uygulamalar ve genellemeler tanımlanıp çalışılmaktadır. Bu konudaki ilk ilerlemeyi ise Lupas yapmıştır. 1987'de Bernstein polinomlarının q -analogunu geliştirmiştir ve polinomların yaklaşım özelliklerini incelemiştir (Dikmen, 2009). Daha sonraki zamanlarda da Bernstein operatörleri üzerinde birçok matematikçi araştırma yapmıştır. Bu çalışmalar genellikle f fonksiyonuna $B_\delta(f; u)$ polinomu ile yaklaşım hızının bulunması üzerinedir. Son yıllarda Bernstein polinomlarının sayılar teorisi ile olan ilişkisine ilgi artmakta ve bu konuda önemli çalışmalar yapılmaktadır

1994 yılında Taberska ise bazı koşullar altında verilmiş olan mutlak sürekli f fonksiyonuna $B_\delta(f; u)$ Bernstein polinomuyla yaklaşım hızı gösterilmiştir. (PychTaberska, 1997)

Cao, aşağıdaki şekilde tanımlı Bernstein operatörlerinin bir genellemesini yapmıştır. Doğal sayılar kümesi üzerinde S_δ bir dizisi $S_\delta \geq 1$ olsun.

$$C_\delta(f; u) = \frac{1}{S_\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \sum_{j=0}^{S_\delta-1} f\left(\frac{l+j}{\delta+S_\delta-1}\right) P_{\delta,l}(u)$$

Bu operatörde $S_\delta = 1$ yazarsak $C_\delta(f; u) = B_\delta(f; u)$ olduğu açıkça görülür. Cao bu operatörün yakınsaklık şartlarını incelemiş ve yakınsaklık hızını Süreklilik Modülünü kullanarak hesaplamıştır (Cao, 1997).

Aksop $\left[\frac{1}{2^\delta}, 1 + \frac{1}{2^\delta}\right]$ Aralığı üzerinde aşağıda gösterilen lineer pozitif bir operatör tanımlamıştır.

$$\mathcal{L}_\delta(f; u) = \frac{\delta}{\delta-1} \sum_{r=0}^{\delta} \binom{\delta}{l} \left(u - \frac{1}{2^\delta}\right)^l \left(1 - \delta + \frac{1}{\delta}\right)^{\delta-l} f\left(\frac{l}{\delta}\right)$$

(Aksop, 2009)

3.1.Materyal

Bu çalışma oluşturulurken, konu ile alakalı olarak bilgilere kitap ve makalelerden, kütüphanelerden veya internet ortamında ulaşılmıştır.

3.2.Yöntem

Makaleler gözden geçirilmiş ve kullanılan yöntemler ise incelenmiştir. Bu çalışmada tanımlanmış olan ve çalışmanın orijinal operatörleri dizisinin yaklaşım özellikleri incelenmiş olup, incelediğimiz çalışmaların sonuçları ise bu çalışmada tanımlanan operatörler dizisine uygulanmıştır.

Ayrıca çalışmamızda Mapple bilgisayar programı yardımı ile de grafik ve nümerik değer tablosu hazırlanmış olup tez çalışması yapılmış olan bu çalışmalar ile değerlendirilmiştir.

Biz bu kısımda bize verilmiş olan $N_{\delta}(f; u)$ operatörünün tanıtımı yapılarak Korovkin teoremi yardımıyla yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Aynı zamanda verilmiş olan $N_{\delta}(f; u)$ operatörünün merkezi momentleri de hesaplanmıştır. Daha sonra $N_{\delta}(f; u)$ operatörü için yaklaşım hızı hesaplanıp, bu operatör için bazı teoremler ispat edilecektir.

Tanım 4,1.

Kabul edelim ki $u \in [-1, 1]$ ve $f \in C[-1, 1]$ olsun.

$$\varphi_{\delta}^l(u) = \frac{(\delta+1)^{\delta}}{(2\delta)^{\delta}} \binom{\delta}{l} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u\right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u\right)^{\delta-l} \text{ Olmak üzere}$$

$$N_{\delta}(f; u) = \frac{(\delta+1)^2}{2\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(\frac{2l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(\frac{2l+2}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} f(t) dt$$

Şeklinde tanımlı lineer pozitif operatöre $N_{\delta}(f; u)$ operatörü denir.

Öncelikle $N_{\delta}(f; u)$ operatörünün lineer ve pozitif bir operatör olduğunu gösterelim.

Lineerlik;

Her $f, g \in [-1, 1]$ ve her $\theta, \Phi \in \mathbb{R}$ için

$$N_{\delta}(\theta f(t) + \Phi g(t); u)$$

$$= (\delta+1) \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(\frac{2l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(\frac{2l+2}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} (\theta f(t) + \Phi g(t)) . dt$$

$$= (\delta+1) \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(\frac{2l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(\frac{2l+2}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} \theta f(t) dt$$

$$+ (\delta+1) \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(\frac{2l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(\frac{2l+2}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} \Phi g(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \theta(\delta + 1) \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(\frac{2l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(\frac{2l+2}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} f(t) dt \\
&+ \Phi.(\delta + 1) \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(\frac{2l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(\frac{2l+2}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} g(t) dt
\end{aligned}$$

$= \theta N_{\delta}(f(t); u) + \Phi N_{\delta}(g(t); u)$ Olduğundan $N_{\delta}(f; u)$ lineer bir operatördür.

Pozitiflik: $l, \delta \in N$ için ve $u \in [-1, 1]$ için

$$\binom{\delta}{l} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-l} \geq 0 \text{ dir.}$$

$$f \geq 0$$

$$\int_{\left(\frac{2l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(\frac{2l+2}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} f(t) dt \geq 0 \text{ dir.}$$

Dolayısıyla $N_{\delta}(f; u)$ pozitif bir operatördür.

Şimdi;

$$(4.1) \quad N_{\delta}(1; u) \Rightarrow 1$$

$$(4.2) \quad N_{\delta}(t; u) \Rightarrow u$$

$$(4.3) \quad N_{\delta}(t^2; u) \Rightarrow u^2$$

$$(4.4) \quad N_{\delta}(t^3; u) \Rightarrow u^3$$

$$(4.5) \quad N_{\delta}(t^4; u) \Rightarrow u^4$$

Olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
N_{\delta}(1; u) &= (\delta + 1) \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} 1 dt \\
&= (\delta + 1) \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \frac{\delta}{\delta + 1} \left(\left(2\frac{l+1}{\delta+1} - 1 \right) - \left(2\frac{l}{\delta+1} - 1 \right) \right) \\
&= (\delta + 1) \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \frac{2\delta}{(\delta + 1)^2} \\
&= \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \binom{\delta}{l} \left(\frac{\delta}{\delta + 1} + u \right)^l \left(\frac{\delta}{\delta + 1} - u \right)^{\delta-l} \\
&= \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta} \left(\frac{2\delta}{\delta + 1} \right)^{\delta} = 1
\end{aligned}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \|N_{\delta}(1; u) - 1\|_{C[-1,1]} = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \max_{u \in [-1,1]} |N_{\delta}(1; u) - 1| = 0$$

Elde edilir. Yani $\delta \rightarrow \infty$ iken

$$N_{\delta}(1; u) \rightrightarrows 1$$

Olduğu görülür.

$$\begin{aligned}
N_{\delta}(t; u) &= (\delta + 1) \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} t dt \\
&= (\delta + 1) \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{\delta + 1} \right)^2 \left(\left(2\frac{l+1}{\delta+1} - 1 \right)^2 - \left(2\frac{l}{\delta+1} - 1 \right)^2 \right) \\
&= (\delta + 1) \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \frac{2 \cdot \delta^2}{(\delta + 1)^3} \cdot \left(\frac{2l+1}{\delta+1} - 1 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\delta}{\delta+1} \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^\delta \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \left(\frac{2l}{\delta} \cdot \frac{\delta}{\delta+1} - \frac{\delta}{\delta+1} \right) \\
&= \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^\delta \frac{\delta}{\delta+1} \left[\frac{2\delta}{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \frac{\delta!}{(\delta-l)! l!} \frac{l}{\delta} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-l} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\delta}{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \binom{\delta}{l} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-l} \right] \\
&= \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^\delta \frac{\delta}{\delta+1} \left[\frac{2\delta}{\delta+1} \sum_{l=1}^{\delta} \frac{\delta(\delta-1)!}{(\delta-l)! l(l-1)!} \frac{l}{\delta} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-l} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\delta}{\delta+1} \left(\frac{2\delta}{\delta+1} \right)^\delta \right] \\
&= \frac{\delta}{\delta+1} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right) - \frac{\delta^2}{(\delta+1)^2} = \frac{\delta^2}{(\delta+1)^2} + \frac{\delta u}{\delta+1} - \frac{\delta^2}{(\delta+1)^2} \\
&= \frac{\delta u}{\delta+1} = u - \frac{u}{\delta+1}
\end{aligned}$$

$$N_{\delta}(t; u) = u - \frac{u}{\delta+1} \text{ elde edilir.}$$

$$\|N_{\delta}(t; u) - u\|_{C[-1,1]} = \max_{-1 \leq u \leq 1} \left| u - \frac{u}{\delta+1} - u \right| = \max_{-1 \leq u \leq 1} \left| -\frac{u}{\delta+1} \right| \leq \frac{1}{\delta+1}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \|N_{\delta}(t; u) - u\|_{C[-1,1]} = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta+1} = 0$$

$$N_{\delta}(t; u) \rightrightarrows u \text{ Olduğu görülür.}$$

$$N_{\delta}(t^2; u) = (\delta+1) \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)^{\frac{\delta}{\delta+1}}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)^{\frac{\delta}{\delta+1}}} t^2 dt$$

$$\begin{aligned}
&= (\delta + 1) \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \frac{\delta^3}{3(\delta + 1)^3} \left(\left(2 \frac{l+1}{\delta + 1} - 1 \right)^3 - \left(2 \frac{l}{\delta + 1} - 1 \right)^3 \right) \\
&= (\delta + 1) \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \frac{2\delta^3}{3(\delta + 1)^4} \left(\left(2 \frac{l+1}{\delta + 1} - 1 \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(2 \frac{l+1}{\delta + 1} - 1 \right) \left(2 \frac{l}{\delta + 1} - 1 \right) + \left(2 \frac{l}{\delta + 1} - 1 \right)^2 \right) \\
&= \frac{2\delta^3}{(\delta + 1)^4} (\delta + 1) \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \left(\frac{4l^2 + 8l + 4}{(\delta + 1)^2} - \frac{4l + 4}{\delta + 1} + 1 \right) \\
&\quad + \frac{2\delta^3}{(\delta + 1)^4} (\delta + 1) \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \left(\frac{4l^2 + 4}{(\delta + 1)^2} - \frac{4l + 2}{\delta + 1} + 1 \right) \\
&\quad + \frac{2\delta^3}{(\delta + 1)^4} (\delta + 1) \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \left(\frac{4l^2}{(\delta + 1)^2} - \frac{4l}{\delta + 1} + 1 \right) \\
&= \frac{2\delta^3}{3(\delta + 1)^4} (\delta + 1) \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \left(\left(\frac{12l^2 + 12l + 4}{(\delta + 1)^2} \right) - \left(\frac{12l + 6}{\delta + 1} \right) + 3 \right) \\
&= \frac{\delta^2}{3(\delta + 1)^2} \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta} \frac{12}{(\delta + 1)^2} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) l(l-1) \\
&\quad + \frac{\delta^2}{3(\delta + 1)^2} \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta} \left(\frac{24}{(\delta + 1)^2} - \frac{12}{\delta + 1} \right) \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) l \\
&\quad + \frac{\delta^2}{3(\delta + 1)^2} \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta} \left(\frac{4}{(\delta + 1)^2} - \frac{6}{\delta + 1} + 3 \right) \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \\
&= \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta} \frac{\delta^2}{3(\delta + 1)^2} \frac{12}{(\delta + 1)^2} \sum_{l=0}^{\delta} \frac{\delta!}{(\delta - l)! l!} l(l-1) \left(\frac{\delta}{\delta + 1} + u \right)^l \left(\frac{\delta}{\delta + 1} - u \right)^{\delta-l}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \frac{4\delta^2}{(\delta+1)^4} \sum_{l=2}^{\delta} \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)!}{l(l-1)(l-2)!(\delta-l)!} l(l-1) \left(\frac{\delta}{\delta+1}+u\right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1}-u\right)^{\delta-l} \\
&= \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \frac{4\delta^3(\delta-1)}{(\delta+1)^4} \sum_{l=0}^{\delta-2} \frac{(\delta-2)!}{l!(\delta-l-2)!} \left(\frac{\delta}{\delta+1}+u\right)^{l-2} \left(\frac{\delta}{\delta+1}-u\right)^{\delta-l-2} \\
&= \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \frac{4\delta^3(\delta-1)}{(\delta+1)^4} \left(\frac{\delta}{\delta+1}+u\right)^2 \sum_{l=0}^{\delta-2} \binom{\delta-2}{l} \left(\frac{\delta}{\delta+1}+u\right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1}-u\right)^{\delta-l-2} \\
&= \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \left(\frac{2\delta}{\delta+1}\right)^{\delta} \frac{4\delta^3(\delta-1)}{(\delta+1)^4} \frac{(\delta+1)^2}{4\delta^2} = \frac{\delta(\delta-1)}{(\delta+1)^2} \left(\frac{\delta}{\delta+1}+u\right)^2 \\
&= \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \frac{\delta^2}{3(\delta+1)^2} \left(\frac{24}{(\delta+1)^2} - \frac{12}{\delta+1}\right) \sum_{l=0}^{\delta} \frac{\delta!}{(\delta-l)!l!} l \left(\frac{\delta}{\delta+1}+u\right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1}-u\right)^{\delta-l} \\
&= \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \frac{4\delta^2(1-\delta)}{(\delta+1)^4} \sum_{l=1}^{\delta} \frac{\delta(\delta-1)!}{l(l-1)!(\delta-l)!} l \left(\frac{\delta}{\delta+1}+u\right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1}-u\right)^{\delta-l} \\
&= \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \frac{4(1-\delta)\delta^4}{(\delta+1)^4} \sum_{l=0}^{\delta-1} \frac{\delta(-1)!}{(\delta-l-1)!l!} \left(\frac{\delta}{\delta+1}+u\right)^{l+1} \left(\frac{\delta}{\delta+1}-u\right)^{\delta-l-1} \\
&= \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \frac{4\delta^3(1-\delta)}{(\delta+1)^4} \left(\frac{\delta}{\delta+1}+u\right) \sum_{l=0}^{\delta-1} \binom{\delta-1}{l} \left(\frac{\delta}{\delta+1}+u\right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1}-u\right)^{\delta-l-1} \\
&= \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \left(\frac{2\delta}{\delta+1}\right)^{\delta} \frac{4\delta^3(1-\delta)}{(\delta+1)^4} \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right) = \frac{2\delta^2(1-\delta)}{(\delta+1)^3} \left(\frac{\delta}{\delta+1}+u\right) \\
&= \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \frac{4\delta^3(1-\delta)}{(\delta+1)^4} \left(\frac{\delta}{\delta+1}+u\right) \sum_{l=0}^{\delta-1} \binom{\delta-1}{l} \left(\frac{\delta}{\delta+1}+u\right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1}-u\right)^{\delta-l-1} \\
&= \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \left(\frac{2\delta}{\delta+1}\right)^{\delta} \frac{4\delta^3(1-\delta)}{(\delta+1)^4} \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right) = \frac{2\delta^2(1-\delta)}{(\delta+1)^3} \left(\frac{\delta}{\delta+1}+u\right) \\
&= \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \left(\frac{2\delta}{\delta+1}\right)^{\delta} \frac{4\delta^2}{3(\delta+1)^4} + \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \left(\frac{2\delta}{\delta+1}\right)^{\delta} \frac{(3\delta-3)\delta^2}{3(\delta+1)^3} \\
&= \frac{4\delta^2}{3(\delta+1)^4} + \frac{(\delta-1)\delta^2}{(\delta+1)^3}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\delta(\delta-1)}{(\delta+1)^2} \left(\frac{\delta^2}{(\delta+1)^2} + \frac{2\delta u}{\delta+1} + u^2 \right) - \frac{2\delta^2(\delta-1)}{(\delta+1)^3} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right) + \frac{4\delta^2}{3(\delta+1)^4} + \frac{\delta^2(\delta-1)}{(\delta+1)^3}$$

$$N_\delta(t^2; u) = u^2 - \frac{3\delta+1}{(\delta+1)^2} + \frac{3\delta^3+\delta^2}{3(\delta+1)^4}$$

Elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \|N_\delta(t^2; u) - u^2\|_{C[-1,1]} &= \max_{-1 \leq u \leq 1} \left| -\frac{3\delta+1}{(\delta+1)^2} + \frac{3\delta^3+\delta^2}{3(\delta+1)^4} \right| \\ &= \max_{-1 \leq u \leq 1} \left| -\frac{6\delta^3+20\delta^2+15\delta+3}{3(\delta+1)^4} \right| \\ &= \max_{-1 \leq u \leq 1} \left| \frac{6\delta^3+20\delta^2+15\delta+3}{3(\delta+1)^4} \right| \\ &\leq \frac{15\delta+3}{3(\delta+1)^4} = \frac{3\delta+1}{(\delta+1)^4} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow \infty} \|N_\delta(t^2; u) - u^2\|_{C[-1,1]} = 0$$

$N_\delta(t^2; u) \Rightarrow u^2$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned} N_\delta(t^3; u) &= (\delta+1) \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_\delta^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)^{\frac{\delta}{\delta+1}}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)^{\frac{\delta}{\delta+1}}} t^3 dt \\ &= (\delta+1) \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_\delta^l(u) \frac{\delta^4}{4(\delta+1)^4} \left(\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)^4 - \left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)^4 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\delta + 1) \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \frac{2\delta^4}{4(\delta + 1)^5} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \left[\left(2 \frac{l+1}{\delta+1} - 1 \right)^3 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2l+2}{\delta+1} - 1 \right) \left(\delta \frac{2l}{\delta+1} - 1 \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2l+2}{\delta+1} - 1 \right)^2 \left(\frac{2l}{\delta+1} - 1 \right) + \left(\frac{2l}{\delta+1} - 1 \right)^3 \right] \\
&= (\delta + 1) \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \frac{\delta^4}{2(\delta + 1)^5} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \left(\frac{8l^3 + 24l^2 + 24l + 8}{(\delta + 1)^3} \right) \\
&\quad - (\delta + 1) \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \frac{\delta^4}{2(\delta + 1)^5} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \left[\left(\frac{12l^2 + 24l + 12}{(\delta + 1)^2} \right) - \left(\frac{6l + 6}{\delta + 1} \right) + 1 \right] \\
&\quad + \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \frac{\delta^4(\delta + 1)}{2(\delta + 1)^5} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \left[\left(\frac{8l^3 + 8l^2}{(\delta + 1)^3} \right) - \left(\frac{12l^2 + 8l}{(\delta + 1)^2} \right) + \left(\frac{6l + 2}{\delta + 1} \right) - 1 \right] \\
&\quad + \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \frac{\delta^4(\delta + 1)}{2(\delta + 1)^5} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \left(\frac{8l^3 + 16l^2 + 8l}{(\delta + 1)^3} \right) \\
&\quad - \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \frac{\delta^4(\delta + 1)}{2(\delta + 1)^5} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \left[\left(\frac{12l^2 + 16l + 4}{(\delta + 1)^2} \right) - \left(\frac{6l + 4}{\delta + 1} \right) + 1 \right] \\
&\quad + \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \frac{\delta^4(\delta + 1)}{2(\delta + 1)^5} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \left(\frac{8l^3}{(\delta + 1)^3} - \frac{12l^2}{(\delta + 1)^2} + \frac{6l}{\delta + 1} - 1 \right) \\
&= \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \frac{\delta^4(\delta + 1)}{2(\delta + 1)^5} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \left(\frac{32l^3 + 48l^2 + 32l + 8}{(\delta + 1)^3} \right) \\
&\quad - \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \frac{\delta^4(\delta + 1)}{2(\delta + 1)^5} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \left[\left(\frac{48l^2 + 48l + 16}{(\delta + 1)^2} \right) + \left(\frac{24l + 12}{\delta + 1} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\delta + 1) \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \frac{4 \cdot \delta^4}{2(\delta + 1)^5} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \\
& = \frac{\delta^3}{4(\delta + 1)^3} \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta} \frac{32}{(\delta + 1)^3} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) l(l-1)(l-2) \\
& \quad + \frac{\delta^3}{4(\delta + 1)^3} \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta} \left(\frac{144}{(\delta + 1)^3} - \frac{48}{(\delta + 1)^2} \right) \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) l(l-1) \\
& \quad + \frac{\delta^3}{4(\delta + 1)^3} \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta} \left(\frac{112}{(\delta + 1)^3} - \frac{96}{(\delta + 1)^2} + \frac{24}{\delta + 1} \right) \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) l \\
& \quad + \frac{\delta^3}{4(\delta + 1)^3} \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta} \left(\frac{8}{(\delta + 1)^3} - \frac{16}{(\delta + 1)^2} + \frac{12}{\delta + 1} - 4 \right) \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \\
& = \frac{\delta^3}{4(\delta + 1)^3} \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta} \frac{32}{(\delta + 1)^3} \sum_{l=0}^{\delta} \frac{\delta!}{(\delta-l)!l!} l(l-1) \cdot (l-2) \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-l} \\
& = \frac{8\delta^3}{(\delta + 1)^6} \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta} \sum_{l=3}^{\delta} \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)(\delta-3)!}{(\delta-l)! (l-1)(l-2)(l-3)!} l(l-1)(l-2) \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-l} \\
& = \frac{8\delta^3}{(\delta + 1)^6} \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta} \delta(\delta-1)(\delta-2) \sum_{l=0}^{\delta-3} \frac{(\delta-3)!}{(\delta-l-3)!l!} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^{l+3} \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-l-3} \\
& = \frac{8\delta^4(\delta-1)(\delta-2)}{(\delta + 1)^6} \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^3 \sum_{l=0}^{\delta} \binom{\delta-3}{l} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-3-l} \\
& = \frac{8\delta^4(\delta-1)(\delta-2)}{(\delta + 1)^6} \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta} \left(\frac{2\delta}{\delta+1} \right)^{\delta} \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^3 \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^3 \\
& = \frac{\delta(\delta-1) \cdot (\delta-2)}{(\delta + 1)^3} \left(\left(\frac{\delta}{\delta+1} \right)^3 + 3 \frac{\delta^2}{(\delta+1)^2} u + \frac{3\delta}{\delta+1} u^2 + u^3 \right) \\
& = \frac{8\delta^4(\delta-1)(\delta-2)}{(\delta + 1)^6} \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^3 \sum_{l=0}^{\delta} \binom{\delta-3}{l} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-3-l}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\delta^3}{(\delta+1)^3} \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^\delta \left(\frac{36}{(\delta+1)^3} - \frac{12}{(\delta+1)^2} \right) \sum_{l=2}^{\delta} \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)!}{(\delta-l)!l!(l-1)l(-2)!} l(l-1) \\
&\quad - 1) \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-l} \\
&= \frac{\delta^3}{(\delta+1)^3} \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^\delta \left(\frac{36}{(\delta+1)^3} - \frac{12}{(\delta+1)^2} \right) \sum_{l=0}^{\delta-2} \frac{(\delta-2)!}{(\delta-2-l)!l!} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^{l+2} \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-2-l} \\
&= \frac{\delta^3}{(\delta+1)^3} \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^\delta \left(\frac{36}{(\delta+1)^3} - \frac{12}{(\delta+1)^2} \right) u^2 \sum_{l=0}^{\delta-2} \binom{\delta-2}{l} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-l-2} \\
&= \frac{\delta^3}{(\delta+1)^3} \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^\delta \left(\frac{36}{(\delta+1)^3} - \frac{12}{(\delta+1)^2} \right) \left(\frac{2\delta}{\delta+1} \right)^\delta \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^2 \left(\frac{\delta^2}{(\delta+1)^2} + \frac{2\delta u}{\delta+1} + u^2 \right) \\
&= \left(\frac{9\delta}{(\delta+1)^4} - \frac{3\delta}{(\delta+1)^3} \right) \cdot \left(\frac{\delta^2}{(\delta+1)^2} + \frac{2\delta u}{\delta+1} + u^2 \right) \delta(\delta-1) \\
&= \frac{\delta^3}{4(\delta+1)^3} \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^\delta \left(\frac{112}{(\delta+1)^3} - \frac{96}{(\delta+1)^2} \right) \\
&\quad + \frac{24}{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \frac{\delta!}{(\delta-l)!l!} l \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-l} \\
&= \frac{\delta^3}{(\delta+1)^3} \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^\delta \left(\frac{28}{(\delta+1)^3} - \frac{24}{(\delta+1)^2} \right) \\
&\quad + \frac{6}{\delta+1} \sum_{l=1}^{\delta} \frac{\delta(\delta-1)!}{(\delta-l)!l!(l-1)!} l \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-l} \\
&= \frac{\delta^4}{(\delta+1)^3} \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^\delta \left(\frac{28}{(\delta+1)^3} - \frac{24}{(\delta+1)^2} \right) \\
&\quad + \frac{6}{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta-1} \frac{(\delta-1)!}{(\delta-l-1)!l!} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^{l+1} \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-l-1} \\
&= \frac{\delta^4}{(\delta+1)^3} \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^\delta \left(\frac{28}{(\delta+1)^3} - \frac{24}{(\delta+1)^2} \right) \\
&\quad + \frac{6}{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta-1} \binom{\delta}{l} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-l-1} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\delta^4}{(\delta+1)^3} \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^\delta \left(\frac{28}{(\delta+1)^3} - \frac{24}{(\delta+1)^2} + \frac{6}{\delta+1} \right) \frac{\delta+1}{2\delta} \left(\frac{2\delta}{\delta+1} \right)^\delta \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right) \\
&= \frac{\delta^3}{(\delta+1)^2} \left(\frac{14}{(\delta+1)^3} - \frac{12}{(\delta+1)^2} + \frac{3}{\delta+1} \right) \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right) \\
&= \frac{\delta^3}{4(\delta+1)^3} \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^\delta \left(\frac{8}{(\delta+1)^3} - \frac{16}{(\delta+1)^2} + \frac{12}{\delta+1} - 4 \right) \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \\
&= \frac{\delta^3}{(\delta+1)^3} \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^\delta \left(\frac{2}{(\delta+1)^3} - \frac{4}{(\delta+1)^2} + \frac{3}{\delta+1} - 1 \right) \sum_{l=0}^{\delta} \binom{\delta}{l} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-l} \\
&= \frac{\delta^3}{(\delta+1)^3} \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^\delta \cdot \left(\frac{2\delta}{\delta+1} \right)^\delta \left(\frac{2}{(\delta+1)^3} - \frac{4}{(\delta+1)^2} + \frac{3}{\delta+1} - 1 \right) \\
&= \frac{\delta^3}{(\delta+1)^3} \left(\frac{2}{(\delta+1)^3} - \frac{4}{(\delta+1)^2} + \frac{3}{\delta+1} - 1 \right) \\
&= \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)}{(\delta+1)^3} \left(\frac{\delta^3}{(\delta+1)^3} + 3 \frac{\delta^2}{(\delta+1)^2} u + 3 \frac{\delta}{\delta+1} u^2 + u^3 \right) \\
&\quad + \left(\frac{9}{(\delta+1)^4} - \frac{3}{(\delta+1)^3} \right) \delta^2(\delta-1) \left(\frac{\delta^2}{(\delta+1)^2} + \frac{2\delta u}{\delta+1} + u^2 \right) \\
&\quad + \frac{\delta^3}{(\delta+1)^2} \left(\frac{14}{(\delta+1)^3} - \frac{12}{(\delta+1)^2} + \frac{3}{\delta+1} \right) \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right) \\
&\quad + \frac{\delta^3}{(\delta+1)^3} \left(\frac{2}{(\delta+1)^3} - \frac{4}{(\delta+1)^2} + \frac{3}{\delta+1} - 1 \right) \\
N_{\delta}(t^3; u) &= u^3 - \frac{6\delta^2 + \delta + 1}{(\delta+1)^3} + \frac{3\delta^4 - \delta^3}{(\delta+1)^5} u + \frac{\delta^4}{(\delta+1)^6}
\end{aligned}$$

Elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned}
N_{\delta}(t^4; u) &= (\delta + 1) \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)^{\frac{\delta}{\delta+1}}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)^{\frac{\delta}{\delta+1}}} t^4 dt \\
&= (\delta + 1) \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \frac{\delta^5}{5 \cdot (\delta + 1)^5} \left(\left(2\frac{l+1}{\delta+1} - 1 \right)^5 - \left(2\frac{l}{\delta+1} - 1 \right)^5 \right) \\
&= (\delta + 1) \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \frac{2\delta^5}{5(\delta + 1)^6} \left[\left(\left(2\frac{l+1}{\delta+1} \right)^4 - 4 \left(2\frac{l+1}{\delta+1} \right)^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 6 \left(2\frac{l+1}{\delta+1} \right)^2 - 4 \left(2\frac{l+1}{\delta+1} \right) + 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(2\frac{l}{\delta+1} \right)^3 - 3 \left(2\frac{l}{\delta+1} \right)^2 + 3 \left(2\frac{l}{\delta+1} \right) - 1 \right) \left(2\frac{l}{\delta+1} - 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(2\frac{l}{\delta+1} \right)^2 - 2 \left(2\frac{l}{\delta+1} \right) + 1 \right) \left(\frac{4l^2}{(\delta + 1)^2} - \frac{4l}{\delta + 1} + 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(2\frac{l+1}{\delta+1} - 1 \right) \left(\left(2\frac{l}{\delta+1} \right)^3 - 3 \left(2\frac{l}{\delta+1} \right)^2 + 3 \left(2\frac{l}{\delta+1} \right) - 1 \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(2\frac{l}{\delta+1} \right)^4 - 4 \left(2\frac{l}{\delta+1} \right)^3 + 6 \left(2\frac{l}{\delta+1} \right)^2 - 4 \left(2\frac{l}{\delta+1} \right) \right) + 1 \right] \\
&= \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \frac{2\delta^5(\delta + 1)}{5(\delta + 1)^6} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \left(\frac{16l^4 + 64l^3 + 96l^2 + 64l + 16}{(\delta + 1)^4} \right) \\
&\quad - \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \frac{2\delta^5(\delta + 1)}{5(\delta + 1)^6} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \left(-\frac{32l^3 + 96l^2 + 96l + 32}{(\delta + 1)^3} \right) \\
&\quad + \left(\frac{\delta + 1}{2\delta} \right)^{\delta+1} \frac{2\delta^5(\delta + 1)}{5(\delta + 1)^6} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \left(\frac{24l^2 + 48l + 24}{(\delta + 1)^2} - \frac{8l + 8}{\delta + 1} + 1 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta+1} \frac{2\delta^5(\delta+1)}{5(\delta+1)^6} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \left(\frac{8l^3 + 24l^2 + 24l + 8}{(\delta+1)^3} \right) \left(2\frac{l}{\delta+1} - 1 \right) \\
& + \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta+1} \frac{2\delta^5(\delta+1)}{5(\delta+1)^6} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \left(-\frac{12l^2 + 24l + 12}{(\delta+1)^2} + \frac{6l+6}{\delta+1} - 1 \right) \left(2\frac{l}{\delta+1} - 1 \right) \\
& + \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta+1} \frac{2\delta^5(\delta+1)}{5(\delta+1)^6} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \left(\frac{8l^3}{(\delta+1)^3} - \frac{12l^2}{(\delta+1)^2} + \frac{6l}{\delta+1} - 1 \right) \left(2\frac{l+1}{\delta+1} - 1 \right) \\
& + \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta+1} \frac{2\delta^5(\delta+1)}{5(\delta+1)^6} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \left(\frac{4l^2 + 8l + 4}{(\delta+1)^2} - \frac{4l+4}{\delta+1} + 1 \right) \cdot \left(\frac{4l^2}{(\delta+1)^2} - \frac{4l}{\delta+1} + 1 \right) \\
& + \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta+1} \frac{2\delta^5(\delta+1)}{5(\delta+1)^6} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \left(\frac{16l^4}{(\delta+1)^4} - \frac{32l^3}{(\delta+1)^3} + \frac{24l^2}{(\delta+1)^2} - \frac{8l}{\delta+1} + 1 \right) \\
& = (\delta+1) \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta+1} \frac{2\delta^5}{5(\delta+1)^6} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \left[\frac{80l^4 + 160l^3 + 160l^2 + 80l + 16}{(\delta+1)^4} \right. \\
& \quad \left. - \frac{160l^3 + 240l^2 + 160l + 40}{(\delta+1)^3} + \frac{120l^2 + 120l + 40}{(\delta+1)^2} - \frac{40l + 20}{\delta+1} + 5 \right] \\
& = \left(\frac{\delta}{\delta+1}\right)^4 \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \left(\frac{16}{(\delta+1)^4} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) l^4 + \frac{32}{(\delta+1)^4} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) l^3 \right) \\
& \quad + \left(\frac{\delta}{\delta+1}\right)^4 \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \left(\frac{32}{(\delta+1)^4} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) l^2 + \frac{16}{(\delta+1)^4} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) l \right) \\
& \quad + \left(\frac{\delta}{\delta+1}\right)^4 \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \left(\left(\frac{16}{5(\delta+1)^4} - \frac{32}{(\delta+1)^3} \right) \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) l^3 - \frac{48}{(\delta+1)^3} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) l^2 \right) \\
& \quad + \left(\frac{\delta}{\delta+1}\right)^4 \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \left(-\frac{32}{(\delta+1)^3} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) l + \left(-\frac{8}{(\delta+1)^3} + \frac{24}{(\delta+1)^2} \right) \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) l^2 \right) \\
& \quad + \left(\frac{\delta}{\delta+1}\right)^4 \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \left(\frac{24}{(\delta+1)^2} l \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) l + \left(\frac{8}{(\delta+1)^2} - \frac{8}{\delta+1} \right) \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) l \left| -\frac{4}{\delta+1} + 1 \right| \right) \\
& = \left(\frac{\delta}{\delta+1}\right)^4 \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \frac{16}{(\delta+1)^4} \sum_{l=0}^{\delta} \binom{\delta}{l} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u\right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u\right)^{\delta-l} l(l-1)(l-2)(l-3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\delta}{\delta+1}\right)^4 \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^\delta \frac{16}{(\delta+1)^4} \sum_{l=0}^{\delta} \frac{\delta!}{(\delta-l)!l!} l(l-1)(l-2)(l-3) \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u\right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u\right)^{\delta-l} \\
&= \left(\frac{\delta}{\delta+1}\right)^4 \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^\delta \frac{16}{(\delta+1)^4} \sum_{l=4}^{\delta} \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)(\delta-3)(\delta-4)!}{(\delta-l)!l!(l-1)(l-2)(l-3)(l-4)!} l(l-1)l(-2)(l-3) \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u\right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u\right)^{\delta-l} \\
&= \left(\frac{\delta}{\delta+1}\right)^4 \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^\delta \frac{16}{(\delta+1)^4} \sum_{l=0}^{\delta-4} \frac{(\delta-4)!}{(\delta-l-4)!l!} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u\right)^{l+4} \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u\right)^{\delta-4-l} \delta(\delta-1)(\delta-2)(\delta-3) \\
&= \left(\frac{\delta}{\delta+1}\right)^4 \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^\delta \frac{16\delta(\delta-1)(\delta-2)(\delta-3)}{(\delta+1)^4} \sum_{l=0}^{\delta-4} \binom{\delta-4}{l} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u\right)^{l+4} \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u\right)^{\delta-4-l} \\
&= \left(\frac{\delta}{\delta+1}\right)^4 \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^\delta \frac{16\delta(\delta-1)(\delta-2)(\delta-3)}{(\delta+1)^4} \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^\delta \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u\right)^4 \\
&= \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)(\delta-3)}{(\delta+1)^4} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u\right)^4 \\
&= \left(\frac{\delta}{\delta+1}\right)^4 \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^\delta \left[\left(\frac{128}{(\delta+1)^4} - \frac{32}{(\delta+1)^3} \right) \sum_{l=0}^{\delta} \frac{\delta!}{(\delta-l)!l!} l(l-1)(l-2) \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u\right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u\right)^{\delta-l} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{128}{(\delta+1)^4} - \frac{32}{(\delta+1)^3} \right) \sum_{l=3}^{\delta} \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)(\delta-3)!}{l(l-1)(l-2)(l-3)!(\delta-l)!} l(l-1)(l-2) \\
& \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-l} \\
& = \left(\frac{128}{(\delta+1)^4} - \frac{32}{(\delta+1)^3} \right) \delta(\delta-1)(\delta-2) \sum_{l=0}^{\delta-3} \frac{(\delta-3)!}{(\delta-l-3)!l!} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^{l+3} \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-l-3} \\
& = \left(\frac{128-32z-32}{(\delta+1)^4} \right) \delta(\delta-1)(\delta-2) \sum_{l=0}^{\delta-3} \binom{\delta-3}{l} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-l-3} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^3 \\
& = \left(\frac{\delta}{\delta+1} \right)^4 \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^{\delta} \frac{16\delta(\delta-1)(\delta-2)(\delta-3)}{(\delta+1)^4} \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^4 \left(\frac{2\delta}{\delta+1} \right)^{\delta} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^4 \\
& = \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)(\delta-3)}{(\delta+1)^4} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^4 \\
& = \left(\frac{\delta}{\delta+1} \right)^4 \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^{\delta} \left[\left(\frac{128}{(\delta+1)^4} - \frac{32}{(\delta+1)^3} \right) \sum_{l=0}^{\delta} \frac{\delta!}{(\delta-l)!l!} l(l-1)(l-2) \right. \\
& \quad \left. - 2 \right) \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-l} \Big] \\
& = \left(\frac{128}{(\delta+1)^4} - \frac{32}{(\delta+1)^3} \right) \sum_{l=3}^{\delta} \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)(\delta-3)!}{l(l-1)(l-2)(l-3)!(\delta-l)!} l(l-1)(l-2) \\
& \quad \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-l} \\
& = \left(\frac{128}{(\delta+1)^4} - \frac{32}{(\delta+1)^3} \right) \delta(\delta-1)(\delta-2) \sum_{l=0}^{\delta-3} \frac{(\delta-3)!}{(\delta-l-3)!l!} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^{l+3} \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-l-3} \\
& = \left(\frac{128-32z-32}{(\delta+1)^4} \right) \delta(\delta-1)(\delta-2) \sum_{l=0}^{\delta-3} \binom{\delta-3}{l} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-l-3} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\delta}{\delta+1}\right)^4 \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^\delta \left(\frac{96-32\delta}{(\delta+1)^4}\right) \delta(\delta-1)(\delta-2) \left(\frac{2\delta}{\delta+1}\right)^\delta \frac{(\delta+1)^3}{8(\delta)^3} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u\right)^3 \\
&= \left(\frac{12-4\delta}{(\delta+1)^5}\right) \delta^2(\delta-1)(\delta-2) \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u\right)^3 \\
&= \left(\frac{\delta}{\delta+1}\right)^4 \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^\delta \left(\frac{240}{(\delta+1)^4} - \frac{144}{(\delta+1)^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{24}{(\delta+1)^2}\right) \left[\sum_{l=0}^{\delta} \binom{\delta}{l} l(l-1) \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u\right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u\right)^{\delta-l} \right] \\
&= \left(\frac{240}{(\delta+1)^4} - \frac{144}{(\delta+1)^3} + \frac{24}{(\delta+1)^2}\right) \sum_{l=0}^{\delta} \frac{\delta!}{(\delta-l)!l!} l(l-1) \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u\right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u\right)^{\delta-l} \\
&= \left(\frac{240}{(\delta+1)^4} - \frac{144}{(\delta+1)^3} + \frac{24}{(\delta+1)^2}\right) \sum_{l=2}^{\delta} \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)!}{(\delta-l)!l(l-1)(l-2)!} l(l-1) \\
&\quad - 1) \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u\right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u\right)^{\delta-l} \\
&= \left(\frac{240}{(\delta+1)^4} - \frac{144}{(\delta+1)^3} + \frac{24}{(\delta+1)^2}\right) \delta(\delta-1) \sum_{l=0}^{\delta-2} \frac{(\delta-2)!}{(\delta-l-2)!l!} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u\right)^{l+2} \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u\right)^{\delta-l-2} \\
&= \left(\frac{240}{(\delta+1)^4} - \frac{144}{(\delta+1)^3} + \frac{24}{(\delta+1)^2}\right) \delta(\delta-1) \sum_{l=0}^{\delta-2} \binom{\delta-2}{l} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u\right)^{l+2} \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u\right)^{\delta-l-2} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u\right)^2 \\
&= \left(\frac{\delta}{\delta+1}\right)^4 \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^\delta \left(\frac{240}{(\delta+1)^4} - \frac{144}{(\delta+1)^3} + \frac{24}{(\delta+1)^2}\right) \delta(\delta-1) \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^2 \left(\frac{2\delta}{\delta+1}\right)^\delta \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u\right)^2 \\
&= \left(\frac{60}{(\delta+1)^4} - \frac{36}{(\delta+1)^3} + \frac{6}{(\delta+1)^2}\right) \delta^3(\delta-1) \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\delta}{\delta+1} \right)^4 \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^\delta \left[\left(\frac{240}{(\delta+1)^4} - \frac{64}{(\delta+1)^3} + \frac{24}{(\delta+1)^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{8}{\delta+1} \right) \sum_{l=0}^{\delta} \binom{\delta}{l} l \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-l} \right] \\
&= \left(\frac{240}{(\delta+1)^4} - \frac{64}{(\delta+1)^3} + \frac{24}{(\delta+1)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{8}{\delta+1} \right) \sum_{l=0}^{\delta} \frac{\delta!}{(\delta-l)! l!} l \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-l} \\
&= \left(\frac{240}{(\delta+1)^4} - \frac{64}{(\delta+1)^3} + \frac{24}{(\delta+1)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{8}{\delta+1} \right) \delta \sum_{l=0}^{\delta-1} \frac{(\delta-1)!}{(\delta-l-1)! l!} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^{l+1} \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-l-1} \\
&= \left(\frac{240}{(\delta+1)^4} - \frac{64}{(\delta+1)^3} + \frac{24}{(\delta+1)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{8}{\delta+1} \right) \delta \sum_{l=0}^{\delta-1} \binom{\delta-1}{l} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u \right)^{\delta-l-1} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right) \\
&= \left(\frac{\delta}{\delta+1} \right)^4 \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^\delta \left(\frac{240}{(\delta+1)^4} - \frac{64}{(\delta+1)^3} + \frac{24}{(\delta+1)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{8}{\delta+1} \right) \frac{\delta+1}{2\delta} \left(\frac{2\delta}{\delta+1} \right)^\delta \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right) \\
&= \frac{\delta^4}{(\delta+1)^3} \left(\frac{120}{(\delta+1)^4} - \frac{32}{(\delta+1)^3} + \frac{12}{(\delta+1)^2} - \frac{4}{\delta+1} \right) \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right) \\
&= \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)(\delta-3)}{(\delta+1)^4} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^4 + \frac{12\delta^2(\delta-1)(\delta-2)}{(\delta+1)^5} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^3 \\
&\quad + \frac{\delta^3(\delta-1)}{(\delta+1)^2} \left(\frac{60}{(\delta+1)^4} - \frac{36}{(\delta+1)^3} + \frac{6}{(\delta+1)^2} \right) \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{120}{(\delta+1)^4} - \frac{32}{(\delta+1)^3} + \frac{12}{(\delta+1)^2} - \frac{4}{\delta+1} \right) \frac{(\delta)^4}{(\delta+1)^3} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u \right) \\
& + \frac{\delta^4}{(\delta+1)^4} \left(\frac{16}{5(\delta+1)^4} - \frac{8}{(\delta+1)^3} + \frac{8}{(\delta+1)^2} + \frac{\delta-3}{\delta+1} \right) \\
N_\delta(f; u) = & u^4 - \frac{10\delta^3 - 5\delta^2 + 10\delta - 1}{(\delta+1)^4} + u^3 \left(\frac{-24\delta^2}{(\delta+1)^5} \right) \\
& + u^2 \left(\frac{6\delta^5 - 12\delta^4 - 96\delta^3}{(\delta+1)^6} \right) + u \left(\frac{36\delta^6 + 80\delta^5 + 12\delta^4}{(\delta+1)^7} \right) \\
& + \frac{-60\delta^7 + 130\delta^6 + 420\delta^5 + 41\delta^4}{5(\delta+1)^8}
\end{aligned}$$

$$\lim_{-1 \leq u \leq 1} \|N_\delta(t^4; u) - u^4\|_{C[1,1]} = 0$$

Olduğundan dolayı;

$$N_\delta(t^4; u) \rightrightarrows u^4 \text{ olduğu görülür.}$$

Tanım 4,1.

$$\mathfrak{N}_{n,\delta}(u) = \mathcal{L}_n((t-u)^\delta; u) \quad \delta = \{1, 2, \dots\}$$

İle tanımlanan ifadeler $\mathcal{L}_n$ operatör dizisinin η -inci merkezi momentleri denir.

Teorem 4,1.

(Tanım 4.1)'de tanımladığımız merkezi momentleri ilk dördünü $N_\delta(t; u)$ operatörü için hesaplayalım.

İspat 4,1.

$$N_\delta((t-u)^0; u) = N_\delta(1; u)$$

Olduğundan ve (4,6)'den dolayı;

$$\mathfrak{N}_{n,0}(u) = 1 \quad (4.11)$$

Olur.

$$N_\delta((t-u)^1; u) = N_\delta(t; u) + N_\delta(-u, u) = N_\delta(t; u) - uN_\delta(1; u)$$

Yazabiliriz. (4.6) ve (4,7)'den dolayı;

$$N_\delta((t-u)^1; u) = u - \frac{u}{\delta+1} - u = \frac{-u}{\delta+1}$$

$$\mathfrak{N}_{n,1}(u) = -\frac{u}{\delta+1} \quad (4.12)$$

Olur.

$$N_\delta((t-u)^2; u) = N_\delta(t^2 - 2ut + u^2; u) = N_\delta(t^2; u) - 2uN_\delta(t; u) + u^2N_\delta(1; u)$$

Yazılabilir. (4.6), (4,7) ve (4.8)'den dolayı

$$\begin{aligned} N_\delta((t-u)^2; u) &= u^2 - \frac{3\delta+1}{(\delta+1)^2} + \frac{3\delta^3+\delta^2}{3(\delta+1)^4} - 2u\left(u - \frac{u}{\delta+1}\right) + u^2 \\ &= u^2 - \frac{3\delta+1}{(\delta+1)^2} + \frac{3\delta^3+\delta^2}{3(\delta+1)^4} - 2u^2 + \frac{2\delta^2}{\delta+1} + u^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2u^2}{\delta+1} + \frac{-(6\delta+3)(\delta^2+2\delta+1)+3\delta^3+\delta^2}{3(\delta+1)^4} \\
&= \frac{2u^2}{\delta+1} + \frac{(-6\delta^3-12\delta^2-6\delta-3\delta^2-6\delta-3+3\delta^3+\delta^2)}{3(\delta+1)^4} \\
&= \frac{2u^2}{\delta+1} - \frac{3\delta^3+11\delta^2+12\delta+3}{3(\delta+1)^4} \quad \text{olduğundan}
\end{aligned}$$

$$\aleph_{n,2}(u) = \frac{2u^2}{\delta+1} - \frac{3\delta^3+11\delta^2+12\delta+3}{3(\delta+1)^4} \quad (4.13)$$

Olur.

$$\begin{aligned}
N_\delta((t-u)^3; u) &= N_\delta(t^3 - 3t^2u + 3tu^2 - u^3; u) \\
&= N_\delta(t^3; u) - 3uN_\delta(t^2; u) + 3u^2N_\delta(t; u) - u^3N_\delta(1; u)
\end{aligned}$$

Yazılabilir.

(4.6), (4.7), (4.8) ve (4.9)'dan dolayı;

$$\begin{aligned}
N_\delta((t-u)^3; u) &= u^3 - \frac{6\delta^2+\delta+1}{(\delta+1)^3} + \frac{3\delta^4-\delta^3}{(\delta+1)^5}u + \frac{\delta^4}{(\delta+1)^6} \\
&\quad - 3u \left(u^2 - \frac{3\delta+1}{(\delta+1)^2} + \frac{3\delta^3+\delta^2}{3(\delta+1)^4} \right) + 3u^2 \left(u - \frac{u}{\delta+1} \right) - u^3 \\
&= - \frac{(6\delta^2+\delta+1)(\delta^3+3\delta^2+3\delta+1)+\delta^4}{(\delta+1)^6} + \frac{3\delta^4-\delta^3}{(\delta+1)^5}u \\
&\quad + 3u \frac{3\delta^3+11\delta^2+12\delta+3}{3(\delta+1)^4} - \frac{3u^3}{\delta+1} \\
&= - \frac{6\delta^5+19\delta^4+22\delta^3+12\delta^2+4\delta+1}{(\delta+1)^6} + \frac{9u\delta^4-3u\delta^3}{3(\delta+1)^5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3u(3\delta^3 + 11\delta^2 + 12\delta + 3)(\delta + 1)}{3(\delta + 1)^5} - \frac{3u^3(\delta^4 + 4\delta^3 + 6\delta^2 + 4\delta + 1)}{3(\delta + 1)^5} \\
& = - \frac{6\delta^5 + 19\delta^4 + 22\delta^3 + 12\delta^2 + 4\delta + 1}{\delta(\delta + 1)^6} \\
& + \frac{3u\delta^4(6 - u^2) - u\delta^3(12u^2 + 49) + 3u\delta^2(23 - 6u^2) + 3u\delta(15 - 12u^2) + 3u(3 - u^2)}{3(\delta + 1)^5}
\end{aligned}$$

Olduğundan;

$$\begin{aligned}
\aleph_{n,3}(u) &= - \frac{6\delta^5 + 19\delta^4 + 22\delta^3 + 12\delta^2 + 4\delta + 1}{(\delta + 1)^6} \\
&+ \frac{3u\delta^4(6 - u^2) - u\delta^3(12u^2 + 49) + 3u\delta^2(23 - 6u^2)}{3(\delta + 1)^5} \\
&+ \frac{3u\delta(15 - 12u^2) + 3u(3 - u^2)}{3(\delta + 1)^5} \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Olur.

$$\begin{aligned}
N_\delta((t - u)^4; u) &= N_\delta(t^4 - 4t^3u + 6t^2u^2 - 4tu^3 + u^4; u) \\
&= N_\delta(t^4; u) - 4uN_\delta(t^3; u) + 6u^2N_\delta(t^2; u) - 4u^3N_\delta(t; u) + u^4(1; u)
\end{aligned}$$

(4.6), (4.7), (4.8) ve (4.9) ve (4.10)'dan dolayı,

$$\begin{aligned}
N_\delta((t - u)^4; u) &= u^4 - \frac{10\delta^3 - 5\delta^2 + 10\delta - 1}{(\delta + 1)^4} - u^3 \frac{24\delta^2}{(\delta + 1)^5} \\
&+ u^2 \frac{6\delta^5 - 12\delta^4 - 96\delta^3}{(\delta + 1)^6} + u \frac{36\delta^6 + 80\delta^5 + 12\delta^4}{(\delta + 1)^7} \\
&+ \frac{-60\delta^7 + 130\delta^6 + 420\delta^5 + 41\delta^4}{5(\delta + 1)^8} \\
&- 4u \left(u^3 - \frac{6\delta^2 + \delta + 1}{(\delta + 1)^3} + \frac{3\delta^4 - \delta^3}{(\delta + 1)^5} u + \frac{\delta^4}{(\delta + 1)^6} \right) \\
&+ 6u^2 \left(u^2 - \frac{3\delta + 1}{(\delta + 1)^2} + \frac{3\delta^3 + \delta^2}{3(\delta + 1)^4} \right) - 4u^3 \left(u - \frac{u}{\delta + 1} \right) + u^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4u^4}{\delta + 1} - \frac{5(10\delta^3 - 5\delta^2 + 10\delta + 1)(\delta^4 + 4\delta^3 + 6\delta^2 + 4\delta + 1)\delta^4}{5(\delta + 1)^8} \\
&\quad - \frac{60\delta^7 + 130\delta^6 + 420\delta^5 + 41\delta^4}{5(\delta + 1)^8} - \frac{24u^3\delta^2}{(\delta + 1)^5} \\
&\quad - \frac{u^2(6\delta^5 + 20\delta^4 + 95\delta^3 + 11\delta^2 + 12\delta + 3)}{(\delta + 1)^6} \\
&\quad - \frac{u(6\delta^5 + 20\delta^4 + 22\delta^3 + 12\delta^2 + 4\delta + 1)}{(\delta + 1)^6}
\end{aligned}$$

Olduğundan

$$\begin{aligned}
\aleph_{n,4}(u) &= \frac{4u^4(\delta + 1)^7}{5(\delta + 1)^8} + \frac{-10\delta^7 + 305\delta^6 + 670\delta^5 + 311\delta^4 + 230\delta^3 + 235\delta^2}{5(\delta + 1)^8} \\
&\quad - \frac{70\delta + 5}{5(\delta + 1)^8} - \frac{24u^3(\delta^3 + \delta^2)}{(\delta + 1)^6} - \frac{u^2(6\delta^5 + 20\delta^4 + 95\delta^3 + 11\delta^2 + 12\delta + 3)}{(\delta + 1)^6} \\
&\quad - \frac{u(6\delta^5 + 20\delta^4 + 22\delta^3 + 12\delta^2 + 4\delta + 1)}{(\delta + 1)^6}
\end{aligned}$$

Olur. Böylece $N_\delta(f; u)$ operatörünün 4 tane merkezci momentleri hesaplanmıştır.

Şimdi de $N_\delta(f; u)$ operatörünün düzgün yakınsaklığını inceleyelim.

Teorem 4,2.

$N_\delta(f; u)$ Operatörü $[-1,1]$ Aralığında sürekli ve tüm reel ekseninde sınırlı olan f fonksiyonuna aynı aralıkta düzgün yakınsaktır. Yani;

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \| \delta(f; u) - f(u) \|_{C[-1,1]} = 0$$

İspat 4,2.

$N_\delta(f; u)$ Operatörünün düzgün yakınsaklığını gösterelim;

$$\varphi_{\delta}^l(u) = \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \binom{\delta}{l} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u\right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u\right)^{\delta-l}$$

$$N_{\delta}(f; u) = \frac{(\delta+1)^2}{2\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} f(t).dt$$

$$|N_{\delta}(f; u) - f(u)| =$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(\delta+1)^2}{2\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} f(t).dt \right. \\ & \quad \left. - f(u) \frac{(\delta+1)^2}{2\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} 1dt \right| \\ &= \left| \frac{(\delta+1)^2}{2\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} f(t)dt \right. \\ & \quad \left. - \frac{(\delta+1)^2}{2\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} f(u)dt \right| \\ &= \left| \frac{(\delta+1)^2}{2\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} (f(t) - f(u))dt \right| \end{aligned}$$

$t \in [-1,1]$ olduğundan

$$\left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \binom{\delta}{l} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u\right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u\right)^{\delta-l} \geq 0 \text{ dir.}$$

Üçgen eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned}
|N_{\delta}(f; u) - f(u)| &\leq \frac{(\delta + 1)^2}{2\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} |f(t) - f(u)| dt \\
&\leq \frac{(\delta + 1)^2}{2\delta} \sum_{|t-u|<\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} |f(t) - f(u)| dt \\
&\quad + \frac{(\delta + 1)^2}{2\delta} \sum_{|t-u|\geq\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} |f(t) - f(u)| dt
\end{aligned}$$

f Fonksiyonu reel ekseninde sınırlı olduğu için bir K pozitif sayısı bulabiliriz ki tüm $u \in [-1,1]$ için;

$$|f(u)| \leq K \quad (4.16)$$

Sağlanır. $f \in C[-1,1]$ olduğunda her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulabiliriz ki $t \in (-\infty, \infty)$ ve $u \in [a,b]$ için $|t - u| < \delta$ olduğunda

$$|f(t) - f(u)| < \varepsilon \quad (4.17)$$

Sağlanır.

$u, t \in [-1,1]$ olduğunda (4.17) eşitsizliği f fonksiyonu $[-1,1]$ kapalı aralığında sürekli olduğu için eşitlik sağlanmış olur.

$u \in [-1,1]$, $t \notin [-1,1]$ olduğunda ise (4.17) eşitsizliği f fonksiyonu a ve b noktalarından sırasıyla soldan ve sağdan sürekli bir fonksiyon olduğu için sağlanmış olur.

(4.16) ve (4.17) ifade edilmiş olan eşitsizliklerinden dolayı tüm $t \in (-\infty, \infty)$ ve $u \in [-1,1]$ için,

$$|f(t) - f(u)| < \varepsilon + \frac{2K}{\delta^2} (t - u)^2 \quad (4.18)$$

Eşitsizliği sağlanmış olur. Çünkü $|t - u| < \delta$ olduğunda, (4.18) eşitsizliği (4.17) eşitsizliğinden dolayı $\frac{2K}{\delta^2} (t - u)^2$ ifadesi pozitif olduğu için sağlanır.

$|t - u| \geq \delta$ Olduğunda ise $\frac{(t-u)^2}{\delta^2} \geq 1$ olacağından $\frac{2K}{\delta^2} (t - u)^2 \geq 2K$ eşitsizliği sağlanır. Bu durumda;

$\varepsilon > 0$ olduğu için (4.16) eşitsizliğinden (4.18) eşitsizliği elde edilmiş olur.

Böylece;

$$|N_{\delta}(f; u) - f(u)| \leq N_{\delta}(|f(t) - f(u); u|) \leq N_{\delta}\left(\varepsilon + \frac{2K}{\delta^2} (t - u)^2; u\right)$$

$$\begin{aligned} &\leq \varepsilon + 2K \frac{(\delta + 1)^2}{2\delta} \sum_{|t-u| \geq \delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2^{\frac{l}{\delta+1}-1}\right)^{\frac{\delta}{\delta+1}}}^{\left(2^{\frac{l+1}{\delta+1}-1}\right)^{\frac{\delta}{\delta+1}}} \frac{(t - u)^2}{\delta^2} dt \\ &\leq \varepsilon + \frac{2K (\delta + 1)^2}{\delta^2} \frac{1}{2\delta} \sum_{|t-u| \geq \delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2^{\frac{l}{\delta+1}-1}\right)^{\frac{\delta}{\delta+1}}}^{\left(2^{\frac{l+1}{\delta+1}-1}\right)^{\frac{\delta}{\delta+1}}} (t - u)^2 dt \\ &\leq \varepsilon + \frac{2K (\delta + 1)^2}{\delta^2} \frac{1}{2\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2^{\frac{l}{\delta+1}-1}\right)^{\frac{\delta}{\delta+1}}}^{\left(2^{\frac{l+1}{\delta+1}-1}\right)^{\frac{\delta}{\delta+1}}} (t - u)^2 dt \end{aligned}$$

Yazabiliriz. Böylece (4.13)'ten

$$\aleph_{n,2}(u) = \frac{2u^2}{\delta + 1} - \frac{3\delta^3 + 11\delta^2 + 12\delta + 3}{3(\delta + 1)^4}$$

$$|N_{\delta}(f; u) - f(u)| \leq \varepsilon + \frac{2K}{\delta^2} \left(\frac{2u^2}{\delta + 1} - \frac{3\delta^3 + 11\delta^2 + 12\delta + 3}{3(\delta + 1)^4} \right)$$

Elde edilir.

$u \in [-1,1]$ olduğundan;

$$\max_{-1 \leq u \leq 1} (3\delta^3 + 11\delta^2 + 12\delta + 3) = 12\delta + 3 \quad \text{o halde;}$$

$$|N_\delta(f; u) - f(u)| \leq \epsilon + \frac{24K\delta + 6K}{3\delta^2(\delta + 1)^4}$$

Yazılabilir. Yani:

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \max_{-1 \leq u \leq 1} |N_\delta(f; u) - f(u)| = 0 \quad (4.19)$$

Eşitliği sağlanmış olur. Böylece verilmiş olan $N_\delta(f; u)$ operatörünün f fonksiyonuna düzgün yakınsadığı gösterilmiş olur.

Voronowskaja ise 1932 yılında Bernstein polinomları için bir teorem ifade etmiş olup ayrıca ispatını da sağlamıştır. Biz de bu ifadenin benzerini $N_\delta(f; u)$ operatörü için ifade ve ispat edelim.

Teorem 4,3

f fonksiyonu $[-1,1]$ simetrik kapalı aralığında sınırlı ve $(-1,1)$ simetrik açık aralığının bir u noktasında ikinci türevi mevcut olsun. Bu takdirde;

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \delta(N_\delta(f; u) - f(u)) = -uf'(u) + (1 - u^2) \frac{f''(u)}{2}$$

Eşitliği sağlanır.

İspat 4,3

Bir f fonksiyonunun u noktasındaki Taylor açılımı;

$$f(t) = f(u) + \frac{1}{1!} f'(u)(t - u) + \frac{1}{2!} f''(u)(t - u)^2 + R_\delta(t - u)$$

(4.20)

$$R_\delta(t - u) = \frac{1}{3!} f'''(u)(t - u)^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(u)(t - u)^4 + \dots$$

Olup oluşturulmuş olan bu eşitliğe kalan terim denir.

Ayrıca;

$$R_\delta(t - u) = (t - u)^2 \mu(t - u)$$

Yazılabilir. Burada R_δ kalan terim olmakla birlikte $\lim_{g \rightarrow 0} \mu(g) = 0$ dır.

Dolayısıyla verilmiş olan ifade sınırlıdır. O halde bir g sayısı için $G > 0$ vardır ki;

$$|\mu(g)| \leq G$$

İfadesi yazılabilir.

Bu durumda (4.20) eşitliği

$$f(t) = f(u) + \frac{1}{1!}f'(u)(t-u) + \frac{1}{2!}f''(u)(t-u)^2\mu(t-u)$$

Şeklinde yazılabilir.

Her iki tarafı $\left[\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}, \left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}\right]$ Aralığında integrale alıp ve her iki tarafı;

$$\varphi_{\delta}^l(u) = \frac{(\delta+1)^2}{2} \delta \binom{\delta}{l} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u\right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u\right)^{\delta-l}$$

İle çarpar ve her iki tarafın da

$$\sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u)$$

Toplamını alırsak;

$$\begin{aligned} N_{\delta}(f; u) &= \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} f(u) dt \\ &\quad + \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} f'(u)(t-u) dt \\ &\quad + \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} \frac{1}{2!} f''(u)(t-u)^2 dt \\ &\quad + \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} (t-u)^2 \mu(t-u) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{\delta}(f; u) &= f(u) \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^{\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} dt \\
&\quad + f'(u) \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^{\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} (t-u) dt \\
&\quad + \frac{1}{2!} f''(u) \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^{\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} (t-u)^2 dt \\
&\quad + \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^{\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} (t-u)^2 \mu(t-u) dt \\
N_{\delta}(f; u) &= f(u) N_{\delta}(1; u) + f'(u) \aleph_{n,1}(u) + \frac{f''(u)}{2} \aleph_{n,2}(u) \\
&\quad + \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^{\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} (t-u)^2 \mu(t-u) dt
\end{aligned}$$

(4.1),(4.12) ve (4.13) den dolayı;

$$\begin{aligned}
N_{\delta}(f; u) &= f(u) - f'(u) \frac{u}{\delta+1} + \frac{f''(u)}{2} \left(\frac{2u^2}{\delta+1} - \frac{3\delta^3 + 11\delta^2 + 12\delta + 3}{3(\delta+1)^4} \right) \\
&\quad + \left(\frac{\delta+1}{2\delta} \right)^{\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} (t-u)^2 \mu(t-u) dt
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Yukarıda verilmiş olan eşitliğin sağ tarafında belirtilmiş olan 4. İfadeyi;

$$K_{\delta}(u) = \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} (t-u)^2 \mu(t-u) dt$$

Şeklinde yazalım. Bu durumda;

$$\begin{aligned} K_{\delta}(u) = & \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \sum_{|t-u| \geq \delta}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} (t-u)^2 \mu(t-u) dt \\ & + \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} (t-u)^2 \mu(t-u) dt \end{aligned} \quad (4.22)$$

Olur. $|t-u| < \delta$ iken $|\mu(t-u)| < \varepsilon$ olmuş olur. Bu ifade $|\mu(g)| \leq G$ (4.22) de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} |K_{\delta}(u)| \leq & \varepsilon \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \sum_{|t-u| < \delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} (t-u)^2 dt \\ & + G \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \sum_{|t-u| \geq \delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} (t-u)^2 dt \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$|K_{\delta}(u)| \leq \varepsilon \left(\frac{2u^2}{\delta+1} - \frac{3\delta^3 + 11\delta^2 + 12\delta + 3}{3(\delta+1)^4} \right)$$

$$+G\left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \sum_{|t-u|\geq\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} (t-u)^2 dt$$

$$\delta = \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \sum_{|t-u|\geq\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} (t-u)^2 dt$$

Diyelim.

$$|t-u| \geq \delta \text{ ise } \left(\frac{t-u}{\delta}\right)^2 \geq 1$$

$$\xi \leq \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \sum_{|t-u|\geq\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} (t-u)^2 \left(\frac{t-u}{\delta}\right)^2 dt$$

Yazabiliriz. Böylece;

$$\xi \leq \frac{1}{\delta^2} \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^{\delta} \sum_{|t-u|\geq\delta} \varphi_{\delta}^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} (t-u)^4 dt = \frac{1}{\delta^2} \mathfrak{K}_{n,4}(u)$$

Elde edilmiş olan bu ifadeyi (4.23) te kullanırsak;

$$|K_{\delta}(u)| \leq \varepsilon \left(\frac{2u^2}{\delta+1} - \frac{3\delta^3 + 11\delta^2 + 12\delta + 3}{3(\delta+1)^4} \right)$$

$$- \frac{24u^3(\delta^3 + \delta^2) - u^2(6\delta^5 + 20\delta^4 + 95\delta^3 + 11\delta^2 + 12\delta + 3)}{(\delta+1)^6}$$

$$+ \frac{u(6\delta^5 + 20\delta^4 + 22\delta^3 + 12\delta^2 + 4\delta + 1)}{(\delta+1)^6}$$

$$+ \frac{G}{\delta^2} \frac{4u^4(\delta+1)^7 - 10\delta^7 + 305\delta^6 + 670\delta^5 + 311\delta^4 + 230\delta^3 + 235\delta^2 + 70\delta + 5}{5(\delta+1)^8}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \delta N_{\delta}(f; u) \leq \lim_{\delta \rightarrow \infty} \varepsilon \left(\frac{2u^2}{\delta+1} - \frac{3\delta^3 + 11\delta^2 + 12\delta + 3}{3(\delta+1)^4} \right)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{24u^3(\delta^3 + \delta^2) - u^2(6\delta^5 + 20\delta^4 + 95\delta^3 + 11\delta^2 + 12\delta + 3)}{(\delta + 1)^6} \\
& + \frac{u(6\delta^5 + 20\delta^4 + 22\delta^3 + 12\delta^2 + 4\delta + 1)}{(\delta + 1)^6} \\
& + \frac{G}{\delta^2} \frac{4u^4(\delta + 1)^7 - 10\delta^7 + 305\delta^6 + 670\delta^5 + 311\delta^4 + 230\delta^3 + 235\delta^2 + 70\delta + 5}{5(\delta + 1)^8}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow \infty} \varepsilon. 0 + 0 \quad u \in [-1,1] \text{ Olduğundan;}$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow \infty} \delta K_{\delta}(u) = 0 \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned}
N_{\delta}(f; u) &= f(u) - f'(u) \frac{u}{\delta + 1} + \frac{f''(u)}{2} \left(\frac{2u^2}{\delta + 1} - \frac{3\delta^3 + 11\delta^2 + 12\delta + 3}{3(\delta + 1)^4} \right) \\
&+ K_{\delta}(u)
\end{aligned}$$

Şeklinde ifade edilir. O halde

$$\begin{aligned}
\delta(N_{\delta}(f; u) - f(u)) &= -f'(u) \frac{\delta u}{\delta + 1} + \frac{f''(u)}{2} \delta \left(\frac{2u^2}{\delta + 1} - \frac{3\delta^3 + 11\delta^2 + 11\delta + 3}{3(\delta + 1)^4} \right) \\
&+ \delta K_{\delta}(u)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta \rightarrow \infty} \delta(N_{\delta}(f; u) - f(u)) &= -f'(u) \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\delta u}{\delta + 1} \\
&+ \frac{f''(u)}{2} \lim_{\delta \rightarrow \infty} \left(\frac{2\delta u^2}{\delta + 1} - \frac{3\delta^3 + 11\delta^2 + 12\delta + 3}{3(\delta + 1)^4} \right) = -uf'(u) + (1 - u^2) \frac{f''(u)}{2}
\end{aligned}$$

Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Şimdi de; verilmiş olan $N_{\delta}(f; u)$ operatörünün yaklaşım hızını hesaplayalım. Bunun için öncelikle Süreklilik Modülünün tanım ve özelliklerini verelim.

Tanım 4.2. (Süreklilik Modülü)

$[a, b]$ aralığında tanımlı f fonksiyonu verilsin. $[0, b - a]$ aralığında tanımlı

$$\begin{aligned}\omega(\delta) &= \omega(f; \delta) \\ &= \{ \sup |f(u_2) - f(u_1)| : |u_2 - u_1| \leq \delta, u_1, u_2 \\ &\quad \in [a, b] \}\end{aligned}$$

Fonksiyonuna f 'nin Süreklilik Modülü denir (Shevchuk, 1992).

Süreklilik Modülünün Özellikleri

1. $\omega(f; \delta) \geq 0$
2. $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$
3. $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f; \lambda\delta) \leq m\omega(f; \delta)$
4. $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f; \lambda\delta) \leq (1 + \lambda)\omega(f; \delta)$
5. $\lim_{\delta \rightarrow \infty} \omega(f; \delta) = 0$
6. $|f(t) - f(u)| \leq \omega(|f(t) - f(u)|)$
7. $|f(t) - f(u)| \leq \left(\frac{|t-u|}{\delta} + 1\right) \omega(f; u)$

(Campiti ve Altomare, 1994).

Şimdi ise Süreklilik Modülü yardımı ile $N_\delta(f; u)$ operatörünün yaklaşım hızını verilmiş olan bir teorem ile ispatlayalım.

Teorem 4.4.

$f \in C[-1, 1]$ Olsun bu takdirde yeterince büyük k 'lar için;

$$|N_\delta(f; u) - f(u)| \leq 2\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \text{ Eşitsizliği sağlanır.}$$

İspat 4.4.

$$\begin{aligned}\varphi_\delta^l(u) &= \left(\frac{\delta+1}{2\delta}\right)^\delta \binom{\delta}{l} \left(\frac{\delta}{\delta+1} + u\right)^l \left(\frac{\delta}{\delta+1} - u\right)^{\delta-l} \\ N_\delta(f; u) &= \frac{(\delta+1)^2}{2\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_\delta^l(u) \int_{\left(\frac{l}{2\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(\frac{l+1}{2\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} f(t) dt\end{aligned}$$

Şeklindedir.

$N_\delta(1; u) = 1$ Olduğundan ve operatörünün lineerliğinden

$$\begin{aligned}|N_\delta(f; u) - f(u)| &= |N_\delta(f; u) - f(u)N_\delta(1; u)| = |N_\delta(f; u) - N_\delta(f(u); u)| \\ &\leq |N_\delta(f(t) - f(u); u)| \leq (N_\delta|f(t) - f(u)|; u)\end{aligned} \quad (4.24)$$

Süreklilik Modülünün (7) özelliğini kullanırsak;

$|f(t) - f(u)| \leq \left(\frac{|t-u|}{\delta} + 1\right) \omega(f; \delta)$ Bu ifadeyi (4.24) te yerine yazarsak;

$$|N_\delta(f; u) - f(u)| \leq N_\delta \left(\left(\frac{|t-u|}{\delta} + 1 \right) \omega(f; \delta); u \right) = \omega(f; \delta) N_\delta(1; u) + \frac{\omega(f; \delta)}{\delta} N_\delta(|t-u|; u) \quad \text{bulunur. yani}$$

$$|N_\delta(f; u) - f(u)| \leq \omega(f; \delta) \left(N_\delta(1; u) + \frac{1}{\delta} N_\delta(|t-u|; u) \right) \quad (4.25)$$

(4.1)'in (4.25)'de kullanılmasıyla

$$|N_\delta(f; u) - f(u)| \leq \omega(f; \delta) \left(1 + \frac{1}{\delta} N_\delta(|t-u|; u) \right) \quad (4.26)$$

Bulunur, bulunan bu ifade de

$$P = N_\delta(|t-u|; u)$$

Diyelim.

Cauchy-Schwartz Bungleowsky eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned} P &= N_\delta(|t-u|; u) = \frac{(\delta+1)^2}{2\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_\delta^l(u) \int_{\left(2^{\frac{l}{\delta+1}-1}\right)^{\frac{\delta}{\delta+1}}}^{\left(2^{\frac{l+1}{\delta+1}-1}\right)^{\frac{\delta}{\delta+1}}} |t-u| \cdot dt \\ &= \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_\delta^l(u) \int_{\left(2^{\frac{l}{\delta+1}-1}\right)^{\frac{\delta}{\delta+1}}}^{\left(2^{\frac{l+1}{\delta+1}-1}\right)^{\frac{\delta}{\delta+1}}} \frac{\delta+1}{\sqrt{2\delta}} \frac{\delta+1}{\sqrt{2\delta}} |t-u| dt \\ &\leq \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_\delta^l(u) \left(\int_{\left(2^{\frac{l}{\delta+1}-1}\right)^{\frac{\delta}{\delta+1}}}^{\left(2^{\frac{l+1}{\delta+1}-1}\right)^{\frac{\delta}{\delta+1}}} \frac{(\delta+1)^2}{2\delta} dt \right)^{1/2} \left(\int_{\left(2^{\frac{l}{\delta+1}-1}\right)^{\frac{\delta}{\delta+1}}}^{\left(2^{\frac{l+1}{\delta+1}-1}\right)^{\frac{\delta}{\delta+1}}} (t-u)^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \sum_{l=0}^{\delta} \sqrt{\varphi_\delta^l(u)} \sqrt{\varphi_\delta^l(u)} \left(\int_{\left(2^{\frac{l}{\delta+1}-1}\right)^{\frac{\delta}{\delta+1}}}^{\left(2^{\frac{l+1}{\delta+1}-1}\right)^{\frac{\delta}{\delta+1}}} \frac{(\delta+1)^2}{2\delta} (t-u)^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{N_\delta((t-u)^2; u)} \end{aligned}$$

Bulunur. Öte taraftan;

$$N_\delta((t-u)^2; u) = \frac{2u^2}{\delta+1} - \frac{3\delta^3 + 11\delta^2 + 12\delta + 3}{3(\delta+1)^4}$$

Olduğu biliniyor.

O halde;

$$P \leq \left(\frac{2u^2}{\delta + 1} - \frac{3\delta^3 + 11\delta^2 + 12\delta + 3}{3(\delta + 1)^4} \right)^{1/2}$$

Elde edilir. Elde edilen bu ifadenin (4.26)'da yerine yazılmasıyla;

$$|N_\delta(f; u) - f(u)| \leq \omega(f; \delta) \left(1 + \frac{1}{\delta} N_\delta(|t - u|; u) \right)$$

Burada yerine yazılmasıyla;

$$\begin{aligned} |N_\delta(f; u) - f(u)| &\leq \omega(f; \delta) \left(1 + \frac{1}{\delta} \left(\frac{2u^2}{\delta + 1} - \frac{3\delta^3 + 11\delta^2 + 12\delta + 3}{3(\delta + 1)^4} \right)^{1/2} \right) \\ \max_{-1 \leq u \leq 1} \left(\frac{2u^2}{\delta + 1} - \frac{3\delta^3 + 11\delta^2 + 12\delta + 3}{3(\delta + 1)^4} \right)^{1/2} &\leq \left(\frac{12\delta + 3}{3(\delta + 1)^4} \right)^{1/2} \leq \left(\frac{3(3\delta + 1)}{3(\delta + 1)^4} \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt[2]{\delta^4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta}} \end{aligned}$$

Olur, bu durumda;

$$|N_\delta(f; u) - f(u)| \leq \omega(f; \delta) \left(1 + \frac{1}{\delta} \frac{1}{\sqrt{\delta}} \right)$$

Yazabiliriz. $\delta = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$ Olarak alınırsa

$$|N_\delta(f; u) - f(u)| \leq 2\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right) \quad olur.$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi de Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyonlar kullanılarak $N_\delta(f; u)$ operatörü için bir teorem ispat edelim.

Teorem 4,5.

f fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlıyorsa; bu takdirde

$$\|N_\delta(f; u) - f(u)\|_{C[-1,1]} = o\left(\left(\frac{3\delta + 1}{3(\delta + 1)^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Dır.

İspat 4,5.

$N_\delta(1; u) = 1$ Olduğundan ve operatörün lineerliğinden;

$$\begin{aligned} |N_\delta(f; u) - f(u)| &= |N_\delta(f; u) - f(u) N_\delta(1; u)| = |N_\delta(f; u) - N_\delta(f(u); u)| \\ &\leq (N_\delta|f(t) - f(u)|; u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(\delta + 1)^2}{2\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_\delta^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} |f(t) \\ &\quad - f(u)| dt \end{aligned} \quad (4.27)$$

Yazılabilir.

f fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağladığından;

$$|f(t) - f(u)| \leq \theta |t - u|^\alpha$$

Bu ifade (4.27)' de yerine yazılırsa;

$$|N_\delta(f; u) - f(u)| \leq \frac{(\delta + 1)^2}{2\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_\delta^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} \theta |t - u|^\alpha dt$$

$$\begin{aligned} &= \theta \frac{(\delta + 1)^2}{2\delta} \sum_{l=0}^{\delta} \varphi_\delta^l(u) \int_{\left(2\frac{l}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}}^{\left(2\frac{l+1}{\delta+1}-1\right)\frac{\delta}{\delta+1}} |t - u|^\alpha dt \\ &= \theta N_\delta(|t - u|^\alpha; u) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Hölder eşitsizliğinden;

$$N_\delta(|t - u|^\alpha; u) \leq N_\delta((t - u)^2; u)^{\frac{\alpha}{2}}$$

Bu ifade ve (4.13) (4.28)' de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} |N_\delta(f; u) - f(u)| &\leq \theta \left(\frac{2u}{\delta + 1} - \frac{3\delta^3 + 11\delta^2 + 12\delta + 3}{3(\delta + 1)^4} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \\ \max_{-1 \leq u \leq 1} (3\delta^3 + 11\delta^2 + 12\delta + 3) &= 12\delta + 3 \end{aligned}$$

O halde;

$$|N_{\delta}(f; u) - f(u)| \leq \theta \left(\frac{3\delta + 1}{3(\delta + 1)^4} \right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

Böylece;

$$\| N_{\delta}(f; u) - f(u) \|_{C[-1,1]} \leq \theta \left(\frac{3\delta + 1}{3(\delta + 1)^4} \right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

Olur. Yani;

$$\| N_{\delta}(f; u) - f(u) \|_{C[-1,1]} = o \left(\left(\frac{3\delta + 1}{3(\delta + 1)^2} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \right)$$

Bulunur ve ispat tamamlanır.

Şimdi de türevlenebilen fonksiyonlar kullanılarak $N_{\delta}(f; u)$ operatörü için bir teorem ispat edelim.

Teorem 4.6.

f türevlenebilir ve türevi $[-1,1]$ Aralığında, sürekli ve tüm reel ekseninde sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda; belirli bir n den sonra;

$$\sqrt{\delta} |N_{\delta}(f; u) - f(u)| \leq \frac{M}{\sqrt{\delta}} + 2\omega \left(f'; \frac{1}{\sqrt{\delta}} \right) \quad \text{dır.}$$

İspat 4.6.

f türevlenebilir ve türevi $[-1,1]$ Aralığında, sürekli ve tüm reel ekseninde sınırlı bir fonksiyon olduğundan, $t, u \in [-1,1]$ için ortalama değer teoreminden t ile u arasında öyle bir v vardır ki

$$f'(v) = \frac{f(t) - f(u)}{t - u} \quad \text{olur.}$$

Eşitliğin sol tarafına $-f'(u) + f'(u)$ eklenirse;

$$f(t) - f(u) = (t - u)f'(u) + (t - u)(f'(v) - f'(u)) \quad (4.29)$$

Elde edilir. O halde (4.29) un $N_{\delta}(f; u)$ operatörü altındaki görüntü alınırsa Ve;

$$N_{\delta}(t; u) = u - \frac{u}{\delta + 1}$$

Olduğu göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned} N_{\delta}(f; u) - f(u) &= f'(u)N_{\delta}(t - u; u) + N_{\delta} \left((t - u)(f'(v) - f'(u)); u \right) \\ &= f'(u) \left(u - \frac{u}{\delta + 1} - u \right) + N_{\delta} \left((t - u)(f'(v) - f'(u)); u \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{-uf'(u)}{\delta+1} + N_\delta((t-u)(f'(v) - f'(u)); u) \quad (4.30)$$

Elde edilir. t ile u arasında olduğundan;

$$|v - u| \leq |t - u|$$

Olacaktır. Süreklilik Modülü özelliğinden;

$$|f'(v) - f'(u)| \leq \omega(f'; |v - u|) \leq \omega(f'; |t - u|) \leq \left(1 + \frac{|t - u|}{\delta_\delta}\right) \omega(f'; \delta_\delta)$$

Elde edilir. Bu son ifade (4.30) da yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} |N_\delta(f; u) - f(u)| &\leq \frac{|-uf'(u)|}{(\delta+1)^2} + N_\delta(|t - u| |f'(v) - f'(u)|; u) \\ &\leq \frac{|-uf'(u)|}{(\delta+1)^2} + N_\delta\left(|t - u| \left(1 + \frac{|t - u|}{\delta_\delta}\right); u\right) \omega(f'; \delta_\delta) \\ &\leq \frac{|-uf'(u)|}{(\delta+1)^2} + N_\delta\left(|t - u| + \frac{1}{\delta_\delta}(t - u)^2; u\right) \omega(f'; \delta_\delta) \end{aligned}$$

Cauchy Schwartz eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned} |N_\delta(f; u) - f(u)| &\leq \frac{|-uf'(u)|}{(\delta+1)^2} \\ &\quad + \left[(N_\delta((t - u)^2; u))^{1/2} + \frac{1}{\delta_\delta} (N_\delta(t - u)^2; u) \right] \omega(f'; \delta_\delta) \end{aligned}$$

Öte taraftan;

$$N_\delta((t - u)^2; u) = \frac{2u^2}{\delta+1} - \frac{3\delta^3 + 11\delta^2 + 12\delta + 3}{3(\delta+1)^4}$$

Olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} \max_{-1 \leq u \leq 1} \left(\frac{2u}{\delta+1} - \frac{3\delta^3 + 11\delta^2 + 12\delta + 3}{3(\delta+1)^4} \right)^{1/2} &= \left(\frac{12\delta + 3}{3(\delta+1)^4} \right)^{1/2} = \left(\frac{3(4\delta + 1)}{3(\delta+1)^4} \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\frac{1}{(\delta+1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} \end{aligned}$$

Olur, bu durumda;

$$|N_\delta(f; u) - f(u)| \leq \frac{|-uf'(u)|}{(\delta+1)^2} + \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} + \frac{1}{\delta\delta_\delta} \right) \omega(f'; \delta)$$

$$|N_{\delta}(f; u) - f(u)| \leq \frac{|u|}{(\delta + 1)^2} |f'(u)| + \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} + \frac{1}{\delta\delta_{\delta}} \right) \omega(f'; \delta;)$$

f' Bütün reel eksende sınırlı olduğundan;

$$|f'(u)| \leq \xi$$

Olacak şekilde $\xi > 0$ sayısı vardır.

$$\begin{aligned} |N_{\delta}(f; u) - f(u)| &\leq \frac{\xi}{(\delta + 1)^2} + \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} + \frac{1}{\delta\delta_{\delta}} \right) \omega(f'; \delta_{\delta}) \\ &\leq \frac{\xi}{\delta} + \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} + \frac{1}{\delta\delta_{\delta}} \right) \omega(f'; \delta_{\delta}) \end{aligned}$$

$$\delta_{\delta} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \quad \text{olarak seçilirse}$$

$$|N_{\delta}(f; u) - f(u)| \leq \frac{\xi}{\delta} + \frac{2}{\sqrt{\delta}} \omega\left(f'; \frac{1}{\delta}\right)$$

Bulunur. Eşitliğin iki tarafı $\sqrt{\delta}$ ile çarpılırsa;

$$\sqrt{\delta} |N_{\delta}(f; u) - f(u)| \leq \frac{M}{\sqrt{\delta}} + 2\omega\left(f'; \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)$$

Elde edilir. Böylece verilen teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi de üzerine çalışmış olduğumuz $N_{\delta}(f; u)$ operatörünün

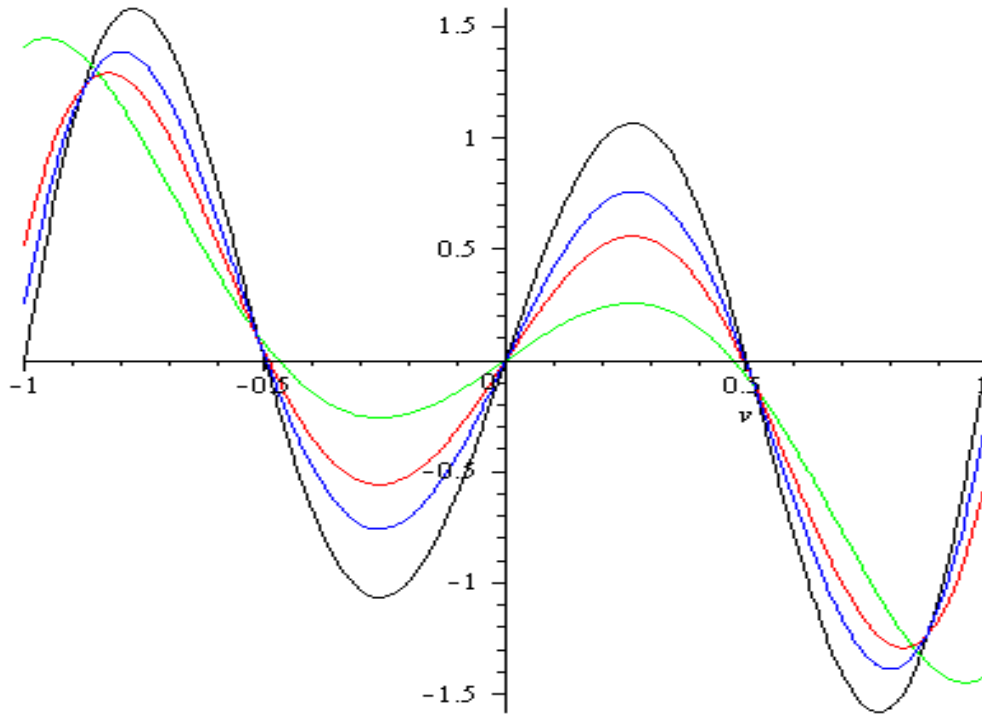
$f(u) = (1u^2)\sin\left(\frac{1}{6}u\pi\right), f(u) = (1 + u^2)\sin(2u\pi)$ Ve son olarak ta

$f(u) = (1 + u^3)\sin(u\pi)$ Fonksiyonlarına ait yaklaşımını karşılaştıran grafikleri çizelim.

Örnek:

Aşağıda $f(u) = (1 + u^2)\sin(2u\pi)$ fonksiyonuna $N_\delta(f; u)$ Bernstein-Kantorovich operatörünün yaklaşımı maple programında grafikler çizilerek gösterilmiştir. Şekilde siyah renk f fonksiyonunu sırasıyla yeşil, kırmızı ve mavi renkler ise grafik üzerinde değişen değerler belirtilmiştir.

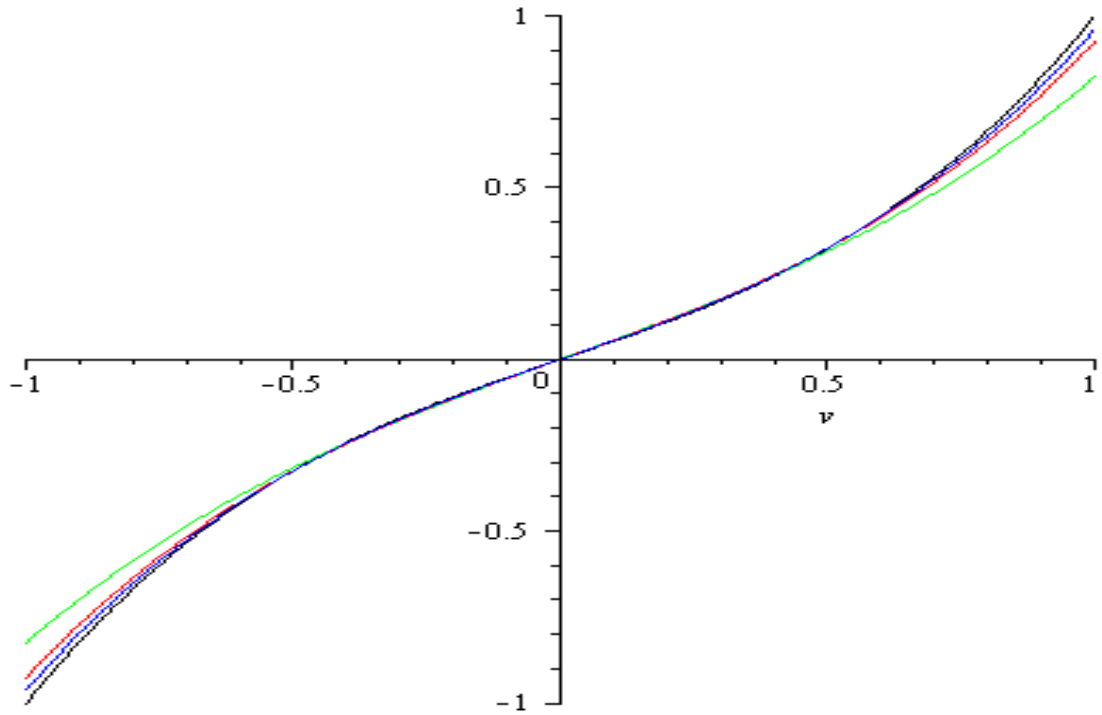
$\delta = 10, \delta = 25$ ve $\delta = 50$



Örnek

Aşağıda $f(u) = (1 + u^2)\sin\left(\frac{1}{6}u\pi\right)$ fonksiyonuna Bernstein-Kantorovich operatörünün yaklaşımı maple programında grafikler çizilerek gösterilmiştir. Şekilde siyah renk f fonksiyonunu sırasıyla yeşil, kırmızı ve mavi renkleri ise değişen değerleri belirtmiştir.

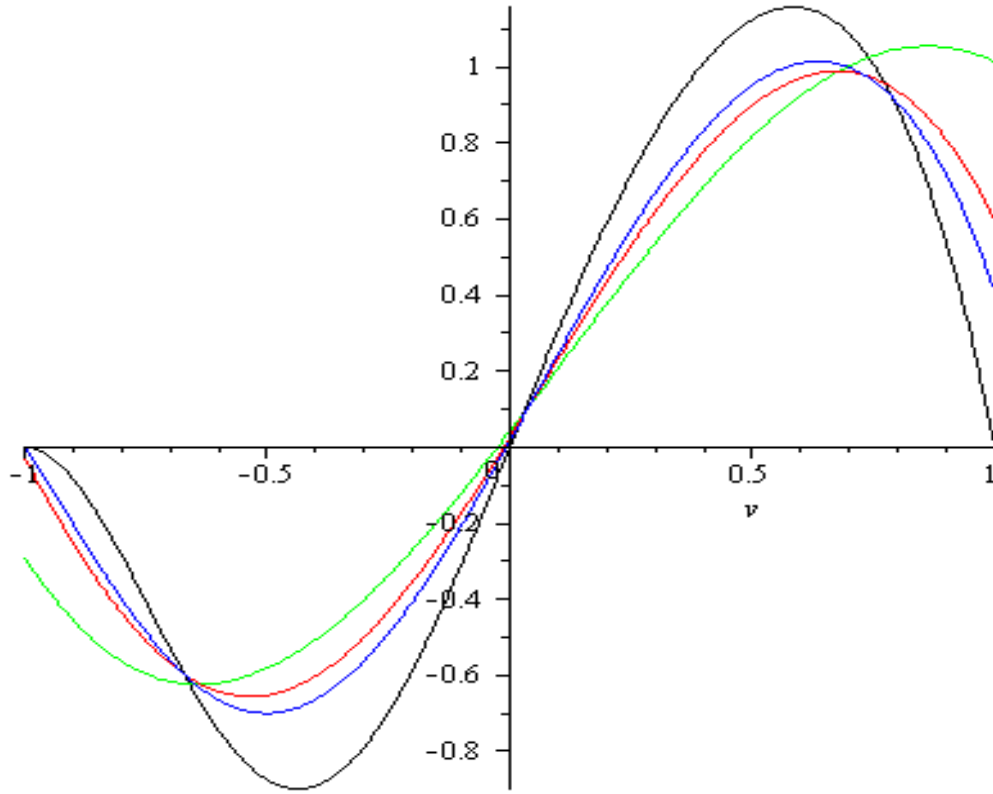
$\delta = 10$, $\delta = 25$ ve $\delta = 50$



Örnek:

Aşağıda $f(u) = (1 + u^3)\sin(u\pi)$ fonksiyonuna Bernstein-Kantorovich operatörünün yaklaşımı mapple programında grafikler çizilerek gösterilmiştir. Şekilde siyah renk f fonksiyonunu yeşil, kırmızı ve mavi renkleri ise değişen değerleri belirtmiştir.

$\delta = 5, \delta = 10$ ve $\delta = 15$



Aşağıda verilmiş olan tablo $f(u) = (1 + u^3)\sin(u\pi)$ fonksiyonunun δ ve u değişen değerleri ile hesaplanmış nümerik değerler tablosudur.

$\delta \backslash u$	-0.3	0.6
10	0.2874145250	0.1849154630
50	0.0891039586	0.056329934
100	0.0476837756	0.029720298
200	0.0100991661	0.015264550
500	0.0051379816	0.006204904
990	0.0051379816	0.003150602

5.1 Sonuçlar

$[-1,1]$ Simetrik kapalı aralık üzerinde tanımlamış olduğumuz $N_\delta(f; u)$ operatörünün lineer pozitif operatör olduğu, korovkin teoremi şartlarını sağladığı ve f fonksiyonuna düzgün yakınsadığı gösterilmiş olup daha sonra ise $N_\delta(f; u)$ operatörünün merkezi momentleri hesaplanmıştır. Ve aşağıdaki eşitlikler de elde edilmiştir.

$$\aleph_{n,0}(u) = 1$$

$$\aleph_{n,1}(u) = -\frac{u}{\delta + 1}$$

$$\aleph_{n,2}(u) = \frac{2u^2}{\delta + 1} - \frac{3\delta^3 + 11\delta^2 + 12\delta + 3}{3(\delta + 1)^4}$$

$$\aleph_{n,3}(u) = -\frac{6\delta^5 + 19\delta^4 + 22\delta^3 + 12\delta^2 + 4\delta + 1}{(\delta + 1)^6}$$

$$+ \frac{3u\delta^4(6 - u^2) - u\delta^3(12u^2 + 49) + 3u\delta^2(23 - 6u^2) + 3u\delta(15 - 12u^2) + 3u(3 - u^2)}{3(\delta + 1)^5}$$

$$\aleph_{n,4}(u) = \frac{4u^4(\delta + 1)^7}{5(\delta + 1)^8} - \frac{24u^3(\delta^3 + \delta^2)}{(\delta + 1)^6}$$

$$+ \frac{-10\delta^7 + 305\delta^6 + 670\delta^5 + 311\delta^4 + 230\delta^3 + 235\delta^2 + 70\delta + 5}{5(\delta + 1)^8}$$

$$- \frac{u^2(6\delta^5 + 20\delta^4 + 95\delta^3 + 11\delta^2 + 12\delta + 3)}{(\delta + 1)^6}$$

$$- \frac{u(6\delta^5 + 20\delta^4 + 22\delta^3 + 12\delta^2 + 4\delta + 1)}{(\delta + 1)^6}$$

Hesapladığımız merkezi momentler kullanılarak $N_\delta(f; u)$ operatörünün asimptotik yaklaşımı incelenmiş ve aşağıdaki eşitliğin sağlandığı gösterilmiştir.

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \delta(N_\delta(f; u) - f(u)) = -uf'(u) + (1 + u^2)\frac{f''(u)}{2}$$

Daha sonra süreklilik Modülü yardımıyla $N_\delta(f; u)$ operatörünün yaklaşım hızı hesaplanmış olup aşağıdaki eşitsizlik elde edilmiştir.

$$|N_{\delta}(f; u) - f(u)| \leq 2\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

f türevlenebilir ve türevi $[-1,1]$ Aralığında, sürekli ve tüm reel ekseninde sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda; belirli bir n den sonra;

$$\sqrt{\delta}|N_{\delta}(f; u) - f(u)| \leq \frac{K}{\sqrt{\delta}} + 2w\left(f'; \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)$$

Eşitliği elde edilmiş olur.

Son olarak $N_{\delta}(f; u)$ operatörünün verilen bazı Fonksiyonlarına ait farklı δ değerleri için yaklaşımların karşılaştıran grafikler çizilmiştir. Ve $f(u)$ fonksiyonu için ayrıca hesaplanmış olan nümerik değerler tablo haline getirilmiştir.

5.2. Öneriler

Sürekli fonksiyonlar durumları incelenirken Bernstein operatörlerinden yararlanılabilir. Bernstein polinomları ile yapılan çalışmalar $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde inceleme yapılır. Lakin kapalı aralık üzerinde sonsuz süreksiz noktaları olan fonksiyonlar incelenirken Bernstein polinomlarını kullanmak uygun olmayabilir. Bu tür fonksiyonlar için ise Durrmeyer operatörleri veya Kantorovich operatörlerinden yararlanılabilir. Sınırlı simetrik alt aralığı üzerinde çalışılmak istenildiğinde ise Bernstein polinomlarını kullanmak uygun değildir. Bu durumda ise yapılabilecek bizim ele alıp incelemesini yapmış olduğumuz operatörün kullanılması uygun olu

KAYNAKLAR

AÇIKGÖZ, M., and ARACI, S., 2010. New Generating Function of Bernstein Type Polynomial for Two Variables. ICNAAM, Numerical Analysis and Applied Mathematics, International Conference. 1281: 1141-1143. AKSOP, C., 2009. On a Modification of Operators. International Mathematic Forum, 45(4): 2211-2215.

AKSOP, C., 2009. On a Modification of Operators. International Mathematic Forum, 45(4): 2211-2215

ALTOMARE, F., and CAMPITI, M., 1994. Korovkin-Type Approximation Theory and Its Applications. De Gruyter Series Studies in Mathematics, Vol. 17, Walter De Gruyter Berlin- New York, 627s.

BALCI, M., 2012. Reel Analiz, Balcı Yayınları, Ankara, 144s.

BARBOSU, D., 2004. Kantrovich-Stancu Type Operators. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 5(3): 53-54. BAYRAKTAR, M., 2006. Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitapevi, Ankara, 320s.

BERNSTEIN, S. N., 1912-1913. Demonstration du Theoreme de Weierstrass Fondee Sur le Calcul Des Probabilites. Commun. Soc. Math. Kharkow, 13(2): 1-2.

BOHMAN. H., 1952. On Approximation of Continuous and Analytic Functions. Ark. Mat., 2: 43-56. CAO, J. D., 1997. A Generalization of the Bernstein Polynomials. J. Math. Anal. Apply, 209(1): 140-146. CHLODOVSKY, I., 1937. Sur Le Developpment Des Fonctions Definies Dans Un Interval Infini En Series De Polynomes De M. S. Bernstein. Compositio Math., 4: 380-393.

DİKMEN, A. B., 2009. Bernstein Polinomlarının q-Analogu. Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale, 65s.

DOĞRU, O., and DUMAN, O., 2006. Statistical Approximation of Meyer-König and Zeller Operators Based on q-Integers. Publ. Math. Debrecen, 68: 1-2, 199-214.

DOĞRU, O., DUMAN, O., and ORHAN, C., 2003. Statistical Approximation by Generalized Meyer-König and Zeller Type Operators. Stud. Sci. Math. Hun., 40: 359-371.

- DUCHON, M., 2011. A Generalized Bernstein Approximation Theorem. Mathematical Publications, 49: 99-109.
- DURRMEYER, J. L., 1967. Une Formule D'inversion De La Transformee De Laplace Application A La Theorie Des Moments. These De 3e Cycle. Faculte Des Sciences de l'Universite de Paris, 4: 149-150. GADJIEV, A.D., and ORHAN, C., 2002. Some Approximation Theorems via Statistical Convergence. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 32: 129-138.
- HACISALĖHOĖLU, H., and HACIYEV, A., 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, A.Ü.F.F Döner Sermaye ĖĖletme Yayınları, Ankara, 94s.
- HERZOG, F., and HILL, J. D., 1946. The Bernstein Polynomials for Discontinuous Functions. Amer. J. Math., 68: 109-124.
- HILDEBRANT, T. H., and SCHOENBERG, I. J., 1933. On Linear Functional Operations and the Moment Problem. Ann. of Math. 34(2): 317-328.
- KAC, M., 1938. Une Remarque Sur Les Polynomes De M. S. Bernstein. Studia Math., 7: 49-51.
- KAC, M., 1939. Une remarque Sur Les Polynomes De M. S. Bernstein. Studia Math., 8: 170-171. KANTOROVICH, L. V., 1930. Sur Certain Developpements Suivant Les Polynomes De La Forme De S. Bernstein. C. R. Acad. URSS, 2(1): 563-568, 595-600
- KOROVKIN, P. P., 1953. On Convergence of Linear Positive Operators in the Space of Continuous Functions (Russian). Dokl. Akad. Nauk. SSSR(N. S.) 90: 961-964.
- LORENTZ, G. G., 1953. Bernstein Polynomials. University of Toronto Press, Toronto, 8: 15-217. LUPAŞ, A., 1987. A q-Analogue of the Bernstein Operator. University of Cluj-Napoca, Seminar on Numerical and Statistical Calculus, 9: 85-92
- MUSAYEV, B., ALP, M., MUSTAFAYEV, N., and EKİNCİĞOĞLU, Ė., 2007. Teori ve Çözömlü Problemlerle Analiz 1. Seçkin Yayıncılık, Ankara, 593s.
- NEAMMANEE, K., 2001. Approximation of Lipschitz Functions on $\mathbb{R}^n$ by Bernstein Polynomials. Science Asia, 27: 63-66.

ÖZARSLAN, M. A., and DUMAN, O. A., 2009. New Approach In Obtaining A Beter Estimation In Approximation By Positive Linear Operators. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1. 58: 17-22. PINKUS, A., 2000. Weierstrass and Approximation Theory. J. Approx, Theory, 107: 1-66.

PINKUS, A., 2005. Weierstrass and Approximation Theory. Surveys in Approximation Theory, 1: 1-37. POPOVICIU, T., 1998. On the Proof of Weierstrass Theorem Using Interpolation Polynomials. Lucraile Sesiunii Gen.ȃt. Acad. Romane, 2: 2-12.

PYCH-TABERSKA, P., 1997. Rate of Pointwise Convergence of Bernstein Polynomials for Some Absolutely Continuous Functions. J. Math. Anal. Appl., 2: 212, 9-19.

STANCU, D. D., 1968. Approximation of Function by a New Class of Polynomial Operators. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 13(8): 1173–1194.

SHEVCHUK, I. A., 1992. Approximation by Polynomials and Traces of Functions Continuous on a Segment. Naukova Dymka, Kiev, 324s.

VORONOWSKJA, E., 1932. Determination De La Forme Asymptotique D' Approximation Des Fonctions Par Les Polynomes De M. Bernstein. C. R. Acad. Sci. URSS, 4: 79- 85.

WEIERSTRASS, K., 1885. Über Die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willkürlicher 55 Funktionen Einer Reellen Veranderlichen. Sitzungsberichte Der Akademie zu Berlin, 2(1): 633-639, 789-805