



**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

E3-UZAYINDA EĞRİ ÇATILARININ KÜRESELGÖSTERGELRİ

ALİ TOKTİMUR

MATEMATİK

**Şanlıurfa
2025**



**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

E3-UZAYINDA EĞRİ ÇATILARININ KÜRESELGÖSTERGELRİ

ALİ TOKTİMUR

**MATEMATİK
Tez Danışmanı: Doç. Dr. ABDULLAH YILDIRIM**

**Şanlıurfa
2025**

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımız süresince engin bilgileriyle bana yol gösterip ufkumun sınırlarını aşmada bana rehber olan saygıdeğer hocam Doç. Dr. Abdullah YILDIRIM' a teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam boyunca güler yüz ve her türlü desteklerini esirgemeyen Prof. Dr. Haydar ALICI hocama minnettarlığımı sunarım Ayrıca başta Prof. Dr. Aydın İZGİ ve tüm bölüm hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim. Son olarak bana her koşulda destek olan babama da çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ	iii
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	3
3. GEREÇ VE YÖNTEM	4
3.1. Tanım	4
3.2. Teorem	4
3.3. Tanım	5
3.4. İspat	5
3.5. Teorem	7
3.6. Sonuç	7
3.7. İspat	7
3.8. Lemma	8
3.9. İspat	8
3.10. Teorem	8
3.11. İspat	8
3.12. Teorem	9
3.13. Tanım	9
3.14. Tanım	10
3.15. İspat	10
3.16. Teorem	11
3.17. Tanım	11
3.18. Tanım	11
3.19. Tanım	11
3.20. Tanım	11
3.21. Tanım	12
3.22. Tanım	12
3.23. Tanım	12
3.24. Tanım	13
3.25. Tanım	13
4. BULGULAR	14
4.1. Frenet çatısına göre küresel göstergeler ve sonuçları	14
4.1.1. Teorem	14
4.1.2. İspat	15
4.1.3. Sonuç	16
4.1.4. İspat	16
4.1.5. Teorem	17
4.1.6. İspat	18
4.1.7. Sonuç	19
4.1.8. İspat	19
4.1.9. Teorem	20
4.1.10. İspat	21
4.1.11. Sonuç	22
4.1.12. İspat	22
4.1.13. Teorem	23
4.1.14. İspat	23
4.1.15. Sonuç	25
4.1.16. İspat	25
4.1.17. Örnek	26
4.2. Bishop çatısına göre küresel göstergeler ve sonuçları	30
4.2.1. Uyarı	31

4.2.2. Önerme	31
4.2.3. Önerme	31
4.2.4. Önerme	31
4.2.5. Teorem	34
4.2.6. Teorem	34
4.2.7. Teorem	35
4.2.8. Teorem	35
4.2.9. Tanım	35
4.2.10. Teorem	35
4.2.11. İspat	36
4.2.12. Teorem	39
4.2.13. İspat	39
4.2.14. Teorem	40
4.2.15. İspat	40
4.2.16. Teorem	40
4.2.17. İspat	40
4.2.18. Teorem	41
4.2.19. İspat	41
4.2.20. Teorem	41
4.2.21. İspat	41
4.2.22. Sonuç	43
4.2.23. Teorem	43
4.2.24. İspat	44
4.2.25. Teorem	44
4.2.26. İspat	45
4.2.27. Teorem	45
4.2.28. İspat	45
4.2.29. Teorem	45
4.2.30. İspat	45
4.2.31. Teorem	46
4.2.32. İspat	46
4.2.33. Sonuç	48
4.2.34. Teorem	48
4.2.35. Teorem	48
4.2.36. Teorem	49
4.2.37. Teorem	49
4.2.38. Teorem	49
4.2.39. İspat	50
4.2.40. Örnek	56
5. TARTIŞMA	58
6. SONUÇLAR	64
7. ÖNERİLER	65
KAYNAKLAR	66
ÖZGEÇMİŞ	68
EKLER	69

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

E3-UZAYINDA EĞRİ ÇATILARININ KÜRESEL GÖSTERGELERİ

ALİ TOKTİMUR

HARRAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK

Tez Danışman: Doç. Dr. ABDULLAH YILDIRIM

Yıl: 2025, Sayfa : 47

Hazırlanan tez beş parçadan oluşmaktadır. Birinci parçada tez konusu ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci parçada tez ile ilgili yapılan çalışmalara değinilmiştir. Üçüncü parçada 3- boyutlu Öklid uzayında bir regüler eğrinin Frenet ve Bishop çatılarına göre küresel göstergeler yeni bir yaklaşımla incelenmiştir. Bulunan teorem ve sonuçlar sunulmuştur. Bunlara örnekler verilerek konu dahada pekiştirilmiştir. Dördüncü parçada tezin doğruluğu bilgisayarla çizilen grafikler yardımıyla kontrol edilmiştir. Beşinci parçada bulduğumuz teorem ve sonuçları beyan edip yapamadığımız alanları belirttik. Ayrıca yapılabilecekleri da önererek yeni çalışmalara kapı açtik.

ANAHTAR KELİMELEER: Eğriler, Serret Frenet çatısı, Bishop çatısı, Küresel göstergeler, Eğrilikler

ABSTRACT

MASTER THESIS

SPHERICAL INDICATRIXES OF CURVE FRAMES IN E^3

ALİ TOKTİMUR

**HARRAN UNIVERSITY
INSTITUTE OF GRADUATE EDUCATION
MATEMATİK**

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. ABDULLAH YILDIRIM

Year: 2025, Page : 47

The prepared thesis consists of five parts. In the first part, basic definitions and theorems related to the thesis topic are given. In the second part, studies related to the thesis are mentioned. In the third part, spherical indicators of a regular curve in 3-dimensional Euclidean space according to Frenet and Bishop frames are examined with a new approach. The theorems and results found are presented. The subject is further reinforced by giving examples. In the fourth part, the accuracy of the thesis is checked with the help of graphics drawn by computer. In the fifth part, we stated the theorems and results we found and indicated the areas we could not do. We also suggested what could be done and opened the door to new studies.

KEYWORDS: Curves, Serret Frenet frame, Bishop frame, Spherical indicators, Curvatures

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1.	1 pi eğrisi	29
Şekil 4.2.	2 Frenet vektör alanlarının küresel göstergeleri	30
Şekil 4.3.	beta eğrisi	53
Şekil 4.4.	$c=0$ için Bishop küresel göstergeler	54
Şekil 4.5.	$c=0$ için Bishop küresel göstergeler	54
Şekil 4.6.	$c=0$ için Bishop küresel göstergeler	55
Şekil 4.7.	$c=\pi/4$ için Bishop küresel göstergeler	55
Şekil 4.8.	$c=\pi/4$ için Bishop küresel göstergeler	56
Şekil 4.9.	$c=\pi/4$ için Bishop küresel göstergeler	56

1. GİRİŞ

E^3 Diferansiyel geometride bir çok teknik ile, eğrilerin çatıları elde edilmektedir. Bunlardan bazıları Frenet çatısı [3], Bishop çatısı [1], Darboux çatısı, Sabban çatısıdır. Eğriler bazı noktalarda doğru pozisyonunda ise, ikinci türev hesaplanamaz dolayısıyla eğrilik hesaplanamaz. Frenet ile eğrideki değişim tam olarak gözlenemez. Bu durumda alternatif yollara ihtiyaç duyulmuştur. 3- boyutlu bir uzayda, Bishop (1975) regüler eğriler için Frenet çatısından daha kullanışlı olan Bishop çatısını tanımlamıştır. Bishop çatı ile eğrinin ikinci türevi sıfır olsa bile eğriyi incelemek için kullanışlı bir çatı bize verir.

3-boyutlu bir uzayda Frenet (1847) çatısı [2], regüler bir eğrinin hız ve ivme vektörlerini kullanarak elde edilen bir çatıdır. Şöyleki

$$\pi : I \rightarrow E^3$$

eğrisinin hız ve ivme vektörleri, sırasıyla π' ve π'' olsun. Buna göre

$$\mathbf{t} = \frac{\pi'}{\|\pi'\|}, \mathbf{b} = \frac{\pi' \times \pi''}{\|\pi' \times \pi''\|}, \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} \quad (1.54)$$

olarak elde edilen $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ ortonormal çatısı bir Frenet çatısı olur. Burada $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ vektörler alanlarına, sırasıyla, π eğrisinin, tanjant vektör alanı, asli normal vektör alanı ve binormal vektör alanı denir. Şayet π eğrisi birim hızlı ise ($\|\pi'\|=1$)

$$\mathbf{t} = \frac{\pi'}{\|\pi'\|}, \mathbf{n} = \frac{\pi''}{\|\pi''\|}, \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (1.54)$$

olacaktır. Türev değişimleri de $\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}$, $\mathbf{n}' = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}$, $\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n}$ şeklinde olacaktır. Burada κ ve τ sırasıyla π eğrisinin birinci ve ikinci eğrilikleri denir, öyleki

$$\kappa = \frac{\|\pi' \times \pi''\|}{\|\pi'\|^3}, \tau = \frac{\det(\pi', \pi'', \pi''')}{\|\pi' \times \pi''\|^2} \quad (1.55)$$

$\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}, \kappa, \tau\}$ beşlisine Frenet elemanları denir. Fakat eğri bazı noktalarda doğru pozisyonunda ise yani eğriliği sıfır ise eğrilikteki değişim tam olarak gözlenemez. Bu durumda alternatif yollara ihtiyaç duyulmuştur. 3-boyutlu bir uzayda, Bishop (1975) regüler eğriler için bir çatı tanımlamıştır. [1]. Bishop çatı ya da rotation minimizing

çatı (RMF) denilen bu çatı, regüler bir eğrinin hız vektörü ve iki ortonormal vektör ile verilmektedir. BU dik vektörlerin türevleri sadece hız vektörüne bağlıdır. Şöyleki birim hızlı ve s yay-paremetreli olan

$$\pi : J \subseteq E^3 \rightarrow E^3$$

eğrisinin Frenet elemanları $\{t, n, b, \kappa, \tau\}$ olarak verilsin. $\{t, n_1, n_2\}$ çatısı π eğrisi üzerinde, t tanjant vektörü etrafında x açısı kadar dönen bir Bishop çatı

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{t} \\ \mathbf{n} &= \mathbf{n}_1 \cos x + \mathbf{n}_2 \sin x \\ \mathbf{b} &= -\mathbf{n}_1 \sin x + \mathbf{n}_2 \cos x \end{aligned} \quad (1.56)$$

%

şeklindedir. Bu çatının türev değişimi de

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= k_1 \mathbf{n}_1 + k_2 \mathbf{n}_2 \\ \mathbf{n}_1 &= -k_1 \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_2 &= -k_2 \mathbf{t} \\ k_1 &= \kappa \cos x \\ k_2 &= \kappa \sin x \\ \tau &= x' \end{aligned} \quad (1.56)$$

şeklindedir. Burada $\{t, n_1, n_2, k_1, k_2\}$ beşlisine de Bishop elemanları denir.

Geometri, fizik ve mühendislikte eğri çatıları ile birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar Öklid dışı uzaylarda da ilerlemiştir. Bu çalışmalardan bazıları eğrilerin küresel göstergeleridir. Eğer $X_{\{\pi(s)\}} = X(\pi(s)) \square T_{\{\pi\}} \pi(s)$ ise birim vektör alanı X in π eğrisine kısıtlandığı söylenir. Eğer $X=PQ$ alırsak, P noktası π eğrisi üzerinde akarken, Q noktasının birim küresinin çizdiği eğriye X birim vektör alanın küresel göstergesi denir. Bir eğrinin karakterizasyonunun incelemek yerine bazen küresel göstergelerini incelemek bazen daha kolay olmaktadır.

Bu çalışmada bir eğrinin binormal vektör alanı ile Darboux vektör alanı arasındaki açığı kullanarak bir regüler eğrinin küresel gösterge eğrilerinin Frenet ve Bishop çatılarını ele aldık. Onlarla ilgili teorem ve sonuçları ifade edip ispatladık.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Geometri, fizik ve mühendislikte eğri çatıları ile birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar Öklid dışı uzaylarda da ilerlemiştir. Bu çalışmalardan bazıları eğrilerin küresel göstergeleridir. Eğer $X_{\pi(s)} = X(\pi(s)) \square T_{\pi(s)}$ ise birim vektör alanı X in π eğrisine kısıtlandığı söylenir. Eğer $X=PQ$ alırsak, P noktası π eğrisi üzerinde akarken, Q noktasının birim küresinin çizdiği eğriye X birim vektör alanının küresel göstergesi denir. Bilici 2 Frenet çatısı yardımıyla involüt evolüt eğrilerinin küresel göstergelerini elde ettiler. Şenyurt ve Çalışkan 18 Zamansal Bertrand eğri çiftlerinin küresel göstergelerini incelediler. Şenyurt ve Demet 19 zamansal-uzaysal Mannheim eğrisi çiftlerinin küresel göstergelerinin jeodezik eğriliklerini ve doğal kaldırma kuvvetlerini hesapladılar. Ateş ve diğerleri 1 küresel göstergelerle elde edilen tübüler yüzeyleri verdi. Çapın 4 Minkowski uzayı E_1^3 deki eğrilerin küresel indekslerinin yay uzunluklarını ve jeodezik eğriliklerini hesapladılar. Kula ve Yaylı 14 eğik helisleri ve küresel göstergelerini incelediler.

E^3 Diferansiyel geometride bir çok teknik ile, eğrilerin çatıları elde edilmektedir. Bunlardan bazıları Frenet çatısı 7, Bishop çatısı 3, Darboux çatısı, Sabban çatısıdır. Eğriler bazı noktalarda doğru pozisyonunda ise, ikinci turev hesaplanamaz dolayısıyla eğrilik hesaplanamaz. Frenet ile eğrideki değişim tam olarak gözlenemez. Bu durumda alternatif yollara ihtiyaç duyulmuştur. 3- boyutlu bir uzayda, Bishop regüler eğriler için Frenet çatısından daha kullanışlı olan Bishop çatısını tanımlamıştır. Bishop çatı ile eğrinin ikinci türevi sıfır olsa bile eğriyi incelemek için kullanışlı bir çatı bize verir. Diferansiyel geometride çok çalışmalar yapılmıştır. Konumuzla ilgil bazı çalışmaları şunlardır. Yılmaz ve diğerleri 23 Bishop çatı kullanarak, bir reguler eğrinin yeni tip küresel göstergeleri belirlemişlerdir. Keskin ve Yaylı 11 N-Bishop çatısını tanıttılar ve bu çatıların küresel göstergelerini sundular. Yılmaz ve Turgut 24 bir reguler eğrinin Tip-2 Bishop çatılarını tanıttılar buna bağlı yeni küresel göstergeler elde ettiler. Yılmaz 22 E_1^3 de bir reguler eğrinin yeni tip Bishop çatısına göre küresel göstergeleri çalıştı. Körpınar ve diğerleri 12 Heisenberg grup $Heis^3$ da B slant helisinin tanjant Bishop küresel göstergelerinin bazı karakterizasyonlarını verdiler.

3. GEREÇ VE YÖNTEM

Öncelikle E^3 uzayında eğri çatılarının çatılarını incelediğimiz zaman karşımıza çıkacak temel kavramlar verilecektir.

3.1. Tanım

$$\begin{aligned} \pi : I &\longrightarrow \mathbb{E}^3 \\ s &\longrightarrow \pi(s) \end{aligned} \quad (3.1)$$

eğrisi birim hızlı olarak verilsin.

$$\mathbf{t} = \frac{d\pi(s)}{ds}, \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds}, \mathbf{b} = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) \quad (3.2)$$

vektörlerine π eğrisinin Frenet vektörleri denir. Burada $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ ye π eğrisinin sırasıyla tanjan vekt örü, asli normal vektörü ve binormal vektörü denir ve

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle &= \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 1, \\ \langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle &= \langle \mathbf{t}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

dır.

3.2. Teorem

(6) Birim hızlı ve geodezik olmayan bir $\pi: I \rightarrow E^3$ eğrisinin Bishop çatısı için $\mathbf{t}$ ürev form ülleri ve Bishop parametreleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= k_1 \mathbf{n}_1 + k_2 \mathbf{n}_2, \\ \mathbf{n}'_1 &= -k_1 \mathbf{t}, \\ \mathbf{n}'_2 &= -k_2 \mathbf{t}, \\ k_1 &= \kappa \cos x, \\ k_2 &= \kappa \sin x, \\ \tau &= x', \end{aligned} \quad (3.4)$$

matrisel gösterimi de aşağıdaki gibidir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}'_1 \\ \mathbf{n}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

3.3. Tanım

(6) Geodezik olmayan ($\kappa \neq 0$) birim hızlı bir $\pi: I \rightarrow E^3$ eğrisinin frenet elemanları $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}, \kappa, \tau\}$ olsun. $\mathbf{t}$ tanjant vektörüne dik herhangi bir birim vektör $\mathbf{n}_1$ olsun. Şayet $\mathbf{n}_2 = \mathbf{t} \times \mathbf{n}_1$ dersek $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\}$ çatısı pozitif yönlendirilmiş bir çatı olur. Bu yeni elde edilen çatıya Bishop çatısı denir. Frenet ile Bishop çatıları arasındaki bağıntı

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{t} \\ \mathbf{n} &= \mathbf{n}_1 \cos x + \mathbf{n}_2 \sin x \\ \mathbf{b} &= -\mathbf{n}_1 \sin x + \mathbf{n}_2 \cos x \end{aligned} \quad (3.6)$$

şeklindedir. Matrisel gösterimi de aşağıdaki gibidir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Benzer şekilde

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & \sin x & \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

eşitliğini de yazabiliriz. Burada x , $\mathbf{n}$ ile $\mathbf{n}_1$ arasındaki açıdır.

3.4. İspat

Bir önceki Lemmayı kullanarak

$$\pi' \times \pi'' = (v\mathbf{t}) \times \left(\frac{dv}{dt}\mathbf{t} + \kappa v^2\mathbf{n} \right) = \kappa v^3\mathbf{b} \quad (3.9)$$

Her iki tarafın normunu alırsak

$$\kappa v^3 = \|\pi' \times \pi''\| \quad (3.10)$$

çıkar öyle ise

$$\mathbf{b} = \frac{\pi' \times \pi''}{\|\pi' \times \pi''\|} \quad (3.11)$$

elde edilir. Daha önce $v=\|\pi'\|$ olduğunu göstermiştik. $\kappa v^3=\|\pi' \times \pi''\|$ denklemini kullanırsak

$$\kappa = \frac{\|\pi' \times \pi''\|}{\|\pi'\|^3} \quad (3.12)$$

Diğer taraftan:

$$\begin{aligned} \pi''' &= \frac{d^2v}{dt^2}\mathbf{t} + \frac{dv}{dt}\mathbf{t}' + \frac{d\kappa}{dt}v^2\mathbf{n} + \kappa v \frac{dv}{dt}\mathbf{n} + \kappa v^2\mathbf{n}' \\ &= \left(\frac{d^2v}{dt^2} - \kappa^2 v^3 \right) \mathbf{n} + \frac{dv}{dt}v\kappa\mathbf{t} + \frac{d\kappa}{dt}v^2\mathbf{n} + \kappa\tau v^3\mathbf{b} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Her iki tarafı $\mathbf{b}$ ile iç çarpımı alırsak

$$\langle \pi''', \mathbf{b} \rangle = \kappa\tau v^3 \quad (3.14)$$

bulunur. Buna göre

$$\tau = \frac{\langle \mathbf{b}, \pi''' \rangle}{\kappa v^3} = \frac{\langle \pi' \times \pi'', \pi''' \rangle}{\|\pi' \times \pi''\|^2} \quad (3.15)$$

elde edilir.

3.5. Teorem

Herhangi bir regüler π eğrisi için aşağıdaki formüller vardır.

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \frac{\pi' \times \pi''}{\|\pi' \times \pi''\|} \\ \kappa &= \frac{\|\pi' \times \pi''\|}{\|\pi'\|^3} \\ \tau &= \frac{\langle \pi' \times \pi'', \pi''' \rangle}{\|\pi' \times \pi''\|^2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.6. Sonuç

(3.20) ve (3.24) denklemlerinden $v = \|\pi'\| = ds/dt$ olduğu görülür.

3.7. İspat

$$\pi' = \frac{d\pi}{dt} = \frac{d\pi}{ds} \frac{ds}{dt} = v\mathbf{t} \quad (3.17)$$

aynı şekilde

$$\begin{aligned} \pi''(t) &= \frac{d(v\mathbf{t})}{dt}, \\ &= \frac{dv}{dt}\mathbf{t} + v\frac{d\mathbf{t}}{dt}, \\ &= \frac{dv}{dt}\mathbf{t} + v\kappa v\mathbf{n}, \\ &= \frac{dv}{dt}\mathbf{t} + \kappa v^2\mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.18)$$

olacaktır.

3.8. Lemma

(15) Bir regüler $\pi: I \rightarrow E^3$ eğrisinin Frenet vektörleri $\{t, N, B\}$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned}\pi' &= vt, \\ \pi'' &= \frac{dv}{dt}t + \kappa v^2 n.\end{aligned}\tag{3.19}$$

3.9. İspat

$$\begin{aligned}t'(t) &= \frac{dt(t)}{ds} \frac{ds}{dt}, \\ \frac{dt(t)}{ds} &= \kappa N, \\ t'(t) &= \kappa v n.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Benzer hesaplamayla

$$n'(t) = \frac{dn(t)}{ds} \frac{ds}{dt} = (-\kappa t + \tau b) v \tag{3.21}$$

ve

$$b'(t) = \frac{db(t)}{ds} \frac{ds}{dt} = -\tau v n$$

3.10. Teorem

(15) Hızı $v=ds/dt$ olan bir $\pi: I \rightarrow E^3$ eğrisi verilsin. π eğrisinin Frenet vektörlerinin türev değişimleri

$$t' = \kappa v n, n' = -\kappa v t + \tau v b, b' = -\tau v n \tag{3.22}$$

dır, burada s , π eğrisinin yay parametresidir.

3.11. İspat

π eğrisi birim hızlı verildiğinde s yay parametresi, kendi yay uzunluğu şeklinde verilmiştir. Buna göre

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \pi'(s) \\ \mathbf{n} &= \frac{\pi''(s)}{\|\pi''(s)\|} \end{aligned} \quad (3.23)$$

ve

$$\mathbf{b} = \pi'(s) \times \frac{\pi''(s)}{\|\pi''(s)\|} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (3.24)$$

olarak verilmişti. Öyle ise

$$\mathbf{t}' = \pi''(s) = \|\pi'(s)\| \frac{\pi''(s)}{\|\pi''(s)\|} = \kappa \mathbf{n} \quad (3.25)$$

Diğer taraftan $\langle \mathbf{n}', \mathbf{n} \rangle = 0$ ve $\langle \mathbf{t}', \mathbf{b} \rangle = 0$ olduğundan $\mathbf{n}' = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}$ ve $\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n}$ olacaktır. Burada $\kappa = \langle \mathbf{t}', \mathbf{n} \rangle = -\langle \mathbf{t}, \mathbf{n}' \rangle$, $\tau = \langle \mathbf{n}', \mathbf{b} \rangle = -\langle \mathbf{n}, \mathbf{b}' \rangle$ dır.

3.12. Teorem

Birim hızlı bir $\pi: I \rightarrow E^3$ eğrisinin Frenet vektörleri $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ olarak verilsin. Frenet vektörlerinin türev değişimleri

$$\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}, \mathbf{n}' = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}, \mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n} \quad (3.26)$$

şeklindedir.

3.13. Tanım

(8) Birim hızlı bir $\pi: I \rightarrow E^3$ eğrisinin Frenet vektörleri $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ verilsin.

(3.27)

$$\begin{aligned} \kappa : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longrightarrow \kappa(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \pi''(s), \frac{\pi''(s)}{\|\pi''(s)\|} \rangle = \|\pi''(s)\| \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \tau : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longrightarrow \tau(s) = \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle \end{aligned} \quad (3.28)$$

fonksiyonlarına sırasıyla π eğrisinin eğrilik fonksiyonu ve burulma fonksiyonu denir.

3.14. Tanım

(8) $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ olsun.
 $\square X=(x_1,x_2,x_3), Y=(y_1,y_2,y_3) \square \mathbb{R}^3$ için

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longrightarrow \langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \end{aligned} \quad (3.29)$$

şeklinde tanımlı fonksiyona Öklid iç çarpımı denir.

3.15. İspat

π eğrisini birim hızlı yapan parametreyi $s=h(t)$ diğerini de t ile gösterelim.
 Burada $h(t)$ diferansiyellenebilirdir.

$$\pi(s)=\pi(t)$$

eğrisinin her iki tarafını t ye göre türevini alırsak

$$\pi'(s) \frac{ds}{dt} = \frac{d\pi(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{d\pi(t)}{dt} = \pi'(t) \quad (3.30)$$

her iki tarafın normunu alırsak

$$\frac{ds}{dt} = \|\pi'(t)\| \quad (3.31)$$

çıkar. Buradan da

$$s = \int_a^b \|\pi'(t)\| dt \quad (3.32)$$

olarak elde ederiz yani s her zaman bulunabilir.

3.16. Teorem

E^3 de regüler her eğri, birim hızlı olacak şekilde yeniden parametrelendirilebilir.

3.17. Tanım

(8) Bir regüler eğri π verilsin.

$$s = \int_a^b \|\pi'(t)\| dt \quad (3.33)$$

reel sayısına π eğrisinin yay uzunluğu veya yay parametresi denir.

3.18. Tanım

(16) $\pi: I \rightarrow E^3$ eğrisi verilsin. Şayet $\forall t \in I$ için $\pi'(t) \neq 0$ ise π eğrisine regüler eğri denir.

Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe bütün eğrileri regüler eğri olarak alacağız.

3.19. Tanım

Skalar hızı $\|\pi'(t)\|=1$ olan eğrilere birim hızlı eğri denir.

3.20. Tanım

(16) $\pi: I \rightarrow E^3$ eğrisi verilsin.

$$\begin{aligned} \|\pi'\| : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow \|\pi'(t)\| \end{aligned} \quad (3.34)$$

şeklinde tanımlı $\|\pi'\|$ fonksiyonuna π eğrisinin skalar hız fonksiyonu ve $\|\pi'(t)\|$ reel sayısına da π eğrisinin skalar hızı denir.

3.21. Tanım

$$\begin{aligned} \pi : I &\longrightarrow \mathbb{E}^3 \\ t &\longrightarrow \pi(t) = (\pi_1(t), \pi_2(t), \pi_3(t)) \end{aligned} \quad (3.35)$$

eğrisi verilsin

$$\frac{d\pi_i(t)}{dt} = \pi'_i(t), (1 \leq i \leq 3) \quad (3.36)$$

olmak üzere

$$\pi'(t) = (\pi'_1(t), \pi'_2(t), \pi'_3(t)) \quad (3.37)$$

vektörüne π eğrisinin hız vektörü denir.

3.22. Tanım

(20) $I, \mathbb{R}$ de bir açık aralık olsun.

$$\begin{aligned} \pi : I &\longrightarrow \mathbb{E}^3 \\ t &\longrightarrow \pi(t) = (\pi_1(t), \pi_2(t), \pi_3(t)) \end{aligned} \quad (3.38)$$

şeklinde tanımlanan diferensiyellenebilir dönüşüme $\mathbb{R}^3$ de bir eğri denir.

3.23. Tanım

(8) $\square X=(x_1,x_2,x_3), Y=(y_1,y_2,y_3) \square \mathbb{R}^3$ için

$$X \square Y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme X ile Y nin vektörel çarpımı denir.

3.24. Tanım

$e_{\{i\}} = (\delta_{\{i1\}}, \delta_{\{i2\}}, \delta_{\{i3\}}) \square R^3$ olarak verilen $\{e_1, e_2, e_3\}$ vektörlerine R^3 vektör uzayının standart bazı denir. Burada $\delta_{\{ij\}}$ ifadesi $i=j$ iken 1 $i \neq j$ iken 0 dır, $(1 \leq i, j \leq 3)$

3.25. Tanım

(10) $\square X \square R^3$ için $\|X\| = \sqrt{(\square X, X \square)}$ şeklinde tanımlanan fonksiyona X vektörünün normu denir.

4. BULGULAR

4.1. Frenet çatısına göre küresel göstergeler ve sonuçları

Birim hızlı bir

$$\begin{aligned}\pi : J &\longmapsto \mathbb{E}^3 \\ s &\longmapsto \pi(s)\end{aligned}\tag{4.1}$$

eğrisinin Frenet elemanları $\{t, n, b, \kappa \neq 0, \tau \neq 0\}$ olsun. Bu eğrinin Darboux vektörü ve pol vektörü, sırasıyla,

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}, \\ \mathbf{c} &= \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \mathbf{w} = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \mathbf{t} + \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} \mathbf{b}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Burada

$$\begin{aligned}\cos \phi &= \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}, \\ \sin \phi &= \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}\end{aligned}\tag{4.3}$$

ve ϕ açısı, $\mathbf{c}$ pol vektörü ile $\mathbf{b}$ binormal vektörü arasındaki açıdır.

Bundan sonra aksi belirtmedikçe, ele alacağımız π eğrisini birim hızlı ve eğrilikleri $\kappa \neq 0, \tau \neq 0$ olan eğri olarak alacağız.

4.1.1. Teorem

Bir $\pi: J \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin Frenet elemanları $\{t, n, b, \kappa, \tau\}$ ve $\pi_{\{t\}} = t$ teğetler gösterge eğrisinin Frenet elemanları $\{t_{\{t\}}, n_{\{t\}}, b_{\{t\}}, \kappa_{\{t\}}, \tau_{\{t\}}\}$ olsun. Buna göre

$$(4.4)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_t &= \mathbf{n}, \\
\mathbf{n}_t &= -\mathbf{t} \cos \phi + \mathbf{b} \sin \phi, \\
\mathbf{b}_t &= \mathbf{t} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi, \\
\kappa_t &= \sec \phi, \\
\tau_t &= \frac{\phi'}{\kappa}.
\end{aligned}$$

Burada $\phi'=((d\phi)/(ds))$.

4.1.2. İspat

$\pi_{\{t\}}=t$ eğrisi için $((d\pi_{\{t\}})/(ds))=\pi_{\{t\}}'$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\pi_t' &= \kappa \mathbf{n}, \\
\pi_t'' &= -\kappa^2 \mathbf{t} + \kappa' \mathbf{n} + \kappa \tau \mathbf{b}, \\
\pi_t''' &= -3\kappa \kappa' \mathbf{t} + (\kappa'' - \kappa^3 - \kappa \tau^2) \mathbf{n} + 2(\kappa' \tau + \kappa \tau') \kappa \tau \mathbf{b}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

(3,26) denklemlerini kullanarak $\pi_{\{t\}}=t$ eğrisinin birinci ve ikinci eğriliği, sırasıyla,

$$\kappa_t = \frac{\|\pi_t' \wedge \pi_t''\|}{\|\pi_t''\|^3} = \sec \phi \tag{4.6}$$

ve

$$\tau_t = \frac{\det(\pi_t', \pi_t'', \pi_t''')}{\|\pi_t' \wedge \pi_t''\|^2} = \frac{\phi'}{\kappa}$$

olarak buluruz. $\pi_{\{t\}}=t$ eğrisinin kendi yay parametresi $s_{\{t\}}$ ye göre türevini alırsak

$$\frac{d\pi_t}{ds_t} = \frac{d\mathbf{t}}{ds_t} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{ds}{ds_t} = \frac{ds}{ds_t} \kappa \mathbf{n} \tag{4.7}$$

olacağından

$$\frac{d\pi_t}{ds_t} = \mathbf{t}_t = \mathbf{n} \quad (4.8)$$

ve

$$\frac{ds}{ds_t} = \frac{1}{\kappa}$$

olacaktır. Diğer taraftan (4,3) ve (4,8) denklemlerini kullanarak

$$\mathbf{n}_t = \frac{\frac{d\mathbf{t}_t}{s_t}}{\left\| \frac{d\mathbf{t}_t}{s_t} \right\|} = -\mathbf{t} \cos \phi + \mathbf{b} \sin \phi, \quad (4.9)$$

ve

$$\mathbf{b}_t = \mathbf{t}_t \wedge \mathbf{n}_t = \mathbf{t} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi,$$

elde ederiz.

4.1.3. Sonuç

$\pi_{\{t\}}=t$ teğetler gösterge eğrisi üzerinde, $t_{\{t\}}=n$ tanjant vektörü etrafında ϕ açısı kadar dönen bir Bishop çatı $\{n,-t,b\}$ çatısı olup aşağıdaki denklemler vardır.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{n}}{ds_t} &= a_1 (-\mathbf{t}) + a_2 \mathbf{b}, \\ \frac{d(-\mathbf{t})}{ds_t} &= -a_1 \mathbf{n}, \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds_t} &= -a_2 \mathbf{n}, \\ a_1 &= 1, \\ a_2 &= \tan \phi \end{aligned} \quad (4.10)$$

burada a_1 ve a_2 , $\{n,-t,b\}$ Bishop çatısının, sırasıyla, birinci ve ikinci Bishop eğrilikleridir.

4.1.4. İspat

$\{n,-t,b\}$ çatısının bir Bishop çatısı olduğu Teorem 4.1.1 den görülmektedir.

Buna göre

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{n}}{ds_t} &= \frac{d\mathbf{n}}{ds} \frac{ds}{ds_t} = (-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}) \frac{1}{\kappa}, \\
 &= -\mathbf{t} + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right) \mathbf{b}, \\
 \frac{d(-\mathbf{t})}{ds_t} &= \frac{d(-\mathbf{t})}{ds} \frac{ds}{ds_t} = -\kappa \mathbf{n} \frac{1}{\kappa} = -\mathbf{n}, \\
 \frac{d\mathbf{b}}{ds_t} &= \frac{d\mathbf{b}}{ds} \frac{ds}{ds_t} = -\frac{\tau}{\kappa} \mathbf{n},
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

olur. Öyle ise

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -1, \\
 a_2 &= \frac{\tau}{\kappa} = \tan \phi.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

olur.

4.1.5. Teorem

Bir $\pi: J \rightarrow E^3$ eğrisi için $\pi_{-}\{t\} = t$ teğetler gösterge eğrisinin Frenet elemanları $\{t_{-}\{t\}, n_{-}\{t\}, b_{-}\{t\}, \kappa_{-}\{t\}, \tau_{-}\{t\}\}$ ve $\pi_{-}\{n\} = n$ aslinormaller gösterge eğrisinin Frenet elemanları $\{t_{-}\{n\}, n_{-}\{n\}, b_{-}\{n\}, \kappa_{-}\{n\}, \tau_{-}\{n\}\}$ olsun. Buna göre ω

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t}_n &= \mathbf{n}_t, \\
 \mathbf{n}_n &= \mathbf{b}_t \cos \omega - \mathbf{t}_t \sin \omega, \\
 \mathbf{b}_n &= \mathbf{b}_t \sin \omega + \mathbf{t}_t \cos \omega, \\
 \kappa_n &= \sqrt{1 + \left(\frac{\phi'}{\|\mathbf{w}\|}\right)^2}, \\
 \tau_n &= -\frac{\omega'}{\|\mathbf{w}\|}.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Burada $\cos \omega = ((\sqrt{(\kappa_{-}\{n\}^2 - 1)})/(\kappa_{-}\{n\}))$, $\sin \omega = (1/(\kappa_{-}\{n\}))$ ve ω açısı, $\mathbf{b}_{-}\{t\}$ ile

$\mathbf{n}_{\{n\}}$ vektörleri arasındaki açıdır.

4.1.6. İspat

$\pi_{\{n\}} = \mathbf{n}$ eğrisi için $((d\pi_{\{n\}})/(ds)) = \pi_{\{n\}}'$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\pi_{\mathbf{n}}' &= -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}, \\ \pi_{\mathbf{n}}'' &= -\kappa' \mathbf{t} - (\kappa^2 + \tau^2) \mathbf{n} + \tau' \mathbf{b}, \\ \pi_{\mathbf{n}}''' &= [-\kappa'' + (\kappa^2 + \tau^2) \kappa] \mathbf{t} - 3(\kappa' \tau + \kappa \tau') \mathbf{n} + [\tau'' + (\kappa^2 + \tau^2) \kappa] \mathbf{b}.\end{aligned}\quad (4.14)$$

(3.26) denklemlerini kullanarak $\pi_{\{n\}} = \mathbf{n}$ eğrisinin birinci ve ikinci eğriliği, sırasıyla,

$$\kappa_{\mathbf{n}} = \frac{\|\pi_{\mathbf{n}}' \wedge \pi_{\mathbf{n}}''\|}{\|\pi_{\mathbf{n}}''\|^3} = \sqrt{1 + \left(\frac{x'}{\|\mathbf{w}\|}\right)^2} \quad (4.15)$$

ve

$$\tau_{\mathbf{n}} = \frac{\det(\pi_{\mathbf{n}}', \pi_{\mathbf{n}}'', \pi_{\mathbf{n}}''')}{\|\pi_{\mathbf{n}}' \wedge \pi_{\mathbf{n}}''\|^2} = -\frac{\omega'}{\|\mathbf{w}\|}$$

olarak buluruz. $\pi_{\{n\}} = \mathbf{n}$ eğrisinin kendi yay parametresi $s_{\{n\}}$ ya göre türevini alırsak

$$\frac{d\pi_{\mathbf{n}}}{ds_{\mathbf{n}}} = \frac{d\mathbf{n}}{ds_{\mathbf{n}}} = \frac{d\mathbf{n}}{ds} \frac{ds}{ds_{\mathbf{n}}} = \frac{ds}{ds_{\mathbf{n}}} (-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}) \quad (4.16)$$

ve

$$\frac{ds}{ds_{\mathbf{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|}$$

olacağından

$$\frac{d\pi_{\mathbf{n}}}{ds_{\mathbf{n}}} = \mathbf{t}_{\mathbf{n}} = -\mathbf{t} \cos \phi + \mathbf{b} \sin \phi = \mathbf{n}_{\mathbf{t}}, \quad (4.17)$$

olacaktır. Diğer taraftan (4.15) ve (4.16) denklemlerini kullanarak

$$\mathbf{n}_n = \frac{\frac{d\mathbf{t}_n}{ds_n}}{\left\| \frac{d\mathbf{t}_n}{ds_n} \right\|} = \frac{\sqrt{\kappa_n^2 - 1}}{\kappa_n} (\mathbf{t} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi) - \frac{1}{\kappa_n} \mathbf{n}, \quad (4.18)$$

Şayet $\cos \omega = ((\sqrt{(\kappa_n^2 - 1)})/(\kappa_n))$, $\sin \omega = (1/(\kappa_n))$ dersek

$$\mathbf{n}_n = \mathbf{b}_t \cos \omega - \mathbf{t}_t \sin \omega, \quad (4.19)$$

ve

$$\mathbf{b}_n = \mathbf{t}_n \wedge \mathbf{n}_n = \mathbf{b}_t \sin \omega + \mathbf{t}_t \cos \omega,$$

şeklinde elde ederiz.

4.1.7. Sonuç

$\{\mathbf{t}_t, \mathbf{n}_t, \mathbf{b}_t\}$ çatısı $\pi_n = n$ aslinormaller gösterge eğrisi üzerinde, $\mathbf{t}_n = \mathbf{n}_t$ tanjant vektörü etrafında $-\omega$ açısı kadar dönen bir Bishop çatısı olup aşağıdaki denklemler vardır.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{n}_t}{ds_n} &= b_1 \mathbf{b}_t - b_2 \mathbf{t}_t, \\ \frac{d\mathbf{b}_t}{ds_n} &= -b_1 \mathbf{n}_t, \\ \frac{d\mathbf{t}_t}{ds_n} &= b_2 \mathbf{n}_t, \\ b_1 &= \frac{\phi'}{\|\mathbf{w}\|}, \\ b_2 &= -1, \end{aligned} \quad (4.20)$$

burada b_1 ve b_2 , $\{\mathbf{t}_t, \mathbf{n}_t, \mathbf{b}_t\}$ Bishop çatısının, sırasıyla, birinci ve ikinci Bishop eğrilikleridir.

4.1.8. İspat

$\{\mathbf{t}_t, \mathbf{n}_t, \mathbf{b}_t\}$ çatısının bir Bishop çatısı olduğu Teorem 4.1.5 ten görülmektedir. Buna göre

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{n}_t}{ds_n} &= \frac{d\mathbf{t}_n}{ds_n}, \\
&= \kappa_n \mathbf{n}_n, \\
&= \kappa_n [\mathbf{b}_t \cos \omega - \mathbf{t}_t \sin \omega], \\
&= \kappa_n \mathbf{b}_t \cos \omega - \kappa_n \mathbf{t}_t \sin \omega,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{b}_t}{ds_n} &= \frac{d(\mathbf{t} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi)}{ds} \frac{ds}{ds_n} = -\frac{\phi'}{\|w\|} \mathbf{n}_t, \\
\frac{d\mathbf{t}_t}{ds_n} &= \frac{d\mathbf{n}}{ds} \frac{ds}{ds_n} = \mathbf{n}_t,
\end{aligned}$$

olur. Öyle ise

$$\begin{aligned}
b_1 &= \kappa_n \cos(\omega) = \kappa_n \frac{\sqrt{\kappa_n^2 - 1}}{\kappa_n} = \frac{\phi'}{\|w\|}, \\
b_2 &= -\kappa_n \sin(\omega) = -\kappa_n \frac{1}{\kappa_n} = -1.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

olur.

4.1.9. Teorem

Bir $\pi: J \rightarrow E^3$ eğrisinin Frenet elemanları $\{t, n, b, \kappa, \tau\}$ ve $\pi_{-}\{b\} = b$ binormaller gösterge eğrisinin Frenet elemanları $\{t_{-}\{b\}, n_{-}\{b\}, b_{-}\{b\}, \kappa_{-}\{b\}, \tau_{-}\{b\}\}$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_b &= -\mathbf{n}, \\
\mathbf{n}_b &= \mathbf{t} \cos \phi - \mathbf{b} \sin \phi, \\
\mathbf{b}_b &= \mathbf{t} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi, \\
\kappa_b &= \csc \phi, \\
\tau_b &= -\frac{\phi'}{\tau}.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Burada ϕ açısı, t ile $n_{-}\{b\}$ vektörleri arasındaki açıdır.

4.1.10. İspat

$\pi_{\mathbf{b}}$ eğrisini kendi yay parametresi $s_{\mathbf{b}}$ ye göre türevini alırsak

$$\frac{d\pi_{\mathbf{b}}}{ds_{\mathbf{b}}} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \frac{ds}{ds_{\mathbf{b}}} = -\tau \mathbf{n} \frac{ds}{ds_{\mathbf{b}}} \quad (4.24)$$

olacağından

$$\mathbf{t}_{\mathbf{b}} = -\mathbf{n} \text{ve} \frac{ds}{ds_{\mathbf{b}}} = \frac{1}{\tau} \quad (4.25)$$

olacaktır. Öyle ise

$$\frac{d\mathbf{t}_{\mathbf{b}}}{ds_{\mathbf{b}}} = \kappa_{\mathbf{b}} \mathbf{n}_{\mathbf{b}} = -\frac{dn}{ds} \frac{ds}{ds_{\mathbf{b}}} = -(-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}) \frac{1}{\tau} \quad (4.26)$$

olur. Buna göre

$$\kappa_{\mathbf{b}} = \csc \phi, \quad (4.27)$$

ve

$$\mathbf{n}_{\mathbf{b}} = \mathbf{t} \cos \phi - \mathbf{b} \sin \phi,$$

bulmuş oluruz. Diğer taraftan

$$\mathbf{b}_{\mathbf{b}} = \mathbf{t}_{\mathbf{b}} \wedge \mathbf{n}_{\mathbf{b}} = \mathbf{t} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi \quad (4.28)$$

elde ederiz. Ayrıca (4.25) denklemini göz önünde bulundurursak, $\tau_{\mathbf{b}}$ eğriliği

$$\tau_{\mathbf{b}} = \frac{d(-\phi)}{ds_{\mathbf{c}}} = \frac{d(-\phi)}{ds} \frac{ds}{ds_{\mathbf{c}}} = -\frac{\phi'}{\tau}. \quad (4.29)$$

olur.

4.1.11. Sonuç

$\{ \mathbf{t}, -\mathbf{n}, \mathbf{b} \}$ çatısı $\pi_{\{\mathbf{b}\}} = \mathbf{b}$ binormaller gösterge eğrisi üzerinde, $\mathbf{t}_{\{\mathbf{b}\}} = -\mathbf{n}$, tanjant vektörü etrafında $-\phi$ açısı kadar dönen bir Bishop çatısı olup aşağıdaki denklemler vardır.

$$\begin{aligned} \frac{d(-\mathbf{n})}{ds_{\mathbf{b}}} &= c_1 \mathbf{t} - c_2 \mathbf{b}, \\ \frac{d\mathbf{t}}{ds_{\mathbf{b}}} &= -c_1 (-\mathbf{n}), \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds_{\mathbf{b}}} &= c_2 (-\mathbf{n}), \\ c_1 &= \cot \phi, \\ c_2 &= -1, \end{aligned} \tag{4.30}$$

burada c_1 ve c_2 , $\{ \mathbf{t}, -\mathbf{n}, \mathbf{b} \}$ Bishop çatısının, sırasıyla, birinci ve ikinci Bishop eğrilikleridir.

4.1.12. İspat

$\{ \mathbf{t}, -\mathbf{n}, \mathbf{b} \}$ çatısının bir Bishop çatısı olduğu Teorem 4.1.9 dan görülmektedir. Buna göre

$$\begin{aligned} \frac{d(-\mathbf{n})}{ds_{\mathbf{b}}} &= \frac{d(-\mathbf{n})}{ds} \frac{ds}{ds_{\mathbf{b}}} = (\kappa \mathbf{t} - \tau \mathbf{b}) \frac{1}{\tau}, \\ &= \left(\frac{\kappa}{\tau} \right) \mathbf{t} - \mathbf{b}, \\ \frac{d\mathbf{t}}{ds_{\mathbf{b}}} &= \frac{d\mathbf{t}}{ds} \frac{ds}{ds_{\mathbf{b}}} = -(-\mathbf{n}) \cot \phi, \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds_{\mathbf{b}}} &= \frac{d\mathbf{b}}{ds} \frac{ds}{ds_{\mathbf{b}}} = -\mathbf{n}, \end{aligned} \tag{4.31}$$

olarak bulunur. Öyle ise

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\kappa}{\tau} = \cot \phi, \\ c_2 &= -1. \end{aligned} \quad (4.32)$$

olur. Ayrıca (4.25) denklemini göz önünde bulundurursak, $\tau_{\mathbf{b}}$ eğriliğini

$$\tau_{\mathbf{b}} = \frac{d\phi}{ds_{\mathbf{b}}} = \frac{d\phi}{ds} \frac{ds}{ds_{\mathbf{b}}} = \phi' \frac{1}{\tau} \quad (4.33)$$

şeklinde de buluruz.

4.1.13. Teorem

Bir $\pi: J \rightarrow E^3$ eğrisinin Frenet elemanları $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}, \kappa, \tau\}$ ve $\pi_{\mathbf{c}} = \mathbf{c}$ pol vektörünün k üresel gösterge eğrisinin Frenet elemanları $\{\mathbf{t}_{\mathbf{c}}, \mathbf{n}_{\mathbf{c}}, \mathbf{b}_{\mathbf{c}}, \kappa_{\mathbf{c}}, \tau_{\mathbf{c}}\}$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{\mathbf{c}} &= \mathbf{t} \cos \phi - \mathbf{b} \sin \phi, \\ \mathbf{n}_{\mathbf{c}} &= \mathbf{n} \cos \theta - [\mathbf{t} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi] \sin \theta, \\ \mathbf{b}_{\mathbf{c}} &= \mathbf{n} \sin \theta + [\mathbf{t} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi] \cos \theta, \\ \kappa_{\mathbf{c}} &= \sqrt{1 + \left(\frac{\|\mathbf{w}\|}{\phi'} \right)^2}, \\ \tau_{\mathbf{c}} &= -\frac{\theta'}{\phi'}, \phi \neq 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Burada θ açısı, $\mathbf{n}$ ile $\mathbf{n}_{\mathbf{c}}$ vektörleri arasındaki açıdır ve

$$\cos \theta = \frac{\|\mathbf{w}\|}{\sqrt{(\phi')^2 + \|\mathbf{w}\|^2}} \quad (4.35)$$

4.1.14. İspat

$\pi_{\mathbf{c}} = \mathbf{c} = \mathbf{t} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi$ e ğrisini kendi yay parametresi $s_{\mathbf{c}}$ ye göre türevini alırsak

$$\frac{d\pi_{\mathbf{c}}}{ds_{\mathbf{c}}} = \frac{d\mathbf{c}}{ds} \frac{ds}{ds_{\mathbf{c}}} = \phi' (\mathbf{t} \cos \phi - \mathbf{b} \sin \phi) \frac{ds}{ds_{\mathbf{c}}} \quad (4.36)$$

olacağından ve $\phi' \neq 0$, olmak şartıyla

$$\mathbf{t}_{\mathbf{c}} = \mathbf{t} \cos \phi - \mathbf{b} \sin \phi \text{ ve } \frac{ds}{ds_{\mathbf{c}}} = \frac{1}{\phi'} \quad (4.37)$$

olacaktır. Öyle ise

$$\frac{d\mathbf{t}_{\mathbf{c}}}{ds_{\mathbf{c}}} = \kappa_{\mathbf{c}} \mathbf{n}_{\mathbf{c}} = - \frac{d(\mathbf{t} \cos \phi - \mathbf{b} \sin \phi)}{ds} \frac{ds}{ds_{\mathbf{b}}} = - (\mathbf{t} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi) + \frac{\|\mathbf{w}\|}{\phi'} \mathbf{n} \quad (4.38)$$

olacağından

$$\kappa_{\mathbf{c}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\|\mathbf{w}\|}{\phi'} \right)^2}, \quad (4.39)$$

ve

$$\mathbf{n}_{\mathbf{c}} = \mathbf{n} \cos \theta - [\mathbf{t} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi] \sin \theta$$

olacaktır. Diğer taraftan

$$\mathbf{b}_{\mathbf{c}} = \mathbf{t}_{\mathbf{c}} \wedge \mathbf{n}_{\mathbf{c}} = \mathbf{n} \sin \theta + [\mathbf{t} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi] \cos \theta, \quad (4.40)$$

elde etmiş oluruz. Ayrıca (4.37) denklemini göz önünde bulundurursak, $\tau_{\{\mathbf{c}\}}$ eğriliğini

$$\tau_{\mathbf{c}} = \frac{d(-\theta)}{ds_{\mathbf{c}}} = \frac{d(-\theta)}{ds} \frac{ds}{ds_{\mathbf{c}}} = -\frac{\theta'}{\phi'}. \quad (4.41)$$

şeklinde de buluruz.

4.1.15. Sonuç

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{t} \cos \phi - \mathbf{b} \sin \phi, \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{n}, \\
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{t} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi
\end{aligned} \tag{4.42}$$

çatısı $\pi_{\{c\}}=c$ pol vektör alanı gö sterge eğrisi üzerinde, $v_1=t\cos\phi- b\sin\phi$ tanjant vektörü etrafında $-\theta$ açısı kadar dönen bir Bishop çatısı olup aşağıdaki denklemler vardır.

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{v}_1}{ds_c} &= d_1 \mathbf{v}_2 - d_2 \mathbf{v}_3, \\
\frac{d\mathbf{v}_2}{ds_c} &= -d_1 \mathbf{v}_1, \\
\frac{d\mathbf{v}_3}{ds_c} &= d_2 \mathbf{v}_1, \\
d_1 &= \frac{\|\mathbf{w}\|}{\phi'}, \\
d_2 &= -1,
\end{aligned} \tag{4.43}$$

burada d_1 ve d_2 , $\{v_1, v_2, v_3\}$ Bishop çatısının, sırasıyla, birinci ve ikinci Bishop eğrilikleridir.

4.1.16. İspat

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{t} \cos \phi - \mathbf{b} \sin \phi, \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{n}, \\
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{t} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi,
\end{aligned} \tag{4.44}$$

eşitliklerini (4.37), (4.39), (4.40) denklemlerinde kullanırsak

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_c &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{n}_c &= \mathbf{v}_2 \cos \theta - \mathbf{v}_3 \sin \theta \\
\mathbf{b}_c &= \mathbf{v}_2 \sin \theta + \mathbf{v}_3 \cos \theta
\end{aligned} \tag{4.45}$$

elde edilir. Bu da $\{v_1, v_2, v_3\}$ çatısının bir Bishop çatısı olduğunu gösterir. Buna göre

$$\begin{aligned}
 \frac{dv_1}{ds_c} &= \frac{dv_1}{ds} \frac{ds}{ds_c}, \\
 &= \frac{d(\mathbf{t} \cos \phi - \mathbf{b} \sin \phi)}{ds} \frac{1}{\phi'}, \\
 &= \frac{\|\mathbf{w}\|}{\phi'} \mathbf{n} - (\mathbf{t} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi), \\
 &= \frac{\|\mathbf{w}\|}{\phi'} \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \\
 \frac{dv_2}{ds_c} &= \frac{d\mathbf{n}}{ds} \frac{ds}{ds_c} = -\frac{\|\mathbf{w}\|}{\phi'} \mathbf{v}_1, \\
 \frac{dv_3}{ds_c} &= \frac{dv_3}{ds} \frac{ds}{ds_c} = \mathbf{v}_1
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

olarak bulunur. Öyle ise

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{\|\mathbf{w}\|}{\phi'}, \\
 d_2 &= -1.
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

olur.

4.1.17. Örnek

E^3 de verilen

$$\begin{aligned}
 \pi : J &\longmapsto \mathbb{E}^3 \\
 t &\longmapsto \pi(t) = \left(\frac{2t^3}{3}, t^2, t \right)
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

eğrisinin Frenet elemanları

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} &= \frac{1}{2t^2 + 1} (2t^2, 2t, 1), \\
\mathbf{n} &= \frac{1}{2(2t^2 + 1)^2} (8t^3 + 4t, -8t^4 + 2, -8t^3 - 4t), \\
\mathbf{b} &= \frac{1}{2(2t^2 + 1)} (-2, 4t, -4t^2), \\
\kappa &= \frac{2}{(2t^2 + 1)^2}, \\
\tau &= \frac{-2}{(2t^2 + 1)^2}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

(4.3) den

$$\begin{aligned}
\cos \phi &= \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
\sin \phi &= \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned} \tag{4.50}$$

bulunur. Buna göre,

$\pi_{\{t\}} = \mathbf{t}$ teğetler gösterge eğrisinin Frenet elemanları $\{\mathbf{t}_{\{t\}}, \mathbf{n}_{\{t\}}, \mathbf{b}_{\{t\}}, \kappa_{\{t\}}, \tau_{\{t\}}\}$ ise Teorem 4.1.1 den

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_t &= \mathbf{n} = \frac{1}{2(2t^2 + 1)^2} (8t^3 + 4t, -8t^4 + 2, -8t^3 - 4t), \\
\mathbf{n}_t &= -\mathbf{t} \cos \phi + \mathbf{b} \sin \phi = -\frac{1}{2\sqrt{2}(2t^2 + 1)} (4t^2 - 2, 8t, -4t^2 + 2), \\
\mathbf{b}_t &= \mathbf{t} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \\
\kappa_t &= \sec \phi = \sqrt{2}, \\
\tau_t &= \frac{\phi'}{\kappa} = 0,
\end{aligned} \tag{4.51}$$

$\pi_{\{n\}} = \mathbf{n}$ aslinormaller gösterge eğrisinin Frenet elemanları $\{\mathbf{t}_{\{n\}}, \mathbf{n}_{\{n\}}, \mathbf{b}_{\{n\}}, \kappa_{\{n\}}, \tau_{\{n\}}\}$ ise Teorem 4.1.5 den

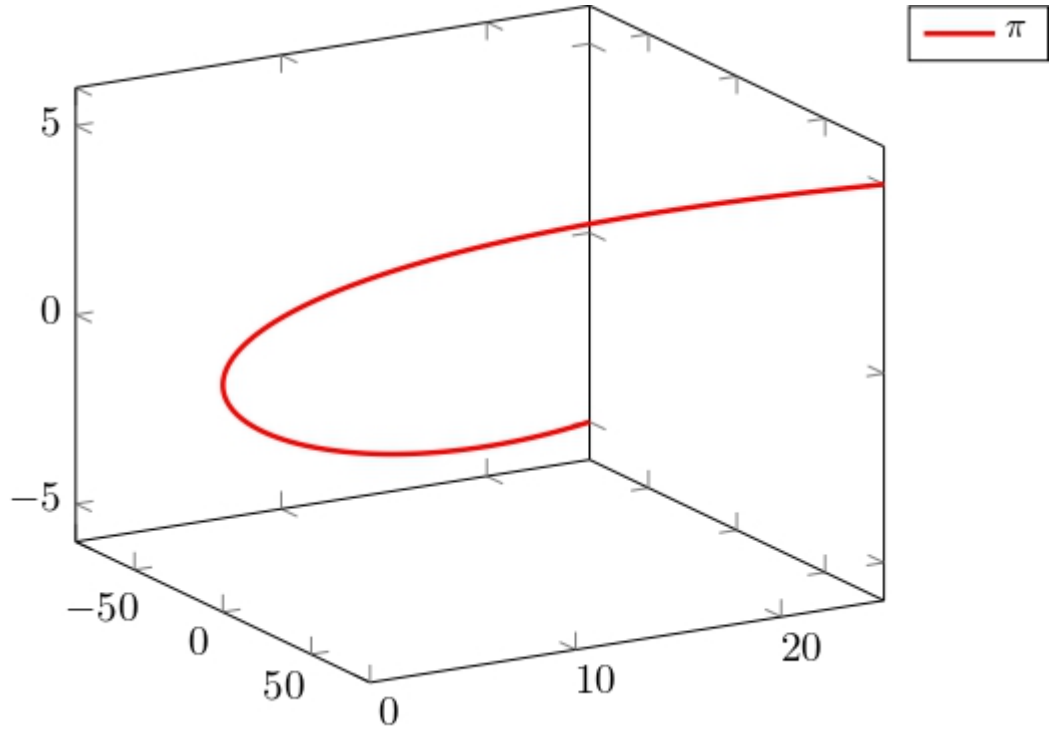
$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_n &= \mathbf{n}_t = -\frac{1}{2\sqrt{2}(2t^2+1)}(4t^2-2, 8t, -4t^2+2), \\
\mathbf{n}_n &= \mathbf{b}_t \cos \omega - \mathbf{t}_t \sin \omega = -\frac{1}{2(2t^2+1)^2}(8t^3+4t, -8t^4+2, -8t^3-4t), \\
\mathbf{b}_n &= \mathbf{b}_t \sin \omega + \mathbf{t}_t \cos \omega = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\
\kappa_n &= \sqrt{1 + \left(\frac{\phi'}{\|\mathbf{w}\|}\right)^2} = 1, \\
\tau_n &= -\frac{\omega'}{\|\mathbf{w}\|} = 0.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

$\pi_{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$ binormaller gösterge eğrisinin Frenet elemanları $\{\mathbf{t}_{\mathbf{b}}, \mathbf{n}_{\mathbf{b}}, \mathbf{b}_{\mathbf{b}}, \kappa_{\mathbf{b}}, \tau_{\mathbf{b}}\}$ ise Teorem 4.1.13 den

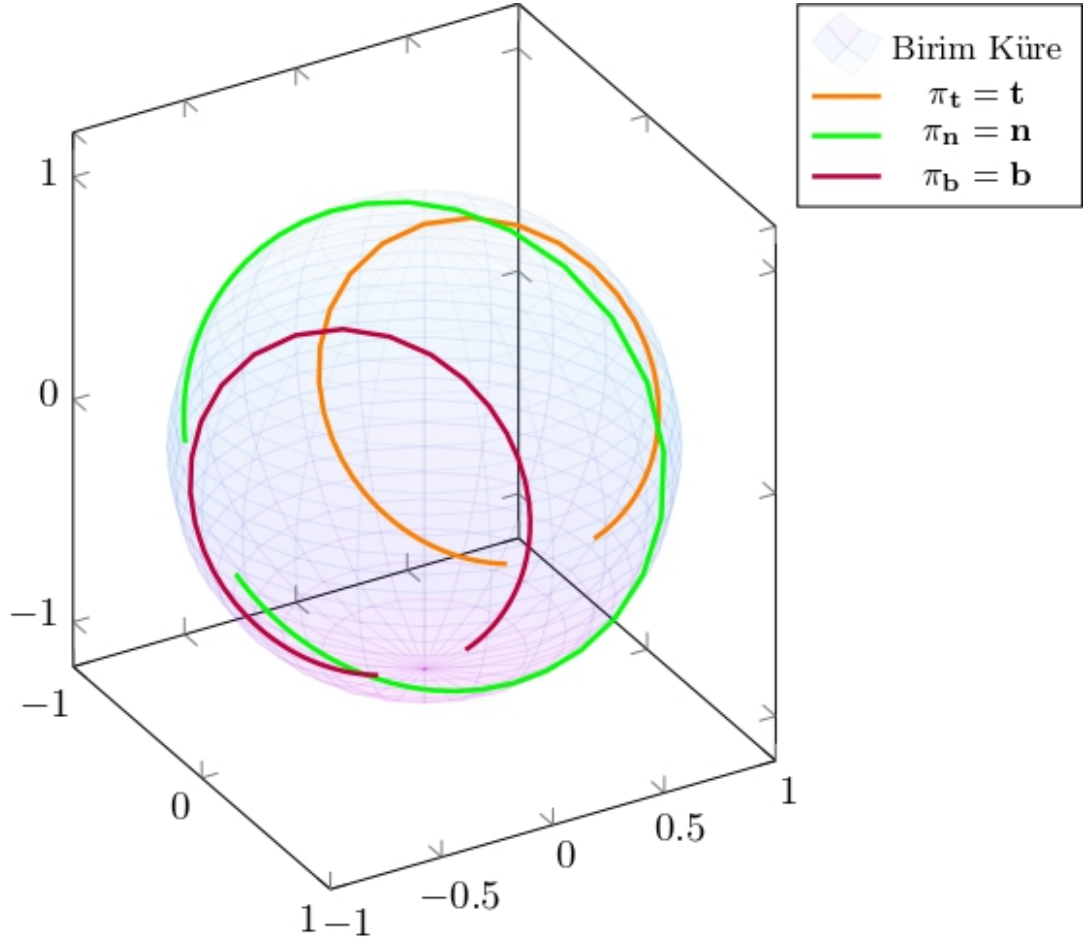
$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_{\mathbf{b}} &= -\mathbf{n} = -\frac{1}{2(2t^2+1)^2}(8t^3+4t, -8t^4+2, -8t^3-4t), \\
\mathbf{n}_{\mathbf{b}} &= \mathbf{t} \cos \phi - \mathbf{b} \sin \phi = \frac{1}{2\sqrt{2}(2t^2+1)}(4t^2-2, 8t, -4t^2+2), \\
\mathbf{b}_{\mathbf{b}} &= \mathbf{t} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\
\kappa_{\mathbf{b}} &= \csc \phi = -\sqrt{2}, \\
\tau_{\mathbf{b}} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\pi_{\mathbf{c}} = \mathbf{c} = \mathbf{t} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{4.54}$$

olduğundan pol vektör ünün küresel göstergesi bir noktadan ibarettir. Şekil 1 ve Şekil 2 e bakınız.



Şekil 4.1. 1 pi eğrisi



Şekil 4.2. 2 Frenet vektör alanlarının küresel göstergeleri

4.2. Bishop çatısına göre küresel göstergeler ve sonuçları

Birim hızlı bir $\pi: J \rightarrow E^3$ eğrinin yay parametresi s ve

$$\frac{dX(s)}{ds} = X'(s) \quad (4.55)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(s) &= \pi'(s), & \mathbf{t}'(s) &= \kappa(s) \mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}(s) &= \frac{\mathbf{t}'(s)}{\|\mathbf{t}'(s)\|}, & \mathbf{n}'(s) &= -\kappa(s) \mathbf{t}(s) + \tau(s) \mathbf{b}(s), \\ \mathbf{b}(s) &= \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s), & \mathbf{b}'(s) &= -\tau(s) \mathbf{n}(s), \\ & & \kappa(s) &= \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle, \\ & & \tau(s) &= \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle, \end{aligned} \quad (4.56)$$

olarak tanımlanan ortonormal vektör alanlarına π eğrisinin Frenet vektör alanları veya Frenet çatısı denir. Burada t , n , b , κ ve τ ya, sırasıyla, π eğrisinin tanjant vektör alanı, asli normal vektör alanı, binormal vektör alanı, birinci eğrilik fonksiyonu ve ikinci eğrilik fonksiyonu denir.

4.2.1. Uyarı

Bu çalışmada $\kappa(s) > 0$ ve $\tau(s) \neq 0$ alacağız.

Regüler bir π eğrisinin her s için tanjant vektör alanı bir sabit doğrultu ile sabit açı yapıyorsa π eğrisine bir helis eğrisi denir. Eğer asli normal vektör alanı sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyorsa π eğrisine bir slant eğri denir. Şayet $\|\pi(s)\| = r = \text{Sabittir}$ ise π eğrisine bir küresel eğri denir.

Şayet π eğrisi eğilimleri sıfırdan farklı birim hızlı bir eğri ise aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

4.2.2. Önerme

π eğrisi bir genel helistir gerek ve yeter şart

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \text{sabittir.} \quad (4.57)$$

4.2.3. Önerme

π eğrisi bir slant eğridir gerek ve yeter şart

$$\frac{\kappa(s)}{(\kappa^2(s) + \tau^2(s))^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} \right)' = \text{sabittir.} \quad (4.58)$$

4.2.4. Önerme

π eğrisi bir küresel eğridir ($\|\pi(s)\| = r = \text{Sabittir}$) gerek ve yeter şart

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} + \left[\frac{1}{\tau(s)} \left(\frac{1}{\kappa(s)} \right)' \right]' = 0. \quad (4.59)$$

π eğrisinin Darboux ve pol vektör alanları, sırasıyla,

$$\mathbf{w}(s) = \tau(s) \mathbf{t}(s) + \kappa(s) \mathbf{b}(s) \quad (4.60)$$

ve

$$\mathbf{c}(s) = \frac{1}{\|\mathbf{w}(s)\|} \mathbf{w}(s) = \mathbf{t}(s) \sin \phi(s) + \mathbf{b}(s) \cos \phi(s). \quad (4.61)$$

Burada

$$\cos \phi(s) = \frac{\kappa(s)}{\|\mathbf{w}(s)\|}, \quad \sin \phi(s) = \frac{\tau(s)}{\|\mathbf{w}(s)\|} \quad (4.62)$$

ve $\phi(s)$ açısı, $\mathbf{c}(s)$ pol vektörü ile $\mathbf{b}(s)$ binormal vektörü arasındaki açıdır.

Diğer taraftan

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}(s) &= \mathbf{t}(s), \\ \mathbf{n}_1(s) &= \mathbf{n}(s) \cos x(s) - \mathbf{b}(s) \sin x(s), \\ \mathbf{n}_2(s) &= \mathbf{n}(s) \sin x(s) + \mathbf{b}(s) \cos x(s), \end{aligned} \right\} \quad (4.63)$$

olarak yazılabilen ortonormal çatıya π eğrisinin Bishop vektör alanları veya Bishop çatısı denir. Burada $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}_1(s)$ ve $\mathbf{n}_2(s)$, sırasıyla, π eğrisinin birinci Bishop vektör alanı, ikinci Bishop vektör alanı ve üçüncü Bishop vektör alanı denir. Aynı düşünce ile $\mathbf{k}_1(s)$ ve $\mathbf{k}_2(s)$, sırasıyla, π eğrisinin Bishop çatısına göre birinci ve ikinci eğrilik fonksiyonları denir. Bu çatının türev değişimi de aşağıdaki gibidir.

$$(4.64)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}'(s) \\ \mathbf{n}'_1(s) \\ \mathbf{n}'_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1(s) & k_2(s) \\ -k_1(s) & 0 & 0 \\ -k_2(s) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}_1(s) \\ \mathbf{n}_2(s) \end{bmatrix}.$$

Burada

$$\begin{aligned} k_1(s) &= \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}_1(s) \rangle = \kappa(s) \cos x(s), \\ k_2(s) &= \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}_2(s) \rangle = \kappa(s) \sin x(s). \end{aligned} \quad (4.65)$$

(4.62) eşitliklerini kullanırsak

$$x'(s) = \tau(s) = \kappa(s) \tan \phi(s) \quad (4.66)$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$\frac{k_2(s)}{k_1(s)} = \tan x(s) \quad (4.67)$$

olacağından dolayı

$$x(s) = \arctan \left(\frac{k_2(s)}{k_1(s)} \right) \quad (4.68)$$

olacaktır. Şayet s parametresine göre (4.68) eşitliğinin her iki tarafının türevini alırsak

$$x'(s) = \tau(s) = \frac{k_1^2(s)}{k_1^2(s) + k_2^2(s)} \left(\frac{k_2(s)}{k_1(s)} \right)'. \quad (4.69)$$

Zaten (4.64) denkleminde

$$k_1^2(s) + k_2^2(s) = \kappa^2(s)$$

(4.70)

olduğunu biliyoruz.

(4.64) denkleminde türev değişim matrisine göre Bishop çatısının Darboux vektörü

$$\omega(s) = -k_2(s) \mathbf{n}_1(s) + k_1(s) \mathbf{n}_2(s) \quad (4.71)$$

olacaktır. Aşağıdaki denklemler vardır.

$$\mathbf{t}'(s) = \omega(s) \wedge \mathbf{t}(s), \mathbf{n}_1'(s) = \omega(s) \wedge \mathbf{n}_1(s), \mathbf{n}_2'(s) = \omega(s) \wedge \mathbf{n}_2(s). \quad (4.72)$$

Darboux vektörün birim vektörü (pol vektörü) de

$$\varpi(s) = \frac{\omega(s)}{\|\omega(s)\|} = -\sin x(s) \mathbf{n}_1(s) + \cos x(s) \mathbf{n}_2(s) \quad (4.73)$$

olmaktadır.

Şayet π Bishop eğilikleri sıfırdan farklı ise (4.62), (4.63), (4.64) önermelerini ve (4.69), (4.70) denklemlerini kullanırsak, ispatını vermeden aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

4.2.5. Teorem

π eğrisinin Bishop elemanları $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_1(s), \mathbf{n}_2(s), k_1(s), k_2(s))$ olsun. π eğrisi bir çember ise

$$\frac{k_2(s)}{k_1(s)} = \text{sabittir.} \quad (4.74)$$

4.2.6. Teorem

π eğrisinin Bishop elemanları $(t(s), n_1(s), n_2(s), k_1(s), k_2(s))$ olsun. π eğrisi bir genel helis ise

$$\frac{k'_2(s) k_1(s) - k_2(s) k'_1(s)}{(k_1^2(s) + k_2^2(s))^{\frac{3}{2}}} = \text{sabittir.} \quad (4.75)$$

4.2.7. Teorem

π eğrisinin Bishop elemanları $(t(s), n_1(s), n_2(s), k_1(s), k_2(s))$ olsun. π eğrisi bir slant eğri ise

$$\frac{(k_1^2(s) + k_2^2(s))^4 \left[\frac{k'_2(s) k_1(s) - k_2(s) k'_1(s)}{(k_1^2(s) + k_2^2(s))^{\frac{3}{2}}} \right]'}{\left((k_1^2(s) + k_2^2(s))^3 + (k'_2(s) k_1(s) - k_2(s) k'_1(s))^2 \right)^{\frac{3}{2}}} = \text{sabittir.} \quad (4.76)$$

4.2.8. Teorem

π eğrisinin Bishop elemanları $(t(s), n_1(s), n_2(s), k_1(s), k_2(s))$ olsun. π eğrisi bir küresel eğri ise

$$\frac{k'_2(s) k_1(s) - k_2(s) k'_1(s)}{(k_1^2(s) + k_2^2(s))^{\frac{3}{2}}} - \left[\frac{\left(\sqrt{k_1^2(s) + k_2^2(s)} \right)'}{k'_2(s) k_1(s) - k_2(s) k'_1(s)} \right]' = 0. \quad (4.77)$$

4.2.9. Tanım

π eğrisinin herhangi bir çatının herhangi bir vektör alanı X , küre üzerinde çizmiş olduğu eğriye bu vektör alanının küresel gösterge eğrisi denir ve $\pi_{\{X\}} = X$ şeklinde gösterilir. $\pi_{\{X\}}$ eğrisinin yay parametresi de $s_{\{X\}}$ biçiminde gösterilir.

4.2.10. Teorem

$\pi_{\{t\}}(s) = t(s)$ birinci Bishop vektör küresel gösterge eğrisinin Bishop elemanları da $(t_{\{t\}}(s), n_{\{1t\}}(s), n_{\{2t\}}(s), k_{\{1t\}}(s), k_{\{2t\}}(s))$ olsun. Aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_t(s) &= \mathbf{n}_1(s) \cos x(s) + \mathbf{n}_2(s) \sin x(s), \\
\mathbf{n}_{1t}(s) &= \mathbf{t}(s) \cos \varphi(s) + [\mathbf{n}_1(s) \sin x(s) - \mathbf{n}_2(s) \cos x(s)] \sin \varphi(s), \\
\mathbf{n}_{2t}(s) &= \mathbf{t}(s) \sin \varphi(s) + [\mathbf{n}_1(s) \sin x(s) - \mathbf{n}_2(s) \cos x(s)] \cos \varphi(s), \\
k_{1t}(s) &= -\cos \varphi(s) + \sin \varphi(s) \tan \phi(s), \\
k_{2t}(s) &= -\sin \varphi(s) - \cos \varphi(s) \tan \phi(s).
\end{aligned} \tag{4.78}$$

Burada $\phi(s)$ = sabittir.

4.2.11. İspat

$\pi_{\{t\}}(s)=t(s)$ eğrisinin kendi yay parametresi $s_{\{t\}}$ ye göre türevini alırsak ve (4.63), (4.64) eşitliklerini kullanırsak,

$$\mathbf{t}_t = \frac{d\pi_{\mathbf{t}}(s)}{ds_t} = \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds_t} = \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \frac{ds}{ds_t} = \frac{ds}{ds_t} (k_1(s) \mathbf{n}_1(s) + k_2(s) \mathbf{n}_2(s)) \tag{4.79}$$

olacağından

$$\frac{ds}{ds_t} = \frac{1}{\kappa(s)} \tag{4.80}$$

ve

$$\mathbf{t}_t(s) = \mathbf{n}_1(s) \cos x(s) + \mathbf{n}_2(s) \sin x(s).$$

olacaktır. Son denklemin her iki tarafın $s_{\{t\}}$ ye göre t ürevini alırsak ve (4.66) denklemini kullanırsak, hem

$$\frac{d\mathbf{t}_t(s)}{ds_t} = -\mathbf{t}(s) - \mathbf{n}_1(s) \tan \phi(s) \sin x(s) + \mathbf{n}_2(s) \tan \phi(s) \cos x(s) \tag{4.81}$$

eşitliğini, hem de

$$\frac{d\mathbf{t}_t(s)}{ds_t} = k_{1t}(s) \mathbf{n}_{1t}(s) + k_{2t}(s) \mathbf{n}_{2t}(s) \tag{4.82}$$

eşitliğini elde ederiz. Buna göre,

$$k_{1t}(s) \mathbf{n}_{1t}(s) + k_{2t}(s) \mathbf{n}_{2t}(s) = -\mathbf{t}(s) - \mathbf{n}_1(s) \tan \phi(s) \sin x(s) + \mathbf{n}_2(s) \tan \phi(s) \cos x(s) \quad (4.83)$$

yazabiliriz. $\pi_{\{t\}} = t$ birinci Bishop vektör küresel gösterge eğrisinin Bishop elemanı,

$$\mathbf{n}_{1t}(s) = \lambda(s) \mathbf{t}(s) + \mu(s) \mathbf{n}_1(s) + \nu(s) \mathbf{n}_2(s) \quad (4.84)$$

biçimindedir ve burada $\|\mathbf{n}_{1t}(s)\| = 1$, olduğunu biliyoruz, öyle ise

$$\lambda^2(s) + \mu^2(s) + \nu^2(s) = 1 \quad (4.85)$$

olacaktır.

$$\langle \mathbf{t}_t(s), \mathbf{n}_{1t}(s) \rangle = 0 \quad (4.86)$$

olduğunu biliyoruz. (4.86) denkleminde

$$\mu(s) \cos x(s) + \nu(s) \sin x(s) = 0 \quad (4.87)$$

olur. Burada

$$\mu(s) = \ell(s) \sin x(s), \text{ ve } \nu(s) = -\ell(s) \cos x(s) \quad (4.88)$$

olarak alabiliriz. (4.85) ve (4.88) denklemlerine göz önünde bulundurursak

$$\lambda^2(s) + \ell^2(s) = 1 \quad (4.89)$$

olduğu görürüz. Öyle ise

$$\lambda(s) = \cos \varphi(s), \text{ ve } \ell(s) = -\sin \varphi(s) \quad (4.90)$$

olarak alabiliriz. Eğer $\lambda(s)$, $\mu(s)$, $\nu(s)$ (4.84) yerine yazarsak

$$\mathbf{n}_{1t}(s) = \mathbf{t}(s) \cos \varphi(s) - [\mathbf{n}_1(s) \sin x(s) - \mathbf{n}_2(s) \cos x(s)] \sin \varphi(s), \quad (4.91)$$

buluruz. Benzer hesaplama yöntemiyle

$$\mathbf{n}_{2t}(s) = \mathbf{t}(s) \sin \varphi(s) + [\mathbf{n}_1(s) \sin x(s) - \mathbf{n}_2(s) \cos x(s)] \cos \varphi(s), \quad (4.92)$$

buluruz. (4.83) eşitliğin her iki tarafını, sırayla, $\mathbf{n}_{1t}(s)$ ve $\mathbf{n}_{2t}(s)$ iç çarpımını alırsak,

$$k_{1t}(s) = -\cos \varphi(s) + \tan \phi(s) \sin \varphi(s), \quad (4.93)$$

ve

$$k_{2t}(s) = -\sin \varphi(s) - \tan \phi(s) \cos \varphi(s), \quad (4.94)$$

olarak bulmuş oluruz. Şayet (4.91) eşitliğin her iki tarafını $s_{\{t\}}$ parametresine göre türevini alırsak

$$\varphi'(s) \sin \varphi(s) = 0, \quad (4.95)$$

ve şayet (4.92) eşitliğin her iki tarafını $s_{\{t\}}$ parametresine göre türevini alırsak

$$\varphi'(s) \cos \varphi(s) = 0, \quad (4.96)$$

bulmuş oluruz. Öyle ise

$$\varphi(s) = \text{sabittir.} \quad (4.97)$$

Teorem (4.2.8) den dolayı $\pi_{\{t\}}(s)=t(s)$ birinci Bishop vektör küresel eğrisi için ispatını yapmadan verebiliriz.

4.2.12. Teorem

$\pi_{\{t\}}(s)=t(s)$ birinci Bishop vektör küresel gösterge eğrisi için

$$\frac{k'_{2t}(s) k_{1t}(s) - k_{2t}(s) k'_{1t}(s)}{(k_{1t}^2(s) + k_{2t}^2(s))^{\frac{3}{2}}} - \left[\frac{\left(\sqrt{k_{1t}^2(s) + k_{2t}^2(s)} \right)'}{k'_{2t}(s) k_{1t}(s) - k_{2t}(s) k'_{1t}(s)} \right]' = 0. \quad (4.98)$$

4.2.13. İspat

(4.93) ve (4.94) denklemlerinin her iki tarafını s (veya $s_{\{t\}}$) türevlerini alırsak

$$k'_{2t}(s) k_{1t}(s) - k_{2t}(s) k'_{1t}(s) = \phi'(s) \frac{1}{\cos^2 \phi(s)} \quad (4.99)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$k_{1t}^2(s) + k_{2t}^2(s) = \frac{1}{\cos^2 \phi(s)} \quad (4.100)$$

ve

$$\left(\sqrt{k_{1t}^2(s) + k_{2t}^2(s)} \right)' = \phi'(s) \frac{\sin \phi(s)}{\cos^2 \phi(s)}. \quad (4.101)$$

(4.99), (4.100) ve (4.101) eşitliklerini (4.77) denkleminde kullanırsak ispat sonucunu görürüz.

4.2.14. Teorem

$\pi_{\{t\}}(s)=t(s)$ birinci Bishop vektör küresel gösterge eğrisi bir çemberdir gerek ve yeter şart $\phi(s)=$ sabittir.

4.2.15. İspat

$\phi(s)=$ sabittir. (4.74) göz önünde bulundurursak

$$\frac{k_{2t}(s)}{k_{1t}(s)} = \frac{-\sin \varphi(s) - \cos \varphi(s) \tan \phi(s)}{-\cos \varphi(s) + \sin \varphi(s) \tan \phi(s)} \quad (4.102)$$

oranının sabit olabilmesi için gerek ve yeter şart $\phi(s)=$ sabit olmasıdır.

4.2.16. Teorem

$\pi_{\{t\}}(s)=t(s)$ birinci Bishop vektör küresel gösterge eğrisinin Bishop elemanları $(t_{\{t\}}(s), n_{\{1t\}}(s), n_{\{2t\}}(s), k_{\{1t\}}(s), k_{\{2t\}}(s))$ olsun. $\pi_{\{t\}}(s)=t(s)$ eğrisi bir küresel helistir gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} (\sin \phi(s))' &= a = \text{sabittir} \\ \text{veya} \quad \phi(s) &= \arcsin(as + b). \end{aligned} \quad (4.103)$$

Burada $a, b \in \mathbb{R}$ ve $(-1 \leq as+b \leq 1)$.

4.2.17. İspat

(4.99) ve (4.100) eşitliklerini (4.75) denkleminde kullanırsak ispat biter.

4.2.18. Teorem

$\pi_{\{t\}}(s)=t(s)$ birinci Bishop vektör küresel gösterge eğrisi bir küresel slant eğridir gerek ve yeter şart

$$\frac{\cos \phi(s) \sin'' \phi(s)}{\left[1 + (\sin' \phi(s))^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \text{sabittir.} \quad (4.104)$$

4.2.19. İspat

(4.99) ve (4.100) eşitliklerini (4.76) denkleminde kullanırsak ispat biter.

4.2.20. Teorem

Birim hızlı bir $\pi:J \rightarrow E^3$ e ğrisinin Bishop elemanları $(t(s), n_1(s), n_2(s), k_1(s), k_2(s))$ ve $\pi_{\{n_1\}}(s)=n_1(s)$ ikinci Bishop vektör küresel gösterge eğrisinin Bishop elemanları $(t_{\{n_1\}}(s), n_{\{1n_1\}}(s), n_{\{2n_1\}}(s), k_{\{1n_1\}}(s), k_{\{2n_1\}}(s))$ olsun. Aşağıdaki bağıntılar vardır.

$$\begin{aligned} t_{n_1}(s) &= t(s), \\ n_{1n_1}(s) &= n_1(s), \\ n_{2n_1}(s) &= n_2(s), \\ k_{1n_1}(s) &= 1, \\ k_{2n_1}(s) &= \tan x(s). \end{aligned} \quad (4.105)$$

4.2.21. İspat

$\pi_{\{n_1\}}(s)=n_1(s)$ eğrisinin kendi yay parametresi $s_{\{n_1\}}$ ye göre türevini alırsak ve (4.63), (4.64) eşitliklerini kullanırsak,

$$t_{n_1}(s) = \frac{d\pi_{n_1}(s)}{ds_{n_1}} = \frac{dn_1(s)}{ds_{n_1}} = \frac{dn_1(s)}{ds} \frac{ds}{ds_{n_1}} = \frac{ds}{ds_{n_1}} (-k_1(s) t(s)) \quad (4.106)$$

olacağından

$$\frac{ds}{ds_{n_1}} = \frac{1}{k_1(s)} \quad (4.107)$$

ve

$$\mathbf{t}_{n_1}(s) = \mathbf{t}(s) \quad (4.108)$$

olacaktır. Buna göre, $\mathbf{n}_{\{1\}}(s)$ ve $\mathbf{n}_{\{2n_1\}}(s)$ Bishop vektörleri, aşağıdaki gibi alabiliriz.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n}_{1n_1}(s) &= \mathbf{n}_1(s) \cos \alpha(s) - \mathbf{n}_2(s) \sin \alpha(s), \\ \mathbf{n}_{2n_1}(s) &= \mathbf{n}_1(s) \sin \alpha(s) + \mathbf{n}_2(s) \cos \alpha(s). \end{aligned} \right\} \quad (4.109)$$

(4.108) denkeleminin her iki tarafını $s_{\{n_1\}}$ ye göre türevini alırsak ve (4.67) denklemini kullanırsak, hem

$$\frac{d\mathbf{t}_{n_1}(s)}{ds_{n_1}} = \mathbf{n}_1(s) + \tan x(s) \mathbf{n}_2(s), \quad (4.110)$$

hem de

$$\frac{d\mathbf{t}_{n_1}(s)}{ds_{n_1}} = k_{1n_1}(s) \mathbf{n}_{1n_1}(s) + k_{2n_1}(s) \mathbf{n}_{2n_1}(s)$$

eşitliğini elde ederiz. Buna göre

$$k_{1n_1}(s) \mathbf{n}_{1n_1}(s) + k_{2n_1}(s) \mathbf{n}_{2n_1}(s) = \mathbf{n}_1(s) + \tan x(s) \mathbf{n}_2(s) \quad (4.111)$$

olacaktır. (4.111) eşitliğin her iki tarafını, sırayla, $\mathbf{n}_{\{1n_1\}}(s)$ ve $\mathbf{n}_{\{2n_1\}}(s)$ iç

çarpımını alırsak,

$$k_{1\mathbf{n}_1}(s) = \cos \alpha(s) \quad (4.112)$$

ve

$$k_{2\mathbf{n}_1}(s) = \tan x(s) \cos \alpha(s) \quad (4.113)$$

olacaktır. Diğer taraftan (4.109) da $\mathbf{n}_{\{1\mathbf{n}_1\}}(s)$ in her iki tarafının $s_{\{1\mathbf{n}_1\}}$ ye göre türevini alırsak

$$\cos \alpha = 1, \sin \alpha = 0 \quad (4.114)$$

elde edilir. (4.114) değerlerini (4.109), (4.112) ve (4.113) da kullanırsak ispat biter.

4.2.22. Sonuç

π eğrisinin Bishop eğriliklerin oranları ile $\pi_{\{1\mathbf{n}_1\}}(s)=\mathbf{n}_1(s)$ ikinci Bishop vektör küresel gösterge eğrisinin Bishop eğrilikleri oranları eşittir yani

$$\frac{k_2(s)}{k_1(s)} = \frac{k_{2\mathbf{n}_1}(s)}{k_{1\mathbf{n}_1}(s)} = \tan x(s). \quad (4.115)$$

Teorem (4.2.8) den dolayı $\pi_{\{1\mathbf{n}_1\}}(s)=\mathbf{n}_1(s)$ ikinci Bishop vektör küresel eğrisi için ispatını yapmadan verebiliriz.

4.2.23. Teorem

$\pi_{\{n_1\}}(s)=n_1(s)$ ikinci Bishop vektör küresel gösterge eğrisi için

$$\frac{k'_{2n_1}(s) k_{1n_1}(s) - k_{2n_1}(s) k'_{1n_1}(s)}{(k_{1n_1}^2(s) + k_{2n_1}^2(s))^{\frac{3}{2}}} - \left[\frac{\left(\sqrt{k_{1n_1}^2(s) + k_{2n_1}^2(s)} \right)'}{k'_{2n_1}(s) k_{1n_1}(s) - k_{2n_1}(s) k'_{1n_1}(s)} \right]' = 0 \quad (4.116)$$

eşitliği vardır.

4.2.24. İspat

(4.105) denklemlerinin her iki tarafını s (veya $s_{\{n_1\}}$) türevlerini alırsak

$$k'_{2t}(s) k_{1t}(s) - k_{2t}(s) k'_{1t}(s) = x'(s) \frac{1}{\cos^2 x(s)} \quad (4.117)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$k_{1t}^2(s) + k_{2t}^2(s) = \frac{1}{\cos^2 x(s)} \quad (4.118)$$

ve

$$\left(\sqrt{k_{1t}^2(s) + k_{2t}^2(s)} \right)' = x'(s) \frac{\sin x(s)}{\cos^2 x(s)}. \quad (4.119)$$

(4.117), (4.118) ve (4.119) eşitliklerini (4.77) denkleminde kullanırsak ispat sonucunu görürüz.

4.2.25. Teorem

$\pi_{\{n_1\}}(s)=n_1(s)$ ikinci Bishop vektör küresel gösterge eğrisi bir çemberdir gerek ve yeter şart

$$\frac{k_{2n_1}(s)}{k_{1n_1}(s)} = \tan x(s) = \text{sabit.} \quad (4.120)$$

4.2.26. İspat

(4.74) göz önünde bulundurursak ispat aşıkâr olur.

4.2.27. Teorem

$\pi_{\{n_1\}}(s)=n_1(s)$ ikinci Bishop vektör küresel gösterge eğrisi bir küresel helistir gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} (\sin x(s))' &= c = \text{sabittir} \\ \text{veya} \quad x(s) &= \arcsin(cs + d). \end{aligned} \quad (4.121)$$

Burada $c, d \in \mathbb{R}$ ve $(-1 \leq cs + d \leq 1)$.

4.2.28. İspat

$k_{\{1n_1\}}(s)=1$ ve $k_{\{2n_1\}}(s)=\tan x(s)$ fonksiyonlarını (4.75) denkleminde kullanırsak ispat biter.

4.2.29. Teorem

$\pi_{\{n_1\}}(s)=n_1(s)$ ikinci Bishop vektör küresel gösterge eğrisi bir slant eğridir gerek ve yeter şart

$$\frac{\cos x(s) \sin'' x(s)}{[1 + (\sin' x(s))^2]^{\frac{3}{2}}} = \text{sabittir.} \quad (4.122)$$

4.2.30. İspat

(4.117), (4.118) ve (4.119) eşitliklerini (4.76) denkleminde kullanırsak ispat biter.

Benzer şekilde aşağıdaki Teoremi verebiliriz.

4.2.31. Teorem

Birim hızlı bir $\pi: J \rightarrow E^3$ e ğrisinin Bishop elemanları $(t(s), n_1(s), n_2(s), k_1(s), k_2(s))$ ve $\pi_{\{n_2\}}(s)=n_2(s)$ üçüncü Bishop vektör küresel gösterge eĝrisinin Bishop elemanları $(t_{\{n_2\}}(s), n_{\{1n_2\}}(s), n_{\{2n_2\}}(s), k_{\{1n_2\}}(s), k_{\{2n_2\}}(s))$ olsun. Aşağıdaki bağıntılar vardır.

$$\begin{aligned} t_{n_2}(s) &= t(s), \\ n_{1n_2}(s) &= n_1(s), \\ n_{2n_2}(s) &= n_2(s), \\ k_{1n_2}(s) &= 1, \\ k_{2n_2}(s) &= \tan x(s). \end{aligned} \tag{4.123}$$

4.2.32. İspat

$\pi_{\{n_2\}}(s)=n_2(s)$ eĝrisinin kendi yay parametresi $s_{\{n_2\}}$ ye göre türevini alırsak ve (4.118), (4.64) eşitliklerini kullanırsak,

$$t_{n_2}(s) = \frac{d\pi_{n_2}(s)}{ds_{n_2}} = \frac{dn_2(s)}{ds_{n_2}} = \frac{dn_2(s)}{ds} \frac{ds}{ds_{n_2}} = \frac{ds}{ds_{n_2}} (-k_2(s) t(s)) \tag{4.124}$$

olacağından

$$\frac{ds}{ds_{n_2}} = \frac{1}{k_2(s)} \tag{4.125}$$

ve

$$t_{n_2}(s) = t(s) \tag{4.126}$$

olacaktır. Buna göre, $\mathbf{n}_{1n_2}(s)$ ve $\mathbf{n}_{2n_2}(s)$ Bishop vektörleri, aşağıdaki gibi alabiliriz.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n}_{1n_2}(s) &= \mathbf{n}_1(s) \cos \beta(s) - \mathbf{n}_2(s) \sin \beta(s), \\ \mathbf{n}_{2n_2}(s) &= \mathbf{n}_1(s) \sin \beta(s) + \mathbf{n}_2(s) \cos \beta(s). \end{aligned} \right\} \quad (4.127)$$

(4.126) denkleminin her iki tarafını s_{n_2} ye göre türevini alırsak ve (4.67) denklemini kullanırsak, hem

$$\frac{d\mathbf{t}_{n_2}(s)}{ds_{n_2}} = \mathbf{n}_1(s) + \tan x(s) \mathbf{n}_2(s), \quad (4.128)$$

hem de

$$\frac{d\mathbf{t}_{n_1}(s)}{ds_{n_2}} = k_{1n_2}(s) \mathbf{n}_{1n_2}(s) + k_{2n_2}(s) \mathbf{n}_{2n_2}(s)$$

eşitliğini elde ederiz. Buna göre

$$k_{1n_2}(s) \mathbf{n}_{1n_2}(s) + k_{2n_2}(s) \mathbf{n}_{2n_2}(s) = \mathbf{n}_1(s) + \tan x(s) \mathbf{n}_2(s) \quad (4.129)$$

olacaktır. (4.129) eşitliğin her iki tarafını, sırayla, $\mathbf{n}_{1n_2}(s)$ ve $\mathbf{n}_{2n_2}(s)$ iç çarpımını alırsak,

$$k_{1n_2}(s) = \cos \beta(s) \quad (4.130)$$

ve

$$k_{2n_2}(s) = \tan x(s) \cos \beta(s) \quad (4.131)$$

olacaktır. Diğer taraftan (4.127) da $n_{\{1n_2\}}(s)$ in her iki tarafının $s_{\{n_2\}}$ ye göre türevini alırsak

$$\cos \beta = 1, \sin \beta = 0 \quad (4.132)$$

elde edilir. (4.132) değerlerini (4.127), (4.130) ve (4.131) da kullanırsak ispat biter.

$\pi_{\{n_1\}}(s)=n_1(s)$ ikinci Bishop vektör küresel gösterge eğrisinin işlemlerine benzer olduğundan dolayı ispatını yapmadan aşağıdaki Teoremleri vereceğiz.

4.2.33. Sonuç

π eğrisinin Bishop eğriliklerin oranları ile $\pi_{\{n_2\}}(s)=n_2(s)$ üçüncü Bishop vektör küresel gösterge eğrisinin Bishop eğrilikleri oranları eşittir yani

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = \frac{k_{1n_2}(s)}{k_{2n_2}(s)} = \tan x(s). \quad (4.133)$$

4.2.34. Teorem

$\pi_{\{n_2\}}(s)=n_2(s)$ ikinci Bishop vektör küresel gösterge eğrisi için

$$\frac{k'_{2n_2}(s) k_{1n_2}(s) - k_{2n_2}(s) k'_{1n_2}(s)}{(k_{1n_2}^2(s) + k_{2n_2}^2(s))^{\frac{3}{2}}} - \left[\frac{(\sqrt{k_{1n_2}^2(s) + k_{2n_2}^2(s)})'}{k'_{2n_2}(s) k_{1n_2}(s) - k_{2n_2}(s) k'_{1n_2}(s)} \right]' = 0 \quad (4.134)$$

eşitliği vardır.

4.2.35. Teorem

$\pi_{\{n_2\}}(s)=n_2(s)$ ikinci Bishop vektör küresel gösterge eğrisi bir çemberdir gerek ve yeter şart

$$\frac{k_{2n_2}(s)}{k_{1n_2}(s)} = \tan x(s) = \text{sabit.} \quad (4.135)$$

4.2.36. Teorem

$\pi_{\{n_2\}}(s)=n_2(s)$ ikinci Bishop vektör küresel gösterge eğrisi bir küresel helistir gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} (\sin x(s))' &= e = \text{sabittir} \\ \text{veya} \quad x(s) &= \arcsin(es + f). \end{aligned} \quad (4.136)$$

Burada $e, f \in \mathbb{R}$ ve $(-1 \leq es + f \leq 1)$.

4.2.37. Teorem

$\pi_{\{n_2\}}(s)=n_2(s)$ ikinci Bishop vektör küresel gösterge eğrisi bir slant eğridir gerek ve yeter şart

$$\frac{\cos x(s) \sin'' x(s)}{\left[1 + (\sin' x(s))^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \text{sabittir.} \quad (4.137)$$

4.2.38. Teorem

$\pi_{\{\omega\}}(s)=\omega(s)=((\omega(s))/(\|\omega(s)\|))=-\sin x(s)n_1(s)+\cos x(s)n_2(s)$ Bishop pol vektör küresel gösterge eğrisinin Bishop elemanları da $(t_{\{\omega\}}(s), n_{\{1\omega\}}(s), n_{\{2\omega\}}(s), k_{\{1\omega\}}(s), k_{\{2\omega\}}(s))$ olsun. Aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$\begin{aligned} t_{\omega} &= -n_1(s) \cos x(s) - n_2(s) \sin x(s), \\ n_{1\omega}(s) &= t(s) \cos \psi(s) - [n_1(s) \sin x(s) - n_2(s) \cos x(s)] \sin \psi(s), \\ n_{2\omega}(s) &= t(s) \sin \psi(s) + [n_1(s) \sin x(s) - n_2(s) \cos x(s)] \cos \psi(s), \\ k_{1\omega}(s) &= -\cos \psi(s) + \tan \phi(s) \sin \psi(s), \\ k_{2\omega}(s) &= -\sin \psi(s) - \tan \phi(s) \cos \psi(s), \end{aligned} \quad (4.138)$$

4.2.39. İspat

$\pi_{\{\varpi\}}(s)=\varpi(s)$ Bishop pol eğrisinin kendi yay parametresi $s_{\{\varpi\}}$ ye göre türevini alırsak ve (4.63), (4.64) eşitliklerini kullanırsak,

$$\mathbf{t}_{\varpi} = \frac{d\pi_{\varpi}(s)}{ds_{\varpi}} = \frac{d\varpi(s)}{ds} \frac{ds}{ds_{\varpi}} = -\mathbf{n}_1(s) \cos x(s) - \mathbf{n}_2(s) \sin x(s) \quad (4.139)$$

olacaktır. Burada

$$\frac{ds}{ds_{\varpi}} = \frac{1}{x'(s)}. \quad (4.140)$$

(4.139) denklemin her iki tarafını $s_{\{\varpi\}}$ ye göre türevini alırsak ve (4.66) denklemini kullanırsak

$$\frac{d\mathbf{t}_{\varpi}(s)}{ds_{\varpi}} = \cot \phi(s) \mathbf{t}(s) + \mathbf{n}_1(s) \sin x(s) - \mathbf{n}_2(s) \cos x(s) \quad (4.141)$$

eşitliğini elde ederiz. Öte yandan

$$\frac{d\mathbf{t}_{\varpi}(s)}{ds_{\varpi}} = k_{1\varpi}(s) \mathbf{n}_{1\varpi}(s) + k_{2\varpi}(s) \mathbf{n}_{2\varpi}(s) \quad (4.142)$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre,

$$k_{1\varpi}(s) \mathbf{n}_{1\varpi}(s) + k_{2\varpi}(s) \mathbf{n}_{2\varpi}(s) = \cot \phi(s) \mathbf{t}(s) + \mathbf{n}_1(s) \sin x(s) - \mathbf{n}_2(s) \cos x(s) \quad (4.143)$$

olur. $\pi_{\{\varpi\}}(s)=\varpi(s)$ vektörünün küresel gösterge eğrisinin $\mathbf{n}_{\{1\varpi\}}(s)$ Bishop

elemanı,

$$\mathbf{n}_{1\varpi}(s) = \lambda_{\varpi}(s) \mathbf{t}(s) + \mu_{\varpi}(s) \mathbf{n}_1(s) + \nu_{\varpi}(s) \mathbf{n}_2(s) \quad (4.144)$$

biçimindedir ve burada $\|\mathbf{n}_{1\varpi}(s)\|=1$, olduğunu biliyoruz, öyle ise

$$\lambda_{\varpi}^2(s) + \mu_{\varpi}^2(s) + \nu_{\varpi}^2(s) = 1 \quad (4.145)$$

olacaktır.

$$\langle \mathbf{t}_{\varpi}(s), \mathbf{n}_{1\varpi}(s) \rangle = 0 \quad (4.146)$$

ve

$$\mu_{\varpi} \cos x(s) + \nu_{\varpi}(s) \sin x(s) = 0 \quad (4.147)$$

olur. Burada

$$\mu(s) = \ell_{\varpi}(s) \sin x(s), \text{ ve } \nu(s) = -\ell_{\varpi}(s) \cos x(s) \quad (4.148)$$

olarak alabiliriz. Buna göre

$$\lambda_{\varpi}^2(s) + \ell_{\varpi}^2(s) = 1 \quad (4.149)$$

olur. Öyle ise

$$\lambda_{\varpi}(s) = \cos \varphi(s), \text{ ve } \ell_{\varpi}(s) = -\sin \varphi(s) \quad (4.150)$$

)

olarak alabiliriz. Eğer $\lambda_{\{\varpi\}}(s)$, $\mu_{\{\varpi\}}(s)$, $\nu_{\{\varpi\}}(s)$ (4.144) yerine yazarsak

$$\mathbf{n}_{1\varpi}(s) = \mathbf{t}(s) \cos \psi(s) - [\mathbf{n}_1(s) \sin x(s) - \mathbf{n}_2(s) \cos x(s)] \sin \psi(s), \quad (4.150)$$

)

buluruz. Benzer hesaplama yöntemiyle

$$\mathbf{n}_{2\varpi}(s) = \mathbf{t}(s) \sin \psi(s) + [\mathbf{n}_1(s) \sin x(s) - \mathbf{n}_2(s) \cos x(s)] \cos \psi(s), \quad (4.151)$$

)

buluruz. (4.143) eşitliğin her iki tarafını, sırayla, $\mathbf{n}_{1\varpi}(s)$ ve $\mathbf{n}_{2\varpi}(s)$ iç çarpımını alırsak,

$$\begin{aligned} k_{1\varpi}(s) &= -\cos \psi(s) + \tan \phi(s) \sin \psi(s), \\ \text{ve} \quad k_{2\varpi}(s) &= -\sin \psi(s) - \tan \phi(s) \cos \psi(s), \end{aligned} \quad (4.152)$$

)

olarak bulmuş oluruz. Şayet (4.150) eşitliğin her iki tarafını $s_{\{\varpi\}}$ parametresine göre türevini alırsak

$$\psi'(s) \sin \psi(s) = 0, \quad (4.153)$$

)

ve şayet (4.151) eşitliğin her iki tarafını $s_{\{\varpi\}}$ parametresine göre türevini alırsak

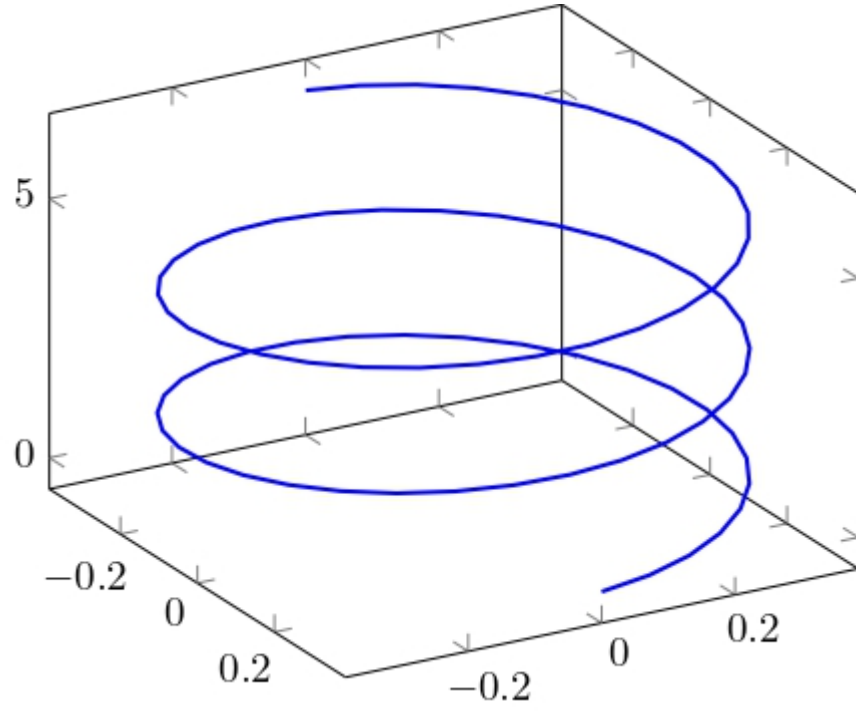
$$\psi'(s) \cos \psi(s) = 0, \quad (4.154)$$

)

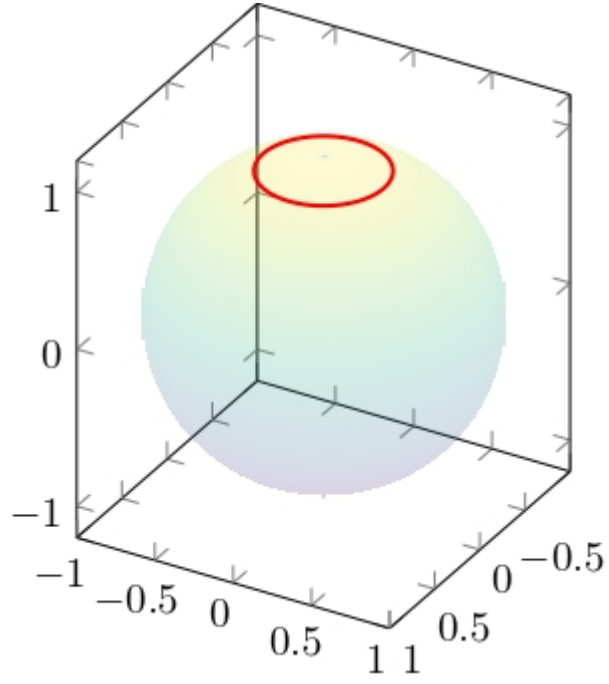
bulmuş oluruz. Öyle ise

$$\psi(s) = \text{sabittir.}$$

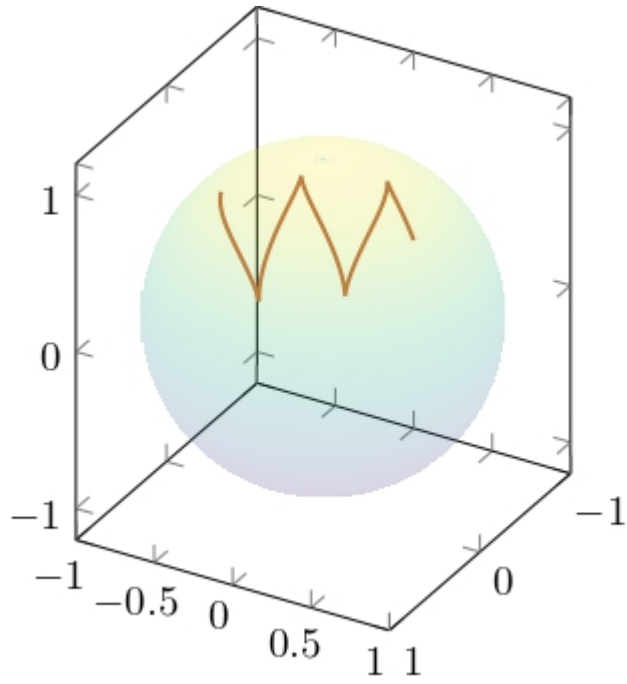
(4.155
)



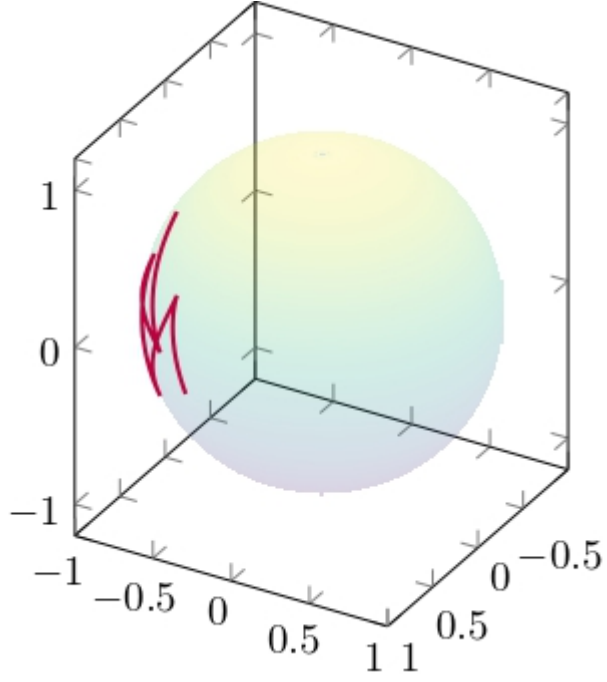
Şekil 4.3. beta eğrisi



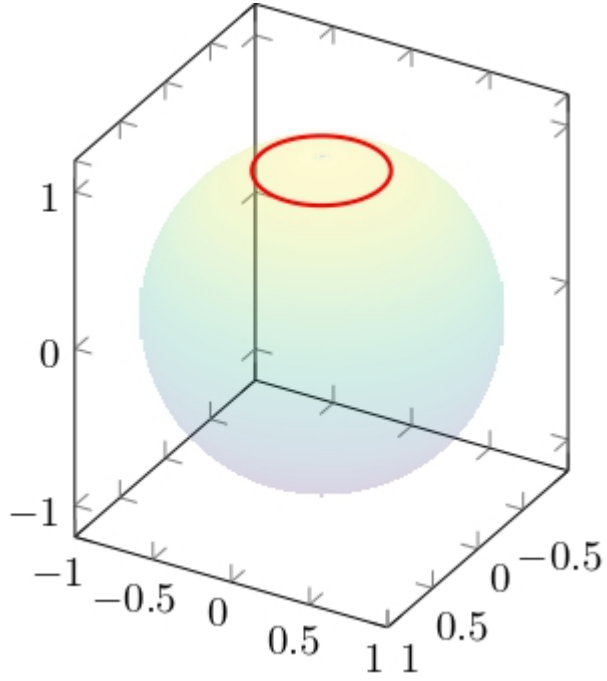
Şekil 4.4. $c=0$ için Bishop küresel göstergeler



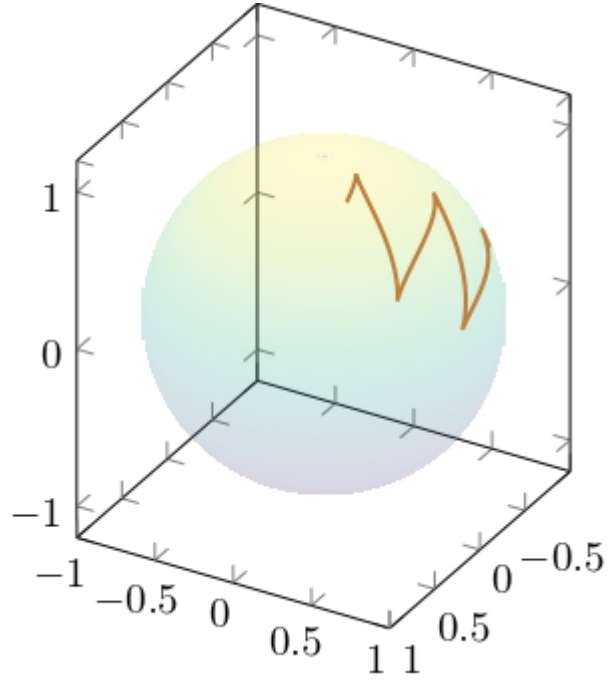
Şekil 4.5. $c=0$ için Bishop küresel göstergeler



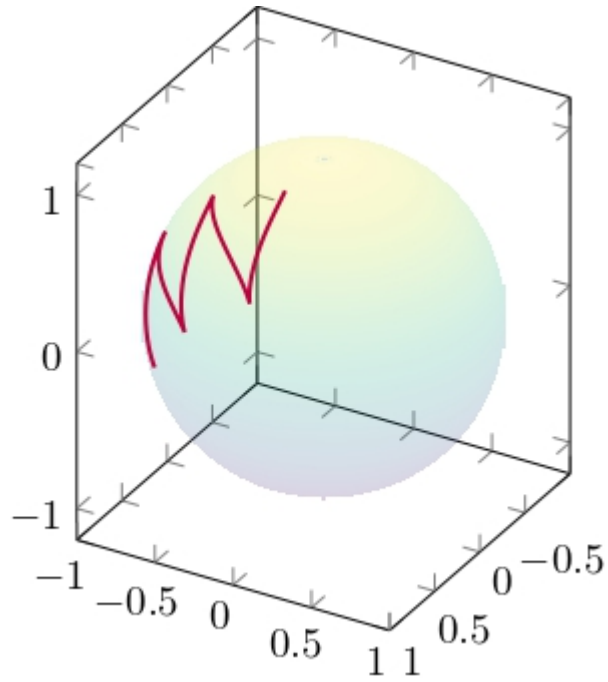
Şekil 4.6. $c=0$ için Bishop küresel göstergeler



Şekil 4.7. $c=\pi/4$ için Bishop küresel göstergeler



Şekil 4.8. $c=\pi/4$ için Bishop küresel göstergeler



Şekil 4.9. $c=\pi/4$ için Bishop küresel göstergeler

4.2.40. Örnek

$\beta(s)=((5/(13))\cos s,(5/(13))\sin s,((12)/(13))s)$ eğrisinin Bishop elemanları

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}(s) &= \left(-\frac{5}{13} \sin s, \frac{5}{13} \cos s, \frac{12}{13} \right), \\
\mathbf{n}_1(s) &= \left(\begin{array}{c} -\cos s \cos \left(\frac{12}{13}s + c \right) - \frac{12}{13} \sin s \sin \left(\frac{12}{13}s + c \right), \\ -\sin s \cos \left(\frac{12}{13}s + c \right) + \frac{12}{13} \cos s \sin \left(\frac{12}{13}s + c \right), \\ \frac{5}{13} \sin \left(\frac{12}{13}s + c \right) \end{array} \right), \\
\mathbf{n}_2(s) &= \left(\begin{array}{c} -\cos s \sin \left(\frac{12}{13}s + c \right) + \frac{12}{13} \sin s \cos \left(\frac{12}{13}s + c \right), \\ -\sin s \sin \left(\frac{12}{13}s + c \right) - \frac{12}{13} \cos s \cos \left(\frac{12}{13}s + c \right), \\ \frac{5}{13} \cos \left(\frac{12}{13}s + c \right) \end{array} \right), \\
k_1(s) &= \frac{5}{13} \cos \left(\frac{12}{13}s + c \right), \\
k_2(s) &= \frac{12}{13} \sin \left(\frac{12}{13}s + c \right).
\end{aligned} \tag{4.156}$$

Bakınız Şekil 4.3, Şekil 4.4, Şekil 4.5, Şekil 4.6, Şekil 4.7, Şekil 4.8, Şekil 4.9.

5. TARTIŞMA

Eğer $X=PQ$ alırsak, P noktası π eğrisi üzerinde akarken, Q noktasının birim küresinin çizdiği eğriye X birim vektör alanının küresel göstergesi denir.

π eğrisinin Frenet elamanları $\{t, n, b, \kappa, \tau\}$ olarak vermiştik. Şayet $X=PQ$ eşitliğinde $X=t$ ise oluşan küresel göstergeye π eğrisinin teğetler küresel göstergesi denir ve

$$\pi_{\{t\}}=t$$

ile gösterilir. Şayet $X=PQ$ eşitliğinde $X=n$ ise oluşan küresel göstergeye π eğrisinin asli mormaller küresel göstergesi denir ve

$$\pi_{\{n\}}=n$$

ile gösterilir. Şayet $X=PQ$ eşitliğinde $X=b$ ise oluşan küresel göstergeye π eğrisinin binormaller küresel göstergesi denir ve

$$\pi_{\{b\}}=b$$

ile gösterilir. Şayet $X=PQ$ eşitliğinde $X=c$ ise oluşan küresel göstergeye π eğrisinin pol vektör alanının küresel göstergesi veya sabit pol eğrisi denir ve

$$\pi_{\{c\}}=c$$

ile gösterilir.

Şimdiye kadar yapılan çalışmalarda bir regüler π eğrisinin, teğetler küresel gösterge eğrisinin Frenet elemanları

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_t &= \mathbf{n}, \\ \mathbf{n}_t &= \frac{\kappa \mathbf{t} - \tau \mathbf{b}}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}, \\ \mathbf{b}_t &= \frac{\kappa \mathbf{b} - \tau \mathbf{t}}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}, \\ \kappa_t &= \sqrt{1 + \frac{\tau^2}{\kappa^2}}, \\ \tau_t &= \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)'. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Asli normaller küresel gösterge eğrisinin Frenet elemanları <cite>3</cite>

$$\delta = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' \quad (5.18)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_n &= \frac{-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}, \\ \mathbf{n}_n &= \frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}} \mathbf{n}, \\ \mathbf{b}_n &= \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} + \frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \mathbf{n}, \\ \kappa_n &= \sqrt{1 + \delta^2}, \\ \tau_n &= \frac{\delta'}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2} (1 + \delta^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Binormaller küresel gösterge eğrisinin Frenet elemanları <cite>4</cite>, <cite>5</cite>

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_b &= -\mathbf{n}, \\ \mathbf{n}_b &= \frac{\kappa}{\tau} \mathbf{t} - \mathbf{b}, \\ \mathbf{b}_b &= \mathbf{t} + \frac{\kappa}{\tau} \mathbf{b}, \\ \kappa_b &= \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\tau^2}}, \\ \tau_b &= \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)'. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Sabit pol eğrisinin Frenet elemanları da basit bir hesaplamayla aşağıdaki şekilde verebiliriz;

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_c &= \frac{\kappa \mathbf{t} - \tau \mathbf{b}}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}, \\
\mathbf{n}_c &= -\frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}} \mathbf{n}, \\
\mathbf{b}_c &= \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} + \frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \mathbf{n}, \\
\kappa_c &= \sqrt{1 + \frac{1}{\delta^2}}, \\
\tau_c &= \frac{\kappa}{\delta (\kappa^2 + \tau^2)} \left(\frac{\kappa}{\tau} \right)'.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Biz ise bu çalışmada bir birim hızlı aşağıdakileri elde ettik.

$$\begin{aligned}
\pi : J &\longmapsto \mathbb{E}^3 \\
s &\longmapsto \pi(s)
\end{aligned} \tag{5.22}$$

eğrisinin Frenet elemanları $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}, \kappa \neq 0, \tau \neq 0\}$ olsun. Bu eğrinin Darboux vektörü ve pol vektörü, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= \tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}, \\
\mathbf{c} &= \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \mathbf{w} = \mathbf{t} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Burada

$$\begin{aligned}
\cos \phi &= \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}, \\
\sin \phi &= \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

ve ϕ açısı, $\mathbf{c}$ pol vektörü ile $\mathbf{b}$ binormal vektörü arasındaki açıdır. Burada $\kappa \neq 0, \tau \neq 0$ dır. Buna göre;

$\pi_{\{t\}} = t$ teğetler küresel gösterge eğrisinin Frenet elemanları

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_t &= \mathbf{n}, \\
\mathbf{n}_t &= -\mathbf{t} \cos \phi + \mathbf{b} \sin \phi, \\
\mathbf{b}_t &= \mathbf{t} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi, \\
\kappa_t &= \sec \phi, \\
\tau_t &= \frac{\phi'}{\kappa}.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Burada $\phi'=((d\phi)/(ds))$.

$\pi_{\{n\}}=n$ aslinormaller küresel gösterge eğrisinin Frenet elemanları

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_n &= \mathbf{n}_t, \\
\mathbf{n}_n &= \mathbf{b}_t \cos \omega - \mathbf{t}_t \sin \omega, \\
\mathbf{b}_n &= \mathbf{b}_t \sin \omega + \mathbf{t}_t \cos \omega, \\
\kappa_n &= \sqrt{1 + \left(\frac{\phi'}{\|\mathbf{w}\|} \right)^2}, \\
\tau_n &= -\frac{\omega'}{\|\mathbf{w}\|}.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Burada $\cos\omega=((\sqrt{(\kappa_{\{n\}}^2-1))}/(\kappa_{\{n\}}))$, $\sin\omega=(1/(\kappa_{\{n\}}))$ ve ω açısı, $\mathbf{b}_{\{t\}}$ ile $\mathbf{n}_{\{n\}}$ vektörleri arasındaki açıdır.

$\pi_{\{b\}}=b$ binormaller küresel gösterge eğrisinin Frenet elemanları

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_b &= -\mathbf{n}, \\
\mathbf{n}_b &= \mathbf{t} \cos \phi - \mathbf{b} \sin \phi, \\
\mathbf{b}_b &= \mathbf{t} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi, \\
\kappa_b &= \csc \phi, \\
\tau_b &= -\frac{\phi'}{\tau}.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Burada ϕ açısı, t ile $\mathbf{n}_{\{b\}}$ vektörleri arasındaki açıdır.

$\pi_{\{c\}}=c$ binormaller küresel gösterge eğrisinin Frenet elemanları

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_c &= \mathbf{t} \cos \phi - \mathbf{b} \sin \phi, \\
\mathbf{n}_c &= \mathbf{n} \cos \theta - [\mathbf{t} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi] \sin \theta, \\
\mathbf{b}_c &= \mathbf{n} \sin \theta + [\mathbf{t} \sin \phi + \mathbf{b} \cos \phi] \cos \theta, \\
\kappa_c &= \sqrt{1 + \left(\frac{\|\mathbf{w}\|}{\phi'} \right)^2}, \\
\tau_c &= -\frac{\theta'}{\phi'}, \phi \neq 0.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Burada θ açısı, $\mathbf{n}$ ile $\mathbf{n}_c$ vektörleri arasındaki açıdır ve

$$\cos \theta = \frac{\|w\|}{\sqrt{(\phi')^2 + \|\mathbf{w}\|^2}} \tag{5.29}$$

$\pi_x = x$ küresel gösterge eğrisinin Bishop elemanları

$$(\mathbf{t}_x(s), \mathbf{n}_{1x}(s), \mathbf{n}_{2x}(s), k_{1x}(s), k_{2x}(s)) \tag{5.30}$$

olsun. Bu kabullerle aşağıdakileri elde ettik.

$\pi_t = t$ küresel gösterge eğrisinin Bishop elemanları

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_t(s) &= \mathbf{n}_1(s) \cos x(s) + \mathbf{n}_2(s) \sin x(s), \\
\mathbf{n}_{1t}(s) &= \mathbf{t}(s) \cos \varphi(s) + [\mathbf{n}_1(s) \sin x(s) - \mathbf{n}_2(s) \cos x(s)] \sin \varphi(s), \\
\mathbf{n}_{2t}(s) &= \mathbf{t}(s) \sin \varphi(s) + [\mathbf{n}_1(s) \sin x(s) - \mathbf{n}_2(s) \cos x(s)] \cos \varphi(s), \\
k_{1t}(s) &= -\cos \varphi(s) + \sin \varphi(s) \tan \phi(s), \\
k_{2t}(s) &= -\sin \varphi(s) - \cos \varphi(s) \tan \phi(s).
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Burada $\phi(s)$ sabittir.

$\pi_{n_1} = n_1$ küresel gösterge eğrisinin Bishop elemanları

$$\tag{5.32}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_{\mathbf{n}_1}(s) &= \mathbf{t}(s), \\
\mathbf{n}_{1\mathbf{n}_1}(s) &= \mathbf{n}_1(s), \\
\mathbf{n}_{2\mathbf{n}_1}(s) &= \mathbf{n}_2(s), \\
k_{1\mathbf{n}_1}(s) &= 1, \\
k_{2\mathbf{n}_1}(s) &= \tan x(s).
\end{aligned}$$

$\pi_{\{n_2\}=n_2}$ küresel gösterge eğrisinin Bishop elemanları

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_{\mathbf{n}_2}(s) &= \mathbf{t}(s), \\
\mathbf{n}_{1\mathbf{n}_2}(s) &= \mathbf{n}_1(s), \\
\mathbf{n}_{2\mathbf{n}_2}(s) &= \mathbf{n}_2(s), \\
k_{1\mathbf{n}_2}(s) &= 1, \\
k_{2\mathbf{n}_2}(s) &= \tan x(s),
\end{aligned} \tag{5.33}$$

olarak elde ettik. Daha sonra bunlara bağlı teoremler ve ispatları verdik.

6. SONUÇLAR

Eğriler, fen, mühendislik bilgisayar tasarımlarında, astronomi çalışmalarında, coğrafya gibi bir çok alanlarda başvuru bir konudur. Eğrileri incelemek demek eğrilerin değişimini incelemek demektir. Bu değişimlere eğrilerin diferansiyel geometrisi denir. Eğrilerin diferansiyeli ile eğrilerin karakterizasyonu incelenabilmektedir. Şimdiye kadar bu konuda epey çalışmalar yapılmıştır. Bunlarla ilgili kaynakları daha önceki bölümlerde vermiştik.

Bazen eğri hakkında fikir vermek küresel göstergeler yardımıyla daha kolay olmaktadır. Bu vesileyle eğrilerin küresel göstergeleri de önem arz etmektedir. Şimdiye kadar ki çalışmalarda, küresel göstergeler eğrilerinin eğrilikleri yardımıyla incelenmiştir. Bu çalışmamızda biz bir eğrinin tanjant vektör alanı ile Darboux vektör alanları arasındaki açığa bağlı olarak küresel göstergeleri inceledik. Şunu gördük ki bu teknik ile işlemler, hesaplamalar daha basit hale gelmektedir.

Ayrıca bu çalışmamızda bir regüler eğrinin Frenet çatısına göre küresel göstergelerin (tanjant küresel göstergeler, asli normaller küresel göstergeler, binormaller küresel göstergeler) birer Bishop çatısına karşılık geldiğini gösterdik. Diğer taraftan bu çalışmamızda Bishop çatısına göre küresel gösterge eğrilerinin eğrilikleri yardımıyla göstergelerin çember, helis veya slant helis olmaları için gerekli şartları verdik.

7. ÖNERİLER

Bu çalışmamızla zaman yetersizliği sebebiyle hedeflerimize tam ulaşamadık. Bir regüler eğrinin Darboux çatısına, Sabban çatışana göre göstergeleri inceleyemedik. Daha sonra başka çalışmalarda bunlara el atılacaktır.

Biz bu çalışmayı Öklid uzayında iki çatıya göre yaptık. Öklid uzayında, diğer çatılara göre bu çalışmalar genişletilebilir. Bu çalışmalar Öklid dışı uzaylarda yapılmamış olup yeni bir çalışmaya yeni bir kapı açmış olduk.

KAYNAKLAR

- Ateş, F. ve Kocakuşaklı, E. ve Gök İ. ve Yaylı, Y., 2018. A Study of The Tubular Surfaces Constructed by Thespherical Indicatrices in Euclidean 3– space. Turkish Journal of Mathematics, 42(4): 1711-1725.
- Bilici, M., 1999. The Curvatures and The Natural lifts of The Spherical Indicator Curves of The Involute-evolute Curve. Master Thesis, Ondokuz Mayıs University, The Institute of Science, Samsun.
- Bishop, L. R., 1975. There is More Than One Way to Frame a Curve. Amer. Math.Monthly, 82(3): 246-251.
- Çapın, R., 2016. Spherical Indicator Curves In Minkowski Space. Master Thesis, Gaziantep University, The Institute of Science, Gaziantep.
- Do Carmo, M.P., 1976. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Doğan, F., 2012. Genelleştirilmiş Kanal Yüzeyler. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara, 71s.
- Frenet, J. F., 1847. Sur les fonctions qui servent à déterminer l’attraction des sphéroïdes quelconques. Doctoral dissertation, A. Chauvin.
- Hacısalıhoğlu, H. H., 2000. Diferensiyel Geometri, Ertem Matbaası, Ankara.
- Izumiya, S. ve Takeucht, N., 2004. New Special Curves and Developable Surfaces. Turkish J. Math. 28 (2): 531–537.
- Keskin, O., 2020 Eğriler Üzerindeki Çatı Hareketlerinin Geometrik Uygulamaları. Ankara Üniversitesi , Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara, 174s.
- Keskin O. ve Yaylı, Y., 2017. An Application of N-Bishop Frame to Spherical Images for Direction Curves. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 14(11): 1750162.
- Korpinar, T., Turhan, E. ve Asil V., 2011. Tangent Bishop Spherical Images of a Biharmonic B-slant helix in the Heisenberg group Heis-3. Iranian Journal of Science, 35(4): 265-271.
- Kula, L. ve Yaylı, Y., 2005. On Slant Hhelix and its Spherical Indicatrix. Applied Mathematics and Computation, 169(1): 600-607.
- Kula,L. ve Emekçi,N. ve Yaylı, Y. ve İlarslan, K., 2010. CharecteritatonofSlantHelices an Euclidean 3-Space. Turksh Journal Of Mathematies 34(2): 261-274.
- Oprea, J., 1997. Differantial Geometry and its Applications Prentice–Hall, Inc. , New Jersey.
- Özdemir, M., 2020. , Diferensiyel Geometri , Birleşik Matbaası , İzmir.
- Şahin, B., 2021. Diferansiyel Geometri, Palme Yayınevi, Ankara.
- Şahiner, B. 2018. Direction Curves of Principal Normal Indicatrix of a Curve. Journal of Technical Sciences, 2(8), 46-54.

- Şenyurt, S. ve Çalışkan, Ö. F., 2013. The Natural Lift Curves and Geodesic Curvatures of The Spherical Indicatrices of the timelike Bertrand curve couple. *International Electronic Journal of Geometry*, 6(2): 88-99.
- Şenyurt, S. ve Demet, S., 2015. Timelike-spacelike Mannheim Pair Curves Spherical Indicators Geodesic Curvatures and Natural lifts. *International Journal of Mathematical Combinatorics*, 2: 32-54. 46
- Tulum, E., 2022. Bazı Özel Kuaterniyonik Eğrilerin Karakterizasyonları. , Süleyman Demirel Üniversitesi , Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Isparta, 29s.
- Yıldırım, A. ve Toktimur, A., 2024. According to The Frenet Frame Spherical Indicators and Results on E3. In the referees.
- Yılmaz, S., 2015. A New Version of Bishop Frame & Application to Spherical Images of Spacelike Curve in E3. *Prespacetime Journal*, 6(12).
- Yılmaz, S., Özyılmaz E. ve Turgut, M., 2010. New Spherical Indicatrices and Their Characterizations. *An. S. t. Univ. Ovidius Constanta*, 18(2): 337-354.
- Yılmaz, S. ve Turgut, M., 2010. A new version of Bishop Frame and an Application to Spherical Images. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 371(2): 764-776.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

İsim Soyisim : ALİ TOKTİMUR
Doğum Tarihi : 1988-10-12
Doğum Yeri : AKÇAKALE
Telefon : 05455650907
E-Posta : alitoktimur@gmail.com

EĞİTİM BİLGİLERİ

Okul	Bölüm	Baş. Yılı	Bit. Yılı
Süleyman Şah İlköğretim Okulu	ilkokul	1994	2002
Akçakale Lisesi	Fen bilimleri	2002	2005
Yüzüncü Yıl Üniversitesi	Matematik Öğretmenliği	2006	2011

EKLER

EK 1

`\begin{appendix}%{EKLER}`
`{\large\bf{\hspace{-10mm}EK 1:}} \large` Varsa ekler buraya, örneğin bilgisayar programı kodu ...

```
\begin{framed}
\singlespacing
\small{
\begin{verbatim}
\vspace{1cm}
\begin{figure}
\centering
\captionsetup{justification=centering}
\includegraphics[height=8cm]{b21.pdf}
\caption{$c=\pi/4$ için $\pi_{\mathbf{t}}=\mathbf{t}$ eğrisi}
\end{figure}
```

```
\vspace{1cm}
\begin{figure}
\centering
\captionsetup{justification=centering}
\includegraphics[height=8cm]{b22.pdf}
\caption{$c=\pi/4$ için $\pi_{\mathbf{n}_1}=\mathbf{n}_1$ eğrisi}
\end{figure}
```

```
\vspace{1cm}
\begin{figure}
\centering
\captionsetup{justification=centering}
\includegraphics[height=8cm]{b23.pdf}
\caption{$c=\pi/4$ için $\pi_{\mathbf{n}_2}=\mathbf{n}_2$ eğrisi}
\end{figure}
```

```
\begin{figure}[h]
\centering
\begin{tikzpicture}
\begin{axis}
[
view={60}{30},
]
\addplot3[
domain=0:5*pi,
samples = 120,
```

```

samples y=0,
draw = blue, line width = 1pt
]
({(5/13)*cos(deg(x))},
{(5/13)*sin(deg(x))},
{5*x/13});
\end{axis}
\end{tikzpicture}
\caption{The Curve  $\pi$ }
\end{figure}

\begin{figure}[tbp]
\centering
\begin{subfigure}[b]{0.3\textwidth}
\centering
\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[view={120}{30},colormap/viridis,axis equal image,
width=11cm]
\addplot3 [
surf, opacity=0.2, shader=interp,z buffer=sort,
samples=50, domain=-(1/2)*pi:(1/2)*pi, y domain=0:2*pi,
] (
{cos(deg(x)) * cos(deg(y))},
{cos(deg(x)) * sin(deg(y))},
{sin(deg(x))}
);
% \addlegendentry{Birim Küre}
% Draw equator to show missing occlusion

\addplot3[
domain=0:2*pi,
samples = 120,
samples y=0,
draw = red, line width = 1pt
]
(
{-(5/13)*sin(deg(x))},
{(5/13)*cos(deg(x))},
12/13);

\end{axis}
\end{tikzpicture}
\caption{The curve  $\pi_{\mathbf{t}}$  left( sright)

```

```

=\mathbf{t}\left( s\right) $ }
\label{fig:y equals x}
\end{subfigure}
\hfill
\begin{subfigure}[b]{0.3\textwidth}
\centering
\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[view={120}{30},colormap/viridis,axis equal image,
width=11cm]
\addplot3 [
surf, opacity=0.2, shader=interp,z buffer=sort,
samples=50, domain=-(1/2)*pi:(1/2)*pi, y domain=0:2*pi,
] (
{cos(deg(x)) * cos(deg(y))},
{cos(deg(x)) * sin(deg(y))},
{sin(deg(x))}
);
% \addlegendentry{Birim Küre}
% Draw equator to show missing occlusion

\addplot3[
domain=0:5*pi,
samples = 120,
samples y=0,
draw = brown, line width = 1pt
]
(
{-cos(deg(x))*cos(deg(12*x/13))
-(12/13)*sin(deg(x))*sin(deg(12*x/13))},
{-sin(deg(x))*cos(deg(12*x/13))
+(12/13)*cos(deg(x))*sin(deg(12*x/13))},
{(5/13)*sin(deg(12*x/13))});

\end{axis}
\end{tikzpicture}
\caption{The curve $\pi_{\mathbf{n}_1}\left( s\right) $
=\mathbf{n}_1\left( s\right) $ }
\label{fig:three sin x}
\end{subfigure}
\hfill
\begin{subfigure}[b]{0.3\textwidth}
\centering

```

```

\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[view={120}{30},colormap/viridis,axis equal image,
width=11cm]
\addplot3 [
surf, opacity=0.2, shader=interp,z buffer=sort,
samples=50, domain=-(1/2)*pi:(1/2)*pi, y domain=0:2*pi,
] (
{cos(deg(x)) * cos(deg(y))},
{cos(deg(x)) * sin(deg(y))},
{sin(deg(x))}
);
% \addlegendentry{Birim Küre}
% Draw equator to show missing occlusion

\addplot3[
domain=0:5*pi,
samples = 120,
samples y=0,
draw = purple, line width = 1pt
]
(
{-cos(deg(x))*sin(deg(12*x/13))
+(12/13)*sin(deg(x))*cos(deg(12*x/13))},
{-sin(deg(x))*sin(deg(12*x/13))
-(12/13)*cos(deg(x))*cos(deg(12*x/13))},
{(5/13)*cos(deg(12*x/13))});

\end{axis}
\end{tikzpicture}
\caption{The curve  $\pi_{\mathbf{n}_2}(\mathbf{s})$ 
 $=\mathbf{n}_2(\mathbf{s})$ }
\label{fig:five over x}
\end{subfigure}
\caption{$c=0$ in Bishop kernel resampling}
\label{fig:three graphs}
\end{figure}

\begin{figure}[tbp]
\centering
\begin{subfigure}[b]{0.3\textwidth}
\centering
\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[view={120}{30},colormap/viridis,axis equal image,

```

```

width=11cm ]
\addplot3 [
surf,    opacity=0.2, shader=interp,z buffer=sort,
samples=50, domain=-(1/2)*pi:(1/2)*pi, y domain=0:2*pi,
] (
{cos(deg(x)) * cos(deg(y))},
{cos(deg(x)) * sin(deg(y))},
{sin(deg(x))}
);
%          \addlegendentry {Birim Küre}
%          Draw equator to show missing occlusion

\addplot3[
domain=0:2*pi,
samples = 120,
samples y=0,
draw = red, line width = 1pt
]
(
{-(5/13)*sin(deg(x))},
{(5/13)*cos(deg(x))},
12/13);

\end{axis}
\end{tikzpicture}
\caption{The curve  $\pi_{\mathbf{t}}$  left( s\right)
= $\mathbf{t}$  left( s\right) $ }
\label{fig:y equals x}
\end{subfigure}
\hfill
\begin{subfigure}[b]{0.3\textwidth}
\centering
\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[view={120}{30},colormap/viridis, axis equal image,

width=11cm]
\addplot3 [
surf,    opacity=0.2, shader=interp,z buffer=sort,
samples=50, domain=-(1/2)*pi:(1/2)*pi, y domain=0:2*pi,
] (
{cos(deg(x)) * cos(deg(y))},
{cos(deg(x)) * sin(deg(y))},
{sin(deg(x))}

```

```

);
%          \addlegendentry{Birim Küre}
%          Draw equator to show missing occlusion

\addplot3[
domain=0:5*pi,
samples = 120,
samples y=0,
draw = brown, line width = 1pt
]
(
{-cos(deg(x))*cos(deg(12*x/13+pi/4))
-(12/13)*sin(deg(x))*sin(deg(12*x/13+pi/4
))},
{-sin(deg(x))*cos(deg(12*x/13+pi/4))
+(12/13)*cos(deg(x))*sin(deg(12*x/13+pi/4
))},
{(5/13)*sin(deg(12*x/13+pi/4))});

\end{axis}
\end{tikzpicture}
\caption{The curve  $\pi_{\mathbf{n}_1}$  left( s\right)
= $\mathbf{n}_1$  left( s\right) $
}
\label{fig:three sin x}
\end{subfigure}
\hfill
\begin{subfigure}[b]{0.3\textwidth}
\centering
\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[view={120}{30},colormap/viridis,axis equal image,

width=11cm]
\addplot3 [
surf,    opacity=0.2, shader=interp,z buffer=sort,
samples=50, domain=-(1/2)*pi:(1/2)*pi, y domain=0:2*pi,
] (
{cos(deg(x)) * cos(deg(y))},
{cos(deg(x)) * sin(deg(y))},
{sin(deg(x))}
);
%          \addlegendentry{Birim Küre}
%          Draw equator to show missing occlusion

```

```

\addplot3[
domain=0:5*pi,
samples = 120,
samples y=0,
draw = purple, line width = 1pt
]
(
{-cos(deg(x))*sin(deg(12*x/13+pi/4))
+(12/13)*sin(deg(x))*cos(deg(12*x/13+pi/4
))},
{-sin(deg(x))*sin(deg(12*x/13+pi/4))
-(12/13)*cos(deg(x))*cos(deg(12*x/13+pi/4
))},
{(5/13)*cos(deg(12*x/13+pi/4))});

\end{axis}
\end{tikzpicture}
\caption{The curve  $\pi_{\mathbf{n}_2}$  \left( s\right)
=\mathbf{n}_2 \left( s\right) }
\label{fig:five over x}
\end{subfigure}
\caption{$=\protect\pi /4$ i\c{c}in Bishop k\{o}resel g\{o}stergeler}
\label{fig:three graphs}
\end{figure}
\end{verbatim}
}
\end{framed}

```

```

\end{appendix}

```

```

%\subsection{SUBSECTION HEADING}

```

```

%\subsubsection{SUBSUBSECTION HEADING}

```

```

%\paragraph{PARAGRAPH HEADING}

```

Örneğin bilgisayar programı kodu