



**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sıra Koruyan ve A-Azalan Kısmi Dönüşümler Yarıgrubu

MAHER ALDUGEYİM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**Şanlıurfa
2025**



**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sıra Koruyan ve A-Azalan Kısmi Dönüşümler Yarıgrubu

MAHER ALDUGEYİM

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Kemal TOKER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**Şanlıurfa
2025**

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımız boyunca desteklerini esirgemeyen,engin bilgileriyle beni bilgilendiren çok kıymetli ve saygıdeğer sayın danışman hocam, Doç. Dr. Kemal TOKER'e teşekkür ederim. Ayrıca, tez jürisinde bulunan ve tezin son halini almasında önemli katkıları bulunan sayın Doç. Dr. Gülay OĞUZ ve sayın Dr. Öğr. Üyesi Hasan GÖKBAŞ hocalarıma da teşekkürü borç bilirim. Lisans öğrenimim süresince bana rehberlik eden ve bugünlere gelmemde emeği geçen Harran Üniversitesi Matematik Bölümü'nün tüm değerli hocalarıma da şükranlarımı sunarım. Son olarak bu yolculukta bana sabır ve sevgiyle eşlik eden canım eşim Nadya'ya, hayatıma neşe ve umut katan kıymetli çocuklarım Muhammed ve Zahir'e, dualarıyla gücümü artıran sevgili babama, destekleriyle yanımda olan kıymetli amcam Mahir'e ve artık aramızda olmasa da sevgisiyle kalbimde yaşayan rahmetli anneme derin bir minnetle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
SİMGELER DİZİNİ	iv
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	3
2.1. Yarıgruplarda Bazı Tanımlar	3
2.2. Green Denklik Bağlıntıları	10
2.3. *-Green Bağlıntıları	13
2.4. Sıra Koruyan Dönüşümler Yarıgrubu	14
2.5. Sıra Koruyan ve A-Azalan Dönüşümler Yarıgrubu	18
2.6. Sıra Koruyan Kısmi Dönüşümler Yarıgrubu	25
2.7. Bir Yarı grubun Sıfır Bölenleri	31
3. GEREÇ VE YÖNTEM	32
4. BULGULAR	33
4.1. Sıra Koruyan ve A-azalan Kısmi Dönüşümler Yarıgrubu	33
4.2. $\mathcal{PO}_n^+(A)$ Yarı grubunun İdempotent Elemanları	36
4.3. $\mathcal{PO}_n^+(A)$ 'nın Sol ve Sağ Sıfır Bölenleri	37
4.4. $\mathcal{PO}_n^+(A)$ Yarı grubunun Nilpotent Elemanları	39
5. TARTIŞMA	40
6. SONUÇLAR	41
7. ÖNERİLER	42
KAYNAKLAR	43

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sıra Koruyan ve A-Azaltan Kısmi Dönüşümler Yarıgrubu

MAHER ALDUGEYİM

HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Doç. Dr. Kemal TOKER

Yıl: 2025, sayfa: 43

$X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ve $\emptyset \neq A \subseteq X_n$ olmak üzere, $\mathcal{PO}_n^+(A) = \{\alpha \in \mathcal{PO}_n^+ : \forall x \in A, \forall y \in \text{dom}(\alpha), y \leq x \Rightarrow y\alpha \leq x\}$ şeklinde tanımlanan $\mathcal{PO}_n^+(A)$ kümesi, X_n üzerinde tanımlı sıra koruyan ve A -azaltan kısmi dönüşümlerden oluşan bir yarıgruptur. Bu çalışma, sıralamayı koruyan ve A -azaltan kısmi dönüşümlerden oluşan yarıgrubun yapısal özelliklerini incelemektedir. Bu yarıgrubun yapısı, temel yapı taşlarını oluşturan ilişkiler ve denklik bağıntıları çerçevesinde kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır. Bu çalışmada, $\mathcal{PO}_n^+(A)$ yarıgrubunda genişletilmiş Green bağıntıları olan $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{R}^*$ ve $\mathcal{D}^*$ bağıntılarının yapısal özellikleri ele alınmaktadır. $\mathcal{PO}_n^+(A)$ yarıgrubunu her bir $\mathcal{L}^*$ ve her bir $\mathcal{R}^*$ sınıfında en az bir idempotent eleman var olduğu gösterilmiştir. $\mathcal{PO}_n^+(A)$ yarıgrubunun sol ve sağ sıfır bölenleri belirlenmiştir. Ayrıca bu yarıgrupta bir elemanın nilpotent eleman olabilmesi için gerek ve yeter koşul bulunmuştur.

ANAHTAR KELİMELEER: Yarıgrup, Sıra koruyan dönüşümler, Green denklik bağıntıları, İdempotent elemanlar

ABSTRACT

MASTER THESIS

Order Preserving And A-Decreasing Partial Transformation Semigroup

MAHER ALDUGEYİM

HARRAN UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Kemal TOKER

Year: 2025, page: 43

Let $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ and let $\emptyset \neq A \subseteq X_n$. The set $\mathcal{PO}_n^+(A) = \{\alpha \in \mathcal{PO}_n^+ : \forall x \in A, \forall y \in \text{dom}(\alpha), y \leq x \Rightarrow y\alpha \leq x\}$ is defined as the set of partial order-preserving and A -decreasing transformations on X_n . This study investigates the structural properties of the semigroup formed by these partial transformations. The structure of this semigroup is examined in detail in terms of the relations and equivalence classes that constitute its fundamental components. In particular, the study focuses on the structural properties of the extended Green's relations $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{R}^*$, and $\mathcal{D}^*$ within the semigroup $\mathcal{PO}_n^+(A)$. It is shown that each $\mathcal{L}^*$ - and each $\mathcal{R}^*$ -class in $\mathcal{PO}_n^+(A)$ contains at least one idempotent element. The left and right zero divisors of the semigroup are determined. Furthermore, a necessary and sufficient condition is established for an element in this semigroup to be nilpotent.

KEYWORDS: Semigroup, Order-preserving transformations, Green's equivalence relations, Idempotent elements

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler Açıklama

X_n	$\{1, 2, \dots, n\}$
α	Alfa
β	Beta
$\mathcal{B}_n$	X_n üzerinde bağıntılar kümesi
$\ker(\alpha)$	α 'nın çekirdeği
$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}$ -Green bağıntısı
$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$ -Green bağıntısı
$\mathcal{J}$	$\mathcal{J}$ -Green bağıntısı
$\mathcal{O}_n$	X_n üzerinde sıra koruyan dönüşümler yarıgrubu
$\mathcal{O}_n(A)$	X_n üzerinde sıra koruyan ve A -azalan dönüşümler yarıgrubu
$\mathcal{P}_n$	X_n üzerinde kısmi dönüşümler yarıgrubu
$\mathcal{PO}_n$	X_n üzerinde sıra koruyan kısmi dönüşümler yarıgrubu
$\mathcal{PO}_n(A)$	X_n üzerinde sıra koruyan ve A -azalan kısmi dönüşümler yarıgrubu
$\langle a \rangle$	a elemanını içeren en küçük alt yarıgrup

1. GİRİŞ

Yarıgrup teorisi, cebirsel yapılar ile ilgili temel alanlardan birisidir. Yarıgruplar birçok alanda önemli uygulamalara sahiptir. Bilgisayar bilimlerinde, özellikle otomata teorisi ve dil tanıma sistemlerinde yarıgruplar önemli bir rol oynar. Ayrıca, veri akışlarının modellenmesinde, süreçlerin sıralı düzenlenmesinde ve kriptografi gibi alanlarda da yarıgruplardan yararlanır. Yarıgruplar, matematiğin soyut düşünme yeteneğini geliştiren yapılar arasında yer alırken, aynı zamanda uygulamalı problemlerin çözümünde de etkili araçlardır. Bu yönüyle hem teorik hem de pratik açıdan büyük bir öneme sahiptirler.

$\emptyset \neq X$ üzerindeki tüm fonksiyonların kümesi bileşke işlemi ile bir yarıgrup oluşturur, bu yarıgrup tam dönüşümler yarıgrubu olarak adlandırılır. Her yarıgruba tam dönüşümler yarıgrubunun alt yarıgrubuna izomorf olduğu bilinmektedir (Howie, 1995). Böylece tam dönüşümler yarıgrubunun yarıgrup teorisinde önemi büyüktür.

$X_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ve $\emptyset \neq A \subseteq X_n$ olmak üzere, $\mathcal{PO}_n^+(A) = \{\alpha \in \mathcal{PO}_n^+ : \forall x \in A, \forall y \in \text{dom}(\alpha), y \leq x \Rightarrow y\alpha \leq x\}$ şeklinde tanımlanan $\mathcal{PO}_n^+(A)$ kümesi, X_n üzerinde tanımlı sıra koruyan ve A -azaltan kısmi dönüşümler yarıgrubu olarak adlandırılır. Bu çalışma, sıra koruyan ve A -azaltan kısmi dönüşümler yarıgrubunun özelliklerini incelemektedir.

Yarıgrup teorisinde Green bağıntıları olarak bilinen ifadeler şu şekilde tanımlanır. Aynı sol ideali üreten sıralı ikililerinden oluşan ilişki $\mathcal{L}$ -Green bağıntısı, aynı sağ ideali üreten sıralı ikililer $\mathcal{R}$ -Green bağıntısı, ve aynı iki yönlü ideali üreten sıralı ikililer $\mathcal{J}$ -Green bağıntısı olarak adlandırılır. Bu ilişkiler biçimsel olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \{(u, v) \in S \times S : S^1x = S^1y\}, \\ \mathcal{R} &= \{(u, v) \in S \times S : xS^1 = yS^1\} \quad \text{ve} \\ \mathcal{J} &= \{(u, v) \in S \times S : S^1xS^1 = S^1yS^1\}\end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Bu bağıntıların her biri bir denklik bağıntısıdır. $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ bağıntılarını kapsayan en küçük denklik bağıntısı $\mathcal{D}$ -Green olarak adlandırılır ve $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ şeklinde tanımlanır (Howie, 1995). Bu çalışmada, $\mathcal{PO}_n^+(A)$ yarıgrubunda genişletilmiş Green bağıntıları olan $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{R}^*$ ve $\mathcal{D}^*$ bağıntılarının yapısal özellikleri ele alınmaktadır.

$\mathcal{PO}_n^+(A)$ yarıgrubunu her bir $\mathcal{L}^*$ ve $\mathcal{R}^*$ sınıfında en az bir idempotent eleman var olduğu gösterilmiştir. $\mathcal{PO}_n^+(A)$ yarıgrubunun sol ve sağ sıfır bölenleri belirlenmiştir. Ayrıca bu yarıgrupta bir elemanın nilpotent eleman olabilmesi için gerek ve yeter koşul bulunmuştur.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde bu tezde kullanılan temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

2.1. Yarıgruplarda Bazı Tanımlar

Tanım 2.1. $\emptyset \neq H$ bir küme olsun ve $\star$ da H üzerinde ikili işlem olsun. Eğer bu işlem H üzerinde birleşme özelliğine sahipse, $(H, \star)$ yapısına bir yarıgrup denir.

Tanım 2.2. H bir yarıgrup ve G , H nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall x, y \in G$ için $xy \in G$ ise G ye H nin bir alt yarıgrubu denir ve $G \leq H$ ile gösterilir.

Tanım 2.3. Bir yarıgrup birim elemanı içeriyorsa bu yarıgruba monoid denir ve H bir yarıgrup olmak üzere

$$H^1 = \begin{cases} H, & 1 \in H \text{ ise} \\ H \cup \{1\}, & 1 \notin H \text{ ise} \end{cases}$$

kümesi, $\forall u, v \in H^1$ için

$$uv = \begin{cases} uv, & u \neq 1 \text{ ve } v \neq 1 \text{ ise} \\ u, & v = 1 \text{ ise} \\ v, & u = 1 \text{ ise} \\ 1, & u = 1 \text{ ve } v = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanan işlemle bir monoid olur.

Tanım 2.4. H bir yarıgrup olsun ve $\emptyset \neq J \subseteq H$ olsun. Eğer $\forall h \in H$ ve $\forall j \in J$ için,

$$hj \in J \text{ olur ise, } J \text{ ye } H \text{ nin sol ideali ve}$$

$$jh \in J \text{ olur ise, } J \text{ ye } H \text{ nin sağ ideali}$$

denir. Bununla birlikte J kümesi, H ın sağ ve H ın sol ideali ise J ye H nin bir ideali denir.

Tanım 2.5. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $X_n = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ olsun.

$$\mathcal{B}_n = \{Y : Y \subseteq X_n \times X_n\}$$

kümesine X_n üzerindeki bağıntılar kümesi denir. Ayrıca $\alpha \in \mathcal{B}_n$ olmak üzere

$$\text{dom}(\alpha) = \{a \in X_n : \exists b \in X_n \text{ için } (a, b) \in \alpha\}$$

kümesine α 'nın tanım kümesi denir ve

$$\text{im}(\alpha) = \{b \in X_n : \exists a \in X_n \text{ için } (a, b) \in \alpha\}$$

kümesine α 'nın görüntü kümesi denir. Ayrıca,

$$\ker(\alpha) = \{(u, v) \in X_n \times X_n : u, v \in \text{dom}(\alpha) \text{ ve } u\alpha = v\alpha\}$$

X_n kümesi üzerinde tanımlanan bu bağıntı, bir denklik bağıntısı olup α 'nın çekirdeği olarak adlandırılır.

Tanım 2.6.

$$\mathcal{P}_n = \{\alpha \in \mathcal{B}_n : \forall x \in X_n \text{ için } |x\alpha| \leq 1\}$$

kümesine X_n üzerindeki kısmi dönüşümler yarıgrubu denir.

Örnek 2.7.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & - & 5 & 1 & - \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_5$$

olur.

Teorem 2.8. $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_n$ olmak üzere

$$\text{i) } \text{im}(\alpha\beta) \subseteq \text{im}(\beta),$$

$$\text{ii) } \ker(\alpha) \subseteq \ker(\alpha\beta)$$

sağlanır (Howie, 1995).

İspat.

i) $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_n$ kabul edelim. Bu durumda

$$\text{im}(\alpha\beta) = (\text{im}(\alpha))\beta \subseteq (X_n)\beta = \text{im}(\beta)$$

elde edilir.

ii) $(x, y) \in \ker(\alpha)$ olduğunu varsayalım. O halde

$$x\alpha = y\alpha \implies (x\alpha)\beta = (y\alpha)\beta \implies x(\alpha\beta) = y(\alpha\beta)$$

olur ve $(x, y) \in \ker(\alpha\beta)$ sonucuna ulaşılır. Buradan da $\ker(\alpha) \subseteq \ker(\alpha\beta)$ olduğu elde edilir. $\square$

Tanım 2.9. Bir yarıgrup olan H içinde $b \in H$ ve $b^2 = b$ koşulunu sağlayan her b elemanına idempotent adı verilir. Bu elemanların tümü $E(H)$ kümesiyle ifade edilir.

Tanım 2.10. Bir yarıgrup olan H 'de, $x \in H$ ve $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $x^n = 0$ koşulunu sağlayan her x elemanı, H 'nin nilpotent elemanı olarak adlandırılır.

Tanım 2.11. $X \neq \emptyset$ ve $\mathcal{T}_X$ ' de X üzerindeki tam dönüşümler yarıgrubu olsun. Açıkça ifade etmek gerekirse $\mathcal{T}_X$, X ' ten X ' e tüm fonksiyonların kümesidir ve fonksiyonların bileşke işlemi ile bu yapı bir yarıgruptur. Ayrıca $n \in \mathbb{Z}^+$ için $X_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ olsun. Kolaylık olması amacıyla $\mathcal{T}_{X_n}$ ifadesi yerine $\mathcal{T}_n$ ifadesi kullanılır.

Tanım 2.12. $\alpha \in \mathcal{T}_n$ ve her $b \in X_n$ için $b\alpha \leq b$ koşulu sağlanıyorsa, α elemanına sıra azaltan dönüşüm denir. X_n üzerinde tanımlı olan tüm sıra azaltan dönüşümlerden oluşan yarıgrup $\mathcal{D}_n$ ile gösterilir.

Örnek 2.13. $\mathcal{D}_3$ 'ün yarıgrubunun tüm elemanları aşağıda verilmiştir.

$$\mathcal{D}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

olur.

Sonuç 2.14. $\mathcal{D}_n$ kümesi $\mathcal{T}_n$ yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur.

İspat. $\mathcal{D}_n$ bir yarıgrup ve $\mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{T}_n$ olduğu için sonuç açıktır. $\square$

Tanım 2.15. $\mathcal{O}_n = \{\alpha \in \mathcal{T}_n : \forall x, y \in X_n \text{ için } x \leq y \Leftrightarrow x\alpha \leq y\alpha\}$ kümesine X_n üzerindeki sıra koruyan dönüşümler yarıgrubu denir.

Örnek 2.16. $\mathcal{O}_3$ yarıgrubunun tüm elemanları aşağıda verilmiştir.

$$\mathcal{O}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

olur.

Tanım 2.17. $\alpha \in \mathcal{T}_n$ olsun. $\forall a, b \in X_n$ olmak üzere

$$a\alpha \leq a \quad \text{ve} \quad a \leq b \implies a\alpha \leq b\alpha$$

oluyorsa, α 'ya hem sıra koruyan hem de sıra azaltan dönüşüm adı verilir. X_n üzerinde tanımlı tüm sıra koruyan ve sıra azaltan dönüşümlerin oluşturduğu yarıgrup $\mathcal{C}_n$ ile gösterilir

Örnek 2.18. $\mathcal{C}_3$ yarıgrupunun tüm elemanları aşağıda verilmiştir.

$$\mathcal{C}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

olur.

Tanım 2.19. $\mathcal{PO}_n = \{\alpha \in \mathcal{P}_n : \forall a, b \in \text{dom}(\alpha) \text{ için } a \leq b \Leftrightarrow a\alpha \leq b\alpha\}$ kümesine X_n üzerindeki sıra koruyan kısmi dönüşümler yarıgrubu denir.

Örnek 2.20. $\mathcal{PO}_3$ yarıgrupunun tüm elemanları aşağıda verilmiştir.

$$\mathcal{PO}_3 = \mathcal{O}_3 \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & - \end{pmatrix}, \right. \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & - & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & - & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & - & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & - & 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & - & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & - & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 1 & 3 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & - & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & - & 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & - & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 1 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 2 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & 3 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & - & - \end{pmatrix}, \\ \left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & - & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & - & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & - & - \end{pmatrix} \right\}$$

olur.

Tanım 2.21. H bir yarıgrup ve H 'nin boş olmayan bir altkümesi X olsun. X 'i içeren en küçük altarıgrup, X tarafından oluşturulan altarıgrup olarak adlandırılır ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. Eğer $H = \langle X \rangle$ ise, X kümesi H 'nin bir doğuraydır denir. Sonlu bir

X kümesi için $H = \langle X \rangle$ sağlanıyorsa, H yarıgrubu sonlu doğuraylı yarıgrup olarak adlandırılır. Eğer $X = \{a\}$ ise $\langle \{a\} \rangle$ yerine $\langle a \rangle$ yazılır. Ayrıca $\langle a \rangle$ 'ya monojenik yarıgrup denir.

Teorem 2.22. H bir yarıgrup ve $a \in H$ olsun. Eğer $T = \{a^n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ alınır ise $T \subseteq \langle a \rangle$ olur. Ayrıca T de bir altarıgrup olduğundan $T = \langle a \rangle$ olur. Yani

$$\langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}^+\}$$

olur (Howie, 1995).

Tanım 2.23. Eğer S bir monoid ve $a \in S$ ise, a tarafından doğurulan monojenik monoid

$$\langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{1\}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer her $n \neq m$ için $a^m \neq a^n$ ise

$$\begin{aligned} \phi: \langle a \rangle &\rightarrow (\mathbb{Z}^+, +) \\ a^n &\rightarrow n \end{aligned}$$

olur. Bu dönüşüm, izomorfizm özelliğine sahiptir ve

$$\langle a \rangle \cong (\mathbb{Z}^+, +)$$

olur. En az bir $x \neq y$ çifti için $a^x = a^y$ sağlanırsa, $I = \{x \in \mathbb{Z}^+ : \exists j \in \mathbb{Z}^+, x \neq y \text{ ve } a^x = a^y\}$ kümesi boş değildir. Ayrıca, I kümesi $\mathbb{Z}^+$ 'nin alt kümesi olup boş değildir ve $\mathbb{Z}^+$ kümesi alttan sınırlı olduğundan, I 'nin en küçük elemanı m bulunur. Bu m sayısına a elemanın indeksi adı verilir. Ayrıca

$$J = \{x \in \mathbb{Z}^+ : a^{m+x} = a^m\}$$

kümesi boştan farklı olup, bir en küçük elemanı r bulunur. Bu r sayısına a elemanın periyodu adı verilir.

$$T = \{a, a^2, \dots, a^{m-1}, a^m, a^{m+1}, \dots, a^{m+r-1}\}$$

olsun. Eğer $1 \leq i < j \leq m+r-1$ aralığında $a^i = a^j$ ise, i sayısı I 'nin elemanıdır ve m 'nin tanımından ötürü $m \leq i$ sağlanır. Böylece, i sayısını $m+q$ biçiminde yazacak $q \in \mathbb{Z}^+$ bulunur. Ayrıca $i \leq j$ olduğundan, j sayısını $m+p$ formunda yazmak mümkündür;

burada p pozitif tam sayı olarak alınır. Bunun yanı sıra, $q \leq p$ olur.

$$\begin{aligned}
 a^{m+p-q} &= a^{m+r+p-q} \\
 &= a^{m+p} \cdot a^{r-q} \\
 &= a^{m+q} \cdot a^{r-q} \\
 &= a^{m+r} \\
 &= a^m
 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca, $p - q \in J$ ve $p - q < r$ olur; bu durum r 'nin seçimiyle çelişir. Böylece, T kümesindeki tüm elemanlar birbirinden farklıdır ve

$$|T| = m + r - 1$$

olur. $n \geq m + r$ koşulunu sağlayan herhangi bir n tamsayısı için bölme algoritması uygulanırsa $n - m = qr + s$ ve $0 \leq s \leq r - 1$ olacak biçimde $q, s \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ bulunur. Eğer $q \in \mathbb{Z}^+$ ise

$$\begin{aligned}
 a^{m+qr} &= a^{m+r} \cdot a^{(q-1)r} \\
 &= a^m \cdot a^{(q-1)r} \\
 &= a^{m+(q-1)r} \\
 &= \dots \\
 &= a^{m+r} \\
 &= a^m
 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$a^n = a^{m+qr+s} = a^{m+qr} \cdot a^s = a^m \cdot a^s = a^{m+s} \in T$$

olur. Böylece

$$\langle a \rangle = \{a, a^2, \dots, a^m, a^{m+1}, \dots, a^{m+r-1}\}$$

olur. Bu monojenik yarıgrup

$$M(m, r) = \langle a \mid a^{m+r} = a^m \rangle$$

şeklinde gösterilir.

$$K_a = \{a^m, a^{m+1}, \dots, a^{m+r-1}\}$$

kümesine $M(m, r) = \langle a \rangle$ 'nın çekirdeği denir.

$0 \leq p, q \leq r - 1$ olmak üzere herhangi iki $a^{m+p}, a^{m+q} \in K_a$ alalım ve

$$x \cdot a^{m+p} = a^{m+q} \quad (*)$$

denklemini gözönüne alalım.

$$y + m + p \equiv q \pmod{r}$$

denkleminin $0 \leq s \leq r - 1$ olacak şekilde bir tek $y = s$ çözümü mevcut olduğundan

$$a^{m+s} \cdot a^{m+p} = a^{m+q}$$

olur. $x = a^{m+s}$ ifadesi $(*)$ denkleminin bir çözümüdür. Böylece K_a bir gruptur.

Tanım 2.24. H yarıgrubu ve her $a \in H$ için $\langle a \rangle$ monojenik yarıgrubu sonlu ise, H periyodik yarıgrup olarak adlandırılır.

Tanım 2.25. H sonlu doğuraylı yarıgrup ise,

$$\text{rank}(H) = \min\{|A| : A \subseteq H \text{ ve } H = \langle A \rangle\}$$

sayısına H 'nin rankı denir ve $\text{rank}(H)$ ile gösterilir.

Tanım 2.26. H sonlu idempotent doğuraylı yarıgrup olsun. Böylece, H için idempotent rank,

$$\text{idrank}(H) = \min\{|A| : A \subseteq E(H) \text{ ve } H = \langle A \rangle\}$$

olarak ifade edilir.

Sonuç 2.27. S , sonlu idempotent doğuraylı yarıgrup ise

$$\text{rank}(S) \leq \text{idrank}(S)$$

olur.

Tanım 2.28. $\emptyset \neq A \subseteq X_n$ olmak üzere

$$\forall x, y \in A \text{ ve } x \leq z \leq y$$

koşulunu sağlayan her $z \in X_n$ için $z \in A$ özelliği sağlanıyorsa A kümesine konveks küme denir.

2.2. Green Denklik Bağlılıkları

Tanım 2.29. S bir yarıgrup ve $a \in S$ için,

$$\begin{aligned} S^1 a &= \{sa : s \in S^1\}, \\ a S^1 &= \{as : s \in S^1\} \text{ ve} \\ S^1 a S^1 &= \{sat : s, t \in S^1\} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Bu kümeler sırasıyla S yarıgrupunun a elemanını içeren en küçük sol, en küçük sağ ve en küçük ideali olur.

Tanım 2.30. Bir S yarıgrubu üzerinde $\mathcal{L}$ -Green, $\mathcal{R}$ -Green ve $\mathcal{J}$ -Green bağlantıları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \{(x, y) \in S \times S : S^1 x = S^1 y\}, \\ \mathcal{R} &= \{(x, y) \in S \times S : x S^1 = y S^1\}, \\ \mathcal{J} &= \{(x, y) \in S \times S : S^1 x S^1 = S^1 y S^1\} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır ve bu bağlantılar birer denklik bağlantısıdır.

Lemma 2.31. S yarıgrubu üzerindeki $\mathcal{L}$ -Green bağlantısı ile $\mathcal{R}$ -Green bağlantısı, bileşke altında değişme özelliğini sağlar, yani

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$$

olur (Howie, 1995).

İspat. S bir yarıgrup ve $r, s \in S$ elemanları için $(r, s) \in \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $r\mathcal{L}c$ ve $c\mathcal{R}s$ olacak şekilde bir $c \in S$ elemanı bulunur. Buna göre, $x, y, u, v \in S^1$ olacak biçimde

$$\begin{aligned} xr &= c, \\ cu &= s, \\ yc &= r, \\ sv &= c \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. $z = ycu$ alınırsa

$$\begin{aligned} ru &= ycu = z, \\ zv &= ycu v = ysv = yc = r \end{aligned}$$

olur. Yani $r \mathcal{R} z$ olur. Ayrıca,

$$ys = ycu = z,$$

$$xz = xycu = xru = cu = s$$

olduğundan $z \mathcal{L} s$ elde edilir. Bu da $(r, s) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$$

olduğu ispatlanmıştır. Benzer şekilde

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$$

olduğu gösterilir. Sonuç olarak

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$$

olur. □

Teorem 2.32. S bir grup olduğu takdirde, o zaman

$$\mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{H} = \mathcal{D} = \mathcal{J} = S \times S$$

olur (Howie, 1995).

İspat. a ve b herhangi iki S elemanı olmak üzere

$$a = ae = a(b^{-1}b) = (ab^{-1})b$$

$$b = be = b(a^{-1}a) = (ba^{-1})a$$

olur.

$$x = ab^{-1} \in S \text{ ve}$$

$$y = ba^{-1} \in S$$

şeklinde seçilirse

$$a = xb \text{ ve}$$

$$b = ya$$

olup S kümesindeki her a ve b elemanı için $a \mathcal{L} b$ bağıntısı sağlanır., yani

$$\mathcal{L} = S \times S$$

olur. Aynı şekilde $\mathcal{R} = S \times S$ ve

$$\mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{H} = \mathcal{D} = \mathcal{J} = S \times S$$

olur. □

Lemma 2.33. Her periyodik bir yarıgrupta en az bir idempotent eleman vardır (Howie, 1995).

İspat. S periyodik bir yarıgrup ve a 'da S 'nin herhangi bir elemanı olsun $\langle a \rangle$ sonlu olduğundan K_a mevcut olup K_a 'nın birim elemanı S 'nin bir idempotent elemanıdır.

□

Tanım 2.34. S yarıgrubu üzerinde tanımlı olan $\mathcal{L}$ -Green ile $\mathcal{R}$ -Green bağıntılarını kapsayan en küçük denklik bağıntısı $\mathcal{D}$ -Green bağıntısı olarak adlandırılır.

Ayrıca;

$$\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$$

olduğu bilinmektedir (Howie, 1995).

Teorem 2.35. S sonlu bir yarıgrup ise

$$\mathcal{D} = \mathcal{J}$$

olur (Howie, 1995).

İspat. $r, s \in S$ ve $r \mathcal{J} s$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\exists x, y, u, v \in S^1$ için

$$xry = s, \quad usv = r$$

eşitlikleri sağlanır.

İstenen sonucu elde etmek için $r \mathcal{L} c$ ve $c \mathcal{R} s$ olacak şekilde bir $c \in S$ elemanı bulunması yeterlidir. Bu eşitliklerden kolayca görülür ki

$$\begin{aligned} r &= (ux)r(yv) = (ux)^2r(yv)^2 = \dots \\ s &= (xu)s(vy) = (xu)^2s(vy)^2 = \dots \end{aligned}$$

olur. S yarıgrubu periyodik olduğundan, Lemma 2.33'e göre $(yv)^m$ idempotent olacak şekilde bir eleman mevcuttur. $c = xr$ olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 r &= (ux)^m r (yv)^m \\
 &= ((ux)^m)^2 r (yv)^m \\
 &= (ux)^m ((ux)^m r (yv)^m) \\
 &= (ux)^m r \\
 &= (ux)^{m-1} u x r \\
 &= (ux)^{m-1} u c
 \end{aligned}$$

olur, yani $r \mathcal{L} c$ olur. Benzer şekilde, $c \mathcal{R} s$ olduğu gösterilir. İstenen sonuç elde edilmiş olur. $\square$

2.3. *-Green Bağlılıkları

Tanım 2.36. H yarıgrubu üzerinde tanımlı olan $\mathcal{L}^*$ ve $\mathcal{R}^*$ bağıntıları

$$\begin{aligned}
 (a, b) \in \mathcal{L}^* &\Leftrightarrow H \text{ yi içeren en az bir yarıgrupta } (a, b) \in \mathcal{L} \\
 (a, b) \in \mathcal{R}^* &\Leftrightarrow H \text{ ye içeren en az bir yarıgrupta } (a, b) \in \mathcal{R}
 \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir. Aynı zamanda,

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{L}^* \circ \mathcal{R}^*$$

olur. (Fountain, 1982).

Lemma 2.37. $\mathcal{S}$ bir yarıgrup ve $r, s \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda,

- (i) $(r, s) \in \mathcal{L}^*$
- (ii) $\forall x, y \in \mathcal{S}^1$ için $rx = ry \Leftrightarrow sx = sy$.

olmak üzere (i) ve (ii) birbirine denktir (Fountain, 1982).

İspat. (Fountain, 1982) Lemma 1.1' e bakınız. $\square$

2.4. Sıra Koruyan Dönüşümler Yarıgrubu

Tanım 2.38. Herhangi bir H yarıgrubu için, H 'nin her $\mathcal{L}^*$ ve $\mathcal{R}^*$ sınıfında en az bir idempotent eleman bulunuyorsa, H verimli yarıgrup olarak adlandırılır.

Tanım 2.39. H yarıgrup ve $r \in H$ olsun. $r = rsr$ olacak şekilde bir $s \in H$ bulunuyorsa, r elemanına H 'nin regüler elemanı denir. H 'nin her elemanı bu özelliğe sahipse, H regüler yarıgrup olarak adlandırılır.

Tanım 2.40. $X_n = \{1, \dots, n\}$ sonlu kümesi üzerindeki permütasyonlar grubu $\mathcal{S}_n$ ve tam dönüşümler yarıgrubu $\mathcal{T}_n$ ve ile gösterilir. $\mathcal{T}_n \setminus \mathcal{S}_n$ kümesi, $\mathcal{T}_n$ 'nin bir alt yarıgrubudur. Bu yarıgrup Sing_n veya $\mathcal{ST}_n$ sembolleriyle gösterilir. Ayrıca,

$$\mathcal{O}_n^+ = \{\alpha \in \text{Sing}_n : \forall x, y \in X_n \text{ için } x \leq y \Rightarrow x\alpha \leq y\alpha\}$$

olarak tanımlanır.

$\mathcal{O}_n^+$ yarıgrubunun $\mathcal{T}_n$ 'nin bir regüler alt yarıgrubu olduğu bilinmektedir (Howie, 1995).

Teorem 2.41. $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_n^+$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır;

- i) $\alpha \mathcal{L} \beta \iff \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta),$
- ii) $\alpha \mathcal{R} \beta \iff \ker(\alpha) = \ker(\beta),$
- iii) $\alpha \mathcal{D} \beta \iff |\text{im}(\alpha)| = |\text{im}(\beta)|$

(Howie, 1995).

İspat. $\alpha \in \mathcal{O}_n^+$ için, $A_1 = \{1, 2, \dots, i_1\}$, $A_2 = \{i_1 + 1, i_1 + 2, \dots, i_2\}$, ..., $A_m = \{i_{m-1} + 1, i_{m-1} + 2, \dots, n\}$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, X_n kümesinin sıralı konveks bir parçalanışdır ve $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m \leq n$ olacak şekilde indekslenmiştir.

i. $(\Rightarrow) (\alpha, \beta) \in \mathcal{L}$ ise $\gamma, \sigma \in \mathcal{O}_n^+$ olmak üzere, $\alpha = \gamma\beta$ ve $\beta = \sigma\alpha$ eşitlikleri sağlanır. Dolayısıyla

$$\text{im}(\alpha) = \text{im}(\gamma\beta) \subseteq \text{im}(\beta) = \text{im}(\sigma\alpha) \subseteq \text{im}(\alpha)$$

olup $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$ olur.

$(\Leftarrow)$ $\text{im } \alpha = \text{im } \beta$ varsayalım. Bu durumda,

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\{A_i\}_{i \in I}^m$ ve $\{B_i\}_{i \in I}^m$ kümeleri X_n 'in sıralı konveks parçalanışlarıdır. Ayrıca, $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r \leq n$ koşulu sağlanmaktadır. Her $k \in \{1, \dots, m\}$ için uygun bir $j_k \in A_k$ alalım ve A_k 'nin sıralı konveks parçalanış olması sebebiyle, $j_1 \leq j_2 \leq j_3 \leq \dots \leq j_m$ olacak şekilde

$$\gamma = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}$$

$\gamma \in \mathcal{O}_n^+$ tanımlanabilir ve böylece $\gamma\alpha = \beta$ elde edilir. Benzer şekilde, $\mu\beta = \alpha$ olacak biçimde bir $\mu \in \mathcal{O}_n^+$ vardır ve sonuç olarak $\alpha \mathcal{L} \beta$ olur.

ii. $(\Rightarrow) \alpha \mathcal{R} \beta$ ise, öyle $\gamma, \sigma \in \mathcal{O}_n^+$ elemanları vardır ki, $\alpha = \beta\gamma$ ve $\beta = \alpha\sigma$ olur. Dolayısıyla

$$\ker(\alpha) = \ker(\beta\gamma) \supseteq \ker(\beta) = \ker(\alpha\sigma) \supseteq \ker(\alpha)$$

olup bu durumda $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ eşitliği sağlanır.

$(\Leftarrow)$ $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ olsun. O zaman,

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Burada, $\{i_1 < i_2 < \dots < i_m\}, \{j_1 < j_2 < \dots < j_m\} \subseteq X_n$ olmak üzere

$\{A_i\}_{i=1}^m$ küme ailesi X_n 'in sıralı konveks bir parçalanışıdır. Buna göre

$$\begin{aligned} B_1 &= \{1, \dots, i_1\}, \\ B_2 &= \{i_1 + 1, \dots, i_2\}, \\ &\vdots \\ B_m &= \{i_{m-1} + 1, \dots, i_m\}, \\ B_{m+1} &= X_n \setminus \{1, \dots, i_m\} \text{ için} \end{aligned}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m & B_{m+1} \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m & n \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlanırsa bu durumda $\gamma \in \mathcal{O}_n^+$ olur, ayrıca $\alpha\gamma = \beta$ eşitliği sağlanır. Benzer şekilde, $\beta\eta = \alpha$ olacak biçimde $\eta \in \mathcal{O}_n^+$ bulunabilir. Sonuç olarak $\alpha \mathcal{R} \beta$ olur.

iii. ($\Rightarrow$) $\alpha \mathcal{D} \beta$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ olup, $\alpha \mathcal{L} \gamma$ ve $\gamma \mathcal{R} \beta$ olacak şekilde en az bir $\gamma \in \mathcal{O}_n^+$ vardır. Eğer $|\text{im} \alpha| = r$ ise, γ da α ile aynı görüntü kümesi kardinalitesine sahip olacağından $|\text{im} \gamma| = r$ olur ve $\ker(\gamma)$ da r farklı denklik sınıfı içerir. $\gamma \mathcal{R} \beta$ olup $\ker(\gamma) = \ker(\beta)$ olur ve dolayısıyla $\ker(\beta)$ da r farklı denklik sınıfı içerir. Sonuç olarak $|\text{im} \beta| = r$ olur.

($\Leftarrow$) $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$ olsun. Bu durumda

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_m \\ i_1 & \dots & i_m \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_m \\ i_1 & \dots & j_m \end{pmatrix}$$

olacak şekilde Burada $\{A_i\}_{i \in I}^m$ ve $\{B_i\}_{i \in I}^m$ kümeleri X_n 'in sıralı konveks parçalanışlarıdır ve $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m \leq n$ ve $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_m \leq n$ biçimindedir.

$$\gamma = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_n^+$$

olur. Ayrıca, $\alpha \mathcal{L} \gamma$ ve $\gamma \mathcal{R} \beta$ olduğu için $\alpha \mathcal{D} \beta$ olur. □

Tanım 2.42. $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ kümesi üzerinde tanımlı sıra koruyan dönüşümler yarıgrubu $\mathcal{O}_n$ içinde,

$$J_{n-1} = \{\alpha \in \mathcal{O}_n^+ : |\text{im}(\alpha)| = n - 1\}$$

olarak tanımlanır. Burada $\text{im}(\alpha)$, α dönüşümünün görüntü kümesini ifade eder. Dolayısıyla J_{n-1} , $\mathcal{O}_n^+$ içindeki, görüntü kümesinin eleman sayısı $n - 1$ olan sıra koruyan dönüşümlerden oluşur.

Tanım 2.43. $\mathcal{O}_n^+$ yarıgrubu üzerinde tanımlı

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & i-1 & i-1 & i+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

dönüşümüne azalan idempotent dönüşümü denir ve $[i \rightarrow i - 1]$ ile gösterilir. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & i-1 & i+1 & i+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

dönüşümü artan idempotent dönüşümü olarak adlandırılır ve $[i \rightarrow i + 1]$ ile gösterilir.

Lemma 2.44. $\mathcal{O}_n^+$ yarıgrubu üzerinde azalan idempotentler $[i \rightarrow i - 1]$ biçiminde olup $2 \leq i \leq n$ için tanımlanır ve böylece bu yarıgrupta $n - 1$ adet azalan idempotent eleman vardır. Benzer şekilde, artan idempotentler $[i \rightarrow i + 1]$ biçiminde olup $1 \leq i \leq n - 1$ için tanımlıdır ve bu yarıgrupta artan idempotentlerin sayısı da $n - 1$ olur. Bu durumda,

$$E_{n-1} = \{\alpha \in \mathcal{O}_n^+ : |\text{im } \alpha| = n - 1, \alpha^2 = \alpha\} \quad (2.4.1)$$

kümesi, J_{n-1} içinde yer alan tüm idempotentleri ifade eder. Bu durumda $|E_{n-1}| = 2n - 2$ ve

$\mathcal{O}_n^+ = \langle E_{n-1} \rangle$ olur (Gomes ve Howie, 1987).

Teorem 2.45. $n \geq 2$ için $\text{rank}(\mathcal{O}_n^+) = n$ olur (Gomes ve Howie, 1987).

İspat. İspatı için (Gomes ve Howie, 1987)'a bakınız. □

Teorem 2.46. $n \geq 2$ için $\text{idrank}(\mathcal{O}_n^+) = 2n - 2$ olur (Gomes ve Howie, 1987).

İspat. İspatı için (Gomes ve Howie, 1987)'a bakınız. □

Tanım 2.47. 1_n ile $\mathcal{T}_n$ yarıgrubuunun birim elemanı gösterilir. Ayrıca $\mathcal{C}_n^+ = \mathcal{C}_n \setminus \{1_n\}$ olarak tanımlanır.

2.5. Sıra Koruyan ve A-Azalan Dönüşümler Yarıgrubu

Tanım 2.48. $\emptyset \neq A \subseteq X_n$ olmak üzere

$$\mathcal{O}_n^+(A) = \{\alpha \in \mathcal{O}_n^+ : \forall x \in A \text{ için } x\alpha \leq x\}$$

X_n kümesi üzerindeki sıra koruyan ve A -azalan dönüşümler yarıgrubu denir. Ayrıca, bu küme $\mathcal{O}_n^+$ 'nın bir alt yarıgrubudur. Eğer A kümesi X_n veya $X_n \setminus \{n\}$ kümesine eşitse, $\mathcal{O}_n^+(A) = \mathcal{C}_n^+$ ve eğer $A = \{n\}$ ise $\mathcal{O}_n^+(A) = \mathcal{O}_n^+$ olur. Ayrıca, $\mathcal{C}_n^+ \subseteq \mathcal{O}_n^+(A) \subseteq \mathcal{O}_n^+$ olduğu açıktır.

Şimdi bazı sembolleri tekrar tanımlayalım. $\mathcal{O}_n^+$ yarıgrubunda, üreteç olan idempotentlerin kümesi şu şekildedir

$$E_{n-1} = \{\alpha \in \mathcal{O}_n^+ : \alpha^2 = \alpha, |\text{im}(\alpha)| = n-1\}.$$

Bu küme, $n-1$ adet $[i \rightarrow i+1]$ ($i = 1, \dots, n-1$) artan idempotent ile $n-1$ adet $[i \rightarrow i-1]$ ($i = 2, \dots, n$) azalan idempotent içerir. Böylece

$$\begin{aligned} E_{n-1}^+ &= \{[i \rightarrow i+1] : i = 1, \dots, n-1\} \\ E_{n-1}^- &= \{[i \rightarrow i-1] : i = 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır ve bu durumda,

$$E_{n-1} = E_{n-1}^+ \cup E_{n-1}^-$$

olur.

Tanım 2.49. $x, y \in X_n$ olmak üzere ve $x < y$ koşuluyla, $\phi_{x,y} : X_n \rightarrow X_n$ dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$z\phi_{x,y} = \begin{cases} x & \text{eğer } x \leq z \leq y \text{ ise,} \\ z & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Bu dönüşüm, şu şekilde ifade edilir

$$\phi_{x,y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & x-1 & x & x+1 & \cdots & y-1 & y & y+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & x-1 & x & x & \cdots & x & x & y+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

ve $\phi_{x,y} \in \mathcal{O}_n^+(A)$ olur.

Lemma 2.50. $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_n^+(A)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} (i) \quad (\alpha, \beta) \in \mathcal{L}^* &\iff \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta) \\ (ii) \quad (\alpha, \beta) \in \mathcal{R}^* &\iff \ker(\alpha) = \ker(\beta) \end{aligned}$$

olur. (Zhao, 2014).

İspat. İspatı için (Zhao, 2014) Lemma 2.2 ye bakınız. $\square$

Tanım 2.51. A ve B kümeleri X_n kümesinin boştan farklı alt kümeleri olsun. $\forall a \in A$ ve $\forall b \in B$ için $a < b$ oluyorsa $A < B$ yazılır.

Teorem 2.52. $\mathcal{O}_n^+(A)$ yarıgrubu verimli bir yarıgruptur (Zhao, 2014).

İspat. $\alpha \in \mathcal{O}_n^+(A)$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_r \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_r \end{pmatrix}$$

olsun. $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$ ve $A_1 < A_2 < \cdots < A_r$ biçimindedir. Ayrıca $x_i = \min A_i$ olmak üzere

$$\epsilon = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_r \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_r \end{pmatrix},$$

olarak tanımlıyalım. Bu durumda, $\epsilon \in \mathcal{O}_n^+(A)$, $\epsilon^2 = \epsilon$ ve $\epsilon \mathcal{R}^* \alpha$ (Lemma 2.50'den) olur. Açıkça $1 \in A_1$ olur. $\alpha \in \mathcal{O}_n^+(A)$ olduğundan $\forall k \in A$ için $a_1 = 1\alpha \leq k\alpha \leq k$ olur.

$$\tilde{A}_1 = [1, a_2 - 1], \quad \tilde{A}_i = [a_i, a_{i+1} - 1] \quad (i = 2, \dots, r-1), \quad \tilde{A}_r = [a_r, n].$$

olmak üzere

$$\zeta = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 & \cdots & \tilde{A}_r \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_r \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_n^+(A).$$

olarak tanımlıyalım. Bu durumda $\zeta \in \mathcal{O}_n^+(A)$ olur. Ayrıca, $\zeta^2 = \zeta$ ve $\zeta L^* \alpha$ (Lemma 2.50'den) olur. Sonuç olarak, $\mathcal{O}_n^+(A)$ yarıgrubu verimli bir yarıgruptur. $\square$

Lemma 2.53. $\alpha \in \mathcal{O}_n^+(A)$ ve $|\text{im}(\alpha)| = k$ olsun. Bu durumda, $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$ ve $\ker(\beta)$ çekirdek sınıfları $\{1, \dots, n-k+1\}, \{n-k+2\}, \dots, \{n\}$ olan bir $\beta \in \mathcal{O}_n^+(A)$ dönüşümü vardır (Zhao, 2014).

İspat. Varsayalım $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ ve $A_1 < A_2 < \dots < A_k$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_k \\ a_1 & a_2 & \dots & a_k \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_n^+(A)$$

olsun. Bu durumda, $1 \in A_1$ ve $i = 1, 2, \dots, k$ için

$$a_i \leq n - k + i.$$

olur. $\alpha \in \mathcal{O}_n^+(A)$ olduğu için, her $x \in A$ için

$$a_1 = 1\alpha \leq x\alpha \leq x$$

olur. Buradan sonuç olarak

$$\beta = \begin{pmatrix} \{1, \dots, n - k + 1\} & \{n - k + 2\} & \dots & \{n\} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_k \end{pmatrix}$$

olarak seçilirse $\beta \in \mathcal{O}_n^+(A)$ olup lemmadaki koşullar sağlanır. $\square$

Teorem 2.54. $\mathcal{O}_n^+(A)$ yarıgrubunda

$$(\alpha, \beta) \in \mathcal{D}^* \Leftrightarrow |\text{im}(\alpha)| = |\text{im}(\beta)|$$

olur (Zhao, 2014).

İspat. $\mathcal{O}_n^+(A)$ yarıgrubu içindeki $\mathcal{D}^\diamond$ bağıntısı

$$(\alpha, \beta) \in \mathcal{D}^\diamond \Leftrightarrow |\text{im}(\alpha)| = |\text{im}(\beta)|$$

biçiminde tanımlansın. Lemma 2.50 uyarınca, $\mathcal{D}^\diamond$, $\mathcal{L}^*$ ve $\mathcal{R}^*$ bağıntılarını içeren bir bağıntıdır. Aynı zamanda $\mathcal{D}^\diamond$ bir denklik bağıntısıdır. Ayrıca, $\mathcal{D}^*$, bu iki bağıntıyı kapsayan en küçük denklik bağıntısıdır.

$$\mathcal{D}^* \subseteq \mathcal{D}^\diamond$$

elde edilir. $(\alpha, \beta) \in \mathcal{D}^\diamond$ ise, bu durumda

$$|\text{im}(\alpha)| = |\text{im}(\beta)| = k$$

olacak şekilde k sayısı vardır. Lemma 2.50'den

$$\alpha \mathcal{L}^* \gamma \mathcal{R}^* \delta \mathcal{L}^* \beta$$

şeklinde $\gamma, \delta \in \mathcal{O}_n^+(A)$ vardır. Böylece,

$$\mathcal{D}^\diamond \subseteq \mathcal{D}^*$$

olur. Bu nedenle

$$\mathcal{D}^\diamond = \mathcal{D}^*$$

elde edilir. □

Tanım 2.55. $\alpha \in \mathcal{O}_n^+(A)$ ve $k \in A$ için

$$\begin{aligned} I_\alpha(k) &= \{im(\alpha) \cap [1, k]\} \text{ ve} \\ \tilde{I}_\alpha(k) &= \{x \in I_\alpha(k) : x\alpha^{-1} \cap [1, k] \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

Örnek 2.56. $A = \{2, 4, 5, 7\}$ ve $n = 9$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} \{1, 2\} & \{3, 4\} & \{5\} & \{6, 7\} & \{8\} & \{9\} \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_9^+(A)$$

olarak seçelim. Bu durumda

$$I_\alpha(2) = \{2\}$$

$$I_\alpha(4) = \{2, 4\}$$

$$I_\alpha(5) = \{2, 4, 5\}$$

$$I_\alpha(7) = \{2, 4, 5, 6, 7\}$$

ve

$$\tilde{I}_\alpha(2) = \{2\}$$

$$\tilde{I}_\alpha(4) = \{2, 4\}$$

$$\tilde{I}_\alpha(5) = \{2, 4, 5\}$$

$$\tilde{I}_\alpha(7) = \{2, 4, 5, 6\}$$

olur.

Lemma 2.57. $\alpha \in \mathcal{O}_n^+(A)$ olsun.

$$\alpha \text{ regüler} \Leftrightarrow \forall k \in A \text{ için } I_\alpha(k) = \tilde{I}_\alpha(k)$$

olur (Zhao, 2014).

İspat. İspatı için (Zhao, 2014) Lemma 2.6' ya bakınız. $\square$

Teorem 2.58. $n \geq 1$ olmak üzere, $\mathcal{O}_n^+(A)$ yarıgrubunun regüler olabilmesi için gerek ve yeter koşul A kümesinin $\{1\}$, $\{1, n\}$ ya da $\{n\}$ kümelerinden biri olmasıdır (Zhao, 2014).

İspat. $(\Leftarrow)$ A kümesi $\{1\}$, $\{1, n\}$ veya $\{n\}$ ile aynı olduğu takdirde her $k \in A$ için $I_\alpha(k) = \tilde{I}_\alpha(k)$ olup, $\mathcal{O}_n^+(A)$ regüler olur.

$(\Rightarrow)$ Kabul edelim ki A kümesi $\{1\}$, $\{1, n\}$ veya $\{n\}$ olmasın. Ayrıca $k \in [2, n-1]$ olacak şekilde $k \in A$ alalım ve

$$\alpha = \begin{pmatrix} \{1, \dots, k\} & \{k+1, \dots, n\} \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

şeklinda tanımlayalım. $\alpha \in \mathcal{O}_n^+(A)$ olduğu ve

$$I_\alpha(k) = \{1, k\} \neq \{1\} = \tilde{I}_\alpha(k)$$

olduğu açıktır. Bu durumda α regüler değildir. $\square$

Tanım 2.59. Bir S yarıgrubunun bir $\alpha \in S$ elemanı ve $x \in \text{dom}(\alpha)$ için, x 'in α altında orbiti

$$\text{orb}_\alpha(x) = \{x, x\alpha, x\alpha^2, x\alpha^3, \dots\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.60. Eğer bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$x\alpha^m = x$$

oluyorsa, x 'in orbiti devirli orbit olarak adlandırılır.

Örnek 2.61. $X_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde tanımlı aşağıdaki dönüşümü ele alalım

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

olsun. Bu durumda

$$1\alpha = 2$$

$$1\alpha^2 = (1\alpha)\alpha = 2\alpha = 3$$

$$1\alpha^3 = (1\alpha^2)\alpha = 3\alpha = 1 \Rightarrow 1\alpha^3 = 1$$

olur. Dolayısıyla

$$\text{orb}_\alpha(1) = \{1, 2, 3\}$$

ve $1\alpha^3 = 1$ olduğu için bu orbit devirlidir.

$\alpha \in \mathcal{O}_n^+(A)$ olmak üzere, $\ker(\alpha)$ sınıfları X_n kümesinin bir konveks parçalanışıdır. Her $x \in \text{im}(\alpha)$ için, $x\alpha^{-1}$ sınıfı aşağıdaki üç gruptan birine girer

$$\text{azalan blok} : x < \min x\alpha^{-1},$$

$$\text{artan blok} : x > \max x\alpha^{-1},$$

$$\text{sabit blok} : \min x\alpha^{-1} \leq x \leq \max x\alpha^{-1}.$$

Her $x \in \text{im}(\alpha)$ için tanımlanan $m_\alpha(x)$ ölçüsü aşağıdaki gibi verilir

$$m_\alpha^l(x) = \max\{x - y : y \in x\alpha^{-1}, y \leq x\},$$

$$m_\alpha^r(x) = \max\{y - x : y \in x\alpha^{-1}, y \geq x\}.$$

Buna göre, $m_\alpha(x)$ şu şekilde tanımlanır

$$m_\alpha(x) = \begin{cases} m_\alpha^l(x) + m_\alpha^r(x), & \text{eğer } x\alpha^{-1} \text{ sabit blok ise,} \\ \max\{|x - y| : y \in x\alpha^{-1}\}, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

$\alpha \in \mathcal{O}_n^+$ olmak üzere, α elemanının her bir orbitinin konveks olduğu ve sadece bir tane sabit nokta içerdiği bilinmektedir (Higgins, 1993). Şimdi, $\beta \in \mathcal{O}_n^+$ için β elemanının yalnızca bir tane orbiti olduğunu varsayalım, bu orbiti Ω ile gösterelim. Bu durumda,

$$x \in \text{im}(\beta) \setminus \Omega \Leftrightarrow m_\beta(x) = 0$$

olduğu kolayca görülür. Ayrıca, $x \in \text{im}(\beta) \cap \Omega$ olmak üzere Ω kümesi, $x\beta^{-1}$ bloklarının ayrık birleşimine eşit olur. $\text{im}(\beta) \cap \Omega = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ ve $b_1 < b_2 < \dots < b_p$ olsun. Ω yalnızca bir tane sabit nokta içerir ve bu eleman b_i olsun, yani $b_i\beta = b_i$ olsun. Bu

durumda bloklar şu şekilde gruplanır ve

$$\text{azalan bloklar} : b_{i+1}\beta^{-1}, \dots, b_r\beta^{-1},$$

$$\text{artan bloklar} : b_1\beta^{-1}, \dots, b_{i-1}\beta^{-1},$$

$$\text{sabit blok} : b_i\beta^{-1}$$

olur. Her $b_j\beta^{-1}$ ($j = 1, 2, \dots, i-1$) artan bloğu için

$$I_j = [b_j - m_\beta(b_j) \rightarrow b_j - m_\beta(b_j) + 1] \dots [b_j - 1 \rightarrow b_j]$$

olarak tanımlansın. Her bir $b_l\beta^{-1}$ ($l = i+1, i+2, \dots, r$) azalan bloğu için

$$D_l = [b_l + m_\beta(b_l) \rightarrow b_l + m_\beta(b_l) - 1] \dots [b_l + 1 \rightarrow b_l],$$

olarak ve $b_i\beta^{-1}$ sabit bloğu için

$$S^l = [b_i - m_\beta^l(b_i) \rightarrow b_i - m_\beta^l(b_i) + 1] \dots [b_i - 1 \rightarrow b_i],$$

$$S^r = [b_i + m_\beta^r(b_i) \rightarrow b_i + m_\beta^r(b_i) - 1] \dots [b_i + 1 \rightarrow b_i],$$

şeklinde tanımlansın (Zhao, 2014).

Lemma 2.62. $\beta = S^l I_{i-1} \dots I_1 S^r D_{i+1} \dots D_r$ olur (Yang, 1999).

İspat. İspatı için (Yang, 1999) Lemma 2.2' ye bakınız. □

Tanım 2.63. X_n içinde boş olmayan bir A alt kümesi için

$$E^+(A) = \{[i \rightarrow i+1] : i \in X_n \setminus (A \cup \{n\})\}$$

olsun. Ayrıca eğer A kümesi X_n veya $X_n \setminus \{n\}$ ise $E^+(A) = \emptyset$ olduğunu açıktır.

Tanım 2.64. $\mathcal{O}_n^+$ yarıgrubunda J_{n-1} kümesi içindeki idempotent elemanlardan oluşan küme F ile gösterilsin. Yani

$$F = \{\alpha \in J_{n-1} : \alpha^2 = \alpha\}$$

olur. Bu durumda F , J_{n-1} kümesindeki idempotent elemanlardan oluşan kümedir.

Lemma 2.65.

$$F = E_{n-1}^- \cup E^+(A)$$

olur (Zhao, 2014).

Lemma 2.66. $\alpha \in \mathcal{O}_n^+(A)$ olsun. α 'nın idempotent eleman olması için gerek ve yeter şart, her $t \in \text{im}(\alpha)$ için,

$$t\alpha = t \quad \text{ve}$$

$$t = \min\{x : x \in \text{im}(\alpha)^{-1} \cap (A \cup \{t\})\}$$

olmasıdır (Zhao, 2014).

Teorem 2.67. $n \geq 3$ için $\mathcal{O}_n^+(A) = \langle F \rangle$ olur (Zhao, 2014).

Teorem 2.68. $n \geq 3$ olsun. O zaman $\text{idrank}(\mathcal{O}_n^+(A)) = 2n - 2 - |A \setminus \{n\}|$ olur (Zhao, 2014).

Teorem 2.69. $n \geq 3$ olsun. Eğer $1 \in A$ ise $\text{rank}(\mathcal{O}_n^+(A)) \geq n - 1$ ve eğer $1 \notin A$ ise $\text{rank}(\mathcal{O}_n^+(A)) \geq n$ olur (Zhao, 2014).

2.6. Sıra Koruyan Kısmi Dönüşümler Yarıgrubu

Tanım 2.70.

$$\mathcal{PO}_n^+ = \mathcal{PO}_n \setminus \{1_n\}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.71. $\alpha, \beta \in \mathcal{PO}_n^+$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır;

$$\text{i) } \alpha \mathcal{L} \beta \iff \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta),$$

$$\text{ii) } \alpha \mathcal{R} \beta \iff \ker(\alpha) = \ker(\beta)$$

(Laradji ve Umar, 2004).

Bazı kombinatorik yaklaşımlar aracılığıyla, $\mathcal{PO}_n^+$ yarıgrubunun kardinalitesi için bir formül türetmeyi amaçlıyoruz. X_m kümesi üzerinde tanımlı olan ρ denklik bağıntısı, denklik sınıfları X_m 'nin konveks alt kümeleri olacak şekilde tanımlanmışsa, bu tür bir bağıntıya *konveks denklik* adı verilir. Ayrıca, ρ bağıntısı için $|X_m/\rho| = r$ olması durumunda ρ 'ya ağırlığı r olan denklik denir.

Ağırlığı r olan bir konveks denklik, $1, 2, \dots, m$ elemanları arasındaki $m - 1$ boşluğa $r - 1$ adet sınır yerleştirilerek tanımlanır. (Örneğin, X_6 kümesi üzerinde sınıfları $\{1, 2, 3\}$, $\{4\}$, ve $\{5, 6\}$ olan ağırlığı 3 olan konveks eşdeğerlik, 3 ile 4 ve 4 ile 5 arasına iki sınır yerleştirilerek oluşturulur.)

Bu durumda, X_m üzerindeki ağırlığı r olan konveks denkliklerin sayısı aşağıdaki gibidir

$$\binom{m-1}{r-1}$$

olur ve $r = 1, 2, \dots, n$ için

$$W_r = \{\alpha \in \mathcal{PO}_n^+ : |\text{dom}(\alpha)| = r\}$$

kümesini tanımlayalım.

$|\text{dom}(\alpha)| = r$ ise $(\text{im}(\alpha))$ mutlaka X_n 'nin bir alt kümesidir ve $|\text{im}(\alpha)| = s \leq r$ olacak şekilde s sayısı vardır. Ayrıca, $\ker(\alpha)$, $\text{dom}(\alpha)$ üzerinde ağırlığı s olan bir konveks denklidir. Bu durumda

$$|W_r| = \binom{n}{r} \sum_{s=1}^r \binom{n}{s} \binom{r-1}{s-1}$$

olur ve

$$\sum_{s=1}^r \binom{n}{s} \binom{r-1}{s-1}$$

ifadesi, $(1+x)^n(1+x)^{r-1} = (1+x)^{n+r-1}$ açılımında x^r teriminin katsayısıdır. Dolayısıyla

$$\sum_{s=1}^r \binom{n}{s} \binom{r-1}{s-1} = \binom{n+r-1}{r}$$

olur. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur,

$$|\mathcal{PO}_n^+| + 1 = \sum_{r=1}^n \binom{n}{r} \binom{n+r-1}{r}.$$

Ayrıca,

$$(1-x)^{-n} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r \quad (|x| < 1)$$

olduğundan aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 2.72. $|\mathcal{PO}_n^+| + 1$ ifadesi $(1+x)^n(1-x)^{-n}$ ifadesinin kuvvet serisinde x^n teriminin katsayısıdır (Gomes ve Howie, 1987).

n sayısı büyüdükçe $|\mathcal{PO}_n^+|$ sayısı oldukça hızlı artar. Bazı n değerleri için $|\mathcal{PO}_n^+|$ sayısı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

n	2	3	4	5
$ \mathcal{PO}_n^+ $	7	37	191	1001

Tanım 2.73. $\alpha \in \mathcal{P}_n$ olmak üzere $|\text{dom}(\alpha)| = r$ ve $|\text{im}(\alpha)| = s$ ise $\alpha \in [r, s]$ yazılır.

Teorem 2.74. $n \geq 2$ olmak üzere,

$$\text{rank}(\mathcal{PO}_n^+) \geq 2n - 1$$

olur (Gomes ve Howie, 1987).

İspat. $\alpha \in [r, s]$ olsun. Bu durumda $0 \leq s \leq r \leq n$ olur.

$$\mathcal{J}_{n-1} = \{\alpha \in \mathcal{PO}_n : |\text{im}(\alpha)| = n - 1\}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda

$$\mathcal{J}_{n-1} = [n, n-1] \cup [n-1, n-1]$$

olur. $[n, n-1]$ kümesinde, $|1, 2|, |2, 3|, \dots, |n-1, n|$ ifadeleriyle indekslenen $n-1$ adet $\mathcal{R}$ -sınıfı bulunur. Ayrıca $[n-1, n-1]$ kümesi, birebir kısmi fonksiyonlardan oluşur ve her biri $X_n \setminus \{i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ile indekslenen n adet $\mathcal{R}$ -sınıfı içerir. Böylece

$$\text{rank}(\mathcal{PO}_n^+) \geq 2n - 1$$

olur. □

Lemma 2.75. $r = 1, 2, \dots, n-2$ için

$$[r, r] \subseteq [r+1, r+1][r+1, r+1]$$

olur (Gomes ve Howie, 1987).

İspat. $\alpha \in [r, r]$ olsun,

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{pmatrix}$$

ve $a_1 < a_2 < \dots < a_r, b_1 < b_2 < \dots < b_r$ koşulları sağlanır. $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ sıralı r -lisinde $a_i \geq a_{i-1} + 2$ ise i . sırada bir boşluk vardır denir. Ayrıca, $a_1 \geq 2$ ise 1. sırada bir boşluk var denir ve $a_r \leq n - 1$ ise $r + 1$. sırada bir boşluk var denir. Benzer tanımlar $(b_1, b_2, \dots, b_r)$ sıralı r -ikilisi için de geçerlidir. $r \leq n - 2$ ise en az bir boşluk vardır. α elemanı için $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ sıralı r -ikilisinde i . pozisyonda bir boşluk ve $(b_1, b_2, \dots, b_r)$ sıralı r -ikilisinde j . pozisyonda bir boşluk olduğunu varsayalım. $a_{i-1} < x < a_i$ ve $b_{j-1} < y < b_j$ olacak şekilde x ve y vardır, ayrıca $i = 1$ için $x = 1$ ve $i = r + 1$ için $x = n$ alınabilir. $i \leq j$ ya da $i > j$ olmasına göre iki durum vardır. Öncelikle $i \leq j$ olduğunu varsayalım. O halde, ξ dönüşümü $\{a_1, a_2, \dots, a_r\} \cup \{x\}$ kümesinden $\{1, 2, \dots, r+2\} \setminus \{j+1\}$ kümesine sıralamayı koruyan örten bir dönüşüm olsun. Dolayısıyla, $\xi \in [r+1, r+1]$ olur ve

$$a_k \xi = \begin{cases} k & \text{eğer } k \leq i-1 \text{ ise,} \\ k+1 & \text{eğer } i \leq k \leq j-1 \text{ ise,} \\ k+2 & \text{eğer } k \geq j \text{ ise,} \end{cases} \quad (2.1)$$

ve

$$x\xi = i$$

olur. η dönüşümünü $\{1, 2, \dots, r+2\} \setminus \{i\}$ kümesinden $\{b_1, b_2, \dots, b_r\} \cup \{y\}$ kümesine sıralamayı koruyan örten bir dönüşüm olsun. $\eta \in [r+1, r+1]$ ve

$$b_k \eta = \begin{cases} b_k & \text{eğer } k \leq i-1, \\ b_{k-1} & \text{eğer } i+1 \leq k \leq j, \\ y & \text{eğer } k = j+1, \\ b_{k-2} & \text{eğer } k \geq j+2. \end{cases} \quad (2.2)$$

olur, (2.1) ve (2.2)'den $\xi\eta = \alpha$ olur.

Şimdi $i > j$ olduğunu varsayalım. $\xi : \{a_1, a_2, \dots, a_r\} \cup \{x\} \rightarrow \{1, 2, \dots, r+2\} \setminus \{j\}$ sıra koruyan örten bir dönüşüm olsun ve η da benzer şekilde $\{1, 2, \dots, r+2\} \setminus \{i+1\}$ kümesinden $\{b_1, b_2, \dots, b_r\} \cup \{y\}$ kümesine sıra koruyan örten bir dönüşüm

olsun. O zaman

$$\begin{aligned} a_k \xi &= \begin{cases} k & \text{eğer } k \leq j-1, \\ k+1 & \text{eğer } j \leq k \leq i-1, \\ k+2 & \text{eğer } k \geq i, \end{cases} \\ x\xi &= i+1, \end{aligned}$$

diğer yandan

$$k\eta = \begin{cases} b_k & \text{eğer } k \leq j-1, \\ y & \text{eğer } k = j, \\ b_{k-1} & \text{eğer } j+1 \leq k \leq i, \\ b_{k-2} & \text{eğer } k \geq i+2. \end{cases}$$

olup $\xi\eta = \alpha$ olur. □

Lemma 2.76. Eğer $1 \leq s < r \leq n-1$ ise, o zaman $[r, s] \subseteq [r, r][n, s]$ olur (Gomes ve Howie, 1987).

İspat. $\alpha \in [r, s]$ olsun. α elemanının tanım kümesi $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ ve $a_1 < a_2 < \dots < a_r$ olsun. Ayrıca, $i = 1, 2, \dots, r$ için $a_i\alpha = b_i$ olsun. ξ fonksiyonunu A üzerinde özdeşlik olarak tanımlayalım. η dönüşümünü aşağıdaki şekilde tanımlansın,

$$x\eta = \begin{cases} x\alpha & \text{eğer } x \in A, \\ b_1 & \text{eğer } x < a_1 \\ b_i & \text{eğer } a_i < x < a_{i+1}, \\ b_r & \text{eğer } x > a_r. \end{cases}$$

Bu durumda $\xi \in [r, r]$, $\eta \in [n, s]$ ve $\xi\eta = \alpha$ olur. □

$s \leq n-1$ için $[n, s] \subseteq \langle [n, n-1] \rangle$ olduğu bilinmektedir (Howie, 1971). Ayrıca $\mathcal{J}_{n-1} = [n, n-1] \cup [n-1, n-1]$ olduğundan aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Lemma 2.77. $\langle \mathcal{J}_{n-1} \rangle = \mathcal{PO}_n^+$ (Gomes ve Howie, 1987).

$i = 2, 3, \dots, n$ için $[n-1, n-1]$ kümesinin elemanı olan $X_n \setminus \{i\}$ kümesinden $X_n \setminus \{i-1\}$ kümesine örten ve sıra koruyan dönüşümü α_i ile gösterelim. Benzer şekilde,

α_1 dönüşümü $X_n \setminus \{1\}$ kümesinden $X_n \setminus \{n\}$ kümesine örten ve sıra koruyan dönüşüm olsun.

Örnek 2.78. $n = 4$ için

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

olur.

$\mathcal{B}_P = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ve $\mathcal{B}_T = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$ olarak tanımlıyalım. Burada, daha önce tanımlandığı gibi, $\varepsilon_i = [i \mapsto i + 1] \in [n, n - 1]$ 'dir. $\mathcal{B} = \mathcal{B}_P \cup \mathcal{B}_T$ olsun. $2n - 1$ elemandan oluşan $\mathcal{B}$ kümesinin $\mathcal{PO}_n^+$ yarıgrubunun bir doğuray kümesi olduğunu göstereceğiz.

Lemma 2.79. $[n, n - 1] \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle$ olur (Gomes ve Howie, 1987).

İspat. İspatı için (Gomes ve Howie, 1987) Lemma 3.11'e bakınız. □

Lemma 2.80. $[n - 1, n - 1] \subseteq \langle \mathcal{B}_P \rangle \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle$ olur (Gomes ve Howie, 1987).

İspat. $\beta \in [n - 1, n - 1]$ olmak üzere $\text{dom}(\beta) = X_n \setminus \{i\}$ ve $\text{im}(\beta) = X_n \setminus \{j\}$ olsun. Eğer $i > j$ ise $\beta = \alpha_i \alpha_{i-1} \dots \alpha_{j+1}$ olur ve eğer $i \leq j$ ise $\beta = \alpha_i \alpha_{i-1} \dots \alpha_1 \alpha_n \dots \alpha_{j+1}$ olur. Böylece ispat tamamlanır. □

Lemma 2.77, Lemma 2.79 ve Lemma 2.80'dan $\mathcal{B}$ kümesi $\mathcal{PO}_n^+$ yarıgrubunun bir doğuray kümesidir.

Sonuç 2.81. $\text{rank}(\mathcal{PO}_n^+) = 2n - 1$ olur (Gomes ve Howie, 1987).

Teorem 2.82. $\mathcal{PO}_n^+$ idempotent doğuraylı bir yarıgruptur (Gomes ve Howie, 1987).

İspat. $i = 1, 2, \dots, n$ için $X_n \setminus \{i\}$ üzerindeki birim dönüşüm δ_i ile gösterilsin. Ayrıca, $D = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ ve $E_{n-1} = \{\alpha \in \mathcal{O}_n^+ : \alpha^2 = \alpha, |\text{im}(\alpha)| = n - 1\}$ olmak üzere $\mathcal{K} = E_{n-1} \cup D$ olsun. $|\mathcal{K}| = 3n - 2$ ve $\mathcal{K}$ kümesinin tüm elemanları idempotenttir. $\langle E_{n-1} \rangle = \mathcal{O}_n^+$ olduğu bilinmektedir (Howie, 1971), böylece $\mathcal{O}_n^+ \subseteq \langle \mathcal{K} \rangle$ olur. Ayrıca $i = 2, 3, \dots, n$ için $\alpha_i = \delta_i \epsilon_{i-1} \in DE_{n-1} \subseteq \langle \mathcal{K} \rangle$ ve $\alpha_1 = \delta_1 \gamma \in D\mathcal{O}_n^+ \subseteq \langle \mathcal{K} \rangle$ olur. Böylece, $\mathcal{B}_P \subseteq \langle \mathcal{K} \rangle$ olur ve Lemma 2.80 'ye göre $[n - 1, n - 1]$ kümesinin her elemanı $\langle \mathcal{K} \rangle$ kümesindedir. □

Lemma 2.83. $\langle \mathcal{K} \rangle = \mathcal{PO}_n^+$ olur (Gomes ve Howie, 1987).

İspat. İspatı için (Gomes ve Howie, 1987) Lemma 3.14'e bakınız. □

Sonuç 2.84. $\text{idrank}(\mathcal{PO}_n^+) = 3n - 2$ olur (Gomes ve Howie, 1987).

2.7. Bir Yarıgrupun Sıfır Bölenleri

Tanım 2.85. S sıfır elemana sahip bir yarıgrup ve $S^* = S \setminus \{0\}$ olsun. Bu durumda

$$L(S) = \{\alpha \in S : \alpha.\beta = 0 \text{ olacak şekilde } \exists \beta \in S^* \text{ vardır}\}$$

kümesine S yarıgrupunun sol sıfır bölenler kümesi denir ve

$$R(S) = \{\alpha \in S : \gamma.\alpha = 0 \text{ olacak şekilde } \exists \gamma \in S^* \text{ vardır}\}$$

kümesine S yarıgrupunun sağ sıfır bölenler kümesi denir.

Daha önceki çalışmalarda $\mathcal{C}_n$ yarıgrupunun sağ ve sol bölenler kümesi bulunmuştur (Toker, 2021 a). $\mathcal{P}_n$ yarıgrupunun sağ ve sol bölenler kümesi bulunmuştur (Toker, 2021 b). Serbest yarıgrupların yarıgrupunun sağ ve sol bölenler kümesi bulunmuştur (Toker, 2016). $\mathcal{D}_n$ yarıgrupunun sağ ve sol bölenler kümesi bulunmuştur (Toker ve Eşidir, 2022).

3. GEREÇ VE YÖNTEM

Tez hazırlanırken literatür taraması yapılmıştır, konu ile ilgili kitap, makaleler ve tezler incelenmiştir. X_n kümesi üzerinde tanımlı sıra koruyan ve A -azalan kısmi dönüşümlerden oluşan $\mathcal{PO}_n^+(A)$ yapısı incelenmiştir.

4. BULGULAR

4.1. Sıra Koruyan ve A-azalan Kısmi Dönüşümler Yarıgrubu

Tanım 4.1. $\emptyset \neq A \subseteq X_n$ olmak üzere;

$$\mathcal{PO}_n^+(A) = \{\alpha \in \mathcal{PO}_n^+ : \forall x \in A \text{ için } y \in \text{dom}(\alpha) \text{ ve } y \leq x \Rightarrow y\alpha \leq x\}$$

kümesine X_n üzerindeki sıra koruyan ve A-azalan kısmi dönüşümler yarıgrubu denir.

Lemma 4.2. $\mathcal{PO}_n^+(A) \leq \mathcal{PO}_n^+$ olur.

İspat. $\alpha, \beta \in \mathcal{PO}_n^+(A)$ olsun. $\alpha\beta \in \mathcal{PO}_n^+(A)$ olduğunu gösterelim. $\alpha\beta \in \mathcal{PO}_n^+$ olduğu açıktır. Ayrıca, $x \in A$ olmak üzere, $y \in \text{dom}(\alpha\beta)$ ve $y \leq x$ olsun. $y \in \text{dom}(\alpha\beta)$ ise $y \in \text{dom}(\alpha)$ olur. Böylece $y\alpha = z$ olacak şekilde $z \in X_n$ vardır. Ayrıca $y \in \text{dom}(\alpha)$, $y \leq x$ ve $\alpha \in \mathcal{PO}_n^+(A)$ olduğundan $y\alpha \leq x$ yani $z \leq x$ olur. Ayrıca,

$$y(\alpha\beta) = (y\alpha)\beta = z\beta$$

olup

$$z \in \text{dom}(\beta) \text{ ve } z \leq x$$

olur. $\beta \in \mathcal{PO}_n^+(A)$ olduğundan $z\beta \leq x$ olur. Sonuç olarak

$$\mathcal{PO}_n^+(A) \leq \mathcal{PO}_n^+$$

olur. □

Teorem 4.3. $\alpha, \beta \in \mathcal{PO}_n^+(A)$ olmak üzere,

$$(\alpha, \beta) \in \mathcal{L}^* \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$$

olur.

İspat. $(\Leftarrow) \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$ olsun. $\mathcal{PO}_n^+(A) \leq \mathcal{PO}_n^+$ olduğundan $(\alpha, \beta) \in \mathcal{L}^*$ olur.

$(\Rightarrow) (\alpha, \beta) \in \mathcal{L}^*$ olsun. Tanımdan $\forall \gamma, \delta \in (\mathcal{PO}_n^+(A))^1$ için $\alpha\gamma = \alpha\delta \Leftrightarrow \beta\gamma = \beta\delta$ olur. $x \neq 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x \notin im(\alpha) &\Leftrightarrow \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & x-1 & x & x+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & x-1 & x-1 & x+1 & \cdots & n \end{pmatrix} = \alpha \cdot 1 \\ &\Leftrightarrow \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & x-1 & x & x+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & x-1 & x-1 & x+1 & \cdots & n \end{pmatrix} = \beta \cdot 1 \\ &\Leftrightarrow x \notin im(\beta) \end{aligned}$$

olur. $1 \notin A$ ise bu durumda;

$$\begin{aligned} 1 \notin im(\alpha) &\Leftrightarrow \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \alpha \cdot 1 \\ &\Leftrightarrow \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \beta \cdot 1 \\ &\Leftrightarrow 1 \notin im(\beta) \end{aligned}$$

olur ve $1 \in A$ ise bu durumda;

$$\begin{aligned} 1 \notin im(\alpha) &\Leftrightarrow \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ - & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \alpha \cdot 1 \\ &\Leftrightarrow \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ - & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \beta \cdot 1 \\ &\Leftrightarrow 1 \notin im(\beta) \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak;

$$im(\alpha) = im(\beta)$$

olur. □

Teorem 4.4. $\alpha, \beta \in \mathcal{PO}_n^+(A)$ olmak üzere,

$$(\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^* \Leftrightarrow \ker(\alpha) = \ker(\beta)$$

olur.

İspat. $(\Leftarrow) \ker(\alpha) = \ker(\beta)$ olsun. $\mathcal{PO}_n^+(A) \leq \mathcal{PO}_n^+$ olduğundan $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^*$ olur.

$(\Rightarrow) (\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^*$ olsun. Bu durumda $\forall \gamma, \delta \in \mathcal{PO}_n^+(A)^1$ için,

$$\gamma\alpha = \delta\alpha \Leftrightarrow \gamma\beta = \delta\beta$$

olur. $x, y \in X_n$ ve $x < y$ olsun.

$$\phi_{x,y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & x-1 & x & \cdots & y & y+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & x-1 & x & \cdots & x & y+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

olmak üzere $\phi_{x,y} \in \mathcal{PO}_n^+(A)$ olur. Ayrıca,

$$x\alpha = y\alpha \Leftrightarrow \phi_{x,y}.\alpha = 1.\alpha$$

$$\Leftrightarrow \phi_{x,y}.\beta = 1.\beta$$

$$\Leftrightarrow x\beta = y\beta$$

olur, sonuç olarak

$$\ker(\alpha) = \ker(\beta)$$

olur. □

Teorem 4.5. $\alpha, \beta \in \mathcal{PO}_n^+(A)$ olmak üzere,

$$(\alpha, \beta) \in \mathcal{D}^* \Leftrightarrow |im(\alpha)| = |im(\beta)|$$

olur.

İspat. $\mathcal{PO}_n^+(A)$ yarıgrubunda K bağıntısını

$$(\alpha, \beta) \in K \Leftrightarrow |im(\alpha)| = |m(\beta)|$$

olarak tanımlayalım. Tanımdan K 'nın bir denklik bağıntısı olduğu açıktır. Teorem 4.3'ten $\mathcal{L}^* \subseteq K$ ve Teorem 4.4'tan $\mathfrak{R}^* \subseteq K$ olur. Ayrıca, $\mathcal{D}^*$ tanımından $\mathcal{D}^* \subseteq K$ olur.

$(\alpha, \beta) \in K$ olsun. Bu durumda;

$$|im(\alpha)| = |m(\beta)| = k$$

biçimindedir, böylece

$$\begin{aligned} \alpha &= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_k & A_{k+1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k & - \end{pmatrix} \\ \beta &= \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_k & B_{k+1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_k & - \end{pmatrix} \end{aligned}$$

formundadır. Ayrıca

$$\begin{aligned}\gamma &= \begin{pmatrix} \{n-k+1\} & \{n-k+2\} & \cdots & \{n\} & \{1, 2, \dots, n-k\} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k & - \end{pmatrix} \\ \delta &= \begin{pmatrix} \{n-k+1\} & \{n-k+2\} & \cdots & \{n\} & \{1, 2, \dots, n-k\} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_k & - \end{pmatrix}\end{aligned}$$

olarak tanımlanırsa; $\alpha \mathcal{L}^* \gamma \mathcal{R}^* \delta \mathcal{L}^* \beta$ olup $\mathcal{L}^* \circ \mathcal{R}^* \circ \mathcal{L}^* \subseteq \mathcal{D}^*$ olduğundan $(\alpha, \beta) \in \mathcal{D}^*$ olur. Böylece $K \subseteq \mathcal{D}^*$ olup. Sonuç olarak;

$$K = \mathcal{D}^*$$

olur. □

Not 4.6. $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ - & - & \cdots & - \end{pmatrix}$ olarak tanımlanır. Ayrıca θ elemanı $\mathcal{PO}_n^+(A)$ yarıgrubunun sıfır elemanıdır.

4.2. $\mathcal{PO}_n^+(A)$ Yarıgrubunun İdempotent Elemanları

Lemma 4.7. $\alpha \in \mathcal{PO}_n^+(A)$ ve $|im\alpha| = k$ olsun. O zaman; $im(\alpha) = im(\beta)$ ve $\ker(\beta)$ sınıfları $\{n-k+1\}, \{n-k+2\}, \dots, \{n\}$ olacak şekilde $\beta \in \mathcal{PO}_n^+(A)$ vardır.

İspat. $\alpha \in \mathcal{O}_n^+(A)$ ise bu koşulları sağlayan $\beta \in \mathcal{O}_n^+(A)$ vardır (Zhao, 2014). $\alpha \notin \mathcal{O}_n^+(A)$ olsun. Bu durumda;

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_k & A_{k+1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k & - \end{pmatrix}$$

olmak üzere $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ biçimindedir.

$$\beta = \begin{pmatrix} \{n-k+1\} & \{n-k+2\} & \cdots & \{n\} & \{1, 2, \dots, n-k\} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k & - \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanırsa $\beta \in \mathcal{PO}_n^+(A)$ olup, $im(\alpha) = im(\beta)$ ve $\ker(\beta)$ sınıfları $\{n-k+1\}, \{n-k+2\}, \dots, \{n\}$ olur. □

Lemma 4.8. $\mathcal{PO}_n^+(A)$ 'nın her bir $\mathcal{L}^*$ ve her bir $\mathcal{R}^*$ sınıfında en az bir idempotent eleman vardır.

İspat. θ için $\theta^2 = \theta$ olduğu açıktır. $\alpha \in \mathcal{O}_n(A)$ ise $\ker(\alpha) = \ker(\mu)$ ve $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\gamma)$ olacak şekilde $\mu^2 = \mu$ ve $\gamma^2 = \gamma$ elemanları vardır (Zhao, 2014). $\alpha \in \mathcal{PO}_n^+(A) \setminus \mathcal{O}_n(A)$ ise

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_r & A_{r+1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_r & - \end{pmatrix} \in \mathcal{PO}_n^+(A) \text{ biçimindedir.}$$

$\forall 1 \leq i \leq r$ için $\min A_i = x_i$ olsun.

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_r & A_{r+1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_r & - \end{pmatrix}$$

olarak seçilirse $\varepsilon^2 = \varepsilon$ olur. $y \in \text{dom}(\alpha)$ olsun. $\exists 1 \leq k \leq r$ için $y \in A_k$ olur. Ayrıca

$x \in A$ için $y \leq x$ olsun. $y\alpha = x_k \leq y \leq x$ olduğundan $\varepsilon \in \mathcal{PO}_n^+(A)$ olur. Böylece $\mathcal{PO}_n^+(A)$ 'nin her bir $\mathfrak{K}^*$ sınıfında en az bir idempotent eleman vardır. Ayrıca,

$$\beta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_r & X_n \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_r\} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_r & - \end{pmatrix} \in \mathcal{PO}_n^+(A) \text{ olup}$$

$\alpha\mathcal{L}^*\beta$ ve $\beta^2 = \beta$ olur. Böylece $\mathcal{PO}_n^+(A)$ 'nin her bir $\mathcal{L}^*$ sınıfında en az bir idempotent eleman vardır. $\square$

4.3. $\mathcal{PO}_n^+(A)$ 'nin Sol ve Sağ Sıfır Bölenleri

Tanım 4.9. $\mathcal{PO}_n^+(A)^* = \mathcal{PO}_n^+(A) \setminus \{\theta\} = \Delta$ olsun.

$$L = L(\mathcal{PO}_n^+(A)) = \{\alpha \in \mathcal{PO}_n^+(A) : \alpha\beta = \theta \text{ olacak şekilde } \exists \beta \in \Delta \text{ vardır} \}$$

kümesi $\mathcal{PO}_n^+(A)$ 'nin sol sıfır bölenlerin kümesi ve

$$R = R(\mathcal{PO}_n^+(A)) = \{\alpha \in \mathcal{PO}_n^+(A) : \gamma\alpha = \theta \text{ olacak şekilde } \exists \gamma \in \Delta \text{ vardır} \}$$

kümesi $\mathcal{PO}_n^+(A)$ 'nin sağ sıfır bölenlerin kümesi olur.

Teorem 4.10.

$$L = \mathcal{PO}_n^+(A)$$

$$R = \mathcal{PO}_n^+(A) \setminus \mathcal{O}_n^+(A)$$

olur.

İspat. $\alpha \in \mathcal{PO}_n^+(A)$ olsun. $\alpha = \theta$ ise $\alpha \in L$ olduğu açıktır. $\alpha \in \mathcal{PO}_n^+(A)^*$ ise,

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{pmatrix} \text{ yada}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_r & A_{r+1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r & - \end{pmatrix}$$

biçimindedir. $k = \min(X_n \setminus \{b_1, b_2, \dots, b_r\})$ olsun.

$$\beta = \begin{pmatrix} \{b_1, b_2, \dots, b_r\} & X_n \setminus \{b_1, b_2, \dots, b_r\} \\ - & k \end{pmatrix}$$

olarak seçilirse, $\beta \in \mathcal{PO}_n^+(A)^*$ olup $\alpha\beta = \theta$ olur. Sonuç olarak,

$$L = \mathcal{PO}_n^+(A)$$

olur. $\alpha \in \mathcal{PO}_n^+(A)$ olsun. $\alpha = \theta$ ise $\alpha \in R$ olduğunu açıktır. $\alpha \in \mathcal{PO}_n^+(A)^* \setminus \mathcal{O}_n^+(A)$ olsun. Bu durumda;

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_r & A_{r+1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r & - \end{pmatrix}$$

biçimindedir ve $A_{r+1} \neq \emptyset$ olur. $m = \min(A_{r+1})$ olsun.

$$\beta = \begin{pmatrix} X_n \setminus \{m\} & m \\ - & m \end{pmatrix}$$

olarak seçilirse. $\beta \in \mathcal{PO}_n^+(A)^*$ olup $\beta \cdot \alpha = \theta$ olur. Bu durumda $\alpha \in R$ olur. $\alpha \in \mathcal{O}_n^+(A)$ ise

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{pmatrix}$$

biçimindedir. $\beta \in \mathcal{PO}_n^+(A)$ için $\beta \cdot \alpha = \theta$ ise $\beta = \theta$ olur. Bu durumda $\alpha \notin R$ olur. Sonuç olarak

$$R = \mathcal{PO}_n^+(A) \setminus \mathcal{O}_n^+(A)$$

olur. □

4.4. $\mathcal{PO}_n^+(A)$ Yarıgrubunun Nilpotent Elemanları

Lemma 4.11. $\alpha \in \mathcal{PO}_n^+(A)$ olsun. α 'nın nilpotent olması için gerek ve yeter koşul $\forall x \in \text{dom}(\alpha)$ için $x\alpha \neq x$ olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)\alpha = \theta$ ise sonuç açıktır. $\text{dom}(\alpha) \neq \emptyset$ olsun. $\exists x \in \text{dom}(\alpha)$ için $x\alpha = x$ olduğunu varsayalım, bu durumda

$$x = x\alpha = x\alpha^2 = \dots$$

olduğundan α nilpotent eleman değildir.

$(\Leftarrow)\forall x \in \text{dom}(\alpha)$ için $x\alpha \neq x$ olsun. $k \geq 2$ için $\text{dom}(\alpha^k) \neq \emptyset$ ise $\forall x \in \text{dom}(\alpha^k)$ için $x\alpha^k \neq x$ olduğunu gösterelim. $\text{dom}(\alpha^k) = \emptyset$ ise α nilpotent eleman olur. $x \in \text{dom}(\alpha^k)$ olsun. Bu durumda, $1 \leq t \leq k$ olacak şekilde her t sayısı için $x \in \text{dom}(\alpha^t)$ olur. Böylece $x \in \text{dom}(\alpha)$ olup $x\alpha \neq x$ olur. Sonuç olarak, $x\alpha < x$ ya da $x\alpha > x$ olur. Sıra koruma özelliğinden $x\alpha^k < x$ ya da $x\alpha^k > x$ olur. Böylece $x\alpha^k \neq x$ olur. $|\text{im}(\alpha)| = r$ ve $b_1 < b_2 < \dots < b_r$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ b_1 & b_2 & \dots & b_r \end{pmatrix}$$

olsun. $b_r \in \text{dom}(\alpha)$ ise $b_r\alpha \neq b_r$ olur ve $x_r = \min\{x : x \in A_r\}$ olmak üzere $b_r < x_r$ olur. Ayrıca sıra koruma özeliğinden $\text{im}(\alpha) \cap A_r = \emptyset$ olur. Böylece $b_r \notin \text{im}(\alpha^2)$ olup $\text{im}(\alpha^2) \subset \text{im}(\alpha)$ olur. $b_r \notin \text{dom}(\alpha)$ ise $|\text{dom}(\alpha) \cap \text{im}(\alpha)| < r$ olur. Ayrıca $(\text{dom}(\alpha) \cap \text{im}(\alpha))\alpha = \text{im}(\alpha^2)$ (Howie, 1995) olduğundan $|\text{im}(\alpha^2)| < r = |\text{im}(\alpha)|$ olup $\text{im}(\alpha^2) \subset \text{im}(\alpha)$ olur. Böylece,

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} A'_1 & A'_2 & \dots & A'_s \\ b'_1 & b'_2 & \dots & b'_s \end{pmatrix}$$

biçiminde olup $s < r$ olur. $\forall x \in \text{dom}(\alpha^2)$ için $x\alpha^2 \neq x$ olup aynı argüman kullanılırsa

$$\text{im}(\alpha) \supset \text{im}(\alpha^2) \supset \text{im}(\alpha^4) \supset \dots$$

elde edilir. $|\text{im}(\alpha)|$ sonlu olduğundan öyle bir $\exists m \in \mathbb{Z}^+$ vardır ve $\text{im}(\alpha^{2m}) = \emptyset$ olur. Böylece α nilpotent eleman olur. $\square$

5. TARTIŞMA

Bu bölümde bulguların genel bir tartışması yapılacaktır. İlk olarak bu çalışmada X_n kümesi üzerinde tanımlı sıra koruyan ve A -azalan kısmi dönüşümlerden oluşan $\mathcal{PO}_n^+(A)$ yapısı tanımlanmıştır. Bu yapının $\mathcal{PO}_n$ yarıgrubunun bir altarıgrubu olduğu gösterilmiştir ve $\mathcal{PO}_n^+(A)$ yarıgrubunun bazı cebirsel özellikleri incelenmiştir.

6. SONUÇLAR

İlk olarak bu çalışmada X_n kümesi üzerinde tanımlı sıra koruyan ve A -azalan kısmi dönüşümlerden oluşan $\mathcal{PO}_n^+(A)$ yapısı incelenmiştir. Bu yapının bir yarıgrup olduğu gösterilmiştir ve bu yarıgrup üzerinde genişletilmiş Green bağıntılarının özellikleri olan $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{R}^*$ ve $\mathcal{D}^*$ bağıntılarının özellikleri bulunmuştur.

$\mathcal{PO}_n^+(A)$ yarıgrupunun her $\mathcal{L}^*$ ve $\mathcal{R}^*$ sınıfında en az bir idempotent elemanın bulunduğu ispatlanmıştır.

$\mathcal{PO}_n^+(A)$ yarıgrupundaki sol sıfır bölen elemanlarının kümesi L ve sağ sıfır bölen elemanlarının kümesi R araştırılmıştır.

$\mathcal{PO}_n^+(A)$ yarıgrupunda bir elemanın nilpotent olması için gerek ve yeter koşullar belirlenmiştir.

7. ÖNERİLER

Bu çalışmada $\mathcal{PO}_n^+(A)$ yarıgrupunun doğuray kümeleri ve rankı bulunmamıştır. Bu cebirsel özellikleri bulunursa yarıgrup teoremi ile ilgili gelecek çalışmalara katkı sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

- Fountain, J. B., (1982). Abundant semigroups. *Proc .London Math .Soc.*, (Ser. 3) 44, 103-129.
- Ganyushkin, O., Mazorchuk, V. (2008). *Classical finite transformation semigroups: an introduction* (Vol. 9). Springer Science Business Media.
- Gomes, G .M. S., Howie, J. M. (1987). On the ranks of certain finite semigroups of transformation. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 101, 395-403.
- Higgins, Peter M. (1993). Combinatorial results for semigroups of order-preserving mappings. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 113 (2), 281-296.
- Howie, J. M. (1995). *Fundamentals of semigroup theory*. Oxford University Press.
- Howie, J. M. (1971). Products of idempotents in certain semigroups of transformations. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 17(2), 223-236.
- Laradji, A., Umar, A. (2004). Combinatorial results for semigroups of order-preserving partial transformations. *Journal of Algebra*, 278(1), 342-359.
- Toker, K. (2016). On the zero-divisor graphs of finite free semilattices. *Turkish Journal of Mathematics*, 40(4), 824-831.
- Toker, K. (2021). Zero-divisor graphs of Catalan monoid. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 50(2), 387-396.
- Toker, K. (2021). Zero-divisor graphs of partial transformation semigroups. *Turkish Journal of Mathematics*, 45(5), 2323-2330.
- Toker, K., Eşidir, Z. (2022). Zero-Divisor Graphs of Order-Decreasing Full Transformation Semigroups. *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 22(1), 68-74.
- Yang, X. L., (1999). Products of Idempotents of Defect 1 in Certain Semigroups of Transformations. *Comm. Algebra*, 27: 3557–3568.
- Zhao, P. (2014). On the semigroups of order-preserving and A-decreasing finite transformations. *Algebra Colloquium*, 21(4), 653-662.