



**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Sıra Koruyan Dönüşümler Yarıgrubunun Özel Bir Alt Yarıgrubunun Sıfır Bölen
Grafiği**

MUHAMMET UYSAL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**Şanlıurfa
2025**



**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Sıra Koruyan Dönüşümler Yarıgrubunun Özel Bir Alt Yarıgrubunun Sıfır Bölen
Grafiği**

MUHAMMET UYSAL

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Kemal TOKER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**Şanlıurfa
2025**

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımız boyunca desteklerini esirgemeyen,engin bilgileriyle beni bilgilendiren çok kıymetli ve saygıdeğer hocam Doç. Dr. Kemal TOKER'e teşekkür ederim. Ayrıca, tez jürisinde bulunan Doç. Dr. Gülay OĞUZ ile tezin son halini almasında önemli katkılar sağlayan Prof. Dr. Haydar ALICI hocalarıma da teşekkürü borç bilirim. Son olarak bana her koşulda ve her durumda destek olan çok değerli eşim Gülhan UYSAL ve kızım Ümmü Arya UYSAL başta olmak üzere tüm aile bireylerime de teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	3
2.1. Grafikler, Yönlü ve Yönsüz Grafikler	3
2.2. Bazı Cebirsel Kavramlar	11
2.3. Sıfır Bölen Elemanlar	12
2.4. Halkalarda Yönlendirilmiş Sıfır Bölen Grafiği	12
2.5. Halkalarda Yönlendirilmemiş Sıfır Bölen Grafiği	13
2.6. Yarıgruplarda Yönlendirilmemiş Sıfır Bölen Grafikler	14
3. GEREÇ VE YÖNTEM	15
4. BULGULAR	16
4.1. $\mathcal{O}_n(A)$ YARIGRUBUNUN SIFIR BÖLEN GRAFİKLERİ	16
5. TARTIŞMA	28
6. SONUÇLAR	29
7. ÖNERİLER	30
KAYNAKLAR	31

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sıra Koruyan Dönüşümler Yarıgrubunun Özel Bir Alt Yarıgrubunun Sıfır Bölen Grafiği

MUHAMMET UYSAL

HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Doç. Dr. Kemal TOKER

Yıl: 2025, sayfa: 31

Bu tezde, X_n üzerinde sıra koruyan ve A-azalan dönüşümler yarıgrubu olan $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun sıfır bölen grafikleri incelenmiştir. X boştan farklı bir küme ve $\mathcal{T}_X$ 'de X üzerindeki tam dönüşümler yarıgrubu olsun. $\mathcal{T}_X$, X 'ten X 'e tüm fonksiyonların kümesidir ve fonksiyonlar bileşke işlemine göre bir yarıgruptur. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ olarak tanımlanır ve bu çalışmada $\mathcal{T}_{X_n}$ yerine $\mathcal{T}_n$ ifadesi kullanılmıştır. $\mathcal{O}_n = \{\alpha \in \mathcal{T}_n : \forall x, y \in X_n \text{ için } x \leq y \iff x\alpha \leq y\alpha\}$ olarak tanımlanan yapıya X_n üzerinde sıra-koruyan dönüşümler yarıgrubu denir ve bu yapı $\mathcal{T}_n$ yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur. $\emptyset \neq A \subseteq X_n$ olmak üzere $\mathcal{O}_n(A) = \{\alpha \in \mathcal{O}_n : x\alpha \leq x (\forall x \in A)\}$ kümesi X_n üzerinde sıra koruyan ve A-azalan dönüşümler yarıgrubu olarak adlandırılır ve bu yarıgrup $\mathcal{O}_n$ yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur. Bu çalışmada $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun yönsüz sıfır bölen grafiği tanımlanmış olup Γ ile gösterilmiştir. $n \geq 4$ için Γ grafiğinin bağlantılı olduğu ispatlanmış olup, Γ grafiğinin köşe sayısı, köşe dereceleri, en büyük ve en küçük köşe derecesi, çapı, en kısa devir uzunluğu hesaplanmıştır ve klik sayısı için bir alt sınır bulunmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: Sıfır Bölen Grafik, Yarıgrup, Bağlantılı Grafik, Köşe Derecesi

ABSTRACT

MASTER THESIS

The Zero Divisor Graph Of A Special Subsemigroup Of Order Preserving Transformation Semigroup

MUHAMMET UYSAL

HARRAN UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Kemal TOKER
Year: 2025, page: 31

In this thesis, the zero-divisor graphs of the semigroup $\mathcal{O}_n(A)$, which is a semigroup of order-preserving and A-decreasing transformations on X_n , are investigated. Let X be a non-empty set and $\mathcal{T}_X$ be the full transformation semigroup on X . $\mathcal{T}_X$ is the set of all functions from X to X and functions are a semigroup with respect to the composition operation. Let $n \in \mathbb{Z}^+$ and $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$. In this study we use $\mathcal{T}_n$ instead of $\mathcal{T}_{X_n}$ for convenience. $\mathcal{O}_n = \{\alpha \in \mathcal{T}_n : \forall x, y \in X_n, x \leq y \iff x\alpha \leq y\alpha\}$ is called the semigroup of order-preserving transformations on X_n and this structure is a subsemigroup of the semigroup $\mathcal{T}_n$. Let $\emptyset \neq A \subseteq X_n$ and $\mathcal{O}_n(A) = \{\alpha \in \mathcal{O}_n : x\alpha \leq x \ (\forall x \in A)\}$. Then $\mathcal{O}_n(A)$ is called the semigroup of order-preserving and A-decreasing transformations on X_n , and this semigroup is a subsemigroup of the semigroup $\mathcal{O}_n$. In this study, the undirected zero divisor graph of the semigroup $\mathcal{O}_n(A)$ is defined and denoted by Γ . It is proven that the Γ is a connected for $n \geq 4$, the cardinality of vertices, vertex degrees, the maximum and the minimum vertex degrees, the diameter, the girth of the Γ graph are calculated and a lower bound for the number of cliques is found.

KEYWORDS: Zero Divisor Graph, Semigroup, Connected Graph, Vertex Degree

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa No
Şekil 2.1. G_1 grafiği	3
Şekil 2.2. G_2 grafiği	4
Şekil 2.3. G_3 grafiği	5
Şekil 2.4. G_4 grafiği	7
Şekil 2.5. G_5 grafiği	7
Şekil 2.6. G_6 grafiği	8
Şekil 2.7. G_7 grafiği	8
Şekil 2.8. G_8 grafiği	9
Şekil 2.9. G_9 grafiği	10
Şekil 2.10. G_{10} grafiği	10
Şekil 2.11. G_{11} grafiği	13
Şekil 4.1. G grafiği	24
Şekil 4.2. Γ grafiği	27

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler Açıklama

X_n	1'den n 'ye kadar olan pozitif tam sayıların kümesi
im	Görüntü kümesi
$ X $	X kümesinin eleman sayısı
$\mathcal{SL}_n$	X_n üzerindeki serbest yarılatı
$\mathcal{B}_n$	X_n üzerindeki tüm bağıntıların kümesi
$\mathcal{P}_n$	X_n üzerindeki kısmi dönüşümler yarıgrubu
$\mathcal{T}_n$	X_n kümesi üzerindeki tam dönüşümler yarıgrubu
$\mathcal{D}_n$	X_n üzerindeki sıra-azaltan dönüşümler yarıgrubu
$\mathcal{C}_n$	X_n üzerindeki sıra-koruyan ve sıra-azaltan dönüşümler yarıgrubu
$\mathcal{O}_n$	X_n kümesi üzerindeki sıra-koruyan dönüşümler yarıgrubu
$\mathcal{O}_n(A)$	X_n kümesi üzerindeki sıra koruyan ve A-azalan dönüşümler yarıgrubu
L	Sol sıfır bölenlerin kümesi
R	Sağ sıfır bölenlerin kümesi
T	İki taraflı sıfır bölenlerin kümesi
Γ	Yönsüz sıfır bölen grafiği
$ V $	Grafiğinin köşe sayısı
deg	Bir köşenin derecesi
Δ	En büyük köşe derecesi
δ	En küçük köşe derecesi
$diam$	Çap
gr	En kısa devir uzunluğu
ω	Klik sayısı
χ	Kromatik sayısı
$\lceil x \rceil$	x sayısından büyük ya da x sayısına eşit olan en küçük tamsayı

1. GİRİŞ

Sıfır bölen grafikler ilk olarak Beck tarafından değişmeli halkalar üzerinde tanımlanmıştır (Beck, 1988). Beck yaptığı tanımda halkanın sıfır bölen grafiğinde halkanın sıfır elemanını da köşe kümesinin elemanı olarak almıştır. Değişmeli halkalar üzerindeki standart sıfır bölen grafikler Anderson ve Livingston tarafından tanımlanmıştır (Anderson ve Livingston, 1999). Değişmeli olmayan halkalar üzerindeki ilk ciddi çalışmalar Redmond tarafından yapılmıştır (Redmond, 2002).

Yarıgrup tanımının ortaya çıkması ve gelişmesi ile birlikte yarıgrupun sıfır bölen kümesi ve grafikleri de önem kazanmıştır (DeMeyer, 2005; DeMeyer ve Ark., 2002). S sıfır elemana sahip bir yarıgrup olsun. $T(S) = \{z \in S \mid zx = 0 = xy \exists x, y \in S \setminus \{0\}\}$ olmak üzere $T(S) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda S yarıgrupunun sıfır bölen grafiği $\Gamma(S)$ ile gösterilir ve bu grafiğin köşe kümesi $T(S) \setminus \{0\}$ olup, $\forall x, y \in T(S) \setminus \{0\}$ ve $x \neq y$ olmak üzere x ve y köşelerinin bir kenar oluşturması için gerek ve yeter koşul için $xy = 0 = yx$ olmasıdır şeklinde tanımlanır.

X boştan farklı bir küme olsun ve $\mathcal{T}_X$ 'de X üzerindeki tam dönüşümler yarıgrubu olsun. $\mathcal{T}_X$, X 'ten X 'e tüm fonksiyonların kümesi olup fonksiyonlar bileşke işlemine göre bir yarıgruptur. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ olarak tanımlanır. Bu çalışmada kolaylık olması amacı ile $\mathcal{T}_{X_n}$ yerine $\mathcal{T}_n$ ifadesi kullanılmıştır. X_n üzerindeki sıra-koruyan dönüşümler yarıgrubu $\mathcal{O}_n = \{\alpha \in \mathcal{T}_n : \forall x, y \in X_n \text{ için } x \leq y \iff x\alpha \leq y\alpha\}$ kümesi olup $\mathcal{O}_n$ yarıgrubu $\mathcal{T}_n$ yarıgrupunun bir alt yarıgrupudur.

$\emptyset \neq A \subseteq X_n$ olmak üzere $\mathcal{O}_n(A) = \{\alpha \in \mathcal{O}_n : x\alpha \leq x (\forall x \in A)\}$ kümesine X_n üzerindeki sıra koruyan ve A -azalan dönüşümler yarıgrubu denir (Zhao, 2014). $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubu $\mathcal{O}_n$ yarıgrupunun bir alt yarıgrupudur. Böylece $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubu hem $\mathcal{O}_n$ yarıgrupunun hem de $\mathcal{T}_n$ yarıgrupunun bir alt yarıgrubu olur. $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrupunun sıfır elemanını içermesi için gerek ve yeter koşul $1 \in A$ olmasıdır (Bugay ve Ark., 2019). Bundan dolayı bu çalışmada $1 \in A$ olduğu varsayılacaktır. θ , sabit 1 fonksiyonu olarak seçilirse $\theta \in \mathcal{O}_n(A)$ olup $\forall \alpha \in \mathcal{O}_n(A)$ için $\alpha\theta = \theta = \theta\alpha$ olur. Böylece, θ elemanı $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrupunun sıfır elemanı olur. Ayrıca bu çalışmada $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrupunun sıfır elemanı θ ile gösterilmiştir.

$\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrupunun sol sıfır bölen kümesi L , sağ sıfır bölen kümesi R ve

iki taraflı sıfır bölen kümesi T 'nin cebirsel yapıları bulunmuş olup bu kümelerin kardinalitesi yani sol sıfır bölen kümesinin kardinalitesi $|L|$, sağ sıfır bölen kümesinin kardinalitesi $|R|$ ve iki taraflı sıfır bölen kümesinin kardinalitesi $|T|$ hesaplanmıştır.

Ayrıca $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun yönsüz sıfır bölen kümesi olan $\Gamma(\mathcal{O}_n(A))$ tanımlanmış olup bu çalışmada kolaylık olması amacıyla $\Gamma(\mathcal{O}_n(A))$ yönsüz grafiği Γ ile gösterilmiştir. Γ grafiği $n \geq 4$ için bağlantılı bir grafik olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca Γ grafiğinin köşe sayısı $|V(\Gamma)|$, $\alpha \in \Gamma$ olmak üzere Γ grafiğinin köşe derecesi $\deg_{\Gamma}(\alpha)$, en büyük köşe derecesi $\Delta(\Gamma)$ ve en küçük köşe derecesi $\delta(\Gamma)$, çapı $diam(\Gamma)$, en kısa devir uzunluğu $gr(\Gamma)$ ile gösterilir ve bu çalışmada bu değerler hesaplanmıştır. Ayrıca grafiğin klik sayısı $\omega(\Gamma)$ ile gösterilir, $\omega(\Gamma)$ için bir alt sınır bulunmuştur. Bu bulgular, sıra-koruyan A-azalan dönüşümler yarıgruplarına ilişkin sıfır bölen grafiklerin yapısal özellikleri ve ilişkileri hakkında derinlemesine bir analiz sağlamakta ve bu alandaki ileri araştırmalara kapı aralamaktadır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde bu tezde kullanılan temel kavramlar ve teoremler verilmiştir.

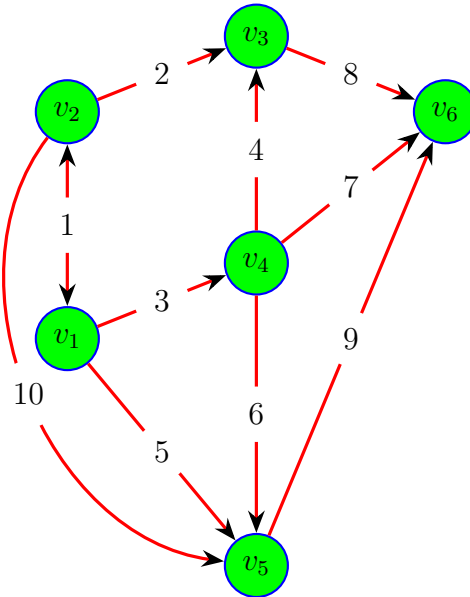
2.1. Grafikler, Yönlü ve Yönsüz Grafikler

Bu bölümde grafikler ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.1. Sonlu bir G grafiği $G = (V(G), E(G))$ sıralı ikilisinin oluşturduğu yapıdır. $V(G)$ elemanları köşe olarak adlandırılan sonlu köşeler kümesidir $E(G)$ ise elemanları kenar olarak adlandırılan sonlu kenarlar kümesidir. Bir G grafiği genelde $G = (V(G), E(G))$ şeklinde ya da kısaca G ile gösterilir. G grafikleri yönlü ya da yönsüz olabilir (Thulasiraman ve Ark., 2016).

Tanım 2.2. Bir G grafiğinde her bir kenar yön verilerek oluşturulmuş ise bu G grafiğine yönlü grafik denir. Yönlü grafikte yön, kenarların başlangıç noktasından bitim noktasına doğru oluşturulur.

Örnek 2.3. Aşağıdaki G_1 grafiği yönlü grafik için bir örnektir.



Şekil 2.1. G_1 grafiği

G_1 grafiğinin köşeler kümesini ve kenarlar kümesini sırasıyla aşağıdaki şekilde ifade edelim. G_1 grafiğinin köşeler kümesi $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ şeklindedir. G_1 grafiğinin kenarlar kümesi $E(G_1) = \{1 = \{v_1, v_2\} \cup \{v_2, v_1\}, 2 = \{v_2, v_3\}, 3 = \{v_1, v_4\}, 4 = \{v_4, v_3\}, 5 = \{v_1, v_5\}, 6 = \{v_4, v_5\}, 7 = \{v_4, v_6\}, 8 = \{v_3, v_6\}, 9 = \{v_5, v_6\}, 10 = \{v_2, v_5\}\}$ şeklindedir.

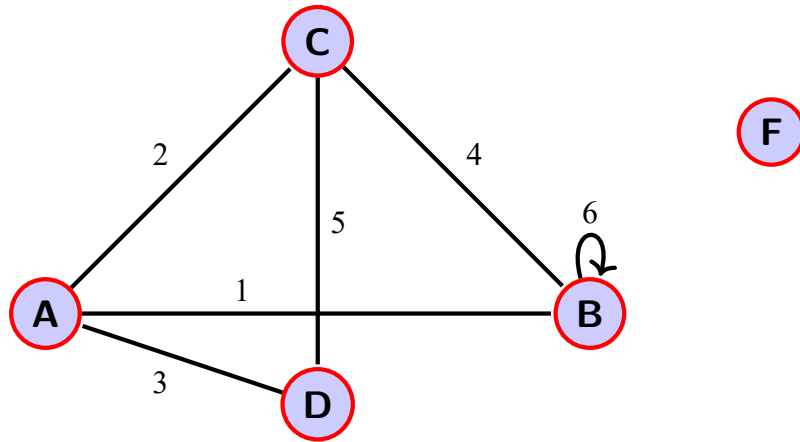
Tanım 2.4. Bir G grafiği aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu G grafiğine yönsüz grafik denir.

- (i) Boştan farklı sonlu bir V kümesi
- (ii) Sonlu kenarlardan oluşan bir E kümesi
- (iii) $\zeta : E \rightarrow \mathcal{P}(V)$ fonksiyonu her e kenarı için $\zeta(e)$, V kümesinin bir ya da iki elemanlı alt kümesidir.

Tanım 2.5. G bir grafik olsun ve $v \in G$ olsun. v köşesine bağlı herhangi bir kenar yoksa v köşesine izole köşe denir.

Tanım 2.6. Bir G grafiğinde $v \in V(G)$ olmak üzere $e = vv \in E(G)$ ise vv kenarına ilmek denir yani başlangıç ve bitiş köşesi aynı olan kenara ilmek denir.

Örnek 2.7. Aşağıdaki G_2 grafiği yönsüz grafik için bir örnek olup bu grafik yorumlanmıştır.



Şekil 2.2. G_2 grafiği

G_2 grafiğinin köşe kümesi $\{A, B, C, D, F\}$ ve kenar kümesi $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olur. $\zeta : E \rightarrow \mathcal{P}(V)$ fonksiyonu şöyle tanımlanır.

$$\zeta(1) = \{A, B\}$$

$$\zeta(2) = \{A, C\}$$

$$\zeta(3) = \{A, D\}$$

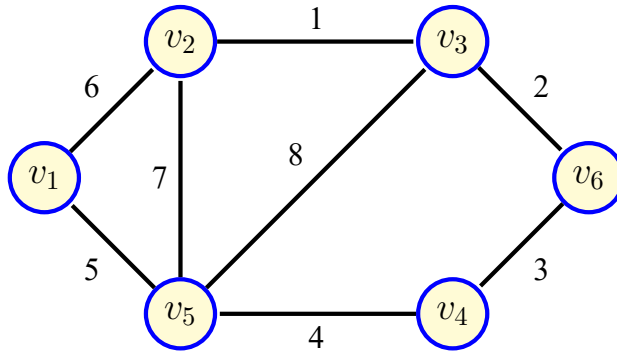
$$\zeta(4) = \{B, C\}$$

$$\zeta(5) = \{C, D\}$$

$$\zeta(6) = \{B\}$$

Kısaca verilen eşitlikleri yorumlarsak 1 numaralı kenar A ve B köşelerini birbirine, 2 numaralı kenar A ve C köşelerini birbirine, 3 numaralı kenar A ve D köşelerini birbirine, 4 numaralı kenar B ve C köşelerini birbirine ve 5 numaralı kenar ise C ve D köşelerini birbirine bağlamaktadır. 6 numaralı kenar ise bir iletkenlik çünkü B köşesini tekrar B köşesine bağlamıştır. F köşesi ise başka herhangi bir köşe ile bağlanmadığı için izole köşedir.

Örnek 2.8. Aşağıdaki G_3 grafiği yönsüz grafik için bir örnektir.



Şekil 2.3. G_3 grafiği

G_3 grafiğinin köşeler kümesi $V(G_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ şeklindedir ve kenarlar kümesi $E(G_3) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ şeklindedir.

Tanım 2.9. G yönsüz bir grafik olsun ve $v_1, v_2 \in V(G)$ olmak üzere v_1 ile v_2 köşelerini birleştiren birden fazla kenar varsa bu kenarlara katlı kenar denir kısacası G grafiğinin herhangi iki köşesi arasında birden fazla kenar bulunuyorsa bu kenarlara katlı kenar, çoklu kenar veya paralel kenar denir.

Tanım 2.10. G bir grafik olsun eğer G grafiğinde ilmek bulunmuyor ve G grafiğinin herhangi iki köşesi arasında en fazla bir kenar buluyor; yani katlı kenar bulunmuyor ise G grafiğine basit grafik denir.

Tanım 2.11. G bir grafik olsun. G grafiğinin sonlu sayıda, birbiriyle bağlantılı köşelerden ve kenarlardan oluşan dizisine yürüme denir ve W ile gösterilir. Yani yürüme $W = 1e_12e_2 \cdots ke_k(k+1)$ şeklinde bir dizi olup bu dizideki kenar sayısına yürümenin uzunluğu denir.

Tanım 2.12. Bir G grafiğindeki $W = v_0e_1v_1e_2 \cdots e_kv_k$ yürümesinde $e_1, e_2, \dots, e_k$ kenarlarının ve $v_1, v_2, \dots, v_k$ köşelerinin her biri farklı ise bu yürümeye yol denir yani G grafiğindeki herhangi bir köşe ve kenarın bir kez kullanıldığı yürümeye yol denir.

Tanım 2.13. u ve v , G grafiğinin köşeleri olmak üzere u köşesinden v köşesine daima bir yol varsa u ile v köşelerine bağlantılı köşeler denir. Eğer her $u, v \in V(G)$ için u ile v köşeleri bağlantılı ise bu durumda G grafiğine bağlantılı grafik denir. Kısacası herhangi iki köşesi arasında bir yol bulunan grafiğe bağlantılı grafik denir.

Tanım 2.14. G yönsüz bir grafik olmak üzere $v \in V(G)$ olsun. Bir uç köşesi v olan G grafiğinde ilmek olan kenarların sayısının iki katı ile ilmek olmayan kenarların sayısının toplamına v köşesinin derecesi denir. Basit bir G grafiğinde v köşesinin komşu olduğu köşelerin sayısına v köşesinin derecesi denir ve bu sayı $\deg_G(v)$ ile gösterilir. Ayrıca bir G grafiğinde $\Delta(G)$ ile en büyük dereceye sahip köşenin derecesi, $\delta(G)$ ile G grafiğinde en küçük dereceye sahip köşenin derecesi gösterilir.

Tanım 2.15. G grafiğinde derecesi 1 olan köşeye pentant köşe veya uç köşe denir.

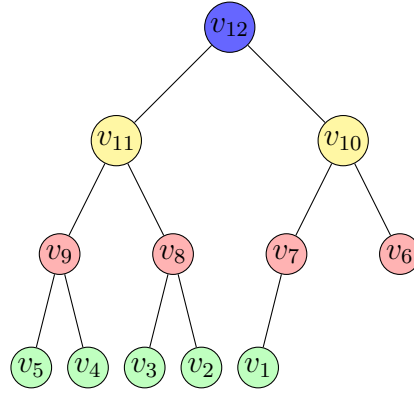
Tanım 2.16. G bir grafik olsun. $v_1, v_2, \dots, v_n \in V(G)$ olmak üzere $v_1 - v_2 - \cdots - v_n - v_1$ bir yol varsa $v_1 - v_2 - \cdots - v_n - v_1$ yoluna G grafiğinde bir devir denir ve n köşeli bir devir C_n ile gösterilir. C_n devri n köşe ve n kenar içerir. Devirdeki her bir köşesinin derecesi 2 olur. G grafiğindeki en küçük devir uzunluğu $gr(G)$ ile gösterilir, eğer grafik devir içermiyor ise $gr(G)$ ifadesi sonsuz olarak tanımlanır.

Tanım 2.17. Bir G grafiğinde herhangi iki köşesi arasında birden fazla kenar varsa G grafiğine çoklu veya multi grafik denir.

Tanım 2.18. Bir G grafiği katlı kenar ve ilmek içeriyorsa G grafiğine pseudo grafik denir.

Tanım 2.19. Bağlantılı bir G grafiği devir içermiyorsa bu G grafiğine ağaç grafik veya ağaç denir ve n köşeli bir ağaç T_n ile gösterilir.

Örnek 2.20. Aşağıdaki G_4 grafiği 12 köşeli bir ağaç grafiktir.

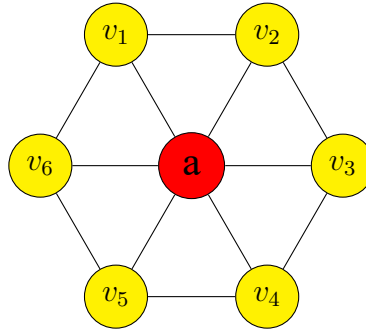


Şekil 2.4. G_4 grafiği

G_4 grafiği T_{12} şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.21. $n \geq 3$ olmak üzere C_n devrine diğer köşeler ile komşu olacak yeni bir köşenin eklenmesi sonucu oluşan grafiğe tekerlek grafik denir ve W_n ile gösterilir.

Örnek 2.22. Aşağıdaki G_5 grafiği tekerlek grafiğe bir örnektir.



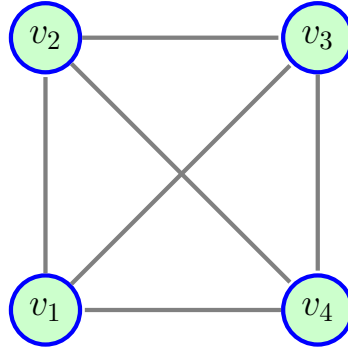
Şekil 2.5. G_5 grafiği

G_5 grafiği C_6 devrine a köşesinin eklenmesi ile oluşan W_6 tekerlek grafiğidir.

Tanım 2.23. Bir G grafiği yalnızca izole köşelerden oluşuyorsa G grafiğine boş grafik denir.

Tanım 2.24. Basit bir G grafiğinin herhangi iki köşesi arasında daima bir kenar bulunuyorsa yani bu köşe çifti bağlantılı ise bu G grafiğine tam grafik denir ve n köşeli bir tam grafik K_n ile gösterilir. K_n grafiğinde n tane köşe ve $\binom{n}{2}$ tane kenar vardır.

Örnek 2.25. Aşağıdaki G_6 grafiği 4 köşeli tam grafiğe bir örnektir.

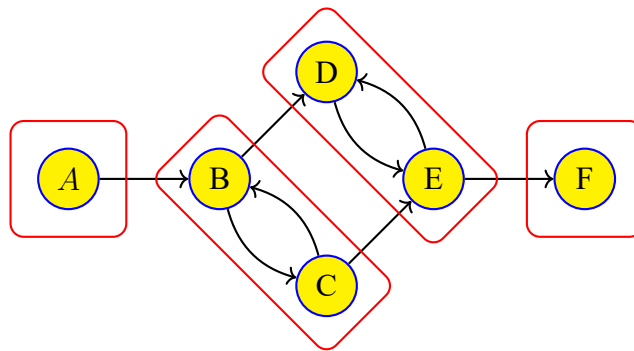


Şekil 2.6. G_6 grafiği

Tanım 2.26. Her bir köşesi aynı dereceye sahip olan grafiğe regüler grafik denir. Eğer G grafiğinin her bir köşesi r dereceye sahip ise G grafiğine r - dereceli regüler grafik denir ve G_r ile gösterilir.

Tanım 2.27. G ve M birbirinden farklı iki grafik olsun. $V(M) \subseteq V(G)$ ve $E(M) \subseteq E(G)$ ise M grafiğine G grafiğinin bir alt grafiği denir.

Örnek 2.28. Aşağıda G_7 grafiğinin 4 tane alt grafiği gösterilmiştir.



Şekil 2.7. G_7 grafiği

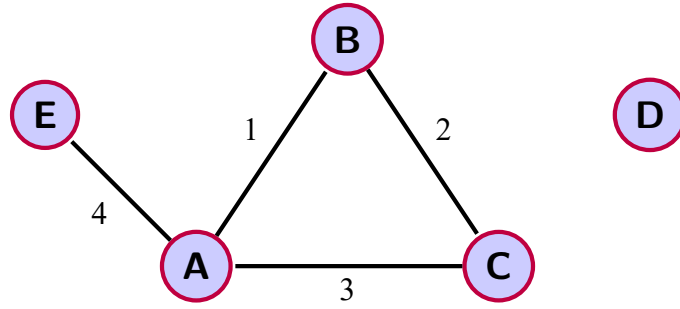
Şekil 2.7'deki grafiğin sadece A köşesini ve sadece F köşesini içene alan 2 alt grafiği ile B ile C köşelerinden oluşan ve D ile E köşelerinden oluşan 2 alt grafiği verilmiştir.

Tanım 2.29. G basit bir grafik olmak üzere G grafiğinin farklı iki köşesi u ile v olsun yani $u, v \in V(G)$ olmak üzere, u ile v arasındaki en kısa yolun uzaklığı $d_G(u, v)$ ile gösterilir. Ayrıca $d_G(u, v) = 1$ olduğu durumda u ile v köşelerine G grafiğinde komşu köşeler denir.

Tanım 2.30. G basit ve bağlantılı bir grafik olmak üzere $v \in V(G)$ olsun. G grafiğinin çapı $diam(G)$ ile gösterilir ve $diam(G) = \max\{d_G(u, v) \mid u, v \in V(G)\}$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.31. G bir grafik ve $\emptyset \neq C \subseteq V(G)$ olsun, her $u, v \in C$ için u ile v köşesi G grafiğinde komşu ise C kümesine bir klik adı verilir. Ayrıca G grafiğindeki maksimal klik kümesinin kardinalitesine G grafiğinin klik sayısı denir ve $\omega(G)$ ile gösterilir.

Örnek 2.32. Aşağıda verilen G_8 grafiği ile ilgili bazı bilgiler verilmiştir.



Şekil 2.8. G_8 grafiği

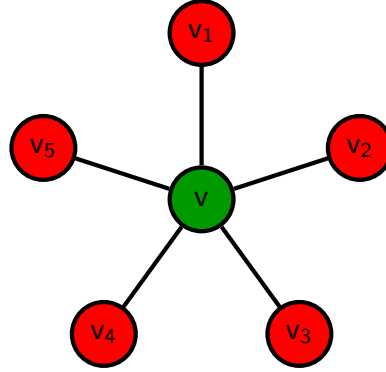
G_8 grafiği basit bir grafiktir yani ilmek ve çoklu kenar içermez. Ayrıca D köşesi izole köşe, E köşesi uç köşedir. $W = E4A1B2C$ bir yürüme olup aynı zamanda bir yoldur. $A1B2C3A$ yolu bir devirdir.

$d_{G_8}(A, B) = 1$, $d_{G_8}(A, C) = 1$, $d_{G_8}(B, C) = 1$ ve $d_{G_8}(A, E) = 1$ olduğundan A ile B komşu köşelerdir, A ile C komşu köşelerdir, B ile C komşu köşelerdir ve A ile E komşu köşelerdir. Ayrıca $d_{G_8}(B, E) = 2$ ve $d_{G_8}(C, E) = 2$ olur.

G_8 grafiği yönsüz grafik olduğu için bir köşenin köşe derecesini hesaplamak için o köşenin bağlı olduğu kenar sayısı hesaplanır. Buna göre G_8 grafiğinin tüm köşe derecelerini hesaplayalım. $\deg_{G_8}(A) = 3$, $\deg_{G_8}(B) = 2$, $\deg_{G_8}(C) = 2$, $\deg_{G_8}(D) = 0$ ve $\deg_{G_8}(E) = 1$ olur. Ayrıca en büyük köşe derecesi, yani $\Delta(G_8) = 3$, en küçük köşe derecesi, yani $\delta(G_8) = 0$ olur.

Tanım 2.33. Bir G grafiğinde iki komşu köşeyi farklı renklere boyamak koşulu ile grafiğin köşelerini renklendirmek için gereken en az renk sayısına G grafiğinin kromatik sayısı denir. G grafiğinin kromatik sayısı $\chi(G)$ ile gösterilir.

Örnek 2.34. Aşağıdaki G_9 grafiğinin kromatik sayısı hesaplanmıştır.

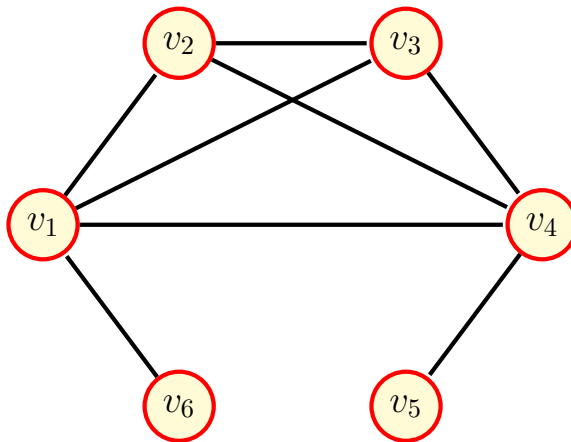


Şekil 2.9. G_9 grafiği

G_9 grafiğinin 6 farklı köşesi olup bu 6 farklı köşenin herhangi iki komşu köşesini farklı renklere boyamak için gereken en az renk sayısı 2 olduğundan G_9 grafiğinin kromatik sayısı 2 olur. Yani $\chi(G_9) = 2$ olur.

Tanım 2.35. G bir grafik olsun. G grafiğinin her H alt grafiği için $\chi(H) = \omega(H)$ ise G grafiğine mükemmel grafik denir.

Örnek 2.36. Aşağıdaki G_{10} grafiği mükemmel grafiğe bir örnektir.



Şekil 2.10. G_{10} grafiği

2.2. Bazı Cebirsel Kavramlar

Tanım 2.37. $\emptyset \neq A$ bir küme ve $*$: $A \times A \rightarrow A$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun, bu durumda $(A, *)$ ikilisine grupoid denir. Genellikle ”*” yerine ”.” yazılır. Yani $a, b \in A$ için

$$(a * b) = a \cdot b = ab$$

yazılır.

Tanım 2.38. $(S, *)$ bir grupoid olsun. $\forall x, y, z \in S$ için

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

oluyorsa $(S, *)$ yapısına bir yarıgrup denir (Howie, 1995).

Tanım 2.39. S bir yarıgrup olsun. Eğer S birim elemana sahip ise S yarıgrubuna monoid denir.

Tanım 2.40. $(G, *)$ bir monoid olsun. Eğer G ’de her elemanın $*$ işlemine göre tersi varsa G ’ye bir grup denir, ayrıca G bir grup ve $\forall x, y \in G$ için $x \cdot y = y \cdot x$ oluyorsa G yapısına bir değişmeli grup denir.

Tanım 2.41. X boştan farklı bir küme olsun ve $\mathcal{T}_X$ ’ de X üzerindeki tam dönüşümler yarıgrubu olsun. $\mathcal{T}_X$, X ’ten X ’e tüm fonksiyonların kümesi olup fonksiyonlar bileşke işlemine göre bir yarıgruptur (Ganyushkin ve Mazorchuk, 2009). $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ sonlu bir kümedir. Bu çalışmada kolaylık olması amacı ile $\mathcal{T}_{X_n}$ yerine $\mathcal{T}_n$ ifadesi kullanılmıştır.

Tanım 2.42. R boştan farklı bir küme olsun ve R üzerinde tanımlı ikili işlemler ”+” ve ”.” olsun. Eğer R kümesi ”+” işlemine göre bir değişmeli grup, ”.” işlemine göre bir yarıgrup, $\forall a, b, c \in R$ için $a \cdot (b + c) = a \cdot b + b \cdot a$ ve $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ oluyorsa $(R, +, \cdot)$ yapısına bir halka denir.

Tanım 2.43. S bir yarıgrup olsun ve T , S kümesinin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall a, b \in T$ için $ab \in T$ ise T ’ ye S yarıgrubunun bir alt yarıgrubu denir ve $T \leq S$ ile gösterilir.

Tanım 2.44. $\mathcal{O}_n = \{\alpha \in \mathcal{T}_n : \forall x, y \in X_n \text{ için } x \leq y \iff x\alpha \leq y\alpha\}$ yapısına X_n üzerindeki sıra-koruyan dönüşümler yarıgrubu adı verilir.

Tanım 2.45. $\mathcal{D}_n = \{\alpha \in \mathcal{T}_n : \forall x \in X_n \text{ için } x\alpha \leq x\}$ yapısına X_n üzerindeki sıra-azaltan dönüşümler yarıgrubu adı verilir.

Tanım 2.46. $\mathcal{C}_n = \{\alpha \in \mathcal{O}_n : \forall x \in X_n \text{ için } x\alpha \leq x\}$ yapısına X_n üzerindeki sıra-koruyan ve sıra-azaltan dönüşümler yarıgrubu adı verilir. Ayrıca bu yarıgrup bir monoid olup buna Catalan monoidi denir. Tanımlardan görüleceği üzere, $\mathcal{C}_n = \mathcal{O}_n \cap \mathcal{D}_n$ olur.

Tanım 2.47. $\emptyset \neq A \subseteq X_n$ olmak üzere $\mathcal{O}_n(A) = \{\alpha \in \mathcal{O}_n : \forall x \in A \text{ için } x\alpha \leq x\}$ kümesine X_n üzerindeki sıra koruyan ve A-azalan dönüşümler yarıgrubu denir. Tanımlardan görüleceği üzere, $\mathcal{C}_n \leq \mathcal{O}_n(A) \leq \mathcal{O}_n \leq \mathcal{T}_n$ olur.

Tanım 2.48. $\mathcal{SL}_n$ ile X_n kümesinin tüm alt kümeleri gösterilir. Kümelerin birleşme işlemi ile bu yapı bir yarıgrup olup buna X_n üzerindeki serbest yarılatıis denir.

Tanım 2.49. X_n üzerindeki tüm bağıntıların kümesi $\mathcal{B}_n$ ile gösterilir. Ayrıca, $\mathcal{P}_n = \{\alpha \in \mathcal{B}_n : \forall x \in X_n \text{ için } |x\alpha| \leq 1\}$ yapısına X_n üzerindeki kısmi dönüşümler yarıgrubu denir.

Tanım 2.50. x herhangi bir reel sayı olmak üzere, x sayısından büyük ya da x sayısına eşit olan en küçük tamsayı $\lceil x \rceil$ ile gösterilir.

2.3. Sıfır Bölen Elemanlar

Tanım 2.51. S bir yarıgrup olsun. $\forall s \in S$ için $a.s = a = s.a$ olacak şekilde $a \in S$ varsa a elemanına S yarıgrubunun sıfır elemanı denir.

$\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun sıfır elemanı içermesi için gerek ve yeter koşul $1 \in A$ olmasıdır (Bugay ve Ark., 2019). Bu çalışmada $1 \in A$ olduğu varsayılmıştır. $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ olarak seçilirse $\theta \in \mathcal{O}_n(A)$ olup $\forall \alpha \in \mathcal{O}_n(A)$ için $\alpha\theta = \theta = \theta\alpha$ olur. Bundan dolayı θ elemanı $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun sıfır elemanı olur. Ayrıca, bu çalışmada $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun sıfır elemanı θ ile gösterilmiştir.

2.4. Halkalarda Yönlendirilmiş Sıfır Bölen Grafiği

Tanım 2.52. R bir halka olsun. $Z(R)$, R halkasının sıfır bölen elemanlarının kümesi ve R halkasının sıfır elemanı 0 olmak üzere $Z(R)^* = Z(R) \setminus \{0\}$ olsun. Köşe kümesi

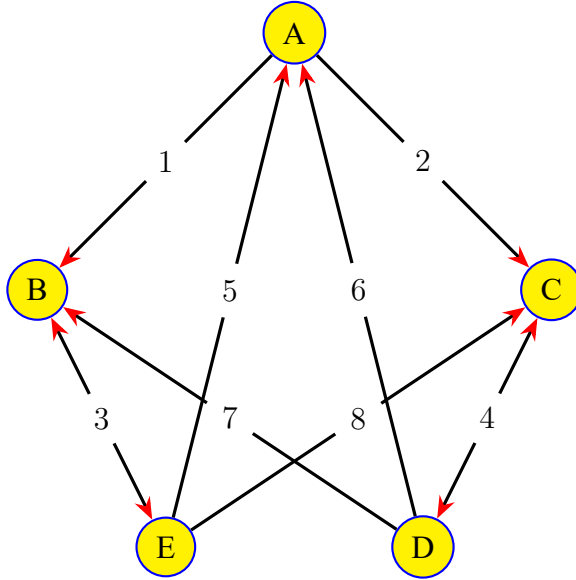
$Z(R)^*$ olan yönlendirilmiş bir $\Gamma(R)$ grafiği yönlü kenarlardan oluşur. x ve y farklı köşeler olmak üzere $x \rightarrow y \iff x \cdot y = 0$ olmasıdır (Redmond, 2002).

R halkası değişmeli halka ise $x \rightarrow y$ olduğunda $y \rightarrow x$ de olur. Yani değişmeli halkalarda yönün pek önemi yoktur çünkü $x \cdot y = 0$ olduğunda $y \cdot x = 0$ olur.

Örnek 2.53.

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

olsun. Aşağıdaki G_{11} grafiği R halkasının yönlendirilmiş sıfır bölen grafiğidir.



Şekil 2.11. G_{11} grafiği

2.5. Halkalarda Yönlendirilmemiş Sıfır Bölen Grafiği

Tanım 2.54. R bir halka olsun. $Z(R)$, R halkasının sıfır bölen elemanlarının kümesi ve R halkasının sıfır elemanı 0 olmak üzere $Z(R)^* = Z(R) \setminus \{0\}$ olsun. Köşe kümesi $Z(R)^*$ olan yönlendirilmemiş bir $\bar{\Gamma}(R)$ grafiği yönsüz kenarlardan oluşur. $Z(R)^*$ kümesinin farklı iki köşesi x ve y olmak üzere bu iki köşenin komşu köşeler olması için gerek ve yeter şart $x \cdot y = 0$ veya $y \cdot x = 0$ olmasıdır (Anderson ve Livingston, 1999). R halkasının yönsüz grafiği $\bar{\Gamma}(R)$ ile gösterilir.

$\bar{\Gamma}(R)$ yönlendirilmemiş grafiği her zaman bağlantılıdır fakat $\Gamma(R)$ yönlendirilmiş grafiği her zaman bağlantılı olmayabilir. R halkası eğer değişmeli ise hem $\bar{\Gamma}(R)$ yönlendirilmemiş grafiği hem de $\Gamma(R)$ yönlendirilmiş grafiği bağlantılıdır.

2.6. Yarıgruplarda Yönlendirilmemiş Sıfır Bölen Grafikler

Halkalar için yapılmış olan sıfır bölen grafik tanımları yarıgruplar için de benzer şekilde yapılabilir.

Tanım 2.55. S sıfır elemana sahip bir yarıgrup olsun. $T(S) = \{z \in S \mid zx = 0 = xy \exists x, y \in S \setminus \{0\}\}$ olmak üzere $T(S) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda S yarıgrupunun sıfır bölen grafiği $\Gamma(S)$ ile gösterilir ve bu grafiğin köşe kümesi $T(S) \setminus \{0\}$ olup, $\forall x, y \in T(S) \setminus \{0\}$ ve $x \neq y$ olmak üzere x ve y köşelerinin bir kenar oluşturması için gerek ve yeter koşul için $xy = 0 = yx$ olmasıdır şeklinde tanımlanır.

Monojenik yarıgrupun sıfır bölen grafikleri 2013 yılında incelenmiştir (Akgüneş ve Ark., 2013). 2016 yılında serbest yarılatısların sıfır bölen grafikleri (Toker, 2016), 2021 yılında Catalan monoidinin sıfır bölen grafiği (Toker, 2021 a), 2021 yılında kısmi dönüşümler yarıgrupunun sıfır bölen grafiği (Toker, 2021 b), 2022 yılında sıra-azaltan dönüşümler yarıgrupunun sıfır bölen grafiği incelenmiştir (Toker ve Eşidir, 2022).

3. GEREÇ VE YÖNTEM

Bu tez hazırlanırken gerekli literatür taraması yapılmış olup ilgili makale, kitap ve tez çalışmaları incelenmiştir. Konu ile bağlantılı tezler ve makeleler derinlemesine araştırılmıştır. Böylece tezimizin oluşturulmasında gerekli alt yapı elde edilmiştir.

Çalışmada sıra koruyan ve A-azalan dönüşümler yarıgrubu tanımlanmıştır ve bu yarıgrubun sol sıfır bölen, sağ sıfır ve iki taraflı sıfır bölen kümeleri tanımlanmış olup bu kümelerin eleman sayıları hesaplanmıştır. Ayrıca bu özel yarıgruba ait yeni bulgulara ulaşılmıştır.

4. BULGULAR

4.1. $\mathcal{O}_n(A)$ YARIGRUBUNUN SIFIR BÖLEN GRAFİKLERİ

$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ olarak tanımlanır. $\mathcal{O}_n = \{\alpha \in \mathcal{T}_n : \forall x, y \in X_n \text{ için } x \leq y \iff x\alpha \leq y\alpha\}$ olarak tanımlanan yapıya X_n üzerinde sıra koruyan dönüşümler yarıgrubu denir ve bu yapı $\mathcal{T}_n$ yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur. $\emptyset \neq A \subseteq X_n$ olmak üzere $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubu X_n üzerinde sıra koruyan ve A -azalan dönüşümler yarıgrubu olarak adlandırılır ve bu yarıgrup

$$\mathcal{O}_n(A) = \{\alpha \in \mathcal{O}_n : x\alpha \leq x \ (\forall x \in A)\}$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubu $\mathcal{O}_n$ yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur (Zhao, 2014). $\mathcal{O}_n$ ve $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrupları $\mathcal{T}_n$ yarıgrubunun alt yarıgruplarıdır. Bu durumda tanımlardan da görüldüğü gibi $\mathcal{O}_n(A) \leq \mathcal{O}_n \leq \mathcal{T}_n$ olur. $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun sıfır elemanını içermesi için gerek ve yeter şart $1 \in A$ olmasıdır (Bugay ve Ark., 2019). Bundan dolayı bu çalışmada $1 \in A$ olduğu varsayılmıştır.

Lemma 4.1. $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ olarak seçilirse $\theta \in \mathcal{O}_n(A)$ olup $\forall \alpha \in \mathcal{O}_n(A)$ için $\alpha\theta = \theta = \theta\alpha$ olur. Böylece, θ elemanı $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun sıfır elemanı olur.

Bu çalışmada $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun sıfır elemanı θ ile gösterilmiştir.

Lemma 4.2. $\alpha, \beta \in \mathcal{T}_n$ olsun. $\alpha\beta = \theta$ olması için $\iff im(\alpha) \subseteq 1\beta^{-1}$ olmasıdır. Özel olarak $\alpha^2 = \theta$ olması için $\iff im(\alpha) \subseteq 1\alpha^{-1}$ olmasıdır (Korkmaz, 2024).

$n \geq 2$ için $\mathcal{O}_n(A)^* = \mathcal{O}_n(A) \setminus \{\theta\} = \Lambda$ kümesini tanımlayalım. Aşağıdaki kümeler sırasıyla $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun sol sıfır bölenlerin, sağ sıfır bölenlerin ve iki taraflı sıfır bölenlerin kümeleridir.

$$L = L(\mathcal{O}_n(A)) = \{\alpha \in \mathcal{O}_n(A) : \alpha\beta = \theta, \quad \exists \beta \in \Lambda\}$$

kümesine $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun sol sıfır bölenlerin kümesi denir.

$$R = R(\mathcal{O}_n(A)) = \{\alpha \in \mathcal{O}_n(A) : \gamma\alpha = \theta, \quad \exists \gamma \in \Lambda\}$$

kümesine $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun sağ sıfır bölenlerin kümesi denir.

$$T = T(\mathcal{O}_n(A)) = \{\alpha \in \mathcal{O}_n(A) : \alpha\beta = \gamma\alpha = \theta, \quad \beta, \gamma \in \Lambda\}$$

kümesine $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun iki taraflı sıfır bölenlerinin kümesi denir. Ayrıca tanımlardan $T = L \cap R$ olduğu açıkça görülür.

Teorem 4.3. $n \geq 2$ olmak üzere

$$L = \{\alpha \in \mathcal{O}_n(A) : n\alpha < n\}$$

olur.

İspat. $n \geq 2$ olsun.

$$L = L(\mathcal{O}_n(A)) = \{\alpha \in \mathcal{O}_n(A) : \alpha\beta = \theta, \quad \exists \beta \in \mathcal{O}_n(A) \setminus \{\theta\}\}$$

olup $\alpha = 1_{X_n} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ ve $\alpha\beta = \theta$ ise $\text{im}(\alpha) = X_n \subseteq 1\beta^{-1}$ olur. $1\beta^{-1} = X_n$ olup $\beta = \theta$ olur. $\alpha \in \mathcal{O}_n(A)$ için $n\alpha = n$ olsun. Ayrıca $\alpha\beta = \theta$ olsun. $n(\alpha\beta) = n\theta$ olup $(n\alpha)\beta = 1$ olur. Böylece $n\beta = 1$ olur. Tanımdan $\beta = \theta$ 'dır. $\alpha \in \mathcal{O}_n$ için $n\alpha < n$ ve $n\alpha = k$ olsun.

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

olarak seçilirse $\beta \in \mathcal{O}_n(A)$ olup $\alpha\beta = \theta$ olur. Böylece

$$L = \{\alpha \in \mathcal{O}_n(A) : n\alpha < n\}$$

olur. □

Teorem 4.4. $n \geq 2$ olmak üzere

$$R = \{\alpha \in \mathcal{O}_n(A) : 2\alpha = 1\}$$

olur.

İspat. $n \geq 2$ olsun.

$$R = R(\mathcal{O}_n(A)) = \{\alpha \in \mathcal{O}_n(A) : \gamma\alpha = \theta, \quad \exists \gamma \in \mathcal{O}_n(A) \setminus \{\theta\}\}$$

olur. $\alpha = 1_{X_n}$ ve $\beta\alpha = \theta$ olsun. $\text{im}(\beta) \subseteq 1\alpha^{-1} = \{1\}$ olup $\beta = \theta$ olur. $\alpha \in \mathcal{O}_n(A)$, $1\alpha = 1$ ve $2 \leq k \leq n$ için $k\alpha \neq 1$ olsun. $\text{im}(\beta) \subseteq 1\alpha^{-1} = \{1\}$ olduğundan $\beta = \theta$ olur. $\alpha \in \mathcal{O}_n(A)$ ve $2\alpha = 1$ olsun.

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

olarak seçilirse $\beta \in \mathcal{O}_n(A)$ olur. Ayrıca $\beta\alpha = \theta$ olur. Böylece

$$R = \{\alpha \in \mathcal{O}_n(A) : 2\alpha = 1\}$$

olur. □

Sol sıfır ve sağ sıfır bölen kümelerinin kesişim kümesi $T = L \cap R$ olarak ifade edilir. Bu kümeye $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun iki taraflı sıfır bölen kümesi de denir.

Sonuç 4.5. $n \geq 2$ olmak üzere

$$T = L \cap R = \{\alpha \in \mathcal{O}_n(A) : 2\alpha = 1, n\alpha < n\}$$

olur.

İspat. $T = L \cap R$ olduğundan ispat açıktır. □

Tanım 4.6. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $(0, 0)$ noktasından başlayıp $(n, n-1)$ noktasında biten sadece sağ ve yukarı yönlerle gidilen patikaların kümesi $\mathcal{NE}$ ile gösterilir. Bu kümedeki her bir patikaya $\mathcal{NE}$ patikası denir.

Örnek 4.7. $n = 3$ için $(0, 0) - (1, 0) - (1, 1) - (2, 1) - (3, 1) - (3, 2)$ bir $\mathcal{NE}$ patikasıdır.

Önerme 4.8. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\mathcal{O}_n$ yarıgrubu ile $\mathcal{NE}$ arasında bijeksiyon vardır.

İspat. $f : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{NE}$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlayalım. $\alpha \in \mathcal{O}_n$ olsun. Bu durumda

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Ayrıca $i, j \in X_n$ olmak üzere $i < j$ ise $c_i \leq c_j$ olur. $\forall i \in X_n$ için $(i-1, c_i-1) - (i, c_i-1)$ yatay çizgilerden oluşan $\mathcal{NE}$ patikası sadece bir tanedir ve bu patikayı P_α ile gösterelim. Ayrıca $\alpha f = P_\alpha$ olarak tanımlayalım. f fonksiyonunun tanımından dolayı f fonksiyonunun bire bir olduğu açıktır. P bir $\mathcal{NE}$ patikası olsun.

Bu patikada n tane bir birimden oluşan yatay çizgi vardır bu yatay çizgiler sırasıyla $h_1, h_2, \dots, h_n$ olsun. $\forall i \in X_n$ için $h_i : (i-1, j_i) - (i, j_i)$ biçimindedir.

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ j_1 + 1 & j_2 + 1 & j_3 + 1 & \cdots & j_n + 1 \end{pmatrix}$$

olarak seçilirse $\beta \in \mathcal{O}_n$ olup $\beta f = P$ olur. Böylece f fonksiyonu örten fonksiyondur. Sonuç olarak $\mathcal{O}_n$ yarıgrubu ile $\mathcal{NE}$ arasında bijeksiyon vardır. $\square$

$\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun sıfır bölen kümelerinin kardinaliteleri Önerme 4.8 yardımıyla aşağıdaki şekilde hesaplanır. $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun sol sıfır bölen, sağ sıfır bölen ve iki taraflı sıfır bölen kümelerinin kardinaliteleri sırasıyla aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.

Teorem 4.9. $n \geq 4, k \geq 3$ ve $a_k \neq n$ olmak üzere $A = \{1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_k < n\}$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun sol sıfır bölen kümesinin kardinalitesi

$$|L| = \sum_{r_2=1}^{a_2} \sum_{r_3=r_2}^{a_3} \cdots \sum_{r_k=r_{k-1}}^{a_k} \binom{a_2 - 3 + r_2}{r_2 - 1} \cdot \left[\prod_{j=3}^k \binom{r_j - r_{j-1} + a_j - 1 - a_{j-1}}{r_j - r_{j-1}} \right] \cdot \binom{2n - 1 - a_k - r_k}{n - 1 - r_k}$$

olur.

$\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun sağ sıfır bölen kümesinin eleman sayısı için iki durum mevcuttur. Bu iki durumu birbirinden ayıran en önemli iki fark birinci durumda $a_2 \neq 2$ olmasıdır ikinci durumda ise $a_2 = 2$ olmasıdır. Şimdi bu iki durumu sırasıyla gösterelim.

Teorem 4.10. $n \geq 4, k \geq 3$ ve $a_2 \neq 2$ olmak üzere $A = \{1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_k\}$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun sağ sıfır bölen kümesinin kardinalitesi

$$|R| = \sum_{r_2=1}^{a_2} \sum_{r_3=r_2}^{a_3} \cdots \sum_{r_k=r_{k-1}}^{a_k} \binom{a_2 - 4 + r_2}{r_2 - 1} \cdot \left[\prod_{j=3}^k \binom{r_j - r_{j-1} + a_j - 1 - a_{j-1}}{r_j - r_{j-1}} \right] \cdot \binom{2n - r_k - a_k}{n - r_k}$$

olur.

Teorem 4.11. $n \geq 4, k \geq 4$ ve $a_2 = 2$ olmak üzere $A = \{1 = a_1 < 2 = a_2 < a_3 < \cdots < a_k\}$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun sağ sıfır bölen kümesinin

kardinalitesi

$$|R| = \sum_{r_3=1}^{a_3} \sum_{r_4=r_3}^{a_4} \cdots \sum_{r_k=r_{k-1}}^{a_k} \binom{a_3 - 4 + r_3}{r_3 - 1} \cdot \left[\prod_{j=4}^k \binom{r_j - r_{j-1} + a_j - 1 - a_{j-1}}{r_j - r_{j-1}} \right] \cdot \binom{2n - r_k - a_k}{n - r_k}$$

olur.

$\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun iki taraflı sıfır bölen kümesinin yani T kümesinin kardinalitesi için de iki durum mevcuttur. Bu iki durumu birbirinden ayıran en önemli iki fark birinci durumda $a_2 \neq 2$ olmasıdır ikinci durumda ise $a_2 = 2$ olmasıdır. Şimdi bu iki durumu sırasıyla gösterelim.

Teorem 4.12. $n \geq 4, k \geq 3, a_2 \neq 2$ ve $a_k \neq n$ olmak üzere $A = \{1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_k < n\}$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun iki taraflı sıfır bölen kümesinin kardinalitesi

$$|T| = \sum_{r_2=1}^{a_2} \sum_{r_3=r_2}^{a_3} \cdots \sum_{r_k=r_{k-1}}^{a_k} \binom{a_2 - 4 + r_2}{r_2 - 1} \cdot \left[\prod_{j=3}^k \binom{r_j - r_{j-1} + a_j - 1 + a_{j-1}}{r_j - r_{j-1}} \right] \cdot \binom{2n - 1 - a_k - r_k}{n - 1 - r_k}$$

olur.

Teorem 4.13. $n \geq 4, k \geq 4, a_2 = 2$ ve $a_k \neq n$ olmak üzere $A = \{1 = a_1 < 2 = a_2 < \cdots < a_k < n\}$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun iki taraflı sıfır bölen kümesinin kardinalitesi

$$|T| = \sum_{r_3=1}^{a_3} \sum_{r_4=r_3}^{a_4} \cdots \sum_{r_k=r_{k-1}}^{a_k} \binom{a_3 - 4 + r_3}{r_3 - 1} \cdot \left[\prod_{j=4}^k \binom{r_j - r_{j-1} + a_j - 1 + a_{j-1}}{r_j - r_{j-1}} \right] \cdot \binom{2n - 1 - a_k - r_k}{n - 1 - r_k}$$

olur.

Örnek 4.14. $A = \{1, 3, 4\}$ olmak üzere $\mathcal{O}_5(A)$ yarıgrubunun sol sıfır bölen kümesinin kardinalitesini hesaplayalım ve bu elemanları yazalım.

$$|L| = \sum_{r_2=1}^{a_2} \sum_{r_3=r_2}^{a_3} \binom{a_2 - 3 + r_2}{r_2 - 1} \cdot \left[\prod_{j=3}^k \binom{r_j - r_{j-1} + a_j - 1 - a_{j-1}}{r_j - r_{j-1}} \right] \cdot \binom{2n - 1 - a_k - r_k}{n - 1 - r_k}$$

olup örneğimizde $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ ve $a_3 = 4$ olur. Buna göre $|L|$ formülünde ifadeler yerine yazılırsa $\mathcal{O}_5(A)$ yarıgrubunun sol sıfır bölen kümesinin kardinalitesi

$$\begin{aligned}
 |L| &= \sum_{r_2=1}^3 \sum_{r_3=r_2}^4 \binom{r_2}{r_2-1} \cdot \left[\prod_{j=3}^3 \binom{r_3-r_2}{r_3-r_2} \right] \cdot \binom{5-r_3}{4-r_3} \\
 &= \sum_{r_3=1}^4 \binom{1}{0} \cdot \binom{r_3-1}{r_3-1} \binom{5-r_3}{4-r_3} + \sum_{r_3=2}^4 \binom{2}{1} \cdot \binom{r_3-2}{r_3-2} \binom{5-r_3}{4-r_3} + \\
 &\quad \sum_{r_3=3}^4 \binom{3}{2} \cdot \binom{r_3-3}{r_3-3} \binom{5-r_3}{4-r_3} \\
 &= 31
 \end{aligned}$$

olur. $\mathcal{O}_5(A)$ yarıgrubunun sol sıfır bölen kümesinin elemanlarını yazalım. Bu elemanlar

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olur.

Örnek 4.15. $A = \{1, 3, 4\}$ olmak üzere $\mathcal{O}_5(A)$ yarıgrubunun sağ sıfır bölen kümesinin kardinalitesini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
|R| &= \sum_{r_2=1}^3 \sum_{r_3=r_2}^4 \binom{r_2-1}{r_2-1} \cdot \left[\prod_{j=3}^3 \binom{r_3-r_2}{r_3-r_2} \right] \cdot \binom{6-r_3}{5-r_3} \\
&= \sum_{r_3=1}^4 \binom{0}{0} \cdot \binom{r_3-1}{r_3-1} \binom{6-r_3}{5-r_3} + \sum_{r_3=2}^4 \binom{1}{1} \cdot \binom{r_3-2}{r_3-2} \binom{6-r_3}{5-r_3} + \\
&\quad \sum_{r_3=3}^4 \binom{2}{2} \cdot \binom{r_3-3}{r_3-3} \binom{6-r_3}{5-r_3} \\
&= 28
\end{aligned}$$

olur.

Örnek 4.16. $A = \{1, 3, 4\}$ olmak üzere $\mathcal{O}_5(A)$ yarıgrubunun iki taraflı sıfır bölen kümesinin kardinalitesini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
|T| &= \sum_{r_2=1}^3 \sum_{r_3=r_2}^4 \binom{r_2-1}{r_2-1} \cdot \left[\prod_{j=3}^3 \binom{r_3-r_2}{r_3-r_2} \right] \cdot \binom{6-r_3}{5-r_3} \\
&= \sum_{r_3=1}^4 \binom{0}{0} \cdot \binom{r_3-1}{r_3-1} \binom{5-r_3}{4-r_3} + \sum_{r_3=2}^4 \binom{1}{1} \cdot \binom{r_3-1}{r_3-1} \binom{5-r_3}{4-r_3} + \\
&\quad \sum_{r_3=3}^4 \binom{2}{2} \cdot \binom{r_3-1}{r_3-1} \binom{5-r_3}{4-r_3} \\
&= 19
\end{aligned}$$

olur.

Tanım 4.17. $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun yönsüz sıfır bölen grafiği $\Gamma(\mathcal{O}_n(A))$ ile gösterilir, bu çalışmada kolaylık olması amacıyla $\Gamma(\mathcal{O}_n(A))$ yönsüz grafiği Γ ile gösterilmiştir.

$n = 1, 2$ için $\mathcal{O}_n(A) = \mathcal{C}_n$ ve $n = 3$ için Γ grafiği bir köşeden oluşan bir grafik olduğundan bu çalışmada Γ grafiğinin özellikleri $n \geq 4$ için incelenmiştir.

Lemma 4.18. $n \geq 4$ için Γ grafiği bağlantılı bir grafiktir.

İspat. $n \geq 4$ için $\emptyset \neq A \subseteq X_n$ ve $1 \in A$ olmak üzere $T = \{\alpha \in \mathcal{O}_n(A) : 2\alpha = 1, n\alpha < n\}$ olur. $T^* = T \setminus \{\theta\}$ olarak tanımlayalım. $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ olmak üzere $V(\Gamma) = T^*$ olur. $\alpha, \beta \in T^*$ ve $\alpha \neq \beta$ için $\alpha - \beta \in E(\Gamma) \iff \alpha\beta = \theta = \beta\alpha \iff \text{im}(\alpha) \subseteq 1\beta^{-1}$ ve $\text{im}(\beta) \subseteq 1\alpha^{-1}$ olur. $n \geq 4$ olmak üzere $\alpha, \beta \in T^*$ ve $\alpha \neq \beta$ alalım.

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

alınırsa $\gamma \in T^*$ olur. $\mu \in T^* \setminus \{\gamma\}$ olsun. $n\mu < n$ olup $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun tanımından $\text{im}(\mu) \subseteq X_{n-1} = 1\gamma^{-1}$, $\text{im}(\gamma) = \{1, 2\}$ ve $1\mu = 2\mu = 1$ olduğundan $\text{im}(\gamma) = \{1, 2\} \subseteq 1\mu^{-1}$ olur. Böylece $\gamma - \mu \in E(\Gamma)$ olur.

1. Durum: $\text{im}(\alpha) \subseteq 1\beta^{-1}$ ve $\text{im}(\beta) \subseteq 1\alpha^{-1}$ ise $\alpha - \beta \in E(\Gamma)$ olur.

2. Durum: $\text{im}(\alpha) \not\subseteq 1\beta^{-1}$ veya $\text{im}(\beta) \not\subseteq 1\alpha^{-1}$ olsun. Bu durumda $\alpha - \beta \notin E(\Gamma)$ olur. Ayrıca $\alpha - \gamma - \beta$ olduğundan Γ grafiği bağlantılı grafiktir. $\square$

Önerme 4.19. $n \geq 4$ için $\text{diam}(\Gamma) = 2$ olur.

İspat. Bir önceki teoremin ispatından $\alpha, \beta \in T^*$ için $d_r(\alpha, \beta) \leq 2$ olur. Ayrıca

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ 1 & 1 & 2 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 2 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & n \\ 1 & 1 & 3 & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & 3 \end{pmatrix}$$

olarak seçilirse $\alpha, \beta \in T^*$ olur ve $\beta\alpha \neq \theta$ olduğundan $\text{diam}(\Gamma) = 2$ olur. $\square$

Teorem 4.20.

$$gr(\Gamma) = \begin{cases} \infty & \text{eğer } n = 4 \text{ ise} \\ 3 & \text{eğer } n \geq 5 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

İspat. $n = 4$ için

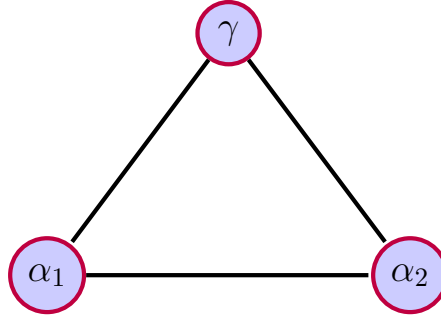
$$T^* = \left\{ \begin{aligned} \gamma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, & \alpha_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, & \alpha_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \\ \alpha_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & \alpha_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

olduğundan Γ grafiğinde $n = 4$ için devir yoktur.

$n \geq 5$ için

$$\begin{aligned} \gamma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}, & \alpha_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \end{pmatrix}, \\ \alpha_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak seçilirse Γ grafiğinde $\gamma - \alpha_1 - \alpha_2 - \gamma$ devri elde edilir.



Şekil 4.1. G grafiği

G grafiği $n \geq 5$ için $\mathcal{O}_n(A)$ grafiğinin alt grafiği olup $n \geq 5$ için $gr(\Gamma) = 3$ olur.

□

Teorem 4.21. $n \geq 4$ için $\alpha \in V(\Gamma) = T^* = T \setminus \{\theta\}$ olsun. Bu durumda, α dönüşümü

$$\alpha = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_r \\ 1 & b_2 & \cdots & b_r \end{pmatrix} \text{ formunda olup } 1 < b_2 < \cdots < b_r \text{ ve } B_1 = \{1, 2, \dots, t\}$$

biçimindedir. $Y = \{b_{r+1}, \dots, n\}$ olmak üzere $B_1 \cap A \cap Y = \emptyset$ ise

$$\deg_{\Gamma}(\alpha) = \begin{cases} \binom{n-b_r+t-1}{t-1} - 1 & \text{eğer } \alpha^2 \neq \theta \\ \binom{n-b_r+t-1}{t-1} - 2 & \text{eğer } \alpha^2 = \theta \end{cases}$$

olur.

İspat. Önerme 4.8 yardımıyla yapılır. □

Tanım 4.22. $n \geq 4$ için $\alpha \in V(\Gamma) = T^* = T \setminus \{\theta\}$ olsun. Bu durumda, α dönüşümü $\alpha = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_r \\ 1 & b_2 & \cdots & b_r \end{pmatrix}$ formunda olup $1 < b_2 < \cdots < b_r$ ve $B_1 = \{1, 2, \dots, t\}$ biçimindedir. $Y = \{b_{r+1}, \dots, n\}$ olsun. Eğer $B_1 \cap A \cap Y \neq \emptyset$ ise bu durumda $B_1 \cap A \cap Y = \{a_p, a_{p+1}, \dots, a_s\}$ olur, burada bir z tam sayısı tanımlayalım ve

$$z = \sum_{r_1=1}^{a_p} \sum_{r_2=r_1}^{a_{p+1}} \cdots \sum_{r_{s-p+1}=r_{s-p}}^{a_s} \binom{a_p - 1 + b_r + r_1 - 1}{r_1 - 1} \cdot \binom{a_{p+1} - 1 + a_p + r_2 - r_1}{r_2 - r_1} \cdot \binom{n - a_s + t - r_s - p + 1}{t - r_s - p + 1}$$

olsun.

Teorem 4.23. $n \geq 4$ için $\alpha \in V(\Gamma) = T^* = T \setminus \{\theta\}$ olsun. Bu durumda, α dönüşümü $\alpha = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_r \\ 1 & b_2 & \cdots & b_r \end{pmatrix}$ formunda olup $1 < b_2 < \cdots < b_r$ ve $B_1 = \{1, 2, \dots, t\}$ biçimindedir. $Y = \{b_{r+1}, \dots, n\}$ olsun. Eğer $B_1 \cap A \cap Y \neq \emptyset$ ise bu durumda,

$$\deg_{\Gamma}(\alpha) = \begin{cases} z - 1 & \text{eğer } \alpha^2 \neq \theta \\ z - 2 & \text{eğer } \alpha^2 = \theta \end{cases}$$

olur.

İspat. Önerme 4.8 yardımıyla yapılır. □

Γ grafiğinde en büyük dereceye sahip köşenin derecesi $\Delta(\Gamma)$ ile Γ grafiğinde en küçük dereceye sahip köşenin derecesi $\delta(\Gamma)$ ifadeleri aşağıdaki teoremden gösterildiği gibi hesaplanır.

Teorem 4.24. $n \geq 4$ için $T^* = T \setminus \{\theta\}$. Bu durumda,

$$\Delta(\Gamma) = |T^*| - 1 \text{ ve } \delta(\Gamma) = 1$$

olur.

İspat.

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

olarak seçilirse γ köşesi Γ grafiğindeki tüm köşelere komşu olduğundan $\Delta(\Gamma) = |T^*| - 1$ olur.

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

olarak seçilirse $\deg_{\Gamma}(\varepsilon) = 1$ olur. Böylece $\delta(\Gamma) = 1$ olur. $\square$

Aşağıdaki teoremden Γ grafiğinin klik sayısı için bir alt sınır bulunmuştur.

Teorem 4.25. $n \geq 4$ ve $r = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ olsun. Bu durumda

$$\omega(\Gamma) \geq \binom{n-1}{r-1} - 1$$

olur.

İspat. $n \geq 4$ ve $2 \leq r \leq n-1$ olsun.

$$W_r = \left\{ \alpha \in T^* : \{1\} \neq im(\alpha) \subseteq X_r \subseteq 1\alpha^{-1} \right\}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda $\emptyset \neq W_r \subseteq V(\Gamma)$ olur. Ayrıca $\alpha, \beta \in W_r$ için $\alpha \neq \beta$ ise $im(\alpha) \subseteq 1\beta^{-1}$ ve $im(\beta) \subseteq 1\alpha^{-1}$ olur. Böylece W_r kümesi bir kliktir. W_r kümesinin eleman sayısını hesaplayalım. Önerme 4.8 yardımıyla $|W_r| = \binom{n-1}{r-1} - 1$ olduğu görülür. $r = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ seçilirse W_r 'nin eleman sayısı en büyük değere ulaşır. Böylece $r = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ için $\omega(\Gamma) \geq \binom{n-1}{r-1} - 1$ olur. $\square$

Örnek 4.26. $\mathcal{O}_7(A)$ grafiğinin klik sayısı için bir alt sınır bulalım. $r = \left\lceil \frac{7}{2} \right\rceil = 4$ olup

$$\omega(\Gamma) \geq \binom{6}{3} - 1 = 19$$

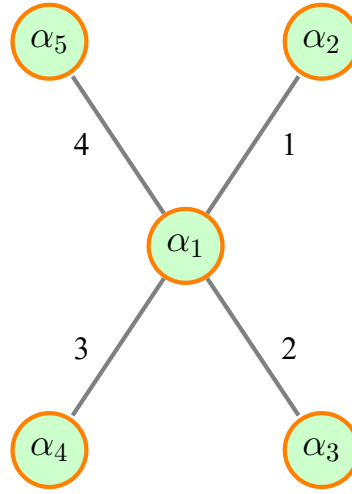
olur.

Örnek 4.27. $n = 4$ ve $A = \{1\}$ olsun. $\mathcal{O}_4(A)$ yarıgrubunun yönsüz sıfır bölen grafiğini yani Γ grafiğini çizelim. Öncelikle Γ grafiğinin köşe kümelerini bulup ve bu köşelerden

hangileri arasında kenar olduğunu araştıralım. Köşe kümesi V olmak üzere

$$V = \left\{ \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

olur. Buna göre Γ grafiğini çizelim.



Şekil 4.2. Γ grafiği

5. TARTIŞMA

Bir önceki bölümde araştırma bulguları tanım, teorem, lemma, örnek ve şekiller halinde rapor edilip yorumlandığı için bu bölümde bulguların genel bir tartışması yapılacaktır.

Bulgular bölümünde, $\mathcal{O}_n$ ve $\mathcal{O}_n(A)$ yarıgruplarının tanımı verilmiştir. Ayrıca tanımlardan $\mathcal{O}_n(A)$ yarı grubunun $\mathcal{O}_n$ ve $\mathcal{T}_n$ yarıgruplarının alt yarı grubu olduğu gösterilmiştir. Böylece bu yarıgruplar arasında $\mathcal{O}_n(A) \leq \mathcal{O}_n \leq \mathcal{T}_n$ olacak şekilde bir ilişki olduğu fark edilmiştir. Tezimizin ana konusu olan $\mathcal{O}_n(A)$ yarı grubunun sıfır eleman içermesi için gerek ve yeter koşulun $1 \in A$ olması gerektiği bilinmektedir.

$\mathcal{O}_n(A)$ yarı grubunun sol sıfır bölen kümesi olan L tanımlanmış ve bu kümenin kardinalitesi yani $|L|$ hesaplanmıştır.

$\mathcal{O}_n(A)$ yarı grubunun sağ sıfır bölen kümesi olan R tanımlanmış ve bu kümenin kardinalitesi yani $|R|$ hesaplanmıştır. $|R|$ için iki farklı durum vardır ve bu durumlar için $|R|$ hesaplanmıştır.

Benzer şekilde $\mathcal{O}_n(A)$ yarı grubunun iki taraflı sıfır bölen kümesi olan T tanımlanmış ve bu kümenin kardinalitesi yani $|T|$ hesaplanmıştır. $|T|$ için iki farklı durum vardır ve bu durumlar için $|T|$ hesaplanmıştır.

$\mathcal{O}_n(A)$ yarı grubunun yönsüz sıfır bölen grafiği olan Γ grafiğinin $n \geq 4$ için bağlantılı grafik olduğunu ispatlanmıştır. Ayrıca bu grafiğin $n \geq 4$ için çapının yani $diam(\Gamma) = 2$ olduğu gösterilmiştir. Γ grafiğinde $n = 4$ için devir olmadığı, $n \geq 5$ için devir uzunluğunun 3 olduğunu gösterilmiştir.

Bu çalışmada $n \geq 4$ için Γ grafiğinde herhangi bir köşenin derecesini hesaplamak için bir formül bulunmuştur. Γ grafiğinde en büyük dereceye sahip köşenin derecesi $\Delta(\Gamma)$ ve Γ grafiğinde en küçük dereceye sahip köşenin derecesi $\delta(\Gamma)$ ifadeleri hesaplanmıştır.

Γ grafiğinin klik sayısı olan $\omega(\Gamma)$ için bir alt sınır bulunmuştur. Tezimizde klik sayısı için doğrudan bir eşitlik bulamadık ama bulduğumuz alt sınır belkide ilerideki çalışmalar için bir mihenk taşı olacaktır.

6. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında sıra koruyan ve A-azalan yarıgrubunun sıfır bölen grafikleri incelenmiştir. Üzerinde çalıştığımız bu yarıgrubun bazı cebirsel özelliklerinin varlığına da ulaşılmıştır.

7. ÖNERİLER

$\mathcal{O}_n(A)$ yarıgrubunun yönsüz sıfır bölen kümesi olan Γ grafiği tanımlanmıştır. $n \geq 4$ için Γ grafiğinin bağlantılı bir grafik olduğu gösterilmiştir, Γ grafiğinin köşe sayısı, köşe dereceleri, en büyük ve en küçük köşe derecesi, çapı ve en kısa devir uzunluğu hesaplanmıştır. Ayrıca bu grafiğin klik sayısı için bir alt sınır bulunmuştur. Bu grafiğin klik sayısı tam olarak bulunmamıştır. Γ grafiğinin mükemmel bir grafik olduğunu gösterilir ve klik sayısı tam olarak hesaplanırsa sonraki çalışmalara daha fazla yardımcı olacaktır.

KAYNAKLAR

- Anderson, D. F., , Livingston, P. S. (1999). The zero-divisor graph of a commutative ring. *Journal of Algebra*, 217(2), 434-447.
- Beck, I. (1988). Coloring of commutative rings. *Journal of Algebra*, 116(1), 208-226.
- Bugay, L., Yağcı, M., Ayık, H. (2019). Combinatorial results for semigroups of order-preserving and A-decreasing finite transformations. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 42, 921-932.
- Das, K. C., Akgüneş, N., Çevik, A. S. (2013). On a graph of monogenic semigroups. *Journal of Inequalities and Applications*, 2013, 1-13.
- DeMeyer, F., DeMeyer, L. (2005). Zero divisor graphs of semigroups. *Journal of Algebra*, 283(1), 190-198.
- DeMeyer, F. R., McKenzie, T., Schneider, K. (2002). The zero-divisor graph of a commutative semigroup. *Semigroup Forum*, 65, 206-214.
- Ganyushkin, O., Mazorchuk, V. (2009). *Classical finite transformation semigroups: an introduction*. Springer, London.
- Howie, J. M. (1995). *Fundamentals of semigroup theory*. Oxford University Press.
- Korkmaz, E. (2024). On Graphs of a Finite Full Transformation Semigroup. *Experimental Mathematics*, 1-8.
- Redmond, S. P. (2002). The zero-divisor graph of a non-commutative ring. *Int. J. Commut. Rings*, 1, 203-211.
- Thulasiraman, K., Arumugam, S., Brandstädt, A. (2016). *Handbook of graph theory , combinatorial optimization, and algorithms*.
- Toker, K. (2016). On the zero-divisor graphs of finite free semilattices. *Turkish Journal of Mathematics*, 40(4), 824-831.
- Toker, K. (2021). Zero-divisor graphs of Catalan monoid. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 50(2), 387-396.
- Toker, K. (2021). Zero-divisor graphs of partial transformation semigroups. *Turkish Journal of Mathematics*, 45(5), 2323-2330.
- Toker, K., Eşidir, Z. (2022). Zero-Divisor Graphs of Order-Decreasing Full Transformation Semigroups. *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 22(1), 68-74.
- Zhao, P. (2014). On the semigroups of order-preserving and A-decreasing finite transformations. *Algebra Colloquium* 21(4), 653-662.