



**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Sıra Koruyan ve Sıra Azaltan Tam Daralma Dönüşümler Yarıgrubunun Sıfır
Bölen Grafiği**

AHMET KÜÇÜK

Matematik Anabilim Dalı

**Şanlıurfa
2025**



**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Sıra Koruyan ve Sıra Azaltan Tam Daralma Dönüşümler Yarıgrubunun Sıfır
Bölen Grafiği**

AHMET KÜÇÜK

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Kemal TOKER

Matematik Anabilim Dalı

**Şanlıurfa
2025**

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince değerli bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren, desteklerini ve yardımlarını esirgemeyen kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Kemal TOKER'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım boyunca yapıcı eleştirileri ve önerileriyle tezin olgunlaşmasına katkıda bulunan değerli jüri üyelerime teşekkür ederim. Ayrıca Bu zorlu süreçte bana her zaman destek olan, sabır ve anlayış gösteren sevgili eşim Emine'ye, hayatıma anlam katan canım evlatlarım Yasemin ve Sümeyye'ye sonsuz teşekkürler. Dualarıyla her zaman yanımda olan sevgili anneme ve babama saygı ve hürmetlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

TEŞEKKÜR	
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	3
2.1. Grafik Teorisi ile İlgili Temel Kavramlar	3
2.2. Yarıgrup Teorisi ile İlgili Temel Kavramlar	5
2.3. Dönüşüm Yarıgrupları	6
2.4. Yarıgruplarda Sıfır Bölenler ve Sıfır Bölen Grafikleri	7
2.5. Monoid Takdimleri ve Rank.....	8
3. GEREÇ VE YÖNTEM.....	15
3.1. Gereç	15
3.1.1. $ODCT_n$ Yarı grubunun Tanımı ve Elemanlarının Yapısı	15
3.1.2. $ODCT_n$ Yarı grubunun Sıfır Elemanı ve Birim Elemanı.....	15
3.2. Yöntem	16
4. BULGULAR	17
4.1. $ODCT_n$ Yarı grubunun Sıfır Bölenleri.....	17
4.2. $\Gamma(ODCT_n)$ Sıfır Bölen Grafiği	19
5. TARTIŞMA	24
6. SONUÇLAR.....	25
7. ÖNERİLER	26
KAYNAKLAR	27

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sıra Koruyan ve Sıra Azaltan Tam Daralma Dönüşümler Yarıgrubunun Sıfır Bölen Grafiği

AHMET KÜÇÜK

HARRAN ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Kemal TOKER

Yıl: 2025, sayfa: 28

Bu tez çalışmasında, $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ sonlu kümesi üzerindeki sıra koruyan, sıra azaltan ve tam daralma özelliği gösteren dönüşümlerin oluşturduğu $ODCT_n$ yarıgrubu incelenmiştir. Çalışmanın temel amacı, bu yarıgrubun sıfır bölen yapısını analiz etmek ve bu yapıya karşılık gelen $\Gamma(ODCT_n)$ sıfır bölen grafiğinin temel özelliklerini belirlemektir. İlk olarak, $ODCT_n$ yarıgrubunun sol, sağ ve iki yönlü sıfır bölenleri karakterize edilmiştir. $ODCT_n$ yarıgrubunun sol sıfır bölenler kümesinin eleman sayısı $2^{n-1} - 1$, sağ sıfır bölenler kümesinin ve iki yönlü sıfır bölenler kümesinin eleman sayılarının birbirine eşit ve 2^{n-2} olduğu gösterilmiştir. Ardından, $n \geq 3$ için $\Gamma(ODCT_n)$ sıfır bölen grafiği tanımlanmıştır. $ODCT_n$ yarıgrubunun sıfır elemanı θ ile gösterilmiştir. Grafiğin $n \geq 4$ için bağlantılı olduğu ve çapının 2 olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, $n \geq 5$ için grafiğin devir uzunluğunun 3 olduğu ispatlanmıştır. Grafiğin klik sayısı için bir alt sınır bulunmuştur. Bu çalışma, $ODCT_n$ yarıgrubunun cebirsel yapısı ile sıfır bölen grafiğinin topolojik özellikleri arasındaki ilişkiyi ortaya koymakta ve literatüre katkı sağlamaktadır. Elde edilen sonuçlar, grafiğin çapı, köşe dereceleri, klik ve kromatik sayıları gibi diğer invariantlarının daha detaylı incelenmesi için bir temel oluşturmaktadır.

ANAHTAR KELİMELER: Sıfır Bölen Grafiği, Dönüşüm Yarıgrubu, Sıra Koruyan dönüşüm, Sıra Azaltan dönüşüm, Daralma dönüşümü

ABSTRACT

MASTER THESIS

Zero Divisor Graphs Of Order Preserving And Order Decreasing Contraction Mappings Semigroup

AHMET KÜÇÜK

HARRAN UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Kemal TOKER
Year: 2025, page: 28

In this thesis, the semigroup $\mathcal{ODCT}_n$ which consists of transformations on the finite set $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ that are simultaneously order-preserving, order-decreasing, and full contraction mappings, is investigated. The main objective of the study is to analyze the zero-divisor structure of this semigroup and to determine the fundamental properties of the corresponding zero-divisor graph $\Gamma(\mathcal{ODCT}_n)$. Firstly, the left, the right, and the two-sided zero-divisors of the semigroup $\mathcal{ODCT}_n$ were characterized. It is shown that the number of elements of the left zero divisor set of the $\mathcal{ODCT}_n$ semigroup is $2^{n-1} - 1$. The number of elements of the right zero divisor set and the two-way zero divisor set are equal to each other and 2^{n-2} . Subsequently, the zero-divisor graph $\Gamma(\mathcal{ODCT}_n)$ was defined for $n \geq 3$. The zero element of the semigroup $\mathcal{ODCT}_n$ is denoted by θ . It is shown that the graph is connected for $n \geq 4$ and has a diameter of 2. Furthermore, it was mentioned that for $n \geq 5$, the girth of the graph is 3. A lower bound for the clique number of the graph was given. This study reveals the relationship between the algebraic structure of the $\mathcal{ODCT}_n$ semigroup and the topological properties of its zero-divisor graph, contributing to the existing literature. The results obtained provide a foundation for further investigation into other invariants of the graph, such as its diameter, vertex degrees, clique number, and chromatic number.

KEYWORDS: Zero-divisor graph, Transformation semigroup, Order-preserving transformation, Order-decreasing transformation, Contraction mapping

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa No
Şekil 2.1. Yönsüz grafik.....	3
Şekil 2.2. Bağlantılı grafik.....	4
Şekil 2.3. Bağlantısız grafik.....	4
Şekil 4.1. $ODCT_5$ yarıgrubunun sıfır bölen grafiği.....	23

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler Açıklama

X_n	1'den n 'ye kadar olan pozitif tam sayıların kümesi
im	Görüntü kümesi
$ X $	X kümesinin eleman sayısı
$\mathcal{T}_n$	X_n kümesi üzerindeki tam dönüşümler yarıgrubu
$\mathcal{ODCT}_n$	X_n kümesi üzerinde sıra-koruyan ve sıra-azaltan tam daralma dönüşümler yarıgrubu
L	Sol sıfır bölenlerin kümesi
R	Sağ sıfır bölenlerin kümesi
T	İki yönlü sıfır bölenlerin kümesi
Γ	Yönsüz sıfır bölen grafiği
$ V $	Grafiğinin köşe sayısı
deg	Bir köşenin derecesi
Δ	En büyük köşe derecesi
δ	En küçük köşe derecesi
$diam$	Çap
gr	En kısa devir uzunluğu
ω	Klik sayısı
χ	Kromatik sayısı

1. GİRİŞ

Matematiksel yapıların cebirsel ve grafiksel özelliklerinin incelenmesi, soyut cebir ve grafik teorisi arasındaki etkileşimi ortaya koyarak her iki alana da önemli katkılar sağlamaktadır. Bu etkileşimin güzel bir örneği, cebirsel yapıların sıfır bölen elemanları arasındaki ilişkileri görselleştiren sıfır bölen grafikleri çalışmalarıdır. Sıfır bölen grafikleri kavramı ilk olarak Beck tarafından değişmeli halkalar üzerine tanımlanmıştır (Beck, 1988). Beck'in tanımında halkanın sıfır elemanı da grafiğin bir köşesi olarak kabul edilirken, daha sonra Anderson ve Livingston tarafından geliştirilen ve günümüzde standart olarak kabul edilen tanımda sıfır elemanı köşe kümesinin dışında bırakılmıştır (Anderson ve Livingston, 1999). Bu tanıma göre, değişmeli bir R halkasının sıfır bölen grafiği $\Gamma(R)$, köşe kümesi R 'nin sıfır olmayan sıfır bölenlerinden oluşan ve iki farklı köşe α, β arasında $\alpha\beta = 0$ olması durumunda bir kenar bulunan bir grafiktir.

Sıfır bölen grafikleri üzerine yapılan çalışmalar, başlangıçta değişmeli halkalar üzerine yoğunlaşmış olsa da, zamanla DeMeyer ve arkadaşları tarafından değişmeli yarıgruplara da genişletilmiştir (DeMeyer ve Ark., 2002; DeMeyer ve DeMeyer, 2005). Bu çalışmalar, değişmeli yarıgrupların sıfır bölen grafiklerinin temel özelliklerini ortaya koymuştur. Literatürde, değişmeli yarıgrupların çeşitli özel sınıflarının sıfır bölen grafikleri üzerine de önemli çalışmalar bulunmaktadır (Das ve Ark., 2013). Kavramın değişmeli olmayan halkalarda uygulanması Redmond tarafından yapılmıştır. Redmond, değişmeli olmayan halkalar için dört farklı sıfır bölen grafiği tanımlamıştır (Redmond, 2002). Bunlardan bir tanesi değişmeli olmayan bir R halkası için sıfır bölen grafiği $\Gamma(R)$, köşe kümesi halkanın sıfır olmayan iki yönlü sıfır bölenlerinden oluşan ve farklı α, β köşeleri arasında $\alpha\beta = 0 = \beta\alpha$ olması durumunda bir kenar bulunan bir grafiktir. Değişmeli olmayan halkalar için sıfır bölen grafiği bağlantılı olmayabilir. Bu tanımlar doğal olarak değişmeli olmayan yarıgruplara da genişletilebilir. Dönüşüm yarıgruplarının bazı alt yarıgruplarının sıfır bölen grafikleri üzerine de çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Örneğin, Toker ve Eşidir, sıra azaltan dönüşümler yarıgrubu olan $\mathcal{D}_n$ 'nin sıfır bölen grafiğini incelemişlerdir (Toker ve Eşidir, 2022).

Dönüşüm yarıgrupları, yani boştan farklı bir küme üzerindeki fonksiyonların bileşke işlemi altında oluşturduğu yarıgruplar, hem teorik hem de uygulamalı

matematikte önemli bir yere sahiptir. Özellikle sonlu bir küme üzerindeki tam dönüşüm yarıgrubu $\mathcal{T}_n$, yarıgrup teorisinde merkezi bir rol oynar. Bu yarıgrubun çeşitli alt yarıgrupları, belirli özellikleri sağlayan dönüşümlerden oluşur ve kendilerine özgü cebirsel yapılara sahiptir. Bu alt yarıgruplardan bazıları sıra koruyan dönüşümler $\mathcal{O}_n$, sıra azaltan dönüşümler $\mathcal{D}_n$ ve daralma dönüşümleri $\mathcal{CT}_n$ yarıgruplarıdır.

Bu tez çalışmasının odak noktası, $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ sonlu kümesi üzerinde tanımlanan ve hem sıra koruyan, hem sıra azaltan hem de daralma özelliği gösteren dönüşümlerden oluşan $\mathcal{ODCT}_n = \mathcal{O}_n \cap \mathcal{D}_n \cap \mathcal{CT}_n$ yarıgrubudur. Bu yarıgrup X_n üzerindeki sıra koruyan ve sıra azaltan tam daralma dönüşümler yarıgrubu olarak adlandırılır. Bu yarıgrubun cebirsel yapısı ve özellikleri, özellikle sıfır bölenleri ve bu sıfır bölenler arasındaki ilişkiler, bu çalışmanın temel konusunu oluşturmaktadır.

Bu tezin temel amacı, $\mathcal{ODCT}_n$ yarıgrubunun sıfır bölen yapısını incelemek ve bu yapıya karşılık gelen sıfır bölen grafiği $\Gamma(\mathcal{ODCT}_n)$ 'nin temel grafiksel özelliklerini belirlemektir. Bu kapsamda, öncelikle $\mathcal{ODCT}_n$ yarıgrubunun sol, sağ ve iki yönlü sıfır bölenleri karakterize edilecek ve bu kümelerin eleman sayıları belirlenecektir. Devamında, $\Gamma(\mathcal{ODCT}_n)$ grafiğinin tanımı yapılacaktır, bağlantınlığı, çapı, devir uzunluğu gibi temel özellikleri incelenecektir. Ayrıca, grafiğin köşe dereceleri, klik sayısı ve kromatik sayısı gibi diğer invariantları hakkında da sonuçlar elde edilmeye çalışılacaktır. Bu çalışma, dönüşüm yarıgruplarının sıfır bölen grafikleri üzerine yapılan literatüre katkıda bulunmayı hedeflemektedir.

Tez şu şekilde yapılandırılmıştır: İkinci bölümde, grafik teorisi, yarıgrup teorisi ve dönüşüm yarıgrupları ile ilgili temel tanımlar ve kavramlar verilecek, ayrıca sıfır bölen grafikleri üzerine yapılan önceki çalışmalara değinilecektir. Üçüncü bölümde, çalışmanın materyali olan $\mathcal{ODCT}_n$ yarıgrubu tanıtılacak ve kullanılacak yöntemler açıklanacaktır. Dördüncü bölümde, $\mathcal{ODCT}_n$ yarıgrubunun sıfır bölenleri ve sıfır bölen grafiği $\Gamma(\mathcal{ODCT}_n)$ ile ilgili elde edilen temel bulgular sunulacaktır. Beşinci bölümde tartışma altıncı bölümde ise elde edilen sonuçlar özetlenecek ve son bölüm olan yedinci bölümde gelecek çalışmalar için önerilerde bulunulacaktır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, tez çalışmasının temelini oluşturan grafik teorisi, yarıgrup teorisi ve dönüşüm yarıgrupları ile ilgili temel tanımlar ve kavramlar sunulacaktır. Ayrıca, sıfır bölen grafikleri üzerine yapılan önceki önemli çalışmalara yer verilecektir.

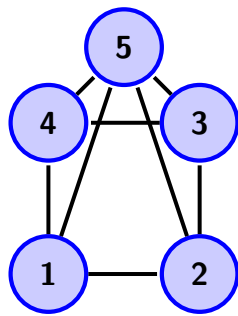
2.1. Grafik Teorisi ile İlgili Temel Kavramlar

Grafik teorisi, noktalar (köşeler) ve bu noktaları birleştiren çizgilerden (kenarlar) oluşan yapıları inceler. Sıfır bölen grafikleri de bu teorinin bir uygulamasıdır.

Tanım 2.1. Bir G grafiği, bir $V(G)$ köşe kümesi ve bir $E(G)$ kenar kümesinden oluşan bir $(V(G), E(G))$ ikilisidir. Kenarlar, köşeler arasındaki ilişkileri temsil eder. Eğer kenarlar yönsüz ise grafik yönsüz, yönlü ise yönlü grafik olarak adlandırılır.

Bu tezde, aksi belirtilmedikçe, grafikler basit (yani, döngü veya katlı kenar içermeyen) ve yönsüz kabul edilecektir.

Örnek 2.2. Aşağıda yönsüz grafiğe bir örnek verilmiştir.

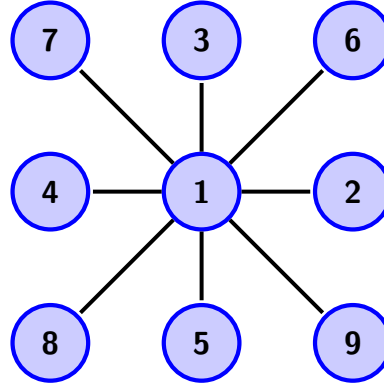


Şekil 2.1. Yönsüz grafik

Tanım 2.3. Bir G grafiğinde, $u, v \in V(G)$ köşeleri arasında bir kenar varsa, bu köşelere komşu denir. Basit bir G grafiğinde, bir v köşesinin komşu olduğu köşelerin sayısına v 'nin derecesi denir ve $\deg_G(v)$ ile gösterilir. Grafikteki en büyük derece $\Delta(G)$ ile, en küçük derece $\delta(G)$ ile gösterilir.

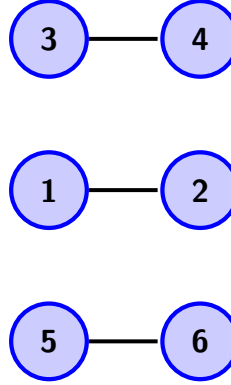
Tanım 2.4. Bir G grafiğinde, u köşesinden v köşesine bir yol, farklı kenarlardan oluşan bir köşe dizisidir. İki köşe arasında bir yol varsa, bu köşelere bağlantılı denir. Bir grafikteki herhangi iki köşe birbirine bağlantılı ise, bu grafiğe bağlantılı grafik denir.

Örnek 2.5. Aşağıda bağlantılı grafiğe bir örnek verilmiştir.



Şekil 2.2. Bağlantılı grafik

Örnek 2.6. Aşağıda bağlantısız grafiğe bir örnek verilmiştir.



Şekil 2.3. Bağlantısız grafik

Tanım 2.7. Bir $G = (V, E)$ grafiğinde $v_0, v_1, \dots, v_k \in V$ olmak üzere $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{k-1}v_k$ şeklinde ardışık kenarlar bitişik ya da özdeş olacak şekildeki kenarların sonlu dizisine G içinde v_0 ve v_k köşe noktalarını birleştiren bir yolculuk denir. v_0 ve v_k köşe noktalarını birleştiren yolculuk, $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow v_k$ şeklinde de gösterilir. Bir yolculuktaki kenar sayısına ise o yolculuğun uzunluğu denir.

Tanım 2.8. Bağlantılı bir G grafiğinde, $u, v \in V(G)$ köşeleri arasındaki en kısa yolun uzunluğu $d_G(u, v)$ ile gösterilir. Grafiğin çapı, $diam(G)$ ile gösterilir ve $diam(G) =$

$\max\{d_G(u, v) : u, v \in V(G)\}$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.9. Bir grafikte, başladığı köşeye geri dönen ve kenarları tekrarlamayan bir yola devir denir. Bir G grafiğindeki en kısa devrin uzunluğu $gr(G)$ ile gösterilir. Eğer grafik G grafiği devir içermiyorsa, $gr(G) = \infty$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.10. Bir G grafiğinde, herhangi iki köşesi birbirine komşu olan bir alt kümeye klik denir. G grafiğindeki maksimal klikteki köşe sayısına grafiğin klik sayısı denir ve $\omega(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.11. Bir G grafiğinin kromatik sayısı $\chi(G)$, komşu köşelerin farklı renklerde olması koşuluyla grafiğin tüm köşelerini boyamak için gereken minimum renk sayısıdır.

Tanım 2.12. Bir G grafiğinde, $D \subseteq V(G)$ alt kümesi, $V(G)$ 'deki her köşe için ya D 'de olması ya da D 'deki en az bir köşeye komşu olması durumunda D kümesi bir baskınlık kümesi olarak adlandırılır. G grafiğinin baskınlık sayısı $\gamma(G)$, minimum boyutlu baskınlık kümesinin eleman sayısıdır.

Tanım 2.13. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ grafikleri verilsin. Eğer $a, b \in V_1$ köşe noktaları G_1 grafiğinde komşu köşe noktalar $\iff g(a), g(b) \in V_2$ köşe noktaları G_2 grafiğinde komşu köşe noktalar olacak şekilde bir $g : V_1 \rightarrow V_2$ birebir dönüşümü varsa, G_1 ve G_2 grafiklerine izomorfik grafikler denir ve bu durum $G_1 \cong G_2$ şeklinde gösterilir. Bu şekildeki g dönüşümüne ise G_1 ve G_2 arasında bir izomorfizm dönüşümü adı verilir (Thulasiraman ve Ark., 2015).

2.2. Yarıgrup Teorisi ile İlgili Temel Kavramlar

Yarıgruplar, bir küme üzerinde tanımlı birleşmeli bir ikili işlem içeren temel cebirsel yapılardır.

Tanım 2.14. $\emptyset \neq A$, A bir küme ve $\theta : A \times A \rightarrow A$ tanımlı bir fonksiyonu varsa (A, θ) ikilisine grupoid denir. Genellikle " θ " yerine "." yazılabilir. Yani $x, y \in A$ için $(x, y)\theta$ yerine $x.y$ ya da xy yazılır.

Tanım 2.15. Boştan farklı bir S kümesi üzerinde tanımlı bir "." ikili işlemi, eğer birleşme özelliğini sağlıyorsa (yani, $\forall a, b, c \in S$ için $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$), $(S, \cdot)$ yapısına bir yarıgrup denir. Eğer işlem aynı zamanda değişme özelliğini de sağlıyorsa (yani, $\forall a, b \in S$ için $a \cdot b = b \cdot a$), S yapısına değişmeli yarıgrup denir.

Tanım 2.16. S bir yarıgrup ve T , S 'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall a, b \in T$ için $a \cdot b \in T$ ise, T 'ye S 'nin bir altyarı grubu denir ve $T \leq S$ ile gösterilir.

Tanım 2.17. S bir yarıgrup olsun. Eğer $\forall s \in S$ için $z \cdot s = s \cdot z = z$ olacak şekilde bir $z \in S$ elemanı varsa, z 'ye S 'nin sıfır elemanı denir. Bir yarı grubun en fazla bir tane sıfır elemanı olabilir.

Tanım 2.18. S bir yarıgrup olsun. Eğer $\forall s \in S$ için $e \cdot s = s \cdot e = s$ olacak şekilde bir $e \in S$ elemanı varsa, e 'ye S 'nin birim elemanı denir. Birim elemanı olan yarı gruplara monoid denir. Bir yarı grubun en fazla bir tane birim elemanı olabilir.

Tanım 2.19. S bir yarıgrup ve X de S 'nin boştan farklı alt kümesi olsun. S 'nin X 'i içeren S 'nin en küçük alt yarı grubuna X tarafından doğurulan alt yarı grubu denir. Bu yarı grup $\langle X \rangle$ ile gösterilir. Ayrıca $S = \langle X \rangle$ ise X 'e S 'nin bir doğuray kümesi denir. Sonlu bir X kümesi için $S = \langle X \rangle$ ise S 'ye sonlu doğuraylı yarı grup denir.

2.3. Dönüşüm Yarı grupları

X boştan farklı bir küme olmak üzere, X üzerindeki dönüşümlerin (fonksiyonların) bileşke işlemi altında oluşturduğu yarı gruba X üzerindeki dönüşüm yarı grubu denir.

Tanım 2.20. X boştan farklı bir küme olmak üzere, X 'ten X 'e tanımlı tüm fonksiyonların kümesi $\mathcal{T}_X$, fonksiyonların bileşke işlemi " $\circ$ " altında bir yarı gruptur. Bu yarı gruba X üzerindeki tam dönüşüm yarı grubu denir. $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ sonlu kümesi için, $\mathcal{T}_{X_n}$ yarı grubu kolaylık olması amacıyla kısaca $\mathcal{T}_n$ ile gösterilir.

$\mathcal{T}_n$ yarı grubunun bazı önemli altyarı grupları aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 2.21. X_n üzerinde tanımlı doğal sıralama " $\leq$ " olmak üzere,

$$\mathcal{O}_n = \{\alpha \in \mathcal{T}_n : \forall x, y \in X_n, x \leq y \implies x\alpha \leq y\alpha\}$$

kümesi, $\mathcal{T}_n$ 'nin bir altyarı grubudur ve X_n üzerindeki sıra koruyan dönüşümler yarı grubu olarak adlandırılır.

Tanım 2.22.

$$\mathcal{D}_n = \{\alpha \in \mathcal{T}_n : \forall x \in X_n, x\alpha \leq x\}$$

kümesi, $\mathcal{T}_n$ 'nin bir altyarıgrubudur ve X_n üzerindeki sıra azaltan dönüşümler yarıgrubu olarak adlandırılır.

Tanım 2.23.

$$\mathcal{CT}_n = \{\alpha \in \mathcal{T}_n : \forall x, y \in X_n, |x\alpha - y\alpha| \leq |x - y|\}$$

kümesi, $\mathcal{T}_n$ 'nin bir altyarıgrubudur ve X_n üzerindeki daralma dönüşümleri yarıgrubu olarak adlandırılır.

Tanım 2.24. $\mathcal{OCT}_n = \mathcal{O}_n \cap \mathcal{CT}_n$ kümesi, $\mathcal{T}_n$ 'nin bir altyarıgrubudur ve X_n üzerindeki sıra koruyan daralma dönüşümleri yarıgrubu olarak adlandırılır.

Tanım 2.25. $\mathcal{ODCT}_n = \mathcal{O}_n \cap \mathcal{D}_n \cap \mathcal{CT}_n$ olarak tanımlanır. Bu yarıgrup, $\mathcal{T}_n$ 'nin bir altyarıgrubudur ve X_n üzerindeki sıra koruyan ve sıra azaltan tam daralma dönüşümler yarıgrubu olarak adlandırılır.

Lemma 2.26. $\mathcal{O}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{CT}_n, \mathcal{OCT}_n$ ve $\mathcal{ODCT}_n$ yarıgrupları, $\mathcal{T}_n$ 'nin altyarıgruplarıdır.

Lemma 2.27. $n \geq 1$ için $\mathcal{ODCT}_n$ bir monoiddir. Birim elemanı $1_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$

özdeşlik dönüşümüdür. Sıfır elemanı $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ sabit dönüşümüdür.

İspat. 1_n dönüşümünün $\mathcal{O}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{CT}_n$ yarıgruplarının birim elemanı olduğu açıktır, dolayısıyla 1_n dönüşümü $\mathcal{ODCT}_n$ yarıgrubunun birim elemanı olur. Benzer şekilde, θ dönüşümü de $\mathcal{O}_n, \mathcal{D}_n, \mathcal{CT}_n$ yarıgruplarının elemanıdır, dolayısıyla $\theta \in \mathcal{ODCT}_n$ olur. $\forall \alpha \in \mathcal{ODCT}_n$ için $\alpha \circ \theta = \theta \circ \alpha = \theta$ olduğu kolayca görülür. Böylece θ dönüşümü $\mathcal{ODCT}_n$ yarıgrubunun sıfır elemanı olur. $\square$

2.4. Yarıgruplarda Sıfır Bölenler ve Sıfır Bölen Grafikleri

Sıfır bölen grafikleri, bir cebirsel yapının sıfır bölen elemanları arasındaki ilişkileri inceler.

Tanım 2.28. S , sıfır elemanı 0 olan bir yarıgrup ve $S^* = S \setminus \{0\}$ olsun.

- $L(S) = \{\alpha \in S : \alpha\beta = 0 \text{ olacak şekilde } \exists \beta \in S^* \text{ vardır}\}$ kümesine S 'nin sol sıfır bölenlerinin kümesi denir.

- $R(S) = \{\alpha \in S : \gamma\alpha = 0 \text{ olacak şekilde } \exists \gamma \in S^* \text{ vardır}\}$ kümesine S 'nin sağ sıfır bölenlerinin kümesi denir.
- $T(S) = \{\alpha \in S : \alpha\beta = 0 \text{ ve } \gamma\alpha = 0 \text{ olacak şekilde } \exists \beta, \gamma \in S^* \text{ vardır}\}$ kümesine S 'nin (iki yönlü) sıfır bölenlerinin kümesi denir.

Tanımlardan $T(S) = L(S) \cap R(S)$ olduğu açıktır.

Tanım 2.29. S , sıfır elemanı 0 olan bir yarıgrup ve $T(S)^* = T(S) \setminus \{0\}$ kümesi boştan farklı olsun. S 'nin sıfır bölen grafiği $\Gamma(S)$, köşe kümesi $V(\Gamma(S)) = T(S)^*$ olan ve farklı $\alpha, \beta \in V(\Gamma(S))$ köşeleri arasında $\alpha\beta = 0 = \beta\alpha$ olması durumunda bir kenar bulunan yönsüz grafiktir.

Eğer S değişmeli bir yarıgrup ise, $\alpha\beta = 0$ koşulu $\beta\alpha = 0$ koşulunu da sağladığından, kenar olma koşulu $\alpha\beta = 0$ olarak basitleşir (DeMeyer ve Ark., 2002).

Tanım 2.30. $\mathcal{SL}_n$ ile X_n kümesinin tüm alt kümeleri gösterilir. Kümelerin birleşme işlemi ile bu yapı bir yarıgrup olup buna X_n üzerindeki serbest yarılatı denir.

Tanım 2.31. X_n üzerindeki tüm bağıntıların kümesi $\mathcal{B}_n$ ile gösterilir. Ayrıca, $\mathcal{P}_n = \{\alpha \in \mathcal{B}_n : \forall x \in X_n \text{ için } |x\alpha| \leq 1\}$ yapısına X_n üzerindeki kısmi dönüşümler yarıgrubu denir.

2.5. Monoid Takdimleri ve Rank

X boş olmayan bir küme olsun ve $\mathcal{T}_x$, X üzerindeki tam dönüşümler yarıgrubu olsun. Her yarıgrup bir tam dönüşüm yarıgrubunun bir alt yarıgrubuna izomorftur (Ganyushkin ve Mazorchuk, 2009). Bu nedenle tam dönüşüm yarıgrupları yarıgrup teorisinde önemlidir.

M bir monoid ve A , M 'nin herhangi bir alt kümesi olsun. A tarafından üretilen M 'nin alt monoidi (A 'yı içeren M 'in en küçük alt monoidi) $\langle A \rangle_M$ ile gösterilir. A sonlu bir küme olmak üzere $\langle A \rangle_M = M$ ise M 'ye sonlu üretilmiş monoid denir. Sonlu üretilmiş yarıgrupta benzer şekilde tanımlanır. Sonlu olarak üretilen M monoidinin rankı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\text{rank}_M(M) = \min \{|A| : \langle A \rangle_M = M\}.$$

S_n , X_n üzerinde simetrik grup olsun. 1_S , S_n 'in birim elemanı olmak üzere $\mathcal{O}_n \setminus \mathcal{S}_n = \mathcal{O}_n \setminus \{1_S\}$ 'in yarıgrup rankı bulunmuştur (Gomes ve Howie, 1992). X_n üzerinde sıra koruyan ve sıra azaltan dönüşümler yarıgrubu $\mathcal{C}_n$ ile gösterilir. Buna X_n üzerinde Catalan monoidi denir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mathcal{C}_n = \{\alpha \in \mathcal{O}_n : (\forall x \in X_n) \quad x\alpha \leq x\}.$$

Literatürde $\mathcal{C}_n$ yarıgrubu ile ilgili bazı makaleler vardır, örneğin ,(Higgins, 1993; Ayık ve Ark., 2011). $\mathcal{OCT}_n$ yarıgrubu üzerinde bazı kombinatorik özellikler Adeshola ve Umar tarafından incelenmiştir (Adeshola ve Umar, 2018). Ayrıca $\mathcal{ODCT}_n = \mathcal{CT}_n \cap \mathcal{C}_n$ olur. Böylece $\mathcal{ODCT}_n$, $\mathcal{OCT}_n$ ve $\mathcal{C}_n$ 'in alt monoididir.

Ayrıca, monojenik yarıgrubun sıfır bölen grafikleri 2013 yılında incelenmiştir (Das ve Ark., 2013). 2016 yılında serbest yarılatısların sıfır bölen grafikleri (Toker, 2016), 2021 yılında kısmi dönüşümler yarıgrubunun sıfır bölen grafiği (Toker, 2021 b) ve Catalan monoidinin sıfır bölen grafiği (Toker, 2021 c), 2022 yılında sıra-azaltan dönüşümler yarıgrubunun sıfır bölen grafiği incelenmiştir (Toker ve Eşidir, 2022).

Tanım 2.32. İki küme arasında tanımlanan bir bağıntı, bir kümenin elemanlarını diğer kümenin elemanlarıyla ilişkilendiren ikililer kümesidir. Matematiksel olarak, A ve B kümeleri için, $A \times B$ kartezyen çarpımının herhangi bir alt kümesine A kümesinden B kümesine bir bağıntı denir. Bir küme üzerinde tanımlı olan bir bağıntı, eğer yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa denklik bağıntısı olarak adlandırılır.

Tanım 2.33. S bir yarıgrup ve $\rho \subseteq S \times S$ olmak üzere ρ , S üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer ρ bir denklik bağıntısı ve $\forall (a, b) \in \rho$ ve $\forall s \in S$ için $(as, bs) \in \rho$ ve $(sa, sb) \in \rho$ oluyorsa ρ bağıntısına S üzerinde bir kongrüans denir.

Tanım 2.34. Serbest monoid, bir kümenin elemanlarından oluşan tüm sonlu kelimelerin kümesidir. Bu yapı, birleştirme işlemiyle birlikte bir monoid oluşturur ve boş kelime genellikle ϵ ile gösterilir ve ϵ elemanı serbest monoidin birim elemanı olur.

A bir küme olmak üzere A üzerindeki serbest monoid A^* ile gösterilir. $R \subseteq A^* \times A^*$ kelime çiftlerinden oluşan bir küme olsun. R 'nin bir elemanı (r, s) , bir ilişki olarak adlandırılır ve genellikle $r = s$ olarak yazılır. $R^\#$, R 'yi kapsayan A üzerindeki en küçük kongrüans olmak üzere $A^*/R^\#$ bir monoiddir, bu monoid $\langle A|R \rangle$

ile gösterilir.

$\langle A|R \rangle$ tarafından tanımlanan monoid M olsun. $w_1, w_2 \in A^*$ olsun, eğer w_1 ve w_2 , A^* üzerinde aynı elemanlar ise $w_1 \equiv w_2$ yazılır. Eğer w_1 ve w_2 M monoidinin aynı elemanını temsil ediyorsa, yani $(w_1, w_2) \in R^\#$ ise $w_1 = w_2$ yazılır. $(r, s) \in R$ ya da $(s, r) \in R$ olmak üzere $u_1 \equiv xry$ ve $u_2 \equiv xsy$ ise bu durumda u_1, u_2 'den R 'nin bir ilişkisi kullanılarak elde edilmiştir denir.

Eğer w_1 ve w_2 aynı kelimeler ise veya R 'deki ilişkiler kullanılarak elde edilen $w_1 \equiv u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_k \equiv w_2$ ($1 \leq i \leq k-1$) dizisi varsa (burada u_{i+1} , u_i tarafından elde edilmiştir) $w_1 = w_2$ 'nin R 'nin bir sonucudur denir. Yarıgrup ve monoid takdimi hakkındaki iki önemli tez vardır.(Ruskuc, 1995; Ayık, 1998).

Tanım 2.35. A, X_n kümesinin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall x, y \in A$ için $x \leq z \leq y \implies z \in A$ oluyorsa A kümesine X_n kümesinin konveks alt kümesi denir.

Tanım 2.36. $\alpha \in \mathcal{T}_n$ olsun, o halde α 'nın çekirdeği ve görüntü kümesi şu şekilde tanımlanır:

$$\ker(\alpha) = \{(x, y) \in X_n \times X_n : x\alpha = y\alpha\}$$

$$\text{im}(\alpha) = \{x\alpha : x \in X_n\}$$

Ayrıca $\alpha, \beta \in \mathcal{T}_n$ ise $\text{im}(\alpha\beta) \subseteq \text{im}(\beta)$ ve $\ker(\alpha\beta) \supseteq \ker(\alpha)$ olduğu bilinmektedir (Howie, 1995).

Eğer $\alpha \in \mathcal{T}_n$ bir daralma dönüşümü ise $\text{im}(\alpha)$, X_n 'nin bir konveks alt kümesidir (Garba, 2017). Böylece $\alpha \in \mathcal{ODCT}_n$ ise $\text{im}(\alpha)$, X_n 'in konveks alt kümesidir. Ayrıca $\mathcal{ODCT}_n$ 'nin tanımından kolayca görülen şu ki eğer $\alpha \in \mathcal{ODCT}_n$ ise $1 \leq r \leq n$ için $\text{im}(\alpha) = \{1, 2, \dots, r\}$ biçimindedir ve α 'nın çekirdeğinin denklik sınıflarının kümesi X_n 'nin konveks alt kümesidir. Böylece $\alpha \in \mathcal{ODCT}_n$ ise $1 \leq r \leq n$ için

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ 1 & 2 & \dots & r \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Ayrıca $\forall x \in A_i$ için $x \geq i$ olup $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ kümesi X_n 'nin bir parçalanışdır, $1 \leq i < j \leq r$ için $a \in A_i$ ve $b \in A_j$ ise $a < b$ olur.

Bu bölümde, $\mathcal{ODCT}_n$ 'nin monoid takdimi verilmiştir.

$n \geq 3$ ve $1 \leq r \leq n$ için $\mathcal{F}_r = \{\alpha \in \mathcal{ODCT}_n : |\text{im}(\alpha)| = r\}$ olsun.
 $\mathcal{F}_n = \left\{ 1_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \right\}$ şeklindedir burada 1_n , $\mathcal{ODCT}_n$ 'nin birim elemanıdır.

Sonuç 2.37. $n \geq 1$ için $|\mathcal{ODCT}_n| = 2^{n-1}$ olur (Adeshola ve Umar, 2018).

Sonuç 2.38. $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\text{rank}_M(\mathcal{ODCT}_n) = n - 1$ olur (Toker, 2021 a).

Önerme 2.39. A bir küme olsun ve M herhangi monoid olsun. O zaman herhangi $\phi : A \rightarrow M$ dönüşümü $\bar{\phi} : A^* \rightarrow M$ homomorfizmine genişletilebilir (Ruskuc, 1995).

Tanım 2.40. A bir küme ve M herhangi monoid olsun. M 'nin herhangi bir doğuray kümesi B olsun ve $\phi : A \rightarrow B$ bir dönüşüm olsun. Önerme 2.39 ile ϕ dönüşümü $\bar{\phi} : A^* \rightarrow M$ epimorfizmasına genişletilebilir. $R \subseteq A^* \times A^*$ bir ilişkiler kümesi olsun. Her $(u, v) \in R$ için $u\bar{\phi} = v\bar{\phi}$ oluyorsa R deki ilişkiler M 'de sağlanır denir.

Teorem 2.41. M sonlu bir monoid olsun, $A \subseteq M$ ve $\langle A \rangle_M = M$ olsun. $R \subseteq A^* \times A^*$ bir ilişkiler kümesi ve $W \subseteq A^*$ olsun. Eğer

- (i) R 'deki tüm ilişkiler M 'de sağlanıyorsa
- (ii) $w = \bar{w}$ ifadesi R 'nin bir sonucu olacak şekilde bir $\bar{w} \in W$ kelimesi varsa
- (iii) $|W| \leq |M|$

ise $\langle A|R \rangle$ ikilisi M 'nin monoid takdimi olur (Ruskuc, 1995).

$n \geq 3$ ve α_i dönüşümü $2 \leq i \leq n - 1$ için

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & i+2 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & i & i & i+1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlayalım ve

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlayalım.

Lemma 2.42. $n \geq 3$ olsun ve α_i yukarıdaki gibi tanımlansın o halde $1 \leq i \leq n-1$ için $\alpha_i \alpha_{n-1} = \alpha_i$ olur, böylece $(\alpha_{n-1})^2 = \alpha_{n-1}$ olur (Toker, 2021 a).

İspat. $n \geq 3$ olsun ve α_i yukarıdaki gibi tanımlansın, o zaman

$$\alpha_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n-1 \end{pmatrix}$$

olur. $1(\alpha_i \alpha_{n-1}) = 1$ ve $n(\alpha_i \alpha_{n-1}) = n-1$ olup $\mathcal{ODCT}_n$ 'nin tanımından $\text{im}(\alpha_i \alpha_{n-1}) = \{1, 2, \dots, n-1\}$ olur. Ayrıca, $i(\alpha_i \alpha_{n-1}) = i$ ve $(i+1)(\alpha_i \alpha_{n-1}) = i$ olur, böylece $1 \leq i \leq n-1$ için $\alpha_i \alpha_{n-1} = \alpha_i$ olur. $\square$

Lemma 2.43. $n \geq 3$ olmak üzere α_i yukarıdaki gibi tanımlansın bu durumda $1 \leq i \leq j \leq n-2$ için $\alpha_i \alpha_j = \alpha_{j+1} \alpha_i$ olur (Toker, 2021 a).

İspat. $n \geq 3$ olmak üzere α_i yukarıdaki gibi tanımlansın ve $1 \leq i \leq j \leq n-2$ olsun. $1 \leq i \leq j \leq n-2$ için $1(\alpha_i \alpha_j) = 1$ ve $n(\alpha_i \alpha_j) = n-1(\alpha_j) = n-2$ olduğu açıktır. Böylece $\mathcal{ODCT}_n$ 'nin tanımından $\text{im}(\alpha_i \alpha_{n-1}) = \{1, 2, \dots, n-1\}$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} i(\alpha_i \alpha_j) &= i \alpha_j = i \\ (i+1)(\alpha_i \alpha_j) &= i \alpha_j = i \\ (j+1)(\alpha_i \alpha_j) &= j \alpha_j = j \\ (j+2)(\alpha_i \alpha_j) &= (j+1) \alpha_j = j \end{aligned}$$

$1(\alpha_{j+1} \alpha_i) = 1$ ve $n(\alpha_{j+1} \alpha_i) = (n-1) \alpha_i = n-2$ olur, böylece $\mathcal{ODCT}_n$ 'nin tanımından $\text{im}(\alpha_{j+1} \alpha_i) = \{1, 2, \dots, n-2\}$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} i(\alpha_{j+1} \alpha_i) &= i \alpha_i = i \\ (i+1)(\alpha_{j+1} \alpha_i) &= (i+1) \alpha_i = i \\ (j+1)(\alpha_{j+1} \alpha_i) &= (j+1) \alpha_i = j \\ (j+2)(\alpha_{j+1} \alpha_i) &= (j+1) \alpha_i = j \end{aligned}$$

olur. Bu nedenle $\forall x \in X_n$ için $x(\alpha_i \alpha_{j+1}) = x(\alpha_{j+1} \alpha_i)$ olur. Sonuç olarak $1 \leq i \leq j \leq n-2$ için $\alpha_i \alpha_j = \alpha_{j+1} \alpha_i$ olur. $\square$

Tanım 2.44. A sonlu bir küme olmak üzere $a_i \in A$ ve $1 \leq i \leq k$ için $w \equiv a_1 a_2 \dots a_k$ olsun. w 'nin uzunluğu k olarak tanımlanır ve $l(w) = k$ yazılır, w boş kelime ise w 'nin uzunluğu 0 (sıfır) olarak tanımlanır ve $l(w) = 0$ yazılır.

Teorem 2.45. $n \geq 3$ olsun. $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ ve $R = \{a_i a_{n-1} = a_i \ (1 \leq i \leq n-1), \ a_i a_j = a_{j+1} a_i \ (1 \leq i \leq j \leq n-2)\}$ olsun. Bu durumda $\langle A|R \rangle$ ifadesi $\mathcal{ODCT}_n$ 'nin monoid takdimi olur (Toker, 2021 a).

İspat. $n \geq 3$ olsun. $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ ve $R = \{a_i a_{n-1} = a_i \ (1 \leq i \leq n-1), \ a_i a_j = a_{j+1} a_i \ (1 \leq i \leq j \leq n-2)\}$ olsun. $f : A \rightarrow \mathcal{F}_{n-1}$ dönüşümünü her $1 \leq i \leq n-1$ için $a_i f = \alpha_i$ olarak tanımlayalım. f 'nin homomorfizma genişlemesi $\bar{f} : A^* \rightarrow \mathcal{ODCT}_n$ epimorfizması vardır. Böylece Lemma 2.42 ve Lemma 2.43 ten R 'deki bütün ilişkiler $\mathcal{ODCT}_n$ 'de sağlanır. ε boş bir kelime olmak üzere

$$W = \{a_{j_k} a_{j_{k-1}} \dots a_{j_1} : n-1 \geq j_k > j_{k-1} > \dots > j_1 \geq 1\} \cup \{\varepsilon\}$$

olsun. Böylece $W \subseteq A^*$ ve $|W| = 2^{n-1}$ olur. $w \in A^*$ olmak üzere $w = \bar{w}$ ifadesi R nin bir sonucu olacak şekilde $\bar{w} \in W$ olduğunu gösterelim. $w \in A^*$ olmak üzere $l(w) = m$ olsun. m üzerinden tümevarım yapalım. $m = 0$ veya $m = 1$ ise sonuç açıktır. $m \geq 2$ ve w uzunluğu $m-1$ olan bir kelime ise tümevarım hipotezinden $w = \bar{w}$ ifadesi R nin bir sonucu olacak şekilde $\bar{w} \in W$ vardır. $m \geq 2$ olduğundan u uzunluğu $m-1$ olan bir kelime ve $a_k \in A$ olacak şekilde $w \equiv u a_k$ olur. Tümevarım hipotezinden $1 \leq i_1 < \dots < i_{n-r} \leq n-1$ ve $u = \bar{u}$ ifadesi R nin bir sonucu olacak şekilde $\bar{u} \equiv a_{i_{n-r}} \dots a_{i_1}$ olur. Eğer $k = n-1$ ise $w = \bar{u} a_{n-1} = \bar{u} \equiv \bar{w}$ olur, $k < i_1$ ise $w = \bar{u} a_k \equiv \bar{w}$ olur, her iki durumda $w = \bar{w}$ ifadesi R nin bir sonucu olur. $i_1 \leq k < n-1$ olduğunu varsayalım. $a_i a_j = a_{j+1} a_i \ (1 \leq i \leq j \leq n-2)$ bağıntısından dolayı

$$w = a_{i_{n-r}} \dots a_{i_2} a_{i_1} a_k = a_{i_{n-r}} \dots a_{i_2} a_{k+1} a_{i_1}$$

olur. Eğer $i_2 \leq k+1 < n-1$ ise $w = a_{i_{n-r}} \dots a_{i_3} a_{k+2} a_{i_2} a_{i_1}$ olur. Bu şekilde devam edilirse $1 \leq l \leq n-r-k$ olmak üzere

$$w = a_{i_{n-r}} \dots a_{i_{k+1}} a_{k+l} a_{i_k} \dots a_{i_1} \equiv \bar{w}$$

ya da $w = a_{k+n-r} a_{i_{n-r}} \dots a_{i_2} a_{i_1} \equiv \bar{w}$ için $w = \bar{w}$ ifadesi R nin bir sonucu olur. Böylece $\langle A|R \rangle$ ifadesi $\mathcal{ODCT}_n$ 'nin monoid takdimi olur. $\square$

$n \geq 4$ olmak üzere $A = \{a_1, \dots, a_{n-2}, b\}$ ve

$$R_1 : a_i b a_1 = a_i \ (1 \leq i \leq n-2),$$

$$R_2 : a_i a_{n-2} = b a_1 a_i \quad (1 \leq i \leq n-2),$$

$$R_3 : b^{n-1} = b^n,$$

$$R_4 : b^2 a_1 = b a_1 a_{n-2} b,$$

$$R_5 : a_i a_j = a_{j+1} a_i \quad (1 \leq i \leq j \leq n-3), \text{ ve}$$

$$R_6 : b a_i = b a_1 a_{i-1} b \quad (2 \leq i \leq n-2)$$

olsun. Ayrıca, $R = \bigcup_{i=1}^6 R_i$ ve $Q = \{b a_1 b = b, b a_1 a_{n-2} \cdots a_{n-k} b^k = b^k : 2 \leq k \leq n-1\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\langle A \mid R \cup Q \rangle$, $n \geq 4$ için $\mathcal{OCT}_n$ 'nin monoid takdimi olur (Toker ve Ayık, 2024).

3. GEREÇ VE YÖNTEM

Bu bölümde, tez çalışmasında incelenen temel matematiksel yapı olan sıra koruyan ve sıra azaltan tam daralma dönüşümler yarıgrubu ($ODCT_n$) tanıtılacak ve bu yarıgrubun sıfır bölen grafiğinin özelliklerini araştırmak için kullanılan yöntemler açıklanacaktır.

3.1. Gereç

Bu tez çalışmasının ana materyali, $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ sonlu kümesi üzerinde tanımlanan özel bir dönüşüm yarıgrubudur.

3.1.1. $ODCT_n$ Yarıgrubunun Tanımı ve Elemanlarının Yapısı

İkinci bölümde tanımlandığı gibi, X_n üzerindeki sıra koruyan ($\mathcal{O}_n$), sıra azaltan ($\mathcal{D}_n$) ve tam daralma ($\mathcal{CT}_n$) dönüşümlerinin kesişimi olarak tanımlanan yarıgrup şu şekildedir:

$ODCT_n = \mathcal{O}_n \cap \mathcal{D}_n \cap \mathcal{CT}_n$. Bu yarıgrup, X_n üzerindeki sıra koruyan ve sıra azaltan tam daralma dönüşümler yarıgrubu olarak adlandırılır. $ODCT_n$ 'nin elemanları olan α dönüşümleri aşağıdaki üç koşulu aynı anda sağlar:

- (i) Sıra Koruma: $\forall x, y \in X_n, x \leq y \implies x\alpha \leq y\alpha$
- (ii) Sıra Azaltma: $\forall x \in X_n, x\alpha \leq x$
- (iii) Tam Daralma: $\forall x, y \in X_n, |x\alpha - y\alpha| \leq |x - y|$.

Bu koşullar, $ODCT_n$ elemanlarının yapısını belirler. Özellikle sıra koruma ve sıra azaltma koşulları birlikte, $\alpha \in ODCT_n$ dönüşümünün görüntüsünün $im(\alpha)$ ve çekirdeğinin $ker(\alpha) = \{(x, y) : x\alpha = y\alpha\}$ belirli özelliklere sahip olmasını gerektirir.

3.1.2. $ODCT_n$ Yarıgrubunun Sıfır Elemanı ve Birim Elemanı

İkinci bölümde belirtildiği gibi, $ODCT_n$ yarıgrubu bir monoiddir.

$1_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$, $ODCT_n$ 'nin birim elemanıdır. $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, $ODCT_n$ 'nin sıfır elemanıdır. Bu tez boyunca $ODCT_n$ 'nin sıfır elemanı θ ile gösterilecektir.

3.2. Yöntem

Bu tezde, $ODCT_n$ yarıgrubunun sıfır bölen grafiği $\Gamma(ODCT_n)$ 'nin yapısını ve özelliklerini incelemek için cebirsel ve grafik teorisi yöntemleri bir arada kullanılacaktır.

Bu yöntemler, $ODCT_n$ yarıgrubunun sıfır bölen grafiğinin yapısını ayrıntılı bir şekilde ortaya koymayı ve literatürdeki benzer çalışmalarla karşılaştırma yapmayı mümkün kılacaktır.

4. BULGULAR

Bu bölümde, $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ üzerindeki sıra koruyan ve sıra azaltan tam daralma dönüşümler yarıgrubu $\mathcal{ODCT}_n$ 'nin sıfır bölenleri ve bu yarıgruba karşılık gelen sıfır bölen grafiği $\Gamma(\mathcal{ODCT}_n)$ ile ilgili elde edilen temel sonuçlar sunulacaktır. Bu bölümdeki analizler, üçüncü bölümde açıklanan yöntemlere dayanmaktadır.

4.1. $\mathcal{ODCT}_n$ Yarıgrubunun Sıfır Bölenleri

Sıfır bölen grafiğini tanımlamak için öncelikle $\mathcal{ODCT}_n$ yarıgrubunun sol (L), sağ (R) ve iki yönlü (T) sıfır bölenlerini belirlememiz gerekmektedir. $\mathcal{ODCT}_n^* = \mathcal{ODCT}_n \setminus \{\theta\}$ olduğunu hatırlayalım.

Örnek 4.1. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{ODCT}_5$ olur.

$\alpha \in \mathcal{ODCT}_n$ ise $\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ 1 & 2 & \dots & r \end{pmatrix}$ formundadır. $A_1, A_2, \dots, A_r$ kümeleri X_n kümesinin bir parçalanışı olup konveks kümelerdir.

- $L = L(\mathcal{ODCT}_n) = \{\alpha \in \mathcal{ODCT}_n : \alpha\beta = \theta \text{ olacak şekilde } \exists \beta \in \mathcal{ODCT}_n^* \text{ vardır}\},$
- $R = R(\mathcal{ODCT}_n) = \{\alpha \in \mathcal{ODCT}_n : \gamma\alpha = \theta \text{ olacak şekilde } \exists \gamma \in \mathcal{ODCT}_n^* \text{ vardır}\},$
- $T = T(\mathcal{ODCT}_n) = \{\alpha \in \mathcal{ODCT}_n : \alpha\beta = \theta \text{ ve } \gamma\alpha = \theta \text{ olacak şekilde } \beta, \gamma \in \mathcal{ODCT}_n^* \text{ vardır}\}$

kümeleri sırasıyla $\mathcal{ODCT}_n$ yarıgrubunun sol, sağ ve iki yönlü sıfır bölenler kümeleridir. Ayrıca tanımlardan $T = L \cap R$ olduğu görülür.

Lemma 4.2. $n \geq 2$ için $\alpha, \beta \in \mathcal{ODCT}_n$ olsun. $\alpha\beta = \theta$ olması için gerek ve yeter koşul $n\alpha \in 1\beta^{-1}$ olmasıdır. Burada $1\beta^{-1} = \{x \in X_n : x\beta = 1\}$ kümesidir.

İspat. $(\implies)$ $\alpha\beta = \theta$ olsun. Bu durumda her $x \in X_n$ için $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta = x\theta$ olur. $x\theta = 1$ olduğundan $n(\alpha\beta) = 1$ olup, $(n\alpha)\beta = 1$ olur yani $n\alpha \subseteq 1\beta^{-1}$ olur.

$(\impliedby)$ $\alpha, \beta \in \mathcal{ODCT}_n$ ve $n\alpha \in 1\beta^{-1}$ olsun. Böylece $(n\alpha)\beta = 1$ olur yani $n(\alpha\beta) = 1$ olur. Dolayısıyla, $\mathcal{ODCT}_n$ yarıgrupunun özelliğinden her $x \in X_n$ için $x(\alpha\beta) = 1$, yani $\alpha\beta = \theta$ elde edilir. $\square$

Bu lemma, sıfır bölenleri karakterize etmek için temel bir araçtır.

Sonuç 4.3. $\alpha \in \mathcal{ODCT}_n$ olsun. $\alpha^2 = \theta \iff n\alpha \in 1\alpha^{-1}$ olur.

Önerme 4.4. $n \geq 2$ için $\mathcal{ODCT}_n$ 'nin sol sıfır bölenlerinin kümesi $L = L(\mathcal{ODCT}_n) = \mathcal{ODCT}_n \setminus \{1_n\}$ ve $|L| = 2^{n-1} - 1$ olur.

İspat. Öncelikle 1_n 'nin sol sıfır bölen olmadığını gösterelim. Eğer $1_n\beta = \theta$ ise, $im(1_n) = X_n$ olduğundan Lemma 4.2 gereği $X_n \subseteq 1\beta^{-1}$ olmalıdır. Bu ise X_n 'deki her elemanın β altındaki görüntüsünün 1 olması, yani $\beta = \theta$ olması demektir. Dolayısıyla 1_n sol sıfır bölen değildir.

$\alpha \in \mathcal{ODCT}_n \setminus \{1_n\}$ olsun. Bu durumda $\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix}$ formunda olup $r < n$ olur.

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r & r+1 & \cdots & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$ olarak seçilirse $\beta \in \mathcal{ODCT}_n^*$ olup $\alpha\beta = \theta$ olur.

Böylece α elemanı sol sıfır bölen eleman olur. Sonuç olarak $L = \mathcal{ODCT}_n \setminus \{1_n\}$ ve $|L| = 2^{n-1} - 1$ olur. $\square$

Önerme 4.5. $n \geq 2$ için $\mathcal{ODCT}_n$ 'nin sağ sıfır bölenlerinin kümesi $R = R(\mathcal{ODCT}_n) = \{\alpha \in \mathcal{ODCT}_n : |1\alpha^{-1}| \geq 2\}$ ve $|R| = 2^{n-2}$ olur.

İspat. $\alpha \in \{\alpha \in \mathcal{ODCT}_n : |1\alpha^{-1}| \geq 2\}$ olsun. Bu durumda, $\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix}$ formunda olup $2 \in A_1$ olur.

$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$ olarak seçilirse $\beta \in \mathcal{ODCT}_n^*$ olup $\beta\alpha = \theta$ olur.

Ayrıca $\gamma \in \mathcal{ODCT}_n$ ve $|1\gamma^{-1}| = 1$ olsun. Bu durumda $\gamma = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix}$ formunda olup $B_1 = \{1\}$ olur. Yani $1\gamma^{-1} = \{1\}$ olur. Böylece $\mu \in \mathcal{ODCT}_n$ için $\mu\gamma = \theta$ ise $1\gamma^{-1} = \{1\}$ olduğu için $\mu = \theta$ olur. Yani $R = \{\alpha \in \mathcal{ODCT}_n : |1\alpha^{-1}| \geq 2\} = \{\alpha \in \mathcal{ODCT}_n : 2\alpha = 1\}$ olur.

$X = \{\alpha \in \mathcal{ODCT}_n : 2\alpha = 2\}$ olsun. Bu durumda $R \cap X = \emptyset$ ve $R \cup X = \mathcal{ODCT}_n$ olur. Böylece $|R| = |\mathcal{ODCT}_n| - |X|$ olur.

$f : X \rightarrow \mathcal{ODCT}_{n-1}$ fonksiyonunu $\forall \alpha \in X$ için $\alpha f = \beta_\alpha \in \mathcal{ODCT}_{n-1}$ olmak üzere $\forall x \in X_{n-1}$ için $x\beta_\alpha = (x+1)\alpha - 1$ olarak tanımlayalım. Bu durumda f bir izomorfizm olup $|X| = |\mathcal{ODCT}_{n-1}|$ olur. Yani $|X| = 2^{n-2}$ olur. Böylece $|R| = 2^{n-1} - 2^{n-2} = 2^{n-2}$ olur. $\square$

$T = L \cap R$ olup ayrıca $R \subseteq L$ olduğundan $T = R$ olur.

Sonuç 4.6. $n \geq 2$ için $\mathcal{ODCT}_n$ 'nin iki yönlü sıfır bölenlerinin kümesi $T = T(\mathcal{ODCT}_n) = R = \{\alpha \in \mathcal{ODCT}_n : |1\alpha^{-1}| \geq 2\}$ şeklindedir.

İspat. $n \geq 2$ olmak üzere $R \subseteq L$ ve $T = L \cap R$ olduğundan $T = R$ elde edilir. Eleman sayısı da $|R|$ ile aynıdır. $\square$

4.2. $\Gamma(\mathcal{ODCT}_n)$ Sıfır Bölen Grafiği

İki yönlü sıfır bölenler kümesi $T = R$ olarak belirlenmiştir. Böylece, $\Gamma(\mathcal{ODCT}_n)$ grafiği aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 4.7. $n \geq 3$ için, $\mathcal{ODCT}_n$ 'nin sıfır bölen grafiği $\Gamma(\mathcal{ODCT}_n)$, köşe kümesi $V(\Gamma) = T^* = T \setminus \{\theta\} = R \setminus \{\theta\}$ olan ve farklı $\alpha, \beta \in V(\Gamma)$ köşeleri arasında $\alpha\beta = \theta = \beta\alpha$ olması durumunda bir kenar bulunan yönsüz grafiktir.

$\Gamma(\mathcal{ODCT}_n)$ grafiği kolaylık olması amacıyla kısaca Γ ile gösterilecektir. $n = 1$ ve $n = 2$ için $\mathcal{ODCT}_n = \mathcal{D}_n$ olur, ayrıca $n = 3$ için Γ grafiği bir köşeden oluşan kenarsız bir grafiktir. Bundan dolayı bu bölümde $n \geq 4$ için Γ grafiği incelenmiştir.

Teorem 4.8. $n \geq 4$ için Γ grafiği bağlantılıdır ve $\text{diam}(\Gamma) = 2$ olur.

İspat. $n \geq 4$ olsun. $\alpha, \beta \in V(\Gamma)$ ve $\alpha \neq \beta$ olsun. Bu durumda,

$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix}$ ve $\beta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix}$ formunda olup $r < n$, $k < n$, $2 \in A_1$ ve $2 \in B_1$ olur.

1. Durum: $r \in B_1$ ve $k \in A_1$ ise $\alpha\beta = \theta = \beta\alpha$ olur. Bu durumda α ile β komşu köşelerdir.

2. Durum: $r \notin B_1$ veya $k \notin A_1$ olsun.

$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$ olarak seçelim. Bu durumda $\gamma \in T^*$ olur. Ayrıca $\alpha\gamma = \theta = \gamma\alpha$ ve $\beta\gamma = \theta = \gamma\beta$ olur. Sonuç olarak Γ grafiği bağlantılıdır ve $\text{diam}(\Gamma) \leq 2$ olur.

Özel olarak $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \end{pmatrix}$ olarak seçelim. Bu durumda $\alpha_2\alpha_1 \neq \theta$ olur. Yani $\text{diam}(\Gamma) = 2$ olur. $\square$

Teorem 4.9. $n \geq 4$ için

$$\text{gr}(\Gamma) = \begin{cases} \infty & \text{eğer } n = 4 \text{ ise} \\ 3 & \text{eğer } n \geq 5 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

İspat. $n = 4$ için $V(\Gamma) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ olup bu durumda Γ grafiği bir devir içermez.

$n \geq 5$ için $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ olarak seçilirse $\alpha, \beta, \gamma \in V(\Gamma)$ olup $\alpha - \gamma - \beta - \alpha$ devri vardır. Sonuç olarak

$$\text{gr}(\Gamma) = \begin{cases} \infty & \text{eğer } n = 4 \text{ ise} \\ 3 & \text{eğer } n \geq 5 \text{ ise} \end{cases}$$

olur. $\square$

Grafiğin köşe dereceleri, klik sayısı gibi diğer özellikleri de inceleyelim.

Lemma 4.10. $n \geq 4$ ve $2 \leq r \leq n-1$ için $X_r = \{1, 2, \dots, r\}$ olmak üzere

$$Z_r = \{\alpha \in T \setminus \{\theta\} : X_r \subseteq 1\alpha^{-1} \text{ ve } n\alpha \leq r\}$$

olsun. Bu durumda Z_r kümesinin eleman sayısı,

$$|Z_r| = \begin{cases} 2^{n-r} - 1 & \text{eğer } \frac{n+1}{2} \leq r \text{ ise} \\ \left[\sum_{t=1}^r \binom{n-r-1}{t-1} + \sum_{t=2}^r \binom{n-r-1}{t-2} \right] - 1 & \text{eğer } \frac{n+1}{2} > r \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

İspat. $n \geq 4$ ve $2 \leq r \leq n-1$ için $X_r = \{1, 2, \dots, r\}$ olsun. $\frac{n+1}{2} \leq r$ ise $Z_r \cup \{\theta\} \cong \mathcal{ODCT}_{n-r+1}$ olduğundan bu durumda $|Z_r| = 2^{n-r} - 1$ olur.

$\frac{n+1}{2} > r$ olsun. $X = \{\alpha \in Z_r : (r+1)\alpha = 2\}$ ve $Y = \{\alpha \in Z_r : (r+1)\alpha = 2\}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $X \cup Y = Z_r$ ve $X \cap Y = \emptyset$ olduğundan $|Z_r| = |X| + |Y|$ olur. Ayrıca $|X| = \sum_{t=1}^r \binom{n-r-1}{t-1}$ ve $|Y| = \sum_{t=2}^r \binom{n-r-1}{t-2} - 1$ olduğundan ispat tamamlanır. $\square$

Lemma 4.11. $n \geq 4$ ve $2 \leq r \leq n-1$ olmak üzere, Γ grafiğinin klik sayısı $\omega(\Gamma)$ olmak üzere

$$\omega(\Gamma) \geq |Z_r|$$

olur.

İspat. $n \geq 4$ ve $2 \leq r \leq n-1$ olsun. $\alpha_1, \alpha_2 \in Z_r$ ve $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olsun. $1\alpha_1^{-1} \subseteq X_r$ ve $n\alpha_1 \leq r$, $1\alpha_2^{-1} \subseteq X_r$ ve $n\alpha_2 \leq r$ olur. Bu durumda $n\alpha_1 \in 1\alpha_2^{-1}$ ve $n\alpha_2 \in 1\alpha_1^{-1}$ olur. Yani α_1 ve α_2 köşeleri Γ grafiğinde komşu köşelerdir. G , Γ grafiğinin Z_r kümesi tarafından indüklenen bir alt grafiği olsun. Bu durumda G grafiği bir klik olur. Ayrıca $|G| = |Z_r|$ olduğundan $\omega(\Gamma) \geq |Z_r|$ olur. $\square$

Teorem 4.12. $n \geq 4$ ve $\alpha \in T^*$ olsun. Bu durumda, $\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix}$ formundadır ve $A_1 = \{1, 2, \dots, k\}$ biçimindedir. Eğer, $f_1 : T^* \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu

$$f_1(\alpha) = \begin{cases} \sum_{t=2}^k \binom{n-r-1}{t-1} & \text{eğer } n-r \geq k \text{ ise} \\ \sum_{t=2}^{n-r} \binom{n-r-1}{t-1} & \text{eğer } 1 \neq n-r < k \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } 1 = n-r \text{ ise} \end{cases}$$

ve $f_2 : T^* \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu

$$f_2(\alpha) = \begin{cases} \sum_{t=2}^k \binom{n-r-1}{t-2} & \text{eğer } n-r+1 \geq k \text{ ise} \\ \sum_{t=2}^{n-r+1} \binom{n-r-1}{t-2} & \text{eğer } n-r+1 < k \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa

$$\deg_{\Gamma}(\alpha) = \begin{cases} f_1(\alpha) + f_2(\alpha) - 1, & \text{eğer } r \in A_1 \\ f_1(\alpha) + f_2(\alpha), & \text{eğer } r \notin A_1 \end{cases}$$

olur.

İspat. $n \geq 4$ ve $\alpha \in T^*$ olsun. Bu durumda, $\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix}$ formundadır ve $A_1 = \{1, 2, \dots, k\}$ biçimindedir. $\beta \in T^*$ olmak üzere $\alpha\beta = \beta\alpha = \theta$ olsun. Bu durumda, $r\beta = 1$ ve $\text{im}(\beta) \subseteq A_1$ olmalıdır. $X = \{\beta \in T^* : \alpha - \beta \in E(\Gamma) \text{ ve } (r+1)\beta = 1\}$ ve $Y = \{\beta \in T^* : \alpha - \beta \in E(\Gamma) \text{ ve } (r+1)\beta = 2\}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $|X| = f_1(\alpha)$ ve $|Y| = f_2(\alpha)$ olur. Ayrıca, $r \in A_1$ ise $\alpha^2 = \theta$ ve $r \notin A_1$ ise $\alpha^2 \neq \theta$ olur. Böylece

$$\deg_{\Gamma}(\alpha) = \begin{cases} f_1(\alpha) + f_2(\alpha) - 1, & \text{eğer } r \in A_1 \\ f_1(\alpha) + f_2(\alpha), & \text{eğer } r \notin A_1 \end{cases}$$

olur. □

Örnek 4.13. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{ODCT}_9$ olup $r = 5$ ve $k = 4$ olduğundan

$$f_1(\alpha) = \sum_{t=2}^4 \binom{3}{t-1} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 3 + 3 + 1 = 7$$

$$f_2(\alpha) = \sum_{t=2}^4 \binom{3}{t-2} = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 1 + 3 + 3 = 7$$

olur ve böylece $\deg_{\Gamma}(\alpha) = f_1(\alpha) + f_2(\alpha) = 7 + 7 = 14$ olur.

$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$ olarak seçelim. $r = 2$ ve $k = n-1$ olup $\deg_{\Gamma}(\gamma) = f_1(\gamma) + f_2(\gamma) - 1$ olur. Ayrıca $f_1(\gamma) = \sum_{t=2}^{n-2} \binom{n-3}{t-1}$, $f_2(\gamma) = \sum_{t=2}^{n-1} \binom{n-3}{t-2}$ olur. Böylece $f_1(\gamma) = \binom{n-3}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{n-3}{n-3} = 2^{n-3} - 1$ ve $f_2(\gamma) = \binom{n-3}{0} + \binom{n-3}{1} + \cdots + \binom{n-3}{n-3} = 2^{n-3}$ olur.

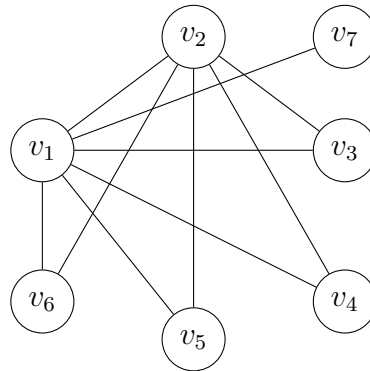
$f_1(\gamma) + f_2(\gamma) = 2^{n-3} - 1 + 2^{n-3} = 2^{n-2} - 1$ olup $\deg_{\Gamma}(\gamma) = f_1(\gamma) + f_2(\gamma) - 1$ olduğundan $\deg_{\Gamma}(\gamma) = 2^{n-2} - 1 - 1 = 2^{n-2} - 2$ olur. Ayrıca, γ köşesi Γ grafiğindeki diğer tüm köşelere komşudur.

$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$ olarak seçelim. $r = n-1$ ve $k = 2$ olur. $f_1(\alpha) = 0$, $f_2(\alpha) = \binom{0}{0} = 1$ Böylece $\deg_{\Gamma}(\alpha) = 1 + 0 = 1$ olur. Böylece aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 4.14. $n \geq 4$ için $\Delta(\Gamma) = 2^{n-2} - 2$ ve $\delta(\Gamma) = 1$ olur.

Örnek 4.15. $\Gamma = \Gamma(\mathcal{ODCT}_5)$ olsun. O zaman Γ bağlantılı bir grafiktir, $|V(\Gamma)| = 7$, $\text{diam}(\Gamma) = 2$, $\Delta(\Gamma) = 6$, $\delta(\Gamma) = 1$, $\omega(\Gamma) \geq 3$ olur. Ayrıca Γ grafiği aşağıdaki grafiğe izomorfiktir.

$$V(\mathcal{ODCT}_5) = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, v_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, v_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$



Şekil 4.1. $\mathcal{ODCT}_5$ yarıgrubunun sıfır bölen grafiği

5. TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında, $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ sonlu kümesi üzerindeki sıra koruyan ve sıra azaltan tam daralma dönüşümler yarıgrubu $ODCT_n$ ele alınmıştır. Çalışmanın temel amacı, bu yarıgrubun sıfır bölen yapısını incelemek ve bu yapıya karşılık gelen sıfır bölen grafiği $\Gamma(ODCT_n)$ 'nin temel grafiksel özelliklerini ortaya koymaktır.

Çalışma kapsamında öncelikle $ODCT_n$ yarıgrubunun sol (L), sağ (R) ve iki yönlü (T) sıfır bölenleri karakterize edilmiştir. $n \geq 2$ için sol sıfır bölenler kümesinin $L = ODCT_n \setminus \{1_n\}$ olduğu ve eleman sayısının $|L| = 2^{n-1} - 1$ olduğu belirlenmiştir. Sağ sıfır bölenler kümesinin $R = \{\alpha \in ODCT_n : |1\alpha^{-1}| \geq 2\}$ olduğu gösterilmiş ve eleman sayısının $|R| = 2^{n-2}$ olduğu hesaplanmıştır. İki yönlü sıfır bölenler kümesinin ise $T = L \cap R = R$ olduğu sonucuna varılmıştır.

Bu sıfır bölen karakterizasyonuna dayanarak, $n \geq 3$ için $\Gamma(ODCT_n)$ sıfır bölen grafiği tanımlanmıştır.

$n \geq 4$ için $\Gamma(ODCT_n)$ grafiğinin bağlantılı olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca grafiğin çapının 2 olduğu belirlenmiştir. $n \geq 5$ için grafiğin devir uzunluğunun $gr(\Gamma(ODCT_n)) = 3$ olduğu belirtilmiştir. $n = 4$ için sonsuz olduğu belirlenmiştir. Belirli bir Z_r alt kümesinin grafikte bir klik oluşturduğu gösterilmiş ve bu kümenin eleman sayısı kullanılarak klik sayısı $\omega(\Gamma(ODCT_n))$ için bir alt sınır ifade edilmiştir. Grafiğin köşe dereceleri için genel bir formül geliştirilerek maksimum ve minimum dereceler belirlenmiştir.

6. SONUÇLAR

Bu çalışma, $ODCT_n$ gibi özel bir dönüşüm yarıgrubunun sıfır bölen grafiğinin yapısını anlamaya yönelik önemli adımlar atmıştır. Elde edilen sonuçlar, yarıgrubun cebirsel yapısı ile sıfır bölen grafiğinin özellikleri arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

7. ÖNERİLER

Gelecek çalışmalar için aşağıdaki önerilerde bulunulabilir:

* $ODCT_n$ yarıgrubunun diğer cebirsel özellikleri (örneğin, Green ilişkileri, idealler, rank özellikleri) ile sıfır bölen grafiğinin özellikleri arasındaki daha derin bağlantılar incelenebilir.

* Benzer yöntemler, diğer özel dönüşüm yarıgruplarının sıfır bölen grafiklerini incelemek için uygulanabilir. Bu tezde elde edilen sonuçlar, $ODCT_n$ yarıgrubunun sıfır bölen grafiğinin temel yapısını ortaya koymaktadır. Bağlantılılık, çap ve devir uzunluğu gibi özellikler, grafiğin genel topolojisi hakkında bilgi verirken, klik sayısı gibi invariantlar grafiğin yerel yapısıyla ilgilidir. Elde edilen sonuçlar, literatürdeki diğer dönüşüm yarıgruplarının sıfır bölen grafikleriyle karşılaştırılabilir.

Bu çalışma, dönüşüm yarıgrupları ve sıfır bölen grafikleri arasındaki zengin ilişkiyi vurgulamakta ve bu alanda daha fazla araştırma için potansiyel yollar sunmaktadır.

KAYNAKLAR

- Adeshola, A. D., Umar, A. (2018). Results for certain semigroups of order-preserving full contraction mappings of a finite chain. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 106, 37-49.
- Anderson, D.F., Livingston, P.S. (1999). The zero-divisor graph of a commutative ring. *Journal of Algebra*, 217(2), 434-447.
- Ayık, G., Ayık H., Koç, M. (2011). Combinatorial results for order-preserving and order-decreasing transformations. *Turkish Journal of Mathematics*, 35 (4): 617-625.
- Ayık, H. (1998). *Presentations and efficiency of semigroups*. Ph.D.Thesis. University of St Andrews.
- Beck, I. (1988). Coloring of commutative rings. *Journal of Algebra*, 116(1), 208-226.
- Das K. C., Akgüneş, N. and Çevik, A. S. (2013). On a graph of monogenic semigroup. *J. Inequal. Appl*, 44, no. 1, Art. No. 4.
- DeMeyer, F. ve DeMeyer, L. (2005). Zero-divisor graphs of semigroups. *Journal of Algebra*, 283(1), 190-198.
- DeMeyer, F., McKenzie, T. ve Schneider, K. (2002). The zero-divisor graph of a commutative semigroup. *Semigroup Forum*, 65(2), 206-214.
- Ganyushkin, O., Mazorchuk, V. (2009). *Classical Finite Transformation Semigroups: An Introduction*. Springer, London.
- Garba, G. U., İbrahim, M. J., İmam, A. T. (2017). On certain semigroups of full contraction maps of a finite chain. *Turkish Journal of Mathematics*, 41 (3), 500-507.
- Gomes, G. M. S., Howie, M. (1992). On the ranks of certain semigroups of order-preserving transformations. *Semigroup Forum*, 45 (1), 272-282
- Higgins, Peter M. (1993). Combinatorial results for semigroups of order-preserving mappings. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 113 (2), 281-296.
- Howie, J. M. (1995). *Fundamentals of Semigroup Theory*. Oxford University Press.
- Redmond, S. P. (2002). The zero-divisor graph of a non-commutative ring. *International Journal of Commutative Rings*, 1(4), 203-211.
- Ruskuc, N. (1995). *Semigroup presentations*. University of St Andrews.
- Thulasiraman, K., Arumugam, S., Brandstädt, A. and Nishizeki, T. (2015). *Handbook of Graph Theory, Combinatorial Optimization, and Algorithms*. CRC Press, Boca Raton.
- Toker, K., Ayık, H. (2024). A presentation for the semigroup of order-preserving full contraction mappings of a finite chain. *Communications in Algebra*, 53(3), 1257–1264.
- Toker, K. (2016). On the zero-divisor graphs of finite free semilattices. *Turkish Journal of Mathematics*, 40 (4), 824-831.
- Toker, K. (2021). The Monoid Rank and Monoid Presentation of Order-Preserving and Order-Decreasing Full Contraction Mappings. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 9(4), 170-175.
- Toker, K. (2021). Zero-divisor graphs of partial transformation semigroups. *Turkish Journal of Mathematics*, 45 (5), 2331–2340.

- Toker, K. (2021). Zero-divisor graphs of Catalan monoid. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 50(2), 387-396.
- Toker, K., Eşidir, Z. (2022). Zero-Divisor Graphs of Order-Decreasing Full Transformation Semigroups. *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 22(1), 68-74.