



**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GRAFİN MİNİMUM ÖRTÜ SEIDEL LAPLASYAN ENERJİSİ

NİGAR KIRMIZI

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**Şanlıurfa
2025**



**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GRAFİN MİNİMUM ÖRTÜ SEIDEL LAPLASYAN ENERJİSİ

NİGAR KIRMIZI

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Tez Danışmanı: Doç. Dr. NAZMİYE FEYZA YALÇIN**

**Şanlıurfa
2025**

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımız boyunca tezimin en ince ayrıntısıyla ilgilenip, teşvik ve sınırsız desteğini esirgemeyen büyük bir sabır ve titizlikle tezimle ilgilenen bir teşekkürden çok daha fazlasını hak eden, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım çok kıymetli tez hocam ve danışmanım sayın Doç. Dr. N. Feyza YALÇIN'a teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca, tez jürisinde bulunan hocalarıma, kaynak temini ve yol göstermede yardımlarını esirgemeyen hocam Prof. Dr. Haydar ALICI'ya ve ilköğretim matematik öğretmenliği lisans eğitim süresince ve daha sonrasında kopmadığımız her alanda referansım olan bilgi ve deneyimlerinden faydalandığım yüksek lisans eğitimi için beni destekleyen Dr. Aygil TAKIR hocama teşekkür ederim.

Son olarak her koşulda ve her durumda yanımda, arkamda duran ve destek olan bu süreci tamamlamamda çok büyük etkisi bulunan sadece bana değil sevgisi ve merhametiyle çocuklarıma da annelik yapan annem Nurhayat ÇELİK'e, desteğini ve inancını hep hissettiğim babam Mehmet ÇELİK'e ve tüm aileme ve eşime sonsuz teşekkür ederim. Kızım Damla KIRMIZI'ya, oğlum Rodin KIRMIZI'ya sevgilerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ	iii
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	4
2.1. Graf Yapısı	4
2.2. Grafların Bazı Matris Gösterimleri	9
2.3. Graf enerjisi	13
3. GEREÇ ve YÖNTEM	16
3.1. Gereç	16
3.2. Yöntem	16
4. BULGULAR	17
4.1. Grafin Minimum Örtü Seidel Laplasyan Enerjisi	17
5. TARTIŞMA	27
6. SONUÇLAR	28
7. ÖNERİLER	29
KAYNAKLAR	30
ÖZGEÇMİŞ	32

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GRAFİN MİNİMUM ÖRTÜ SEIDEL LAPLASYAN ENERJİSİ

NİGAR KIRMIZI

HARRAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Tez Danışman: Doç. Dr. NAZMİYE FEYZA YALÇIN

Yıl: 2025, Sayfa : 32

Graf enerjisi, grafin komşuluk matrisinin tüm öz değerlerinin mutlak değerlerinin toplamı olarak 1978 yılında tanımlanmıştır. Grafin en temel matrisi olan komşuluk matrisinin yerine grafin çeşitli matris temsillerinin ele alınmasıyla graf enerjisinin varyantları tanımlanmıştır. Graf enerji varyantları için sınır belirlenmesi ve özel grafların enerji hesaplamaları da literatürde güncelliğini koruyan konulardır. Bu çalışmada öncelikle basit bir G grafinin minimum örtü kümesine bağlı olarak grafin minimum örtü Seidel Laplasyan matrisi tanımlanmıştır. Daha sonra bu matrisin izinin hesaplanmasıyla grafin minimum örtü Seidel Laplasyan enerjisi tanımı yapılmıştır. Ayrıca grafin minimum örtü Seidel Laplasyan enerjisi için çeşitli graf parametrelerine bağlı bazı sınırlar elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELEER: Graf enerjisi, Seidel Laplasyan enerji, minimum örtü kümesi

ABSTRACT

MASTER THESIS

MINIMUM COVERING SEIDEL LAPLACIAN ENERGY OF A GRAPH

NİGAR KIRMIZI

**HARRAN UNIVERSITY
INSTITUTE OF GRADUATE EDUCATION
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. NAZMİYE FEYZA YALÇIN

Year: 2025, Page : 32

The graph energy was defined as the sum of the absolute values of all eigenvalues of the adjacency matrix of the graph in 1978. Variants of graph energy have been defined by considering various matrix representations of the graph instead of the adjacency matrix, which is the graph's most basic matrix. Determining bounds for graph energy variants and energy calculations of certain graphs are current topics in the literature. In this study, first of all, the minimum covering Seidel Laplacian matrix of a simple graph G is introduced depending on the minimum covering set. Then, by calculating the trace of this matrix, the minimum covering Seidel Laplacian energy of the graph is defined. Moreover, some bounds for the minimum covering Seidel Laplacian energy of the graph depending on various graph parameters are obtained.

KEYWORDS: Graph energy, Seidel Laplacian energy, minimum covering set

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa No
Şekil 2.1. G grafi.....	4
Şekil 2.2. G grafi.....	5
Şekil 2.3. Basit graf.....	5
Şekil 2.4. Yönlü graf.....	6
Şekil 2.5. G grafi.....	7
Şekil 2.6. Bağlantılı ve bağlantısız graf.....	7
Şekil 2.7. G ve $\overline{G}$	8
Şekil 2.8. G grafi.....	8
Şekil 2.9. G grafi.....	9
Şekil 2.10. G grafi.....	12
Şekil 4.1. G grafi.....	18

1. GİRİŞ

Graf yapısı L. Euler tarafından ‘Königsberg’in yedi köprüsü’ probleminin çözümü araştırılırken oluşturulmuştur. L. Euler, 1736 yılında bu problemin çözümünün olmadığını kanıtlamıştır. L. Euler’in bu çalışması graf yapısı ile ilgili yeni tanımların, problemlerin ve teoremlerin ifade edilmesine zemin hazırlamıştır. 19. yy. ve 20. yy. da yapılan çalışmalar sonucu hem ortaya atılan bazı problemlerin çözümleri bulunmuş, hem de graf ile ilgili yapılan çalışmalar matematik alanı ile kısıtlı kalmayarak birçok alanda kullanılmaya başlanmıştır. Graf teorisi ve uygulamaları; kimya, fizik, biyoloji, bilgisayar mühendisliği, çevre mühendisliği, sosyal ağlar, türkçe cümle yapısının öğretilmesi, müzik eğitimi, ekonomi, psikoloji, bilişim vb., birçok alandaki problemlerin çözümünde kullanılmaktadır.

Hızla gelişen teknoloji ile birlikte iletişim ağları da gelişmiştir. Bu durum, matematik, sosyal bilimler ve mühendislik alanlarında ortaya çıkan problemleri de beraberinde ortaya çıkarmıştır. Bu tür problemleri basite indirgeyerek sistematik bir şekilde çözebilmek için graf yapılarının matris gösterimleri kullanılmaktadır. Grafın derece, komşuluk vb., özellikleri matris gösterimlerine dönüştürülmektedir. Böylece güç ve karmaşık olan bu ifadeler uygun matris yöntemleri ile analiz edilmekte ve sade bir şekilde cebirsel olarak sunulmaktadır. Bu durum çözümleri kolaylaştırmanın yanında çeşitli uygulama alanlarının gelişmesini de mümkün kılmaktadır.

Spektral graf teorisi grafın cebirsel yapısını öz değer ve öz vektör temelli olarak lineer cebir metotlarıyla analiz etmektedir. Bu teorinin ilk araştırmaları komşuluk matrisi üzerinde yapılmış olsa da, bununla sınırlı kalmamış Laplasyan matrisi, işaretli Laplasyan ve Seidel matrisi gibi farklı matris türlerini kapsayacak şekilde araştırmalar genişletilmiştir. Matris gösterimlerindeki bu çeşitlilik grafların zamanla değişen yapısını ayrıntılı inceleme imkanı sağlamaktadır.

Graf teorisinin en önemli uygulama alanlarından biri olan graf enerjisi kavramı spektral graf teorisinin temel yapı taşlarından biri olarak kabul edilmektedir. Bu kavram ilk olarak 1930 yılında Erich Hückel tarafından π elektron sistemleri üzerinde yaklaşık moleküler yörünge hesaplamalarına metot arayışı sırasında ortaya atılmıştır ve moleküllerin enerji seviyelerini belirleyebilmek için grafların öz değerleri

kullanılmıştır. 1978 yılında Avusturya’da düzenlenen bir konferansta Ivan Gutman, kimyaya özgü bu kavramı genelleştirerek matematik literatürüne kazandırmıştır. Kimyasal kökeni çok daha eski olmasına rağmen matematik uygulamaları (Gutman, 1978) çalışması sayesinde ilgi görmüştür yalnızca matematik değil, aynı zamanda kimya, bilgisayar bilimi, fizik ve mühendislik gibi alanlarda da uygulanmasına zemin hazırlamıştır. Bu gelişmelerin sonucu olarak birçok graf enerji çeşidi tanımlanmıştır (Li ve ark., 2012). Enerji alanında gerçekleştirilen bu çalışmalar zaman içerisinde birçok problemi de ortaya çıkarmıştır. Bu problemlerden en temel olanlardan biri de hangi türden grafların minimal enerjili veya maksimal enerjili olduğunun tespiti. Bu problem ilk kez (McClelland, 1971) tarafından incelenmiştir. İlgili çalışmada matrislerin öz değerleriyle bağlantılı olacak şekilde enerjiyle ilgili alt ve üst sınırlar belirlemiştir. Böylece, enerji üzerine yapılan bu çalışmalar farklı matris türleriyle beraber spektral graf kuramını geniş bir çalışma alanına dönüştürmüştür.

”Graf enerjisi grafin komşuluk matrisinin özdeğerlerinin mutlak değerce toplamı olarak tanımlanır” (Gutman, 1978). Bu temel tanım farklı matris çeşitlerine uygulanarak literatürde birçok graf enerjisi tanımlanmıştır. Bu bağlamda, Seidel enerjisi, Nirmala enerjisi, minimum örtü enerjisi, Laplasyan enerjisi, Randic enerjisi tanımlanan enerji türlerindendir ve bu enerji çeşitleri için matematiksel eşitsizlikler yardımıyla alt ve üst sınırların belirlenmesi, maksimum ya da minimum enerji türüne sahip grafların yapısı araştırılmaktadır.

Bu çalışmanın amacı basit ve sonlu bir grafin minimum örtü Seidel Laplasyan matrisini ve enerjisini tanımlamaktır. Seidel enerjisi ve Laplasyan enerjisi üzerine farklı araştırmalar olsa da, bu kavramları minimum örtü yapısıyla birleştirerek yeni bir enerji tanımını oluşturmak çalışmayı özgün kılmaktadır. Seidel Laplacian minimum örtü enerjisi için bazı matematiksel eşitsizlikler ve özellikler kullanılarak alt ve üst sınırların bulunması ve bu çalışma ile literatüre yeni bir graf enerjisi çeşidinin kazandırılmasıyla yapılacak çalışmalara katkı sağlanması amaçlanmaktadır.

Bu çalışma kapsamında basit ve sonlu grafların minimum örtü Seidel Laplasyan matrisi tanımlanmıştır. Daha sonra bu matrisin izinin hesaplanmasıyla grafin minimum örtü Seidel Laplasyan enerjisi tanımı yapılmıştır. Grafin minimum örtü Seidel Laplasyan enerjisinin grafin yapısına ve minimum örtü kümesine bağlı olduğu aşikardır. Grafin minimum örtü Seidel Laplasyan enerjisi için çeşitli graf

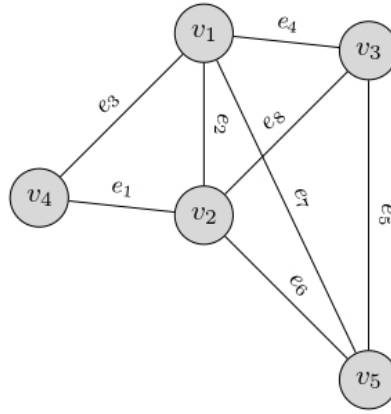
parametrelerine bağı bazı alt ve üst sınırlar elde edilmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, çalışmamıza zemin oluşturan oluşturan tanım ve teoremler ifade edilecektir.

2.1. Graf Yapısı

Tanım 2.1. "Elemanları köşe olarak adlandırılan boş olmayan V kümesi ve köşeleri birleştiren elemanları kenar olarak adlandırılan E kümesinden oluşan $G = (V, E)$ ikilisine graf adı verilir ve kısaca G ile gösterilir" (Bondy ve Murty, 1976).



Şekil 2.1. G grafi

Şekil 2.1. deki G grafinin köşe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ve kenar kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ dir.

Tanım 2.2. " $G = (V, E)$ bir graf ve $u, v \in V$ olsun. u ve v köşelerini birleştiren bir e kenarı varsa, u ve v köşeleri komşudur denir. Bu durumda $u \sim v$, $e = uv$ veya $(u, v) \in E$ gösterimleri kullanılır. u ve v köşelerini birleştiren bir kenar yoksa, u ve v köşeleri komşu değildir denir ve $u \not\sim v$ ile gösterilir" (Büyükköse ve Gök, 2018).

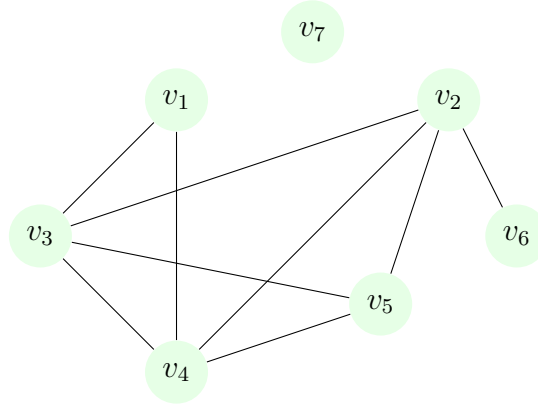
Bir u köşesinin komşuluk kümesi N_u olmak üzere

$$N_u = \{v \in V(G) : u \sim v\}$$

ile ifade edilir.

Şekil 2.1. deki G grafinin köşe komşulukları sıra farkı gözetmeksizin $v_1 \sim v_2, v_1 \sim v_4, v_1 \sim v_3, v_1 \sim v_5, v_2 \sim v_3, v_2 \sim v_5, v_2 \sim v_4, v_3 \sim v_5$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.3. " G grafinin bir u köşesine bağlı kenar sayısına u köşesinin derecesi denir ve $\deg(u)$ veya d_u ile gösterilir" (Bondy ve Murty, 1976).

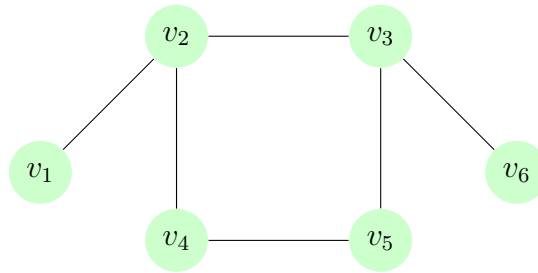


Şekil 2.2. G grafi

Tanım 2.4. "*Bir grafta derecesi sıfır olan köşeye izole köşe, derecesi 1 olan köşeye ise sarkık köşe denir. İki köşe arasında birden çok kenar varsa, bu kenarlara paralel kenarlar denir. Bir köşeyi kendisine bağlayan kenara da ilmek denir*" (Bondy ve Murty, 1976).

Şekil 2.2. deki G grafinde; $\deg(v_1) = 2, \deg(v_2) = \deg(v_3) = \deg(v_4) = 4, \deg(v_5) = 3, \deg(v_6) = 1$ ve $\deg(v_7) = 0$ dır, yani v_6 bir sarkık köşe ve v_7 ise bir izole köşedir.

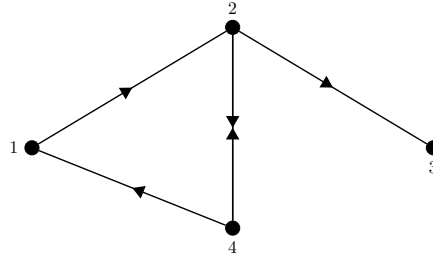
Tanım 2.5. "*Paralel kenar ve ilmek içermeyen grafa basit graf denir*" (Bondy ve Murty, 1976).



Şekil 2.3. Basit graf

Tanım 2.6. "*G* grafinin sonlu sayıda köşe ve kenarı var ise, bu grafa sonlu graf, aksi halde sonsuz graf denir" (Bondy ve Murty, 1976).

Tanım 2.7. "*G* grafinin her bir kenarına yön atanması ile elde edilen grafa yönlü graf denir ve her bir kenarına ise yay denir. Hiçbir kenarı bir yöne sahip olmayan graf ise yönsüz graf denir" (Bondy ve Murty, 1976).



Şekil 2.4. Yönlü graf

Lemma 2.8. *G*, *n* köşeli *e* kenarlı yönsüz bir graf olsun. Bu takdirde

$$\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 2e$$

dir.

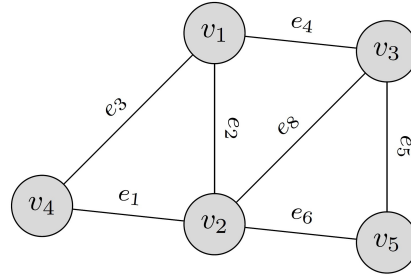
Lemma 2.8, "derece toplamı formülü" veya "El Sıkışma lemması" olarak da bilinir.

Sonuç 2.9. *G* grafında derecesi tek sayı olan köşelerin sayısı çifttir.

Tanım 2.10. "*G*, *n* köşeli *e* kenarlı grafinin ortalama derecesi $\bar{d} = \frac{2e}{n}$ ile tanımlıdır" (Büyükköse ve Gök, 2018).

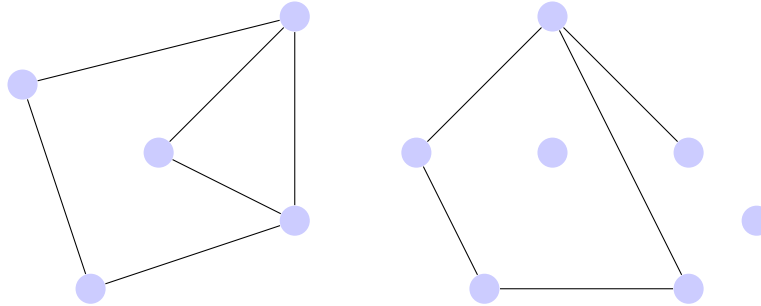
Tanım 2.11. "*G* grafinin tüm köşelerinin derecesi *k* ise *G* ye *k*– düzenli graf denir. *G* grafinin her köşesi birbirine komşu ise bu grafa tam graf denir. *n* köşeli bir tam graf K_n ile gösterilir. K_n tam grafi her köşesinin derecesi $n - 1$ olan bir $(n - 1)$ – düzenli graftır" (Bondy ve Murty, 1976).

Tanım 2.12. "*G*, köşe kümesi $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olan bir graf ve her $i = 1, 2, \dots, n-1$ için $e_i = v_i v_{i+1}$ olsun. Köşe ve kenarların $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ ile tanımlı dizisine yürüme denir. Tüm köşeleri farklı olan yürümeye ise yol denir" (Bondy ve Murty, 1976).

Şekil 2.5. G grafi

Şekil 2.5. deki G grafi için $v_1, e_4, v_3, e_5, v_5, e_6, v_2, e_2, v_1, e_4, v_3, e_8, v_2$ bir yürümedir. $v_1, e_3, v_4, e_1, v_2, e_8, v_3$ ise bir yoldur.

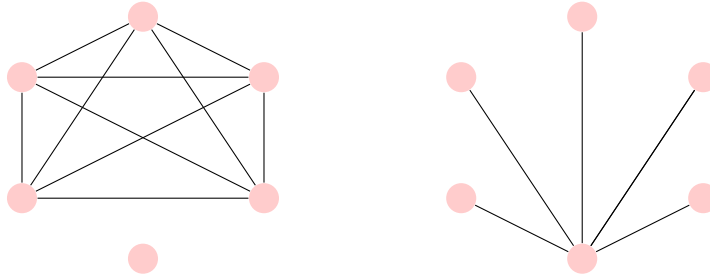
Tanım 2.13. "Herhangi iki köşesi arasında bir yol bulunan grafa bağlantılı, aksi halde bağlantısız graf denir" (Bondy ve Murty, 1976).



Şekil 2.6. Bağlantılı ve bağlantısız graf

Tanım 2.14. " G bir graf olsun. G ile aynı köşe kümesine sahip olan ancak kenar kümesi G grafında bulunmayan kenarlardan oluşan grafa G grafının komplementi denir ve $\overline{G}$ ile gösterilir" (Bondy ve Murty, 1976). Bir başka deyişle, $\overline{G}$ grafi G grafındaki kenarların K_n tam grafindan silinmesi sonucu elde edilir.

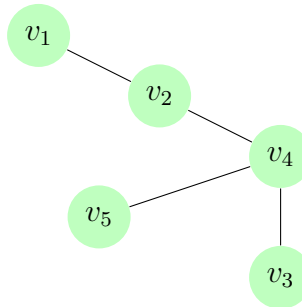
G , n köşeli e kenarlı bir graf olsun. Bu takdirde, $G \cup \overline{G} = K_n$, $E(G) \cup E(\overline{G}) = E(K_n)$ ve $|E(\overline{G})| = \binom{n}{2} - e$ dir.

Şekil 2.7. G ve $\overline{G}$

Tanım 2.15. " $G = (V, E)$ bir graf ve $U \subset V$, boş olmayan bir alt küme olsun. G grafindaki her kenarın en az bir köşesi U kümesinde ise U kümesine G grafinin bir köşe örtüsü (örtü kümesi) denir. G grafinin mümkün olan en küçük sayıda köşesinden oluşan köşe örtüsüne minimum köşe örtüsü denir. G grafinin minimum köşe örtüsü kümesinin kardinalitesine grafın köşe örtü sayısı denir ve $\tau(G)$ ile gösterilir" (Skiena, 1990).

" G grafinin U' köşe örtüsü, grafın hiçbir köşe örtüsünün öz alt kümesi değilse, U' kümesine G grafinin minimal köşe örtüsü denir" (Skiena, 1990).

Her minimum köşe örtüsü bir minimal köşe örtüsüdür. Bunun karşısı doğru değildir.

Şekil 2.8. G grafi

Şekil 2.8. deki G grafinin minimum köşe örtü kümeleri $C_1 = \{v_2, v_4\}$ ve $C_2 = \{v_1, v_4\}$ dir.

Tanım 2.16. " G basit ve bağlantılı bir graf ve $X \subseteq V(G)$ olsun. X kümesindeki hiçbir köşe çifti birbirine komşu değil ise X kümesine G de bağımsız küme denir" (Skiena, 1990).

$\alpha(G) = \max \{|X| : X, G \text{ de bağımsız küme}\}$ sayısına G grafinin bağımsızlık sayısı denir ve $\alpha(G)$ ile gösterilir.

" G , n köşeli bir graf ise

$$\tau(G) + \alpha(G) = n$$

dir" (West, 2000).

2.2. Grafların Bazı Matris Gösterimleri

Graflar matrisler yardımıyla temsil edilebilir. Grafların matris gösterimleri graflara matematiksel olarak yaklaşılmasını sağlayan araçlardır.

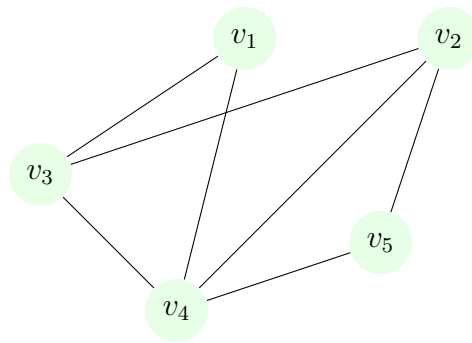
Graf matrislerinin öz değerleri ile graf yapısı arasında birçok ilişki belirlenmiştir. Örneğin grafin Laplasyan matrisinin en küçük ikinci öz değeri "grafın cebirsel bağlantısalılığı" olarak tanımlanmıştır (Fiedler, 1973).

Bu bölümde graflara ait bazı özel matrislerin tanımları verilecektir.

Tanım 2.17. " G köşe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ basit bir graf olsun. ij girdisi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \sim v_j \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlı $n \times n$ tipindeki simetrik matrise G grafinin komşuluk matrisi denir ve $A(G)$ ile gösterilir" (Harary, 1969).



Şekil 2.9. G grafi

Örnek 2.18. Şekil 2.9. daki G grafinin komşuluk matrisi aşağıdaki gibidir:

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tanım 2.19. " $A(G)$ matrisinin tüm öz değerlerinin kümesine G grafinin spektrumu denir" (Biggs, 1993).

G basit grafinin komşuluk matrisi simetrik olup, tüm öz değerleri reel sayıdır. G grafinin komşuluk matrisinin öz değerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olmak üzere, bu öz değerlerin mutlak değer olarak en büyüğüne grafin spektral yarıçapı denir.

Tanım 2.20. G , köşe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olan basit bir graf olsun. G grafinin Laplasyan matrisi $L(G) = (l_{ij})$, $n \times n$ tipinde bir simetrik matris olup,

$$l_{ij} = \begin{cases} d_i & i = j \\ -1 & v_i \sim v_j \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlıdır.

" $D(G) = \text{köşegen}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, G grafinin köşe derecelerinden oluşan bir köşegen matris ve $A(G)$, G grafinin komşuluk matrisi olmak üzere, G grafinin Laplasyan matrisi $L(G) = D(G) - A(G)$ olarak ifade edilir" (Mohar, 1989).

Örnek 2.21. Şekil 2.9. da verilen G grafinin Laplasyan matrisi

$$L(G) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 2.22. " G köşe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olan bir basit graf olsun. ij girdisi

$$\begin{cases} -1 & v_i \sim v_j \\ 1 & v_i \not\sim v_j, i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

ile tanımlı $n \times n$ tipindeki simetrik matrise G grafının Seidel matrisi denir ve $S(G)$ ile gösterilir" (Lint ve Seidel, 1966).

J bütün elemanları 1 olan matris ve I birim matris olmak üzere, Seidel matrisi

$$S(G) = J - I - 2A(G)$$

olarak ifade edilebilir. Ayrıca

$$S(G) = A(\overline{G}) - A(G)$$

dir.

Tanım 2.23. " G grafının Seidel Laplasyan matrisi $S_L(G)$ olmak üzere, $S_L(G) = D_s(G) - S(G)$ şeklinde tanımlanır. Burada $D_s(G) = \text{köşegen}(n - 1 - 2d_1, n - 1 - 2d_2, \dots, n - 1 - 2d_n)$ dir" (Ramane ve ark., 2017).

Dikkat edilirse, G grafının köşe-derece matrisi $D(G) = \text{köşegen}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ olmak üzere

$$D_s(G) = D(\overline{G}) - D(G)$$

ve

$$S_L(G) = L(\overline{G}) - L(G)$$

dir.

Bir grafın minimum örtü kümesine bağlı olarak çeşitli graf matrisleri tanımlanmıştır. Bu matrislerden bazıları aşağıda verilmiştir:

Tanım 2.24. " G grafının minimum örtü kümesi C olsun. G grafının minimum örtü matrisi $A_c(G) = (a_{ij}^c)$ olmak üzere,

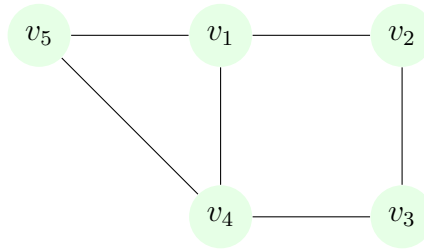
$$a_{ij}^c = \begin{cases} 1 & i = j \text{ ve } v_i \in C \\ 1 & v_i \sim v_j \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır" (Adiga ve ark., 2012).

Tanım 2.25. " G grafinin minimum örtü kümesi C olsun. G grafinin minimum örtü Seidel matrisi $S_c(G)=(s_{ij})$ olmak üzere,

$$s_{ij} = \begin{cases} -1 & v_i \sim v_j \\ 1 & v_i \nsim v_j \\ 1 & i = j, \quad v_i \in C \\ 0 & i = j, \quad v_i \notin C \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır" (Kanna ve ark., 2014).



Şekil 2.10. G grafi

Örnek 2.26. Şekil 2.10. daki G grafinin bir minimum örtü kümesi $C = \{v_1, v_2, v_4\}$ olmak üzere, G grafinin minimum örtü ve minimum örtü Seidel matrisleri sırasıyla aşağıda verilmiştir:

$$A_c(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_c(G) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seidel Laplasyan matrisi ve minimum örtü Seidel matrisi tanımlarını göz önüne alarak bir grafin Seidel Laplasyan minimum örtü matrisini tanımlayacağız.

Tanım 2.27. G , n köşeli ve minimum örtü kümesi C olan bir graf olsun. G grafinin minimum örtü Seidel Laplasyan matrisi $S_{Lc} = S_{Lc}(G) = (s_{ij}^c)$ olmak üzere,

$$s_{ij}^c = \begin{cases} 1 & v_i \sim v_j \\ -1 & v_i \nsim v_j \\ n - 2 - 2d_i & i = j, \quad v_i \in C \\ n - 1 - 2d_i & i = j, \quad v_i \notin C \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. S_{Lc} matrisi $n \times n$ tipinde simetrik bir matristir.

$S_{Lc} = D_s - S_c$ olduğu kolayca görülebilir. Burada $D_s = \text{köşegen}(n - 1 - 2d_1, n - 1 - 2d_2, \dots, n - 1 - 2d_n)$ dir.

2.3. Graf enerjisi

Graf enerjisi kavramı ilk olarak 1930 yılında Erich Hückel tarafından elektron sistemleri üzerinde yaklaşık moleküler yörünge hesaplamalarına metot arayışı sırasında ortaya atılmıştır ve moleküllerin enerji seviyelerini göstermek için grafların öz değerleri kullanılmıştır. 1978 yılında Avusturya’da düzenlenen bir konferansta Ivan Gutman, moleküler graflar için tanımlı bu kavramı genelleştirerek matematik literatürüne kazandırmıştır. Kimyasal kökeni çok daha eski olmasına rağmen matematik uygulamaları (Gutman, 1978) çalışması sayesinde ilgi görmüştür ve birçok graf enerji çeşidi tanımlanmıştır (Li ve ark., 2012).

Graf enerjisinin birçok uygulama alanı bulunmaktadır: Makromolekül teorisi (Praznikar ve ark., 2019), protein dizilerinin analizi ve karşılaştırılması (Wu ve ark., 2015), (Yu ve ark., 2017), ağ analizi (Gündüz, 2009), (Richter, 2019), hava taşımacılığını içeren problemler (Jiang ve ark., 2016), biyoloji (Giuliani ve ark., 2014), bilgisayar bilimi ve süreç analizine bağlı uygulamalar (Dang ve ark., 2018), (Musulin, 2014) vb.

Tanım 2.28. " G grafinin komşuluk matrisinin öz değerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olmak üzere bu öz değerlerin mutlak değerlerinin toplamına G grafinin enerjisi denir ve

$$En(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$$

şeklinde ifade edilir" (Gutman, 1978).

$\mathbb{C}^{n \times n}$, $n \times n$ tipindeki tüm kompleks matrislerin kümesi olsun. (Nikiforov, 2007) çalışmasında graf enerjilerinin $\mathbb{C}^{n \times n}$ üzerinde tanımlı matris normlarının özel halleri olarak göz önüne alınabileceği gösterilmiştir. $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisinin iz normu σ_i singüler değerlerini göstermek üzere $\|B\|_* = \sum_{i=1}^n \sigma_i(B)$ olarak tanımlıdır. Bu durumda

B matrisinin öz değerleri $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$ olmak üzere

$$\left\| B - \frac{\text{tr}(B)}{n} I_n \right\|_* = \sum_{i=1}^n \left| \vartheta_i - \frac{\text{tr}(B)}{n} \right| \quad (2.1)$$

sağlanır.

(2.1) de B yerine grafin A komşuluk matrisi yazılırsa, $\text{tr}(A) = 0$ olduğundan graf enerjisi ile $\|A\|_*$ ifadesi eşit olur:

$B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisinin enerjisi

$$E(B) = \sum_{i=1}^n \left| \vartheta_i - \frac{\text{tr}(B)}{n} \right| \quad (2.2)$$

olarak tanımlanır (Bravo ve ark., 2017).

Matris enerjisinin graf enerjisinin bir genelleştirmesi olduğu aşikardır. 2018 yılında grafin köşe enerjisi de tanımlanmıştır:

Tanım 2.29. " G , komşuluk matrisi $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ olan bir graf olsun. A matrisinin eşlenik transpozu A^* olmak üzere, v_i köşesinin G grafına bağlı enerjisi

$$En_G(v_i) = |A|_{ii}$$

olarak tanımlanır. Burada $|A| = (AA^*)^{\frac{1}{2}}$ dir" (Arizmendi ve Arizmendi, 2021).

Graf enerjisinin grafin köşe enerjilerine bağlı olarak başka bir tanımı da ifade edilmiştir:

Tanım 2.30. " G , köşe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olan bir graf olsun. G grafinin enerjisi

$$En(G) = \sum_{i=1}^n En_G(v_i)$$

olarak tanımlanır" (Arizmendi ve Arizmendi, 2021).

Yukarıda verilen yeni graf enerjisi tanımına ilişkin literatürde birçok yeni çalışma yapılmıştır (Yan ve ark., 2023), (Akbari ve ark., 2024).

(Arizmendi ve Juarez-Romero, 2018) çalışmasında $G = (V, E)$ bir graf olmak üzere $u, v \in V$ için G grafinin enerjisi

$$En(G) = \sum_{(u,v) \in E} \left(\frac{En(u)}{d_u} + \frac{En(v)}{d_v} \right).$$

olarak ifade edildi.

Son yıllarda yapılan çalışmalarda çok sayıda graf matrisi tanımlanması graf enerjisinin varyantlarının da tanımlanmasına zemin hazırlamıştır: Seidel Laplasyan enerjisi (Ramane ve ark., 2017), Nirmala enerjisi (Gutman ve Kulli, 2021) vb. Grafın minimum örtü kümesine bağlı olarak da birçok enerji tanımı yapılmıştır. Bunlardan bazıları aşağıda ifade edilmiştir.

Tanım 2.31. "G grafının A_c minimum örtü matrisinin öz değerleri $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ olmak üzere, G grafının minimum örtü enerjisi

$$EA_c(G) = \sum_{i=1}^n |\gamma_i|$$

olarak tanımlanır" (Adiga ve ark., 2012).

Tanım 2.32. "G grafının S_c minimum örtü Seidel matrisinin öz değerleri $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ olmak üzere, G grafının minimum örtü Seidel enerjisi

$$ES_c(G) = \sum_{i=1}^n |\theta_i|$$

olarak tanımlanır" (Kanna ve ark., 2014).

3. GEREÇ ve YÖNTEM

3.1. Gereç

Bu çalışmada basit ve sonlu grafların matris gösterimleri, enerjileri ve spektral grafteorisi üzerine literatürde bulunan İngilizce kaynaklar, makaleler, kitaplar ve tezler incelenmiştir.

3.2. Yöntem

S_{Lc} minimum örtü Seidel Laplasyan matrisi izi sıfırdan farklı bir matris olduğundan (2.2) tanımı göz önüne alınırsa, G grafinin minimum örtü Seidel Laplasyan enerjisini tanımlamak için öncelikle S_{Lc} matrisinin izi hesaplanacaktır.

G bir basit graf ve S_{Lc} matrisinin öz değerleri $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ olsun. (4.1) ve (2.2) göz önüne alınarak G grafinin minimum örtü Seidel Laplasyan enerjisi

$$ES_{Lc}(G) = \sum_{i=1}^n \left| \rho_i - \frac{n(n-1) - 4e - |C|}{n} \right| \quad (3.1)$$

olarak tanımlanacaktır. Ayrıca $\beta_i := \rho_i - \frac{n(n-1) - 4e - |C|}{n}$ yardımcı öz değerlerinin tanımlanmasının yanında matematiksel eşitsizlikler kullanılarak grafin minimum örtü Seidel Laplasyan enerjisi için sınırlar elde edilecektir.

4. BULGULAR

4.1. Grafın Minimum Örtü Seidel Laplasyan Enerjisi

Bu bölümde G , n köşeli ve e kenarlı basit ve yönsüz bir graf olmak üzere G grafının minimum örtü Seidel Laplasyan enerjisi tanımlanacaktır. Ayrıca G grafının minimum örtü Seidel Laplasyan enerjisi için sınırlar sunulacaktır.

S_{Lc} minimum örtü Seidel Laplasyan matrisinin öz değerleri $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ olsun. İlk olarak S_{Lc} ve S_{Lc}^2 matrislerinin izini belirleyelim.

Teorem 4.1. G grafının minimum örtü kümesi C olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

$$\begin{aligned} tr(S_{Lc}) &= n(n-1) - 4e - |C|, \\ tr(S_{Lc}^2) &= \sum_{i=1}^n (n-1-2d_i-\varepsilon_i)^2 + n(n-1), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\text{burada } \varepsilon_i = \begin{cases} 1, & v_i \in C \\ 0, & v_i \notin C \end{cases} \text{ ve } tr(M), M \text{ matrisinin izidir.}$$

İspat. S_{Lc} matrisinin tanımı ve Lemma 2.8 gereği

$$\begin{aligned} tr(S_{Lc}) &= \sum_{i=1}^n \rho_i = \sum_{i=1}^n s_{ii}^c \\ &= \sum_{i=1}^n (n-1-2d_i-\varepsilon_i) \\ &= n(n-1) - 2\sum_{i=1}^n d_i - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \\ &= n(n-1) - 4e - |C| \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
 \text{tr} \left(S_{Lc}^2 \right) &= \sum_{i=1}^n \rho_i^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(s_{ij}^c s_{ji}^c \right) \\
 &= \sum_{i \neq j} \left(s_{ij}^c \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(s_{ii}^c \right)^2 \\
 &= 2 \sum_{i < j} \left(s_{ij}^c \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(n - 1 - 2d_i - \varepsilon_i \right)^2 \\
 &= 2 \left(e(1)^2 + \left(\frac{n(n-1)}{2} - e \right) (-1)^2 \right) + \sum_{i=1}^n \left(n - 1 - 2d_i - \varepsilon_i \right)^2 \\
 &= n(n-1) + \sum_{i=1}^n \left(n - 1 - 2d_i - \varepsilon_i \right)^2
 \end{aligned}$$

olarak bulunur. □

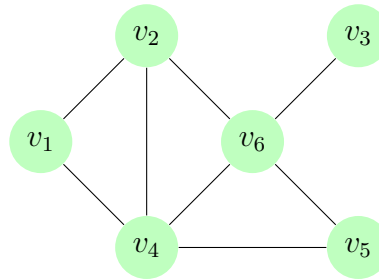
Önerme 4.2. G bir k -düzenli graf ve S_c minimum örtü Seidel matrisinin matrisinin öz değerleri $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ olsun. Bu durumda S_{Lc} matrisinin öz değerleri $n - 1 - 2k - \theta_j$, $(j = 1, 2, \dots, n)$ dir.

İspat. G bir k -düzenli graf ise $S_{Lc} = (n - 1 - 2k) I_n - S_c$ olduğundan ispat açıkça görülür. □

(4.1) ve (2.2) ifadelerini göz önüne alarak G grafının minimum örtü Seidel Laplasyan enerjisini

$$ES_{Lc}(G) = \sum_{i=1}^n \left| \rho_i - \frac{n(n-1) - 4e - |C|}{n} \right| \quad (4.2)$$

olarak tanımlayacağız.



Şekil 4.1. G grafı

Örnek 4.3. Şekil 4.1. deki G grafinin iki minimum örtü kümesi $C_1 = \{v_2, v_4, v_6\}$ ve $C_2 = \{v_1, v_4, v_6\}$ olmak üzere, bu örtü kümelerine karşılık gelen minimum örtü Seidel Laplasyan matrisleri aşağıda verilmiştir:

$$S_{L_{C_1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad S_{L_{C_2}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

$S_{L_{C_1}}$ matrisinin öz değerleri $\rho_1 \approx -5.5311$, $\rho_2 \approx -4.6032$, $\rho_3 \approx -1.2864$, $\rho_4 \approx -0.2451$, $\rho_5 \approx 2.5311$, $\rho_6 \approx 4.1347$ ve $S_{L_{C_2}}$ matrisinin öz değerleri ise $\rho_1 \approx -5.5604$, $\rho_2 \approx -4.3521$, $\rho_3 \approx -1.0280$, $\rho_4 \approx -0.4433$, $\rho_5 \approx 2.3222$, $\rho_6 \approx 4.0615$ dir. Bu durumda $\frac{n(n-1)-4e-|C|}{n} \approx -0,8333$ dır. Sonuç olarak, $ES_{L_{C_1}}(G) \approx 17,8414$ ve $ES_{L_{C_2}}(G) \approx 16,8809$ olarak hesaplanır. Grafin minimum örtü Seidel Laplasyan enerjisinin C minimum örtü kümesine bağlı olduğu görülür.

Teorem 4.4. (Fan, 1951) $M, N \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tipinde simetrik matrisler olsun. Bu takdirde,

$$\sigma_i(M + N) \leq \sigma_i(M) + \sigma_i(N),$$

burada $\sigma_i(X)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), X matrisinin singüler değerlerini göstermektedir.

Teorem 4.4'den yararlanarak G grafinin minimum örtü Seidel Laplasyan enerjisi için $ES_c(G)$ ve grafin ortalama derecesini içeren aşağıdaki üst sınırı elde edeceğiz:

Teorem 4.5. G bir graf ve G grafinin minimum örtü kümesi C olsun. Bu durumda

$$ES_{L_c}(G) \leq ES_c(G) + \sum_{i=1}^n \left| 2(\bar{d} - d_i) + \frac{1}{n}|C| \right|, \quad (4.3)$$

eşitsizliği sağlanır, burada $\bar{d}$ grafin ortalama derecesidir.

İspat. $D_s = \text{köşegen}(n-1-2d_1, n-1-2d_2, \dots, n-1-2d_n)$ ve I_n birim matris olmak üzere, $S_{L_c} = D_s + (-S_c)$ olduğundan

$$S_{L_c} - \left(\frac{n(n-1)-4e-|C|}{n} \right) I_n = \left[D_s - \left(\frac{n(n-1)-4e-|C|}{n} \right) I_n \right] + (-S_c)$$

ifadesi yazılabilir.

$\bar{d} = \frac{2e}{n}$ olmak üzere, $\left[D_s - \left(\frac{n(n-1)-4e-|C|}{n} \right) I_n \right]$ köşegen matrisinin öz değerleri $2 \left(\bar{d} - d_i \right) + \frac{1}{n} |C|$ olarak bulunur. Teorem 4.4 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} ES_{Lc}(G) &= \sum_{i=1}^n \sigma_i \left(S_{Lc} - \left(\frac{n(n-1)-4e-|C|}{n} \right) I_n \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sigma_i \left(D_s - \left(\frac{n(n-1)-4e-|C|}{n} \right) I_n + (-S_c) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sigma_i \left(D_s - \left(\frac{n(n-1)-4e-|C|}{n} \right) I_n \right) + \sum_{i=1}^n \sigma_i (-S_c) \\ &= \sum_{i=1}^n \left| 2 \left(\bar{d} - d_i \right) + \frac{1}{n} |C| \right| + ES_c(G) \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak (4.3) üst sınırı elde edilir. $\square$

(4.2) de $\beta_i := \rho_i - \frac{n(n-1)-4e-|C|}{n}$ yardımcı öz değerlerini tanımlayalım. Bu durumda, $ES_{Lc}(G)$ yi

$$ES_{Lc}(G) = \sum_{j=1}^n |\beta_j| \quad (4.4)$$

olarak ifade edebiliriz.

Aşağıdaki lemma $ES_{Lc}(G)$ için çeşitli sınırların bulunmasına yardımcı olacaktır.

Lemma 4.6. *Aşağıdaki ifadeler gerçekleşir:*

$$\sum_{j=1}^n \beta_j = 0,$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \beta_j^2 &= \sum_{j=1}^n (n-1-2d_j-\varepsilon_j)^2 + n(n-1) - \frac{1}{n} (n(n-1)-4e-|C|)^2 \\ &:= M. \end{aligned} \quad (4.5)$$

İspat. Teorem 4.1 gereği

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \beta_j &= \sum_{j=1}^n \rho_j - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (n(n-1)-4e-|C|) \\ &= n(n-1)-4e-|C| - n(n-1)+4e+|C| \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \beta_j^2 &= \sum_{j=1}^n \left(\rho_j - \frac{n(n-1)-4e-|C|}{n} \right)^2 \\
&= \sum_{j=1}^n \rho_j^2 - \frac{2}{n} (n(n-1) - 4e - |C|) \sum_{j=1}^n \rho_j + \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n (n(n-1) - 4e - |C|)^2 \\
&= \sum_{j=1}^n (n-1 - 2d_j - \varepsilon_j)^2 + n(n-1) - \frac{2}{n} (n(n-1) - 4e - |C|)^2 \\
&\quad + \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \left[(n(n-1) - 4e)^2 - 2(n(n-1) - 4e)|C| + |C|^2 \right] \\
&= \sum_{j=1}^n (n-1 - 2d_j - \varepsilon_j)^2 + n(n-1) - \frac{2}{n} (n(n-1) - 4e - |C|)^2 \\
&\quad + \frac{1}{n} (n(n-1) - 4e - |C|)^2 \\
&= \sum_{j=1}^n (n-1 - 2d_j - \varepsilon_j)^2 + n(n-1) - \frac{1}{n} (n(n-1) - 4e - |C|)^2
\end{aligned}$$

dir. □

Çalışmanın kalanında, Lemma 4.6 ve matematiksel eşitsizlikler yardımıyla $ES_{Lc}(G)$ için yeni sınırlar elde edilecektir.

Teorem 4.7. G , n köşeli bir graf olsun. Bu durumda

$$\sqrt{M + n(n-1) \left| \prod_{i=1}^n \beta_i \right|^{\frac{2}{n}}} \leq ES_{Lc}(G) \leq \sqrt{nM}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (4.4) eşitliğinde Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa;

$$\left(\sum_{j=1}^n |\beta_j| \right)^2 \leq \sum_{j=1}^n 1 \sum_{j=1}^n \beta_j^2.$$

elde edilir ve (4.5) gereği

$$ES_{Lc}(G) \leq \sqrt{nM}$$

olarak bulunur. Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} |\beta_i| |\beta_j| &\geq \left(\prod_{i \neq j} |\beta_i| |\beta_j| \right)^{\frac{1}{n(n-1)}} \\ &= \left(\prod_{i=1}^n |\beta_i|^{2(n-1)} \right)^{\frac{1}{n(n-1)}} \\ &= \left| \prod_{i=1}^n \beta_i \right|^{\frac{2}{n}} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\sum_{i \neq j} |\beta_i| |\beta_j| \geq n(n-1) \left| \prod_{i=1}^n \beta_i \right|^{\frac{2}{n}}$ dir. Bu eşitsizlik (4.5) ile kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (ES_{Lc}(G))^2 &= \sum_{i=1}^n |\beta_i|^2 + \sum_{i \neq j} |\beta_i| |\beta_j| \\ &\geq M + n(n-1) \left| \prod_{i=1}^n \beta_i \right|^{\frac{2}{n}} \end{aligned}$$

alt sınırı elde edilir. □

Teorem 4.8. G bir graf ve $|\beta_1| \geq |\beta_2| \geq \dots \geq |\beta_n| > 0$ olsun. Bu takdirde,

$$ES_{Lc}(G) \geq \frac{|\beta_1| + |\beta_n|}{2\sqrt{nM |\beta_1| |\beta_n|}}$$

dir.

İspat. $a_j, b_j \in \mathbb{R}^+$ ($1 \leq j \leq n$) olsun. Bu durumda, $U_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \{a_j\}$, $U_2 = \max_{1 \leq j \leq n} \{b_j\}$,
 $u_1 = \min_{1 \leq j \leq n} \{a_j\}$, $u_2 = \min_{1 \leq j \leq n} \{b_j\}$ olmak üzere

$$\sum_{j=1}^n a_j^2 \sum_{j=1}^n b_j^2 \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{U_1 U_2}{u_1 u_2}} + \sqrt{\frac{u_1 u_2}{U_1 U_2}} \right)^2 \left(\sum_{j=1}^n a_j b_j \right)^2 \quad (4.6)$$

eşitsizliği sağlanır ((Mitrinovic ve Vasic, 1970), s.60).

(4.6) eşitsizliğinde $a_j = 1$ ve $b_j = |\beta_j|$ yazılırsa,

$$\sum_{j=1}^n 1 \sum_{j=1}^n |\beta_j|^2 \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{|\beta_1|}{|\beta_n|}} + \sqrt{\frac{|\beta_n|}{|\beta_1|}} \right)^2 \left(\sum_{j=1}^n |\beta_j| \right)^2$$

sağlanır. (4.5) kullanılırsa,

$$nM \leq \frac{1}{4} \frac{(|\beta_1| + |\beta_n|)^2}{|\beta_1| |\beta_n|} (ES_{Lc}(G))^2$$

olur. Böylece

$$ES_{Lc}(G) \geq \frac{1}{2\sqrt{nM}} \left(\frac{|\beta_1| + |\beta_n|}{\sqrt{|\beta_1||\beta_n|}} \right)$$

elde edilir. □

Teorem 4.9. G bir graf ve $|\beta_1| \geq |\beta_2| \geq \dots \geq |\beta_n| > 0$ olsun. Bu durumda,

$$ES_{Lc}(G) \geq \sqrt{nM - \frac{n^2}{4} (|\beta_1| - |\beta_n|)^2}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. a_j, b_j ($1 \leq j \leq n$) negatif olmayan reel sayılar ve U_j, u_j ifadeleri önceki teoremdaki gibi tanımlı olsun. Bu durumda,

$$\sum_{j=1}^n a_j^2 \sum_{j=1}^n b_j^2 - \left(\sum_{j=1}^n a_j b_j \right)^2 \leq \frac{n^2}{4} (U_1 U_2 - u_1 u_2)^2 \quad (4.7)$$

eşitsizliği sağlanır (Ozeki, 1968).

(4.7) eşitsizliğinde $a_j = |\beta_j|$, $b_j = 1$ yerine konursa,

$$n \sum_{j=1}^n |\beta_j|^2 - \left(\sum_{j=1}^n |\beta_j| \right)^2 \leq \frac{n^2}{4} (|\beta_1| - |\beta_n|)^2$$

olur. (4.4) ve (4.5) gereği

$$nM - (ES_{Lc}(G))^2 \leq \frac{n^2}{4} (|\beta_1| - |\beta_n|)^2$$

elde edilir. Böylece ispat görülür. □

Teorem 4.10. G , n köşeli bir graf olsun. Bu durumda

$$ES_{Lc}(G) \geq |\beta_1| + 2(n-1) \left(\frac{\prod_{j=1}^n |\beta_j|^{\frac{2n-1}{2n(n-1)}}}{|\beta_1|^{\frac{1}{2(n-1)}}} - \frac{1}{2} \prod_{j=1}^n |\beta_j|^{\frac{1}{n}} \right)$$

dir.

İspat. $b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$, $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$ ve $\sum_{j=1}^n k_j = 1$ olsun. $K = \min \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ olmak üzere

$$\sum_{j=1}^n b_j k_j - \prod_{j=1}^n b_j^{k_j} \geq nK \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n b_j - \prod_{j=1}^n b_j^{\frac{1}{n}} \right) \quad (4.8)$$

eşitsizliği sağlanır (Furuichi, 2011).

(4.8) eşitsizliğinde $b_j = |\beta_j|$, $1 \leq j \leq n$, $k_1 = \frac{1}{2n}$, $2 \leq j \leq n$ için $k_j = \frac{2n-1}{2n(n-1)}$ ve $K = \frac{1}{2n}$ değerleri yerine konursa,

$$\begin{aligned} \frac{|\beta_1|}{2n} + \frac{2n-1}{2n(n-1)} \sum_{j=2}^n |\beta_j| - |\beta_1|^{\frac{1}{2n}} \prod_{j=2}^n |\beta_j|^{\frac{2n-1}{2n(n-1)}} &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\beta_j| - \prod_{j=1}^n |\beta_j|^{\frac{1}{n}} \right) \\ &= \frac{1}{2n} ES_{Lc}(G) - \frac{1}{2} \prod_{j=1}^n |\beta_j|^{\frac{1}{n}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

elde edilir.

$$|\beta_1|^{\frac{1}{2n}} \prod_{j=2}^n |\beta_j|^{\frac{2n-1}{2n(n-1)}} = |\beta_1|^{-\frac{1}{2(n-1)}} \prod_{j=1}^n |\beta_j|^{\frac{2n-1}{2n(n-1)}} = \frac{\prod_{j=1}^n |\beta_j|^{\frac{2n-1}{2n(n-1)}}}{|\beta_1|^{\frac{1}{2(n-1)}}}$$

ve $\sum_{j=2}^n |\beta_j| = ES_{Lc}(G) - |\beta_1|$ dir. Bu ifadeler (4.9) da yerine yazılırsa,

$$\left(\frac{1}{2n} - \frac{2n-1}{2n(n-1)} \right) |\beta_1| + \left(\frac{2n-1}{2n(n-1)} - \frac{1}{2n} \right) ES_{Lc}(G) \geq \frac{\prod_{j=1}^n |\beta_j|^{\frac{2n-1}{2n(n-1)}}}{|\beta_1|^{\frac{1}{2(n-1)}}} - \frac{1}{2} \prod_{j=1}^n |\beta_j|^{\frac{1}{n}}$$

bulunur, yani

$$-\frac{1}{2(n-1)} |\beta_1| + \frac{1}{2(n-1)} ES_{Lc}(G) \geq \frac{\prod_{j=1}^n |\beta_j|^{\frac{2n-1}{2n(n-1)}}}{|\beta_1|^{\frac{1}{2(n-1)}}} - \frac{1}{2} \prod_{j=1}^n |\beta_j|^{\frac{1}{n}}$$

elde edilir. Böylece

$$ES_{Lc}(G) \geq |\beta_1| + 2(n-1) \left(\frac{\prod_{j=1}^n |\beta_j|^{\frac{2n-1}{2n(n-1)}}}{|\beta_1|^{\frac{1}{2(n-1)}}} - \frac{1}{2} \prod_{j=1}^n |\beta_j|^{\frac{1}{n}} \right)$$

olduğundan ispat biter. □

Teorem 4.11. G , n köşeli bir graf ise

$$ES_{Lc}(G) \leq \frac{M}{2} + \sqrt{Mn}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $a_j, b_j > 0$ ve $p > 1$ olmak üzere Minkowski toplam eşitsizliği olarak bilinen

$$\left(\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.10)$$

eşitsizliğini $p = 2$ için göz önüne alalım ve $a_j = |\beta_j|$ ve $b_j = 1$ olarak seçelim. Bu durumda

$$\left(\sum_{j=1}^n (1 + |\beta_j|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^n |\beta_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^n 1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.11)$$

elde edilir.

Bernoulli eşitsizliğinden

$$\left(\sum_{j=1}^n (1 + |\beta_j|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\sum_{j=1}^n (1 + 2|\beta_j|) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.12)$$

olur. (4.11) ve (4.12) eşitsizliklerinden

$$\left(\sum_{j=1}^n (1 + 2|\beta_j|) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^n |\beta_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{n}$$

(4.4) ve (4.5) kullanılırsa,

$$(n + 2ES_{Lc}(G))^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{M} + \sqrt{n}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$ES_{Lc}(G) \leq \frac{M}{2} + \sqrt{Mn}$$

olduğu görülür. □

Teorem 4.12. G , n köşeli bir graf ise

$$ES_{Lc}(G) \geq \frac{M}{|\beta_1|}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $i = 1, 2, \dots, n$ için $(x_i), (y_i)$ negatif olmayan sayıların azalan bir dizisi, $x_1, y_1 \neq 0$ ve (q_i) negatif olmayan sayıların bir dizisi olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^n q_i x_i^2 \sum_{i=1}^n q_i y_i^2 \leq \max \left\{ y_1 \sum_{i=1}^n q_i x_i, x_1 \sum_{i=1}^n q_i y_i \right\} \sum_{i=1}^n q_i x_i y_i \quad (4.13)$$

eşitsizliği sağlanır (Dragomir, 2003).

(4.13) de $x_i = y_i := |\beta_i|$ ve $q_i := 1$ ($1 \leq i \leq n$) alınır,

$$\sum_{i=1}^n |\beta_i|^2 \sum_{i=1}^n |\beta_i|^2 \leq \max \left\{ |\beta_1| \sum_{i=1}^n |\beta_i|, |\beta_1| \sum_{i=1}^n |\beta_i| \right\} \sum_{i=1}^n |\beta_i|^2$$

elde edilir. Böylece

$$\sum_{i=1}^n |\beta_i|^2 \leq |\beta_1| \sum_{i=1}^n |\beta_i|$$

dir. (4.4) ve (4.5) den yararlanarak

$$ES_{Lc}(G) \geq \frac{M}{|\beta_1|}$$

sonucu elde edilir.

5. TARTIŞMA

Bu çalışmada grafin minimum örtü kümesine ilişkin yeni bir graf matrisi olan minimum örtü Seidel Laplasyan matrisi tanımlanmıştır. Daha sonra bu matrisin izinin hesaplanmasıyla grafin minimum örtü Seidel Laplasyan enerjisi tanımı yapılmıştır. Ayrıca grafin minimum örtü Seidel Laplasyan enerjisi için çeşitli graf parametrelerine bağlı bazı sınırlar elde edilmiştir. Elde edilen sınırlar önceki bölümde sunulmuştur.

Grafin minimum örtü Seidel Laplasyan matrisi izi sıfırdan farklı bir matris olduğundan grafin minimum örtü Seidel Laplasyan enerjisi için sınırların belirlenmesinde yardımcı öz değerlerin kullanılmasına ihtiyaç vardır. Grafin minimum örtü Seidel Laplasyan enerjisinin grafin yapısına ve minimum örtü kümesine bağlı olduğu aşikardır.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada basit ve sonlu grafların minimum örtü Seidel Laplasyan matrisi tanımlanmıştır. Daha sonra bu matrisin izinin hesaplanmasıyla grafin minimum örtü Seidel Laplasyan enerjisi tanımı yapılmıştır. Grafin minimum örtü Seidel Laplasyan enerjisinin grafin yapısına ve minimum örtü kümesine bağlı olduğu aşıkardır. Grafin minimum örtü Seidel Laplasyan enerjisi için köşe sayısı, kenar sayısı, köşe örtü sayısı, ortalama derecesi gibi graf parametrelerine bağlı bazı sınırlar elde edilmiştir.

7. ÖNERİLER

Çalışmamızda yeni bir graf matrisi olarak tanımlanan S_{Lc} minimum örtü Seidel Laplasyan matrisinin ve S_{Lc}^2 matrisinin izleri hesaplanmıştır. Bu matrislerin izleri grafin minimum örtü Seidel Laplasyan enerjisinin tanımında ve enerji için sınırların belirlenmesinde kullanılmıştır. S_{Lc} matrisinin daha büyük kuvvetlerinin izinin hesaplanması, enerji için yeni sınırların belirlenmesinde kullanılabilir. Ayrıca bazı özel grafların minimum örtü Seidel Laplasyan enerjisi hesaplanabilir.

KAYNAKLAR

- Adiga, C., Bayad, A., Gutman, I., Srinivas, S. A. (2012). The minimum covering energy of a graph. *Kragujevac Journal of Science*, 34, 39–56.
- Akbari, S., Habibi, M., Rabizadeh, S. (2024). Relations between energy and Sombor index. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 92, 425–435.
- Arizmendi, G., Arizmendi, O. (2021). Energy of a graph and Randic index. *Linear Algebra and its Applications*, 609, 332–338.
- Arizmendi, O., Juarez-Romero, O. (2018). On bounds for the energy of graphs and digraphs. In *Contributions of Mexican Mathematicians Abroad in Pure and Applied Mathematics (Vol. 709, pp. 1–19)*.
- Biggs, N. (1993). *Algebraic graph theory (2nd ed.)*. New York, NY: Cambridge University Press.
- Bondy, J. A., Murty, U. S. R. (1976). *Graph theory with applications (Vol. 290)*. London, UK: Macmillan.
- Bravo, D., Cubría, F., Rada, J. (2017). Energy of matrices. *Applied Mathematics and Computation*, 312, 149–157.
- Büyükköse, Ş., Kaya Gök, G. (2018). *Grafteoriye giriş (1. bs.)*. Ankara, Türkiye: Nobel Yayınevi.
- Dang, W., Gao, Z., Lv, D., Liu, M., Cai, Q., Hong, X. (2018). A novel timefrequency multilayer network for multivariate time series analysis. *New Journal of Physics*, 20.
- Dragomir, S. S. (2003). A survey on Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz type discrete inequalities. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 4(3), 1–142.
- Fan, K. (1951). Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely continuous operators. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 37, 760–766.
- Fiedler, M. (1973). Algebraic connectivity of graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 23, 298–305.
- Furuichi, S. (2011). On refined Young inequalities and reverse inequalities. *Journal of Mathematical Inequalities*, 5, 21–31.
- Giuliani, A., Filippi, S., Bertolaso, M. (2014). Why network approach can promote a new way of thinking in biology. *Frontiers in Genetics*, 5.
- Gutman, I. (1978). The energy of a graph. In *10. Steiermärkisches Mathematisches Symposium (Ber. Math.-Statist. Sekt. Forsch., Graz No. 103, pp. 1–22)*.
- Gutman, I., Kulli, V. R. (2021). Nirmala energy. *Open Journal of Discrete Applied Mathematics*, 4, 11–16.
- Gündüz, G. (2009). Viscoelastic properties of networks. *International Journal of Modern Physics C*, 20, 1597–1615.
- Harary, F. (1969). *Graph theory*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- Jiang, J., Zhang, R., Guo, L., Li, W., Cai, X. (2016). Network aggregation process in multilayer air transportation networks. *Chinese Physics Letters*, 33(10), 108901.

- Kanna, M. R., Dharmendra, B. N., Sridhara, G. (2014). Laplacian minimum covering energy of a graph. *Advances and Applications in Discrete Mathematics*, 13(2), 85–108.
- Kanna, R., Jagadeesh, R., Farahani, M. R. (2016). Minimum covering Seidel energy of a graph. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, 22, 71–82.
- Li, X., Shi, Y., Gutman, I. (2012). *Graph energy*. New York, NY: Springer.
- McClelland, B. J. (1971). Properties of the eigenvalues of the graph matrix and a theory of graph energy. *Chemical Physics Letters*, 3(6), 365–368.
- Mitrinovic, D. S., Vasic, P. M. (1970). *Analytic inequalities*. Berlin, Germany: Springer.
- Mohar, B. (1989). Laplacian matrices of graphs. *Studies in Physical and Theoretical Chemistry*, 63, 1–8.
- Musulini, E. (2014). Spectral graph analysis for process monitoring. *Industrial Engineering Chemistry Research*, 53, 10404–10416.
- Nikiforov, V. (2007). The energy of graphs and matrices. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 326, 1472–1475.
- Ozeki, N. (1968). On the estimation of inequalities by maximum and minimum values (in Japanese). *Journal of College Arts and Science, Chiba University*, 5, 199–203.
- Praznikar, J., Tomic, M., Turk, D. (2019). Validation and quality assessment of macromolecular structures using complex network analysis. *Scientific Reports*, 9, 1678.
- Ramane, H. S., Jummannavar, R. B., Gutman, I. (2017). Seidel Laplacian energy of graphs. *International Journal of Applied Graph Theory*, 1(2), 74–82.
- Randić, M. (1974). On the recognition of identical graphs representing molecular topology. *Journal of Chemical Physics*, 60, 3920–3928.
- Richter, H. (2019). Properties of network structures, structure coefficients, and benefit-to-cost ratios. *Biosystems*, 180, 88–100.
- Skiena, S. (1990). *Combinatorics and graph theory with Mathematica*. New York, NY: Perseus Books.
- Van Lint, J. H., Seidel, J. J. (1966). Equilateral point sets in elliptic geometry. *Indagationes Mathematicae*, 28, 335–348.
- West, D. B. (2000). *Introduction to graph theory* (2nd ed.). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Wu, H., Zhang, Y., Chen, W., Mu, Z. (2015). Comparative analysis of protein primary sequences with graph energy. *Physica A*, 437, 249–262.
- Yan, Z., Zheng, X., Li, J. (2023). Some degree-based topological indices and (normalized Laplacian) energy of graphs. *Discrete Mathematics Letters*, 11, 19–26.
- Yu, L., Zhang, Y., Gutman, I., Shi, Y., Dehmer, M. (2017). Protein sequence comparison based on physicochemical properties and position–feature energy matrix. *Scientific Reports*, 7, 46237.