



**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**CEBİRSEL HİPERYAPILAR ÜZERİNDE KABA YAKLAŞIM
OPERATÖRLERİ**

AYHAN YÜKSEL

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**Şanlıurfa
2025**



**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**CEBİRSEL HİPERYAPILAR ÜZERİNDE KABA YAKLAŞIM
OPERATÖRLERİ**

AYHAN YÜKSEL

**MATEMATİK ANA BİLİM DALI
Tez Danışmanı: Doç. Dr. GÜLAY OĞUZ**

**Şanlıurfa
2025**

TEŞEKKÜR

Yüksek lisansa başladığım günden itibaren yakın ilgisi ve yardımlarıyla beni destekleyen, deneyimleriyle bana rehberlik eden ve tüm bilgi birikimini benimle paylaşan kıymetli hocam ve danışmanım Doç. Dr. Gülay OĞUZ'a en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
SİMGELER DİZİNİ	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ	iv
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	3
2.1. Kaba Kümeler	20
3. MATERYAL VE YÖNTEM	24
3.1. Hipergruplar Üzerinde Kaba Yaklaşımlar	24
3.2. Poligruplar Üzerinde Kaba Yaklaşımlar	26
3.3. Hiperhalkalar Üzerinde Kaba Yaklaşımlar	27
4. BULGULAR	37
5. TARTIŞMA	38
6. SONUÇ	39
7. ÖNERİ	40
KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ	45

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Cebirsel Hiperyapılar Üzerinde Kaba Yaklaşım Operatörleri

AYHAN YÜKSEL

HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Gülay OĞUZ

Yıl: 2025, Sayfa:45

Kaba küme teorisi belirsizliği modelleyen önemli bir matematiksel araçtır. Bu teori başta matematik olmak üzere mühendislik, tıp ve bilgisayar bilimleri gibi birçok alanda geniş çalışma potansiyeline ulaşmıştır. Diğer yandan klasik cebirsel yapıların genelleştirilmesi olan cebirsel hiperyapılar ile kaba küme teorisi birleştirilerek yeni yapılar tanıtılmıştır. Bu çalışmada hipergruplar, poligruplar, hiperhalkalar kaba kümeler, kaba gruplar ve kaba hiperhalkaların tanım ve bazı özellikleri verilmiştir. Ayrıca cebirsel hiperyapılar üzerinde kaba yaklaşım operatörleri çalışılarak kaba hipergruplar, kaba poligrupların ve kaba hiperhalkalar incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELEER: Kaba kümeler, kaba yaklaşım operatörleri, hipergruplar, poligruplar, hiperhalkalar

ABSTRACT

MASTER THESIS

Rough Approximation Operators on Algebraic Hyperstructures

AYHAN YÜKSEL

HARRAN UNIVERSITY

**GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Gülay OĞUZ

Year: 2025, Page:45

Rough set theory is an important mathematical tool for modeling uncertainty. This theory has reached a wide potential for study in many fields, especially mathematics, engineering, medicine and computer science. On the other hand, new structures have been introduced by combining algebraic hyperstructures, which compose generalizations of classical algebraic structures along with rough set theory. In this study, definitions and some properties of hypergroups, polygroups, hyperrings, rough sets and rough groups are given. Then the relationships between rough hypergroups, rough polygroups and rough hyperrings on algebraic hyperstructures are examined.

KEYWORDS: Rough sets, rough approximation operators, hypergroups, polygroups, hyperrings

SİMGELER DİZİNİ

$H \leq G$	H, G nin alt grubu
$N \trianglelefteq G$	N, G nin normal alt grubu
$P^*(H)$	H nin kuvvet kümesi
(V, R)	Yaklaşım Uzayı
$V_\tau(X)$	Alt Yaklaşım Kümesi
$V^\tau(X)$	Üst Yaklaşım Kümesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa No
Şekil 1: Z_6 nın alt grupları.....	18
Şekil 2: Ω_{Z_6} nın alt poligrupları.....	18
Şekil 3: Bir kümenin alt ve üst yaklaşımı.....	21

1. GİRİŞ

Matematikte küme kavramı 19. yüzyılda İsviçreli matematikçi Georg Cantor tarafından geliştirilmiş olup modern matematiğin temel taşlarından biri haline gelmiştir. Cantor'un küme kavramını geliştirirken tüm sayıların bir arada bulunabileceği sınırsız bir küme oluşturma fikri matematiğin pek çok alanında yeni yaklaşımların doğmasına öncülük etmiştir. Küme kavramı yalnızca matematiksel bir yapı olmanın ötesinde birçok bilim dalında da önemli uygulamalara sahiptir. Örneğin fizik (Von Neumann, 2018), biyoloji (Murray, 2007) gibi çeşitli disiplinlerde de küme teorisi kavramlarından yararlanılmaktadır. Bu nedenle, küme teorisinin anlaşılması ve uygulanması hem matematik hem de diğer bilim alanları için büyük önem taşımaktadır.

Kümelerin sağladığı esnek yapı belirsizlik ve muğlaklığın modellenmesi gibi daha karmaşık problemlerin çözümüne de olanak tanımaktadır. Bu bağlamda Pawlak tarafından ortaya atılan kaba küme teorisi belirsizlik içeren verilerin modellenmesi ve nesnelerin yaklaşık olarak sınıflandırılmasına imkân sağlayan yeni bir matematiksel yaklaşım olarak dikkat çekmiştir (Pawlak, 1991; Pawlak ve Skowron, 1994). Kaba küme teorisi kesin olmayan veya eksik bilgiler içeren sistemlerin analizinde kullanılmakta olup aynı zamanda uzaktan algılama (Pan ve ark. 2010), coğrafik bilgi bilimi (Leung, 2007), tıp (Thangavel, 2005; Paterson, 1993), yapay zekâ (Tay, 2003), ve duyarlılık haritalama (Aldridge, 1999) gibi birçok bilim disipliniinde kullanılmıştır. Belirsizlik kavramının modellenmesi ve yönetilmesi açısından önemli bir araç olan bu teori matematiksel düşüncenin daha geniş kapsamlı problemlere uygulanmasını sağlamıştır.

Kümeler ve cebirsel yapılar arasındaki ilişkiyi daha da ileri taşıyan bir diğer önemli kavram ise hiperyapılardır. Hiperyapılar, temel cebirsel yapılar olan grup ve halka kavramları üzerine inşa edilmiştir ve bu yapıların özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. F. Marty hiperyapılar teorisini ilk kez 1934 yılında Sekizinci İskandinav Matematik Kongresi'nde tanıtmış ve bu yapıların temel özelliklerini ortaya koymuştur (Marty, 1934). Marty'ye göre bir hiperyapıda iki elemanın bir işlem altında birleşmesi sonucu ortaya çıkan değer boş olmayan bir küme oluşturmalıdır. Bu yaklaşım, cebirsel yapıları genişleten ve matematiksel ilişkileri farklı bir bakış açısıyla ele alan bir çerçeve sunmuştur.

Hiperyapıların en önemli inceleme alanlarından biri olan hipergruplar, grup teorisinin genelleştirilmiş bir hali olarak tanımlanmaktadır. Hipergruplar, klasik grup teorisinin kurallarını esneterek daha geniş matematiksel yapılara olanak tanımaktadır. Hipergrupların uygulama alanları yalnızca teorik matematikle sınırlı kalmayıp geometri, topoloji, olasılık teorisi, kriptografi, ekonomi ve etnoloji gibi disiplinlerde de önemli bir yer edinmiştir (Corsini ve Leoreanu, 2003; Connes and Consani, 2011; Bloom ve Heyer, 2011; Vougiouklis, 1994). Hipergruplar ile ilgili yapılan araştırmalar sonucunda hipergrupoid, yarı hipergrup gibi kavramlar geliştirilmiş ve hipergrupların taşınması gereken özellikler detaylı bir şekilde belirlenmiştir (Marty, 1934). Her grup aynı zamanda bir hipergrup olarak kabul edilebilirken, her hipergrup bir grup olmak zorunda değildir (P. Corsini ve ark.). Bu durum, hipergrupların esnekliğini ve geniş uygulama alanlarına sahip olduğunu göstermektedir.

Hipergruplara ek olarak Koskas tarafından tanımlanan alt hipergruplar bu yapıların farklı yönlerini ortaya koymak adına geliştirilmiş ve çeşitli örneklerle açıklanmıştır (Koskas, 1970). Artan araştırmalar sonucunda hipergrupların koset yapısı detaylı bir şekilde incelenmiş ve bu konudaki çalışmalar hiperyapılar teorisine yeni katkılar sağlamıştır (Jewett, 1975). Hiperyapılar teorisinin gelişimi ile birlikte hiperhalka kavramı da önem kazanmaya başlamıştır.

Hiperhalka kavramı ilk kez Novak tarafından tanımlanmış olup bir kümenin hiperhalka olarak kabul edilebilmesi için belirli özellikleri sağlaması gerektiği ifade edilmiştir. Novak, hiperhalkalar içinde değişmeli ikinci işleme sahip olanları "değişmeli hiperhalkalar" olarak adlandırarak bu yapıların özelliklerini açıklamıştır (Novak, 2009). Ayrıca alt hiperhalka ve hiperidealler gibi kavramları ele alarak hiperhalkaların cebirsel yapısını örneklerle desteklemiştir (Davvaz B. ve Leoreanu-Fotea, 2007). Hiperhalkalar, cebirsel yapıların daha geniş bir çerçevede ele alınmasına olanak sağlayarak hiperyapılar teorisine önemli katkılar sunmuştur.

Sonuç olarak, küme kavramı ve buna bağlı olarak geliştirilen hiperyapılar, cebirsel yapılar ve kaba küme teorisi gibi yaklaşımlar matematiğin farklı alanlarında önemli bir yer tutmaktadır. Cantor'un küme teorisi ile başlattığı süreç zamanla hiperyapılar ve hipergruplar gibi genişletilmiş matematiksel kavramların ortaya çıkmasını sağlamış; bu kavramlar belirsizlik içeren sistemlerden cebirsel yapılara kadar birçok alanda uygulanabilir hale gelmiştir. Hiperyapılar teorisi ve bu teoriye

dayalı kavramlar günümüzde matematik biliminin sınırlarını genişletmeye devam etmektedir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Cebirsel hiperyapılar, klasik cebirsel yapıların genelleştirilmesi halleri olup belirsizlik ve çoklu değerli işlemlerle karakterize edilen matematiksel yapılardır. Grup, halka kavramlarının daha esnek bir biçimi olarak ortaya çıkan bu yapıların temel amacı tekil sonuçlar yerine birden fazla çıktıyı içerebilecek işlemlerle zenginleştirilmiş bir cebir anlayışı sunmaktır.

Bu bölümde, temel cebirsel hiperyapılar tanıtılmakta olup hipergruplar, poligruplar ve hiperhalkalar gibi temel yapılar ele alınmaktadır. Ayrıca, bu yapıların temel özellikleri örnekler ve teoremler ile detaylandırılmıştır.

Tanım 2.1. " G boştan farklı bir küme ve " $*$ " işlemi G de işlem olsun. Aşağıda bulunan şartlar sağlanırsa $(G, *)$ yapısına grup adı verilir.

- (i) Her $a, b \in G$ için $a * b \in G$,
- (ii) Her $a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$,
- (iii) Her $a \in G$ için $e * a = a * e = a$ olacak şekilde $e \in G$ birim eleman,
- (iv) Her $a, b \in G$ için $a * b = b * a = e$.

Her $a, b \in G$ için $a * b = b * a$ ise $(G, *)$ grubuna değişmeli grup denir" (Çallıalp, 2013).

Örnek 2.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $G = \{a \in \mathbb{R} : a^2 < 1\}$ olsun.

Her $a, b \in G$ için G için $a * b = (a + b)/(1 + ab)$ olacak şekilde " $*$ " işlemi tanımlansın. $(G, *)$ bir değişmeli gruptur. Aşağıda $(G, *)$ yapısının bir değişmeli grup olduğu gösterilmiştir.

$$(i) [(a + b)/(1 + ab)]^2 < 1 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 < 1 + 2ab + a^2b^2 \\ \Leftrightarrow (1 - a^2)(1 - b^2) > 0$$

olduğunda $a, b \in G$ için $a * b \in G$ olur.

- (ii) Her $a, b, c \in G$ için

$$a * (b * c) = (a + b + c + abc)/(1 + ab + ac + bc) = (a * b) * c$$

olduğundan $a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ dir.

- (iii) $a * 0 = 0 * a = a$ olduğundan 0_G birim elemandır.

- (iv) $a * (-a) = (-a) * a = 0$ olduğundan a elemanının tersi $-a$ dır.

(v) Her $a, b \in G$ için $a * b = b * a$ olup $(G, *)$ değişmeli gruptur.

Örnek 2.2. " $G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq 0, 0 < b\}$ kümesinde

$$(a, b) * (c, d) = (a + c, bd)$$

şeklinde bir işlem tanımlansın. Bu durumda $(G, *)$ bir değişmeli gruptur.

Her $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olsun.

(i) $a \leq 0$ ve $c \leq 0$ ise $a + c \leq 0$ olur ve $b > 0$ ve $d > 0$ ise $bd > 0$ olduğundan $(a + c, bd) \in G$ olup " $*$ " işlemi kapalıdır.

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad [(a, b) * (c, d)] * (e, f) &= (a + c, bd) * (e, f) \\ &= (a + c + e, bdf) \\ &= (a, b) * (c + e, df) \\ &= (a, b) * [(c, d) * (e, f)] \end{aligned}$$

olup $(G, *)$ birleşme özelliğini sağlar.

(iii) Birim eleman $(0, 1) \in G$ dir. Gerçekten,

$$(a, b) * (0, 1) = (a + 0, b \cdot 1) = (a, b)$$

ve

$$(0, 1) * (a, b) = (0 + a, 1 \cdot b) = (a, b).$$

(iv) $(a, b) * (c, d) = (0, 1)$ ise $(a + c, bd) = (0, 1)$ olur ve $c = -a$ ve $d = 1/b$ olduğundan $(a, b) \in G$ için $(a, b)^{-1} = (-a, 1/b)$ ters elemanı vardır.

(v) $(a, b) * (c, d) = (a + c, bd) = (c + a, db) = (c, d) * (a, b)$ olup $*$ işleminin değişme özelliği vardır. Bunları dolaylı $(G, *)$ bir değişmeli gruptur" (Çallıalp, 2013).

Not: $(G, *)$ grubunda $*$ işlemi yerine "toplama" (+) veya "çarpma" (.) işlemleri kullanılabilir. İşlem (+) olduğunda gruba **toplamsal grup** denir ve $a * b$ işlemi yerine, $a + b$ kullanılır. Toplamsal grubun etkisiz elemanı 0_G ve a elemanının tersi $-a$ ile gösterilir. İşlem (.) işlemi kullanılıyor ise gruba **çarpımsal grup** denir. Bu

durumda $a * b$ işlemi yerine $a . b$ veya ab yazılır. Çarpımsal grubun birim elemanı 1_G veya e_G (veya sadece e) ile gösterilir. Bir a elemanının tersi a^{-1} ile gösterilir.

Örnek 2.3. $G = \{1, -1, i, -i\}$ kümesi $"."$ işlemine göre $\mathbb{C}$ kompleks sayılar üzerinde bir grup oluşturur.

.	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

Tablodan anlaşılacağı üzere kapalılık özelliği vardır. Birleşme özelliği kompleks sayılarda var olan bir özelliktir. Grubun etkisiz elemanı 1 dir ve

- $1^{-1} = 1,$
- $(-1)^{-1} = -1,$
- $i^{-1} = -i,$
- $(-i)^{-1} = i$ olduğundan her elemanın tersi vardır. Böylece $(G, .)$ bir gruptur.

Örnek 2.4. $(\mathbb{Z}, +)$ bir gruptur.

$(\mathbb{Q}, +)$ bir gruptur.

$(\mathbb{R}, +)$ bir gruptur.

Örnek 2.5. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, .)$ değişmeli gruptur.

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, .)$ değişmeli gruptur.

$(\mathbb{C} \setminus \{0\}, .)$ değişmeli gruptur.

$(\mathbb{Z}, .)$ grup değildir. Çünkü $2 \in \mathbb{Z}$ iken $2^{-1} = 1/2 \notin \mathbb{Z}$ olduğundan grup oluşturamaz.

Teorem 2.1. (Kısaltma Kuralı) $(G, *)$ bir grup olsun. Her $a, b, c \in G$ için

$$a * b = a * c \text{ ise } b = c$$

dir.

İspat. Verilen bir G grubunda $a, b, c \in G$ için $a * b = a * c$ olduğundan ters elemanın varlığı ve birleşme özelliği kullanılarak

$$a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$$

olup birleşme özelliği gereği

$$(a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$$

$a^{-1} * a = e$ olduğundan (birim eleman)

$$e * b = e * c$$

birim elemanın etkisizliğinden dolayı

$$b = c$$

olur.

Teorem 2.2. " $(G, *)$ bir grup olsun. G grubu aşağıdakileri özellikleri sağlar.

(i) G grubunun etkisiz (birim) elemanı tektir.

(ii) Her $a \in G$ için $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$ eşitliğini $a^{-1} \in G$ elemanı sağlar.

(iii) Her $a \in G$ için $(a^{-1})^{-1} = a$ dir.

(iv) Her $a, b \in G$ için $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ dir" (Çallıalp ve ark., 2009).

İspat. " (i) Kabul edelim ki $(G, *)$ grubunun e den farklı bir f birim elemanı olsun.

Her $a \in G$ için

$$a * e = a$$

olup ve $a = f$ alınırsa

$$f * e = f \tag{2.1}$$

bulunur. f etkisiz eleman ve $a \in G$ için

$$f * a = a$$

olup $a = e$ alınırsa

$$f * e = e \tag{2.2}$$

bulunur. (2.1) ve (2.2) eşitliklerinden

$$f * e = f = e$$

elde edilir. Böylece $e = f$ olur.

(ii) Her $a \in G$ için

$$a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$$

ve

$$a_1^{-1} * a = a * a_1^{-1} = e$$

olsun. Bu durumda

$$a * a_1^{-1} = a * a^{-1} = e$$

olup kısaltma kuralı gereğince $a_1^{-1} = a^{-1}$ elde edilir.

(iii) Her $a \in G$ için

$$a^{-1} * (a^{-1})^{-1} = e = a^{-1} * a$$

yazılabileceğinden

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

elde edillir.

(iv) Her $a, b \in G$ için $(a * b) * (b^{-1} * a^{-1})$ birleşme özelliğinde

$$a * (b * b^{-1}) * a^{-1}$$

dir. Bir elemanın tersi ile işleme girmesi etkisiz elemanı vereceğinden dolayı

$a * e * a^{-1}$ dir. Birim elemanın etkisizliğinden dolayı $a * a^{-1} = e$ olur. Sonuç olarak

$$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = e$$

dir."

Tanım 2.2. " G bir grup ve H boştan farklı G grubunun alt kümesi olsun. Bu durumda H kümesi G deki işleme göre grup oluşturuyorsa H ye G nin alt grubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir." (Burton, 1970).

Örnek 2.6. " $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ grubunun bir alt grubu $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ grubudur" (Çallıalp ve ark., 2009).

Örnek 2.7. " $b \in \mathbb{Z}$ için $(b\mathbb{Z}, +)$ grubu $(\mathbb{Z}, +)$ grubunun bir alt grubudur" (Çallıalp ve ark., 2009).

Teorem 2.3. " G bir grup ve H kümesi G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. H nin G grubunun bir alt grubu olması için gerek ve yeter şart

(i) Her $a, b \in H$ için $ab \in H$,

(ii) Her $a \in H$ için $a^{-1} \in H$.

dir" (Burton, 1970).

Teorem 2.4. " G grubunda $H \subseteq G$ ve H boş kümeden farklı olsun. H nin bir alt grup olmasını sağlayan şart her $a, b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ olmasıdır" (Hungerford, 1974).

İspat. " H alt grup ve $a, b \in H$ olsun. $b^{-1} \in H$ olup H bir grup olduğundan dolayı H kapalıdır ve $ab^{-1} \in H$ dir. Şimdi H boş kümeden farklı bir alt küme olduğu ve $a, b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ olduğunu düşünelim. $b = a$ seçilirse $aa^{-1} = e \in H$ elde edilir. Ayrıca $a = e$ seçilirse her $b \in H$ için $b^{-1} \in H$ bulunur. $a, b \in H$ olduğundan $b^{-1} \in H$ olur ve $a(b^{-1})^{-1} = ab \in H$ elde edilir. Bu durumda H kapalı olur. Birleşme özelliği G de olduğu için H de de vardır. Sonuç olarak H bir alt grup olur."

Tanım 2.3. " G bir grup ve $N \leq G$ olsun. Her $g \in G$ ve $n \in N$ için $gng^{-1} \in N$ oluyorsa N ye G nin **normal alt grubu** denir ve $N \trianglelefteq G$ ile gösterilir. $gNg^{-1} = \{gng^{-1} : n \in N\}$ olduğundan N nin normal alt grup olması için gerek ve yeter koşul her $g \in G$ için $gNg^{-1} \subseteq N$ olmasıdır" (Burton, 1970).

Teorem 2.5. " G bir grup ve $N \leq G$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktir (Burton, 1970).

(i) $N \trianglelefteq G$,

(ii) Her $g \in G$ için $gNg^{-1} \subseteq N$,

(iii) Her $g \in G$ için $gNg^{-1} = N$."

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) $x \in gNg^{-1}$ olsun. Bu durumda $x = ghg^{-1}$ olacak şekilde $n \in N$ vardır. Ayrıca (i) den $gn \in gN = Ng$ olur. Böylece $gn = n_1a$ olacak şekilde $n_1 \in N$ vardır. Bu durumda $x = gng^{-1} = n_1gg^{-1} = n_1 \in N$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $g \in G$ olsun. (ii) de g yerine g^{-1} alınırsa $g^{-1}Ng \subseteq N$ ve böylece $N \subseteq gNg^{-1}$ olur. Sonuç olarak her $g \in G$ için $gNg^{-1} = N$ elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $g \in G$ olsun $gNg^{-1} = N$ dir. $x \in gN$ ise $xg^{-1} \in N$ olup $x \in Ng$ dir. Böylece $gN \subseteq Ng$ dir. $gNg^{-1} = N$ olduğundan g yerine g^{-1} yazılırsa $Ng \subseteq gN$ elde edilir.

Sonuç 2.1. " G grup ve $N \leq G$ olsun. G grubunda N nin normal alt grup olması için her $g \in G$ ve her $n \in N$ için $gn g^{-1} \in N$ olmalıdır" (Burton, 1970).

Tanım 2.4. " $(T, +, \cdot)$ cebirsel yapısı verilsin. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $(T, +, \cdot)$ yapısına **halka** denir.

- (i) Her $a, b \in T$ için toplama işleminin kapalılık özelliğinden $a + b \in T$,
- (ii) Her $a, b \in T$ için toplama işleminin değişme özelliğinden $a + b = b + a$,
- (iii) Her $a, b, c \in T$ toplama işleminin birleşme özelliğinden $(a + b) + c = a + (b + c)$,
- (iv) Her $a \in T$ toplama işleminin etkisiz eleman özelliğinden $a + 0_T = a$ ve $0_T \in T$,
- (v) Her $a \in T$ için $a + (-a) = 0$ ters eleman özelliğinden $(-a) \in T$,
- (vi) Her $a, b, c \in T$ için çarpma işleminin dağılma özelliğinden $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
- (vii) Her $a, b, c \in T$ için çarpma işleminin toplama işlemin üzerine dağılma özelliğinden $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ve $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ dir" (Burton, 1970).

Örnek 2.8. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ yapısı bir halkadır.

- (i) Her $a, b \in \mathbb{Z}$ toplama işleminin kapalılık özelliğinden

$$a + b \in \mathbb{Z}$$

- (ii) Her $a, b, c \in \mathbb{Z}$ için toplama işleminin birleşme özelliğinden

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

- (iii) $\exists 0 \in \mathbb{Z}$ öyle ki her $a \in \mathbb{Z}$ toplama işlemi birim eleman özelliğinden

$$0 + a = a + 0 = a$$

- (iv) Her $a \in \mathbb{Z}, \exists (-a) \in \mathbb{Z}$ toplama işleminin ters eleman özelliğinden

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

- (v) Her $a, b \in \mathbb{Z}$, toplama işlemini değişme özelliğinden

$$a + b = b + a$$

- (vi) Her $a, b, c \in \mathbb{Z}$ elemanları için

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

- (vii) Her $a, b, c \in \mathbb{Z}$ elemanları için

$$a.(b+c) = a.b + a.c \text{ ve } (a+b).c = a.c + b.c$$

Açıktır ki $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ cebirsel yapısı bir halkadır.

Tanım 2.5. " K kümesi bir T halkasının boştan farklı bir alt kümesi olsun. T halkasındaki işlemlere göre K alt kümesi de aynı işlemler altında bir halka ise K halkasına T halkasının bir alt halkası denir" (Çallıalp ve ark. 2009).

Örnek 2.9. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ halkasının bir alt halkası $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ halkasıdır (Çallıalp ve ark., 2009).

Önerme 2.1. " Bir T halkasının boştan farklı bir alt kümesi K olsun. T halkasındaki işleme göre K kümesinin T halkasının bir alt halkası olması için aşağıdaki şartları sağlamalıdır. Her $a, b \in K$ için

- (i) $a - b \in K$,
- (ii) $ab \in K$ " (Çallıalp ve ark. 2009).

Örnek 2.10. $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ kümesi girdileri tamsayılar olan 2×2 tipinde matrislerin kümesi olsun. Boştan farklı $C = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ alt kümesi ele alınsın. C nin elemanlarında oluşan $\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$ matrisleri için,

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & 0 \\ 0 & b_1 - b_2 \end{bmatrix} \in C$$

ve

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_2 & 0 \\ 0 & b_1 \cdot b_2 \end{bmatrix} \in C$$

olduğundan $C \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ bir alt halkadır.

Tanım 2.6. " $(G, *)$ ve $(H, \star)$ iki grup olsun $f: G \rightarrow H$ fonksiyonu her $a, b \in G$ için

$$f(a * b) = f(a) \star f(b)$$

şartını sağlıyorsa bu fonksiyona G den H ye bir **grup homomorfizması** veya **homomorfizma** denir" (Bağırılmaz, 2015).

*	..	..	b	..
..			..	
..			..	
a	..	..	ab	
..				

*	..	..	$f(b)$	..
..			..	
..			..	
$f(a)$	..	..	$f(a) * f(b) = f(a * b)$	
..				

Teorem 2.6. " G ve H iki grup olsun. Bu durumda $f: G \rightarrow H$ bir homomorfizma ise aşağıdaki şartlar sağlanır.

- (i) G nin birim elemanı e ve H birim elemanı e_0 ise $f(e) = e_0$,
- (ii) Her $a \in G$ için $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$ " (Bağırılmaz, 2015).

İspat. " (i) Her $a \in G$ için

$$\begin{aligned}
 f(a) &= f(ae) = f(a)f(e) = f(a) = f(a)f(e) \\
 &= (a)^{-1}f(a) = f(a)^{-1}f(a)f(e) \\
 &= e_0 = e_0f(e) \\
 &= f(e) = e_0.
 \end{aligned}$$

(ii) Her $a \in G$ için

$$\begin{aligned}
 f(a)f(a^{-1}) &= f(aa^{-1}) = f(e) = e_0 \\
 f(a^{-1})f(a) &= f(a^{-1}a) = f(e) = e_0 \\
 [f(a)]^{-1} &= f(a^{-1}). "
 \end{aligned}$$

Tanım 2.7. " Bir homomorfizma, bire-bir ise buna monomorfizma olarak adlandırılır. Eğer örten ise bu epimorfizma olarak adlandırılır. Hem örten hem de birebir ise izomorfizma olarak adlandırılır" (Çallıalp, 2013).

Teorem 2.7. " G ve H iki grup, $f: G \rightarrow H$ bir homomorfizma, $G_1 \subseteq G$ ve $H_1 \subseteq H$ olsun. Bu durumda

- (i) $G_1 \leq G$ ise $f(G_1) \leq H$,
- (ii) $H_1 \leq H$ ise $f^{-1}(H_1) \leq G$,
- (iii) f örten ve $G_1 \trianglelefteq G$ ise $f(G_1) \trianglelefteq H$,
- (iv) $H_1 \trianglelefteq H$ ise $f^{-1}(H_1) \trianglelefteq G$ dir" (Bağırılmaz, 2015).

İspat. "(i) $a, b \in G_1$ için $f(a), f(b) \in f(N)$ olsun. $ab^{-1} \in N$ olduğundan

$$f(ab^{-1}) = f(a)f(b^{-1}) = f(a)f(b)^{-1} \in f(G_1)$$

elde edilir. Dolayısıyla $f(G_1) \leq H$ dir.

(ii) $f^{-1}(H_1) = \{a \in G: f(a) \in H_1\}$ olduğundan her $a, b \in f^{-1}(H_1)$ için $f(a), f(b) \in H_1$ dir. Ayrıca $H_1 \leq H$ olduğundan

$$f(a)f(b)^{-1} = f(a)f(b^{-1}) = f(ab^{-1}) \in H_1$$

olur. Buradan $ab^{-1} \in f^{-1}(H_1)$ bulunur.

(iii) f örten ve $G_1 \trianglelefteq G$ olsun. (i) den $f(G_1) \leq H$ dir. Şimdi normal alt grup olduğunu gösterelim.

$g \in G_2$ ve $f(a) \in f(G_1)$ olsun. f örten olduğundan $g \in G_2$ için $f(b) = g$ olacak biçimde $\exists b \in G$ vardır. Buradan

$$gf(a)g^{-1} = f(b)f(a)f(b)^{-1} = f(b)f(a)f(b^{-1}) = f(bab^{-1})$$

bulunur. $G_1 \trianglelefteq G$ olduğundan, $bab^{-1} \in N$ ve $gf(a)g^{-1} \in f(G_1)$ elde edilir.

(iv) $H_1 \trianglelefteq H$ olsun. (ii) den $f^{-1}(H_1) \leq G$ dir. Şimdi $f^{-1}(H)$ alt grubunun normal alt grup olduğu gösterilmelidir.

Her $a \in G$ ve $b \in f^{-1}(H_1)$ için,

$$f(aba^{-1}) = f(a)f(b)f(a^{-1}) = f(a)f(b)f(a)^{-1}$$

yazılabilir. $H_1 \trianglelefteq H$ ve $f(b) \in H_1$ olduğundan $f(aba^{-1}) \in H_1$ olur. Buradan, $f(aba^{-1}) \in H_1$ ise $aba^{-1} \in f^{-1}(H_1)$ elde edilir. Sonuç olarak $f^{-1}(H_1) \trianglelefteq G$ bulunur."

Tanım 2.8. " T ve S iki halka ve $f: T \rightarrow S$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $a, b \in T$ için

$$\begin{aligned} f(a + b) &= f(a) + f(b) \\ f(ab) &= f(a) \cdot f(b) \end{aligned}$$

şartları sağlanıyorsa f ye bir **halka homomorfizması** denir" (Çallıalp, 2013).

Teorem 2.8. " T ve S iki halka ve $f: T \rightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun. Bu durumda

$$(i) f(0_T) = 0_S,$$

$$(ii) \text{ Her } a \in T \text{ için } f(-a) = -f(a) \text{ " (Çallıalp, 2013).}$$

İspat. " (i) $f(0_T) = f(0_T + 0_T) = f(0_T) + f(0_T) \Rightarrow f(0_T) = 0_S$ elde edilir.

$$(ii) 0_S = f(0_T) = f(a + (-a)) = f(a) + f(-a) \Rightarrow f(-a) = -f(a) \text{ bulunur. "}$$

Örnek 2.11. T ve S iki halka olmak üzere her $a \in T$ için $f(a) = 0_T$ ile tanımlı $f: T \rightarrow S$ dönüşümü bir halka homomorfizmasıdır.

Her $a, b \in T$ için

$$f(a) = f(b) = f(a + b) = f(ab) = 0_S$$

olup

$$f(a + b) = 0_S = 0_S + 0_S = f(a) + f(b)$$

ve

$$f(ab) = 0_S = 0_S 0_S = f(a)f(b)$$

olur.

Örnek 2.12. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$, $a \rightarrow f(a) = \bar{a}$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Her $a, b \in \mathbb{Z}$ için

$$f(a + b) = \overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b} = f(a) + f(b)$$

ve

$$f(ab) = \overline{ab} = \bar{a} \cdot \bar{b} = f(a)f(b)$$

olduğundan f bir halka homomorfizmasıdır. Ayrıca her $\bar{a} \in \mathbb{Z}_b$ için $f(a) = \bar{a}$ olduğundan f örtendir.

Önerme 2.2. " T ve S iki halka ve $f: T \rightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun.

(i) T nin her H alt halkası için $f(H)$ de S nin bir alt halkasıdır.

(ii) S nin her K alt halkası için $f^{-1}(K)$ da T nin bir alt halkasıdır" (Çallıalp ve ark. 2009).

İspat. (i) Her $f(a), f(b) \in f(H)$, $(a, b \in H)$ için

$$f(a) - f(b) = f(a - b) \in f(H)$$

ve

$$f(a)f(b) = f(ab) \in f(H)$$

ve

$$1_s = f(1_T) \in f(H)$$

olduğundan istenen elde edilir.

(ii) Her $a, b \in f^{-1}(K)$ için $f(a), f(b) \in K$ olduğu göz önüne alınırsa

$$f(a - b) = f(a) - f(b) \in K$$

ve

$$f(ab) = f(a)f(b) \in K$$

Böylece $a - b, ab \in f^{-1}(K)$ olur. $f(1_T) = 1_s \in K$ olarak kabul ettiğimizden $1_T \in f^{-1}(K)$ ve $f^{-1}(K)$ da T nin bir alt halkasıdır.

Tanım 2.9. " F boştan farklı bir küme ve F nin kuvvet kümesi $P^*(F)$ olmak üzere $\diamond: F \times F \rightarrow P^*(F)$ bir hiperişlem olsun. Bu durumda, $(F, \diamond)$ ikilisine **hipergrupoid** denir. F nin boş olmayan iki A ve B alt kümeleri için,

$$A \diamond B = \bigcup_{a \in A, b \in B} a \diamond b = A \diamond \{x\} \text{ ve } x \diamond B = \{x\} \diamond B$$

dir" (Davvaz, Leoreanu-Fotea, 2007).

Tanım 2.10. " $(F, \diamond)$ hipergrupoidin de her $a, b, c \in F$ için

$$a \diamond (b \diamond c) = (a \diamond b) \diamond c$$

birleşme özelliği sağlanıyor ise $(F, \diamond)$ yarı hipergrup denir" (Davvaz, Leoreanu-Fotea, 2007).

Tanım 2.11. " $(F, \diamond)$ hipergrupoidinde her $a \in F$ için $aF = Fa = F$ ise $(F, \diamond)$ ye bir quasi hipergrup denir" (Davvaz, Leoreanu-Fotea, 2007).

Tanım 2.12. " $(F, \diamond)$ hipergrupoidi hem quasi hipergrup hem de yarı hipergrup ise bir hipergruptur denir" (Davvaz, Leoreanu-Fotea, 2007).

Örnek 2.13. F kümesi boştan farklı olsun. Her $a, b \in F$ için bir hiperişlem $a \diamond b = F$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(F, \diamond)$ bir hipergruptur.

Tanım 2.13. " $(F, \diamond)$ bir hipergrup ve K, F nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer $K, \diamond$ işlemi altında bir hipergrup oluşturuyorsa K ya F nin **alt hipergrubu** denir ve aşağıdaki şartlar sağlanır.

- (i) Her $a, b \in K$ için $a \diamond b \subseteq K$,
- (ii) Her $a \in K$ için $a \diamond K = K \diamond a = K$ " (Davvaz, Leoreanu-Fotea, 2007).

Aşağıda alt hipergrupların bazı türleri verilmiştir.

Tanım 2.14. " $(F, \diamond)$ hiper grubunun bir alt hipergrubu $(E, \diamond)$ olsun.

- (i) Her $c_1, c_2 \in E$ ve $x \in F$ için; $c_1 \in x \diamond c_2$ veya $c_1 \in c_2 \diamond x$ ise E ye **kapalı alt hipergrup** denir" (Davvaz, Leoreanu-Fotea, 2007).

- (ii) "Her $x, y \in F$ için; eğer $x \in E \diamond y$ veya $x \in y \diamond E$ iken sırasıyla $y \in E \diamond x$ veya $y \in E \diamond x$ ise E ye **terslenebilir alt hipergrup** denir" (Davvaz, Leoreanu-Fotea, 2007).

- (iii) "Her $x \in F$ için; $E \diamond x \cap (FE) \diamond x = \emptyset$ veya $x \diamond E \cap x \diamond (FE) = \emptyset$ ise E ye **ultrakapalı alt hipergrup** denir" (Davvaz, Leoreanu-Fotea, 2007).

- (iv) "Her $x \in F$ için; $x' \diamond x \subseteq E$ olacak şekilde $x' \in F$ varsa E ye **eşlenebilir alt hipergrup** denir" (Davvaz, Leoreanu-Fotea, 2007).

Tanım 2.15. " $(F, \diamond)$ ve $(F', \star)$ iki hipergrup olsun. Bir $f: F \rightarrow F'$ dönüşümü her $a, b \in F$ için

$$f(a \diamond b) \subseteq f(a) \star f(b)$$

sağlanıyorsa hipergrup homomorfizması olarak adlandırılır" (Fotea, 2008).

Tanım 2.16. " $e \in \Omega$ için $(\)^{-1}: \Omega \rightarrow \Omega, \diamond: \Omega \times \Omega \rightarrow P^*(\Omega)$ olmak üzere $\mathcal{M} = \langle \Omega, \diamond, e, (\)^{-1} \rangle$ olarak tanımlansın. Bu durumda her $a, b, c \in \Omega$ için aşağıdaki

aksiyomlar sağlanır.

$$(i) (a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$$

$$(ii) e \diamond a = a \diamond e = a$$

(iii) $a \in b \diamond c$ önermesi ile $b \in a \diamond c^{-1}$ ve $c \in b^{-1} \diamond a$ önermeleri denktir" (Oğuz .2020).

Örnek 2.14. $\Omega = \{1,2\}$ elemanlarından oluşan $\diamond$ hiperişlemi aşağıdaki tablodaki gibi tanımlansın:

$\diamond$	1	2
1	1	2
2	2	$\{1,2\}$

Böylece Ω bir poligruptur.

Önerme 2.3. Her grup bir poligruptur (Davvaz ve Alp, 2015).

Tanım 2.17. " D kümesi Ω nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda $e \in D$ ve $\langle D, \diamond, e, ()^{-1} \rangle$ bir poligrup ise D ye Ω 'nın alt poligrubu denir" (Davvaz ve Alp, 2015).

Tanım 2.18. " Ω nin bir alt poligrubu D olsun. Bu durumda aşağıdaki aksiyomlar sağlanır.

(i) Her $a \in \Omega$ için

$$D \diamond a = a \diamond D,$$

(ii) Her $a, b \in \Omega$ için

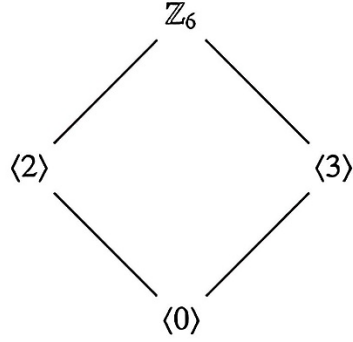
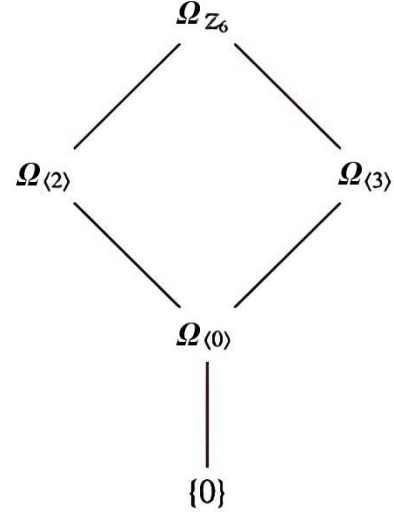
$$(D \diamond a) \diamond (D \diamond b) = D \diamond a \diamond b,$$

(iii) Her $b \in D \diamond a$ için

$$D \diamond a = D \diamond b",$$

(Davvaz ve Alp, 2015).

Örnek 2.15. " $(\mathbb{Z}_6, +)$ toplama işleminde tanımlı tamsayılar grubu ve $\Omega_{\mathbb{Z}_6}$ poligrubu gösterebiliriz. Şekil-1 de $\mathbb{Z}_6$ nin alt grupları Şekil-2 de $\Omega_{\mathbb{Z}_6}$ alt poligrupları gösterilmiştir" (Al Tahan ve ark., 2023).

Şekil-1: $\mathbb{Z}_6$ nin alt gruplarıŞekil 2: $\Omega_{\mathbb{Z}_6}$ nin alt poligrupları

Tanım 2.19. " D, Ω nin bir alt poligrubu olsun. Bu durumda her $a \in \Omega$ için $a^{-1}Da \subseteq D$ ise D ye Ω nin alt poligrubu denir ve aşağıdaki şartlar sağlanır

- (i) Her $a \in \Omega$ için $Da = aD$,
- (ii) Her $a, b \in \Omega$ için $(aD)(bD) = abD$,
- (iii) Her $b \in aD$ için $aD = bD$ " (Davvaz ve Alp, 2015).

Tanım 2.20. " $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa R bir hiperhalka olarak adlandırılır.

- (i) $(R, +)$ toplama işlemine göre bir hipergrup,
- (ii) $(R, \cdot)$ çarpma işlemine göre bir yarıhipergrup,
- (iii) Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğine sahiptir" (Saçlı, 2018).

Örnek 2.16. $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi olmak üzere $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ cebirsel yapısını ele alalım.

- (i) $(\mathbb{Z}, +)$ hipergruptur.
- (ii) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ olduğundan $(\mathbb{Z}, \cdot)$ yarı hipergruptur.

(iii) Her $a, b, c \in \mathbb{Z}$ için

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ ve } (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

şartlarını sağladığından $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ yapısı bir hiperhalkadır.

Örnek 2.17. $R = \{0,1\}$ kümesi aşağıdaki hiperişlemlerle bir hiperhalka oluşturur.

+	0	1
0	{0}	{1}
1	{1}	{0,1}

·	0	1
0	{0}	{0}
1	{0}	{1}

Tanım 2.21. $(R, +, \cdot)$ bir hiperhalka ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ alt kümesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa S ye R nin bir alt hiperhalkası denir.

- (i) $(S, +)$ toplama işlemine göre bir hipergruptur.
- (ii) $(S, \cdot)$ çarpma işlemine göre bir yarıhipergruptur.
- (iii) Çarpma işlemi toplama işlemi üzerine dağılma özelliğine sahiptir.

Önerme 2.4. " R bir hiperhalka ve S , R nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. S nin de bir hiperhalka olması için aşağıdaki şartları sağlamalıdır.

- (i) $1 \in S$,
- (ii) Her $a, b \in S$ için $a \cdot b \in S$,
- (iii) Her $a, b \in S$ için $a - b \subseteq S$ " (Davvaz, Leoreanu-Fotea, 2007).

Tanım 2.22. " $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısı bir hiperhalka olsun.

Her $a, b \in R$ için $a \cdot b = b \cdot a$ değişme özelliği sağlanıyorsa R ye değişmeli hiperhalka denir" (Ameri ve ark., 2014).

Tanım 2.23. " R bir hiperhalka ve I , R nin alt kümesi olsun. Eğer I aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa R nin bir hiperideali denir.

- (i) Her $a, b \in I$ ve $r \in R$ için $a - b \subseteq I$,
- (ii) Her $a \in I$ ve $r \in R$ için $a \cdot r \in I$ " (Davvaz, 2007).

Tanım 2.24. " $P, (R, +, \cdot)$ halkasının bir hiperideali olsun. Her $a, b \in R$ için $P \neq R$ ve $a \cdot b \in P$ olduğunda $a \in P$ ya da $b \in P$ ise P ye R nin bir asal hiperideali denir" (Davvaz, 2007).

Tanım 2.25. " R ve S iki hiperhalka ve $f: R \rightarrow S$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki şartları sağlayan f ye bir hiperhalka homomorfizması denir.

(i) Her $a, b \in R$, $f(a + b) = f(a) + f(b)$,

(ii) Her $a, b \in R$, $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$,

(iii) $f(1_R) = 1_S$ " (Çallıalp, 2013).

2.1. Kaba Kümeler

Kaba küme teorisi, belirsizlik ve eksik bilginin modellenmesine yönelik matematiksel bir yaklaşımdır ve kesin olarak sınıflandırılmayan veri kümelerinin incelenmesinde önemli bir rol oynar. Bu teori, bir kümenin kesin olarak belirlenemeyen alt ve üst sınırlarını tanımlayarak elemanların kesin veya belirsiz olma durumlarını ifade eder. Bu bölümde, kaba küme teorisinin temel kavramları, yaklaşım uzayı, alt ve üst yaklaşım kümeleri gibi temel tanımlar ele alınmakta ve bu kavramların özellikleri incelenmektedir.

Tanım 2.1.1. U sonlu elemanlardan oluşan bir küme ve $U \times U$ kümesinin bir alt kümesi olan V , U kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun U kümesi evrensel küme ve V bağıntısı ayırt edilemezlik bağıntısı olarak adlandırılır. (U, V) ikilisine ise yaklaşım uzayı adı verilir (Suraj, 2004).

Tanım 2.1.2. " (U, V) yaklaşım uzayı ve U nun boştan farklı bir alt kümesi A olsun. Bu durumda

$$V_\tau(A) = \bigcup_{a \in U} \{V(a) : V(a) \subseteq X\}$$

kümesi (U, V) yaklaşım uzayında X kümesinin alt yaklaşımı olarak adlandırılır" (Liang, 2009).

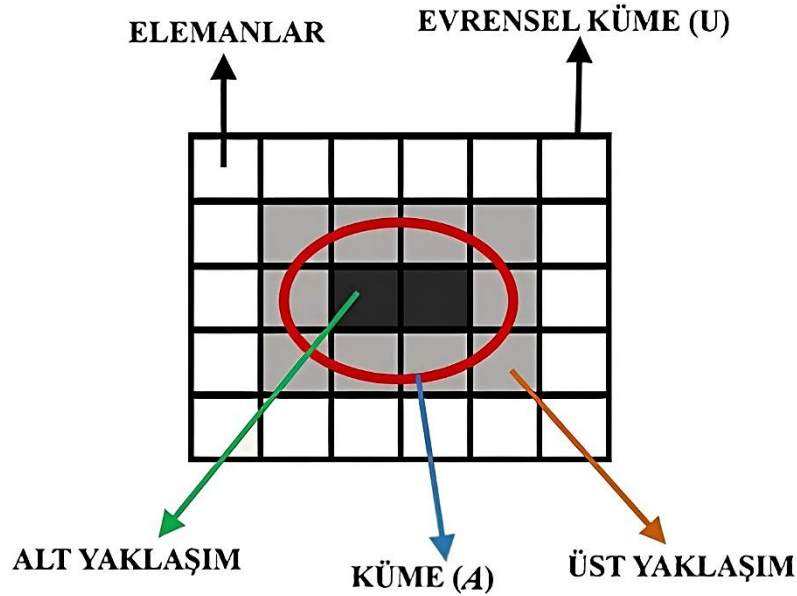
Tanım 2.1.3. " (U, V) yaklaşım uzayı ve U nun boştan farklı bir alt kümesi A olsun. Bu durumda

$$V^{\tau}(A) = \bigcup_{a \in U} \{V(a) : V(a) \cap A \neq \emptyset\}$$

kümesi (U, V) yaklaşım uzayında A kümesinin üst yaklaşımı olarak adlandırılır. X 'in üst yaklaşımı, denklik sınıfı ile A nın kesişimi boş olmayan elemanların oluşturduğu kümedir" (Liang, 2009).

$V^{\tau}(A)$ A kümesinde olma olasılığı bulunan elemanlardan oluşur. A kümesinin üst yaklaşımında olan bir eleman A kümesinde olmayabilir.

Bir kümenin alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki şekilde gösterilebilir.



Şekil 3: X kümesinin alt ve üst yaklaşımı

Aşağıdaki alt ve üst yaklaşımın bazı temel özellikleri verilmiştir.

Teorem 2.1.1. (U, V) yaklaşım uzayı ve $\emptyset \neq A, B \subseteq U$ olsun. Bu durumda,

- (1) $V_{\tau}(A) \subseteq A \subseteq V^{\tau}(A)$,
- (2) $V_{\tau}(\emptyset) = \emptyset = V^{\tau}(\emptyset)$,
- (3) $A \subseteq B$ ise $V_{\tau}(A) \subseteq V_{\tau}(B)$ ve $V^{\tau}(A) \subseteq V^{\tau}(B)$,
- (4) $V_{\tau}(V_{\tau}(A)) = V_{\tau}(A)$,
- (5) $V^{\tau}(V^{\tau}(A)) = V^{\tau}(A)$,

- (6) $V^\tau(V_\tau(A)) = V_\tau(A)$,
- (7) $V_\tau(V^\tau(A)) = V^\tau(A)$,
- (8) $V_\tau(A) = (V^\tau(A^c))^c$,
- (9) $V^\tau(A) = (V_\tau(A^c))^c$,
- (10) $V_\tau(A \cap B) \subseteq V_\tau(A) \cap V_\tau(B)$,
- (11) $V^\tau(A \cap B) \subseteq V^\tau(A) \cap V^\tau(B)$,
- (12) $V_\tau(A \cup B) = V_\tau(A) \cup V_\tau(B)$,
- (13) $V^\tau(A \cup B) = V^\tau(A) \cup V^\tau(B)$.

Tanım 2.1.4. " (U, V) yaklaşım uzayı olmak üzere $\cdot : G \times G \rightarrow V^\tau(G)$ işlemi U üzerinde tanımlanmış işlem olsun. Bu durumda bir $G \subseteq U$ alt kümesi aşağıdaki koşulları sağlıyor ise G ye bir kaba grup denir.

- (i) Her $a, b \in G$ için $a \cdot b \in V^\tau(G)$,
- (ii) Her $a, b, c \in G$ için $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ birleşme özelliği $V^\tau(G)$ sağlansın,
- (iii) Her $a \in G$ için $a \cdot e = e \cdot a = a$ şartını sağlayan $e \in V^\tau(G)$ birim elemanı vardır.
- (iv) Her $a \in G$ için $a \cdot b = b \cdot a = e$ en az bir $y \in G$ vardır" (Biswas ve Nanda, 1994).

Teorem 2.1.2. "Bir kaba grup için aşağıdaki özellikler geçerlidir.

- (i) Her a elemanı için, a nın tersinin tersi kendisine eşittir yani $(a^{-1})^{-1} = a$.
- (ii) İki elemanın çarpımının tersi, bu elemanların terslerinin ters sırayla çarpımıdır. $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ " (Biswas ve Nanda, 1994).

Tanım 2.1.5. " G bir kaba grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. Bu durumda H , G 'de tanımlı işleme göre bir kaba grup özelliği taşıyorsa H kümesine G nin kaba alt grubu denir" (Biswas ve Nanda, 1994).

Teorem 2.1.3. " G bir kaba grup ve $\emptyset \neq H \subseteq G$ olsun. H nin bir kaba alt grup olması için

- (i) Her $a, b \in H$ için $a \cdot b \in V^\tau(H)$,
- (ii) Her $a \in H$ için $a^{-1} \in H$ olmalıdır" (Biswas ve Nanda, 1994).

Teorem 2.1.4. " G bir kaba grup ve H_1 ve H_2 , G nin kaba alt grupları olsun. Bu durumda $V^\tau(H_1) \cap V^\tau(H_2) = V^\tau(H_1 \cap H_2)$ ise $H_1 \cap H_2$, G nin bir kaba alt grubudur" (Miao ve ark., 2005).

Teorem 2.1.5. " G bir kaba grup olsun. K , G 'nin bir kaba alt grubu ve H de G 'nin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere H , K 'nin kaba alt grubu ise H ayrıca G 'nin de kaba alt grubudur" (Yan ve ark., 2008).

Tanım 2.1.6. " (U, V) bir yaklaşım uzayı ve $G \subseteq U$ olmak üzere H de G 'nin bir kaba alt grubu olsun. Bu durumda G kaba grubunun elemanları olan a ve b arasında aşağıda gibi bir " $\sim$ " bağıntısı

$$a \sim b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H \cup \{e\}.$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır" (Yan ve ark., 2008).

Tanım 2.1.7. " (U_1, V_1) ve (U_2, V_2) , iki yaklaşım uzayı ve " $\cdot$ ", " $\circ$ " sırasıyla U_1, U_2 üzerinde birer ikili işlem ve $G_1 \subseteq U_1$ ve $G_2 \subseteq U_2$ iki kaba grup olsun. Her $a, b \in V^\tau(G_1)$ için $f(a \cdot b) = f(a) \circ f(b)$ ve örten bir $f: V^\tau(G_1) \rightarrow V^\tau(G_2)$ fonksiyonu f ye kaba homomorfizm, G_1 ve G_2 ye kaba homomorfik gruplar denir" (Miao ve ark., 2005).

Teorem 2.1.6. " $G_1 \subseteq U_1$ ve $G_2 \subseteq U_2$ homomorfik olan iki kaba grup olsun. Bu durumda G_1 değişmeli kaba grup ise G_2 de değişmeli kaba gruptur" (Miao ve ark., 2005).

Teorem 2.1.7. " $G_1 \subseteq U_1$ ve $G_2 \subseteq U_2$ iki kaba homomorfik grup olmak üzere $e_1 \in G_1$ ve $e_2 \in G_2$ olsun. Bu durumda $f(e_1) = e_2$ ve her $a \in G_1$ için $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ dir" (Miao ve ark., 2005).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, cebirsel hiperyapılar üzerinde kaba küme teorisinin uygulanabilirliği ele alınmakta ve hipergruplar, poligruplar ve hiperhalkalar üzerinde kaba yaklaşım operatörleri incelenmektedir. Kaba hipergruplar, kaba poligruplar ve kaba hiperhalkalar incelenerek bu yapıların temel özellikleri ve klasik cebirsel hiperyapılarla olan ilişkileri çalışılmıştır.

3.1. Hipergruplar Üzerinde Kaba Yaklaşımlar

Tanım 3.1.1. " $(H, \cdot)$ bir hipergrup, $A \subseteq H$ ve S tersinir bir alt hipergrup olsun. $S_\tau(A)$ ve $S^\tau(A)$ aşağıdaki gibi tanımlanır

$$S_\tau(A) = \{x \in H \mid xS \subseteq A\}$$

$$S^\tau(A) = \{x \in H \mid xS \cap A \neq \emptyset\} \text{ (Fotea, 2008).}$$

$S_\tau(A)$ kümesi A' nın S' ye göre **alt yaklaşımı** olarak adlandırılırken, xS kümesinin A kümesinin bir alt kümesi olup tüm $x \in H$ elemanlarından oluşan kümedir. $S^\tau(A)$ kümesi A' nın S' ye göre **üst yaklaşımı** olarak adlandırılır ve xS kümesi ile A kümesinin kesişiminin boş olmayan tüm $x \in H$ elemanlarından oluşan kümedir.

Alt ve üst yaklaşımların bazı temel özellikleri verilmiştir.

Teorem 3.1.1. " $(H, \cdot)$ bir hipergrup, $A, B \subseteq H$ ve S tersinir bir alt hipergrup olsun. Bu durumda

- (1) $S_\tau(A) \subseteq A \subseteq S^\tau(A)$,
- (2) $S_\tau(\emptyset) = \emptyset = S^\tau(\emptyset)$,
- (3) $A \subseteq B$ ise $S_\tau(A) \subseteq S_\tau(B)$ ve $S^\tau(A) \subseteq S^\tau(B)$,
- (4) $S_\tau(S_\tau(A)) = S_\tau(A)$,
- (5) $S^\tau(S^\tau(A)) = S^\tau(A)$,
- (6) $S^\tau(S_\tau(A)) = S_\tau(A)$,
- (7) $S_\tau(S^\tau(A)) = S^\tau(A)$,
- (8) $S_\tau(A) = (S^\tau(A^c))^c$,
- (9) $S^\tau(A) = (S_\tau(A^c))^c$,

$$(10) S_\tau(A \cap B) = S_\tau(A) \cap S_\tau(B),$$

$$(11) S^\tau(A \cap B) \subseteq S^\tau(A) \cap S^\tau(B),$$

$$(12) S_\tau(A \cup B) \supseteq S_\tau(A) \cup S_\tau(B),$$

$$(13) S^\tau(A \cup B) = S^\tau(A) \cup S^\tau(B),$$

$$(14) S_\tau(xS) = S^\tau(xS), \text{ her } x \in H. \text{ " (Fotea, 2008).}$$

Tanım 3.1.2. $(H, \cdot)$ bir hipergrup ve $A \subseteq H$ olsun. $S_\tau(A) = A = S^\tau(A)$ ise H hiper grubunun A alt kümesi S ye göre tanımlanabilir (Fotea, 2008).

Sonuç 3.1.1. Her $x \in H$ için $S_\tau(A)$, $S^\tau(A)$ ve xS , S ye göre tanımlanabilir (Fotea, 2008).

Alt ve üst yaklaşımın bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.1.2. (i) $A \subseteq H$ ve $A \neq \emptyset$ ise $S^\tau(A) = H$,
(ii) $A \subseteq H$ ve $A \neq H$ ise $S_\tau(A) = \emptyset$ (Fotea, 2008).

Teorem 3.1.3. S normal tersinir alt hipergrup ve A, B kümeleri $(H, \cdot)$ hiper grubunun boş olmayan alt kümeleri ise

$$S^\tau(A)S^\tau(B) = S^\tau(AB)$$

dir (Fotea, 2008).

Teorem 3.1.4. S normal tersinir bir alt hipergrup ve A, B kümeleri $(H, \cdot)$ hiper grubunun boş olmayan alt kümeleri ise

$$S_\tau(A)S_\tau(B) \subseteq S_\tau(AB)$$

dir (Fotea, 2008).

Teorem 3.1.5. S terslenebilir bir alt hipergrup ve S^* bir $(H, \cdot)$ hiper grubunun kapalı alt hiper grubu olsun. Bu durumda

$$S_\tau(S^*) \neq \emptyset \text{ ve } S \subseteq S^* \text{ ise } S_\tau(S^*) = S^*$$

dir (Fotea, 2008).

Teorem 3.1.6. " S terslenebilir bir alt hipergrup ve S^* bir $(H, \cdot)$ hiper grubunun bir kapalı alt hiper grubu olsun. Bu durumda

- (i) $S \subseteq S^*$ ise $S^\tau(S^*) = S^*$,
- (ii) $S^* \subseteq S$ ise $S^\tau(S^*) = S$,
- (iii) $S \not\subseteq S^*$ ve $S^* \not\subseteq S$ ise $S \cup S^* \subseteq S^\tau(S^*)$ dir" (Fotea, 2008).

Teorem 3.1.7. S_1 ve S_2 iki normal terslenebilir alt hipergrup ve K, H nin bir alt hiper grubu olsun. Bu durumda

- (i) $S_1^\tau(K)S_2^\tau(K) = (S_1S_2)^\tau(K)$,
- (ii) $S_{1\tau}(K)S_{2\tau}(K) = (S_1S_2)_\tau(K)$ dır (Fotea, 2008).

3.2. Poligruplar Üzerinde Kaba Yaklaşımlar

Tanım 3.2.1. " N, Ω poligrubunun normal alt grubu ve A, Ω nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. A nın N ye göre alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki gibi tanımlanır" (Davvaz, 2006).

$$N_\tau(A) = \{a \in \Omega \mid aN \subseteq A\}$$

ve

$$N^\tau(A) = \{a \in \Omega \mid aN \cap A \neq \emptyset\}.$$

Önerme 3.2.1. N, Ω poligrubunun normal bir alt poligrubu olsun. Bu durumda A, Ω nin bir alt poligrubu ve $N \subseteq A$ ise

$$N_\tau(A) \subseteq A/N \subseteq N^\tau(A)$$

dır (Davvaz, 2006).

Önerme 3.2.2 N, Ω poligrubunun bir normal alt poligrubu olsun. A, Ω nin bir alt poligrubu ise $N^\tau(A)$ üst yaklaşımı Ω/A poligrubunun bir alt poligrubudur (Davvaz, 2006).

Önerme 3.2.3. N, Ω poligrubunun bir normal alt poligrubu olsun. A, Ω nin bir alt poligrubu ve $N \subseteq A$ ise $N_\tau(A), \Omega/A$ poligrubunun bir alt poligrubudur (Davvaz,

2006).

Tanım 3.2.2. N, Ω poligrubunun bir normal alt poligrubu ve $A = (A_L, A_U)$, Ω/N 'de bir kaba küme olsun. A_L ve A_U , Ω/N 'nin alt poligrubu ise $A = (A_L, A_U)$ bir faktör kaba poligrup olarak adlandırılır (Davvaz, 2006).

Teorem 3.2.1. N, Ω poligrubunun bir normal alt poligrubu olsun. Bu durumda A, N 'yi içeren Ω nin bir alt poligrubu ise $N(A)$ bir faktör kaba poligruptur (Davvaz, 2006).

4.3. Hiperhalkalar Üzerinde Kaba Yaklaşımlar

Tanım 3.3.1. I, R nin bir normal hiperideali ve A, R nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$I_\tau(A) = \{x \in R \mid x + I \subseteq A\}$$

ve

$$I^\tau(A) = \{x \in R \mid (x + I) \sim A\}$$

kümeleri, sırasıyla normal hiperideal I ya göre A kümesinin alt ve üst yaklaşımı olarak adlandırılır (Davvaz, 2009).

Her $A \subseteq R$ ve $x \in R$ için $I_\tau(A)$, $I^\tau(A)$ ve $x + I$ tanımlanabilir kümelerdir.

Önerme 3.3.1. I, R nin bir normal hiperideali olmak üzere A ve B, R nin boş olmayan alt kümeleri olsun. Bu durumda

$$(i) I^\tau(A) \cdot I^\tau(B) = I^\tau(A \cdot B),$$

$$(ii) I_\tau(A) \cdot I_\tau(B) \subseteq I_\tau(A \cdot B) \text{ (Davvaz, 2009).}$$

İspat. (i) $x \in I^\tau(A) \cdot I^\tau(B)$ olsun. Bu durumda $x \in \sum_{i=1}^b a_i b_i$ olacak şekilde bazı $a_i \in I^\tau(A)$ ve $b_i \in I^\tau(B)$ vardır. Buradan $(a_i + I) \sim A$ ve $(b_i + I) \sim B$ olur. Bu nedenle $x_i \in (a_i + I) \cap A$ ve $y_i \in (b_i + I) \cap B$ olacak şekilde $1 \leq i \leq b$ vardır. Dolayısıyla, $\sum_{i=1}^b x_i y_i \subseteq A \cdot B$ ve $\sum_{i=1}^b x_i y_i \subseteq \sum_{i=1}^b a_i b_i + I$ olur. Bu ise $(x + I) \sim A \cdot B$ olduğunu gösterir ve $x \in I^\tau(A \cdot B)$ olur. Sonuç olarak, $I^\tau(A) \cdot I^\tau(B) \subseteq I^\tau(A \cdot B)$. Tersine, $x \in I^\tau(A \cdot B)$ olsun. Bu durumda $(x + I) \sim A \cdot B$ olur. Bu nedenle $y \in x + I$

ve $y \in A \cdot B$ olacak şekilde bir y vardır. Böylece, $y \in \sum_{i=1}^b a_i b_i$ olacak şekilde $a_i \in A$ ve $b_i \in B$ bulunur. Ayrıca $x \in y + I \subseteq \sum_{i=1}^b a_i b_i + I = \sum_{i=1}^b (a_i + I)(b_i + I)$ olur. Böylece $x_i \in a_i + I$ ve $y_i \in b_i + I$ olacak şekilde $x \in \sum_{i=1}^b x_i y_i$ bulunur. Buradan $x_i \in (a_i + I) \cap A$ ve $y_i \in (b_i + I) \cap B$ olup $x_i \in I^\tau(A)$ ve $y_i \in I^\tau(B)$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak $x \in I^\tau(A) \cdot I^\tau(B)$ olup $I^\tau(A \cdot B) \subseteq I^\tau(A) \cdot I^\tau(B)$ elde edilir.

(ii) $x \in I_\tau(A) \cdot I_\tau(B)$ olsun. Bu durumda $x \in \sum_{i=1}^b a_i b_i$ olacak şekilde bazı $a_i \in I_\tau(A)$ ve $b_i \in I_\tau(B)$ vardır. Buradan $a_i + I \subseteq A$ ve $b_i + I \subseteq B$ elde edilir. $\sum_{i=1}^b (a_i + I)(b_i + I) \subseteq A \cdot B$ olduğundan $x + I \subseteq \sum_{i=1}^b a_i b_i + I = \sum_{i=1}^b (a_i + I)(b_i + I) \subseteq A \cdot B$ olup $x \in I_\tau(A \cdot B)$ bulunur.

Örnek 3.3.1. $R = \mathbb{Z}_{12}$, $I = \{0,4,8\}$, $A = \{0,2,4,6,10\}$ ve $B = \{0,1,4,8\}$ olmak üzere

$$I_\tau(A) = \{2,6,10\},$$

$$I_\tau(B) = \{0,4,8\},$$

$$I_\tau(A) \cdot I_\tau(B) = \{0,4,8\},$$

$$A \cdot B = \{0,2,4,6,8,10\},$$

$$I_\tau(A \cdot B) = \{0,2,4,6,8,10\}.$$

olup $I_\tau(A) \cdot I_\tau(B) \subseteq I_\tau(A \cdot B)$ (Davvaz, 2009).

Önerme 3.3.2. I, R 'nin bir normal hiperideali olmak üzere A ve B, R nin boş olmayan alt kümeleri olsun. Bu durumda

$$(i) I^\tau(A) + I^\tau(B) = I^\tau(A + B),$$

$$(ii) I_\tau(A) + I_\tau(B) \subseteq I_\tau(A + B) \text{ (Davvaz, 2009).}$$

Örnek 3.3.2. $R = \mathbb{Z}_{12}$, $I = \{0,6\}$, $A = \{0,1,2,5,6,8\}$ ve $B = \{0,3,4,6,9\}$ olsun. Bu durumda

$$I_\tau(A) = \{0,2,6,8\}$$

$$I_\tau(B) = \{0,3,6,9\}$$

$$I_{\tau}(A) + I_{\tau}(B) = \{0,2,3,5,6,8,9,11\}$$

$$I_{\tau}(A + B) = \{0,2,3,4,5,6,8,9,10,11\}$$

olup $I_{\tau}(A) + I_{\tau}(B) \subseteq I_{\tau}(A + B)$ (Davvaz, 2009).

Önerme 3.3.3. I ve J, R nin iki normal hiperideali, $I \subseteq J$ ve A, R nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Bu durumda

- (i) $J_{\tau}(A) \subseteq I_{\tau}(A)$,
- (ii) $I^{\tau}(A) \subseteq J^{\tau}(A)$ (Davvaz, 2009).

Sonuç 3.3.1. I ve J, R nin iki normal hiperideali ve A, R 'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Bu durumda

- (i) $I_{\tau}(A) \cap J_{\tau}(A) \subseteq [I \cap J]_{\tau}(A)$,
- (ii) $[I \cap J]^{\tau}(A) \subseteq I^{\tau}(A) \cap J^{\tau}(A)$ (Davvaz, 2009).

Önerme 3.3.4. I ve J, R nin iki normal hiperideali ve A, R nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Bu durumda

- (i) A, R nin bir alt hiperhalkası ve $I, J \subseteq A$ ise $I_{\tau}(A) \cap J_{\tau}(A) = [I \cap J]_{\tau}(A)$,
- (ii) $I^{\tau}(A) = A$ veya $J^{\tau}(A) = A$ ise $[I \cap J]^{\tau}(A) = I^{\tau}(A) \cap J^{\tau}(A)$ (Davvaz, 2009).

İspat. (i) $x \in [I \cap J]_{\tau}(A)$ olsun. Bu durumda $x \in A$ dır. Dolayısıyla $x \in A$, $I \subseteq A$ ve A, R nin bir alt hiperideali olduğundan, $x + I \subseteq A$ elde edilir ki $x \in I_{\tau}(A)$ olur. Benzer şekilde, $x \in J_{\tau}(A)$ elde edilir ve dolayısıyla $x \in I_{\tau}(A) \cap J_{\tau}(A)$.

- (ii) $I^{\tau}(A) = A$ olduğunu varsayalım bu durumda

$$I^{\tau}(A) \cap J^{\tau}(A) = A \cap J^{\tau}(A) = A.$$

Ayrıca $A \subseteq [I \cap J]^{\tau}(A)$ olduğu açıktır. Böylece $I^{\tau}(A) \cap J^{\tau}(A) \subseteq [I \cap J]^{\tau}(A)$ bulunur.

Önerme 3.3.5. I, R nin bir normal hiperideali ve A, R nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Bu durumda

- (i) $I_{\tau}(A^c) = (I^{\tau}(A))^c$,
(ii) $I^{\tau}(A^c) = (I_{\tau}(A))^c$ (Davvaz, 2009).

Önerme 3.3.6. I, R 'nin normal bir hiperideali ve A, R 'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Bu durumda

- (i) $I_{\tau}(-A) = -I_{\tau}(A)$,
(ii) $I^{\tau}(-A) = -I^{\tau}(A)$.

İspat. (i) $x \in I_{\tau}(-A) \Leftrightarrow x + I \subseteq -A \Leftrightarrow -x - I \subseteq A$
 $\Leftrightarrow -x + I \subseteq A$
 $\Leftrightarrow x \in -I_{\tau}(A)$.

Böylece $I_{\tau}(-A) = -I_{\tau}(A)$.

- (ii) $x \in I^{\tau}(-A) \Leftrightarrow (x + I) \sim (-A) \Leftrightarrow (-x - I) \sim A$
 $\Leftrightarrow (-x + I) \sim A$
 $\Leftrightarrow -x \in I^{\tau}(A)$
 $\Leftrightarrow x \in -I^{\tau}(A)$

Sonuç olarak,

$$I^{\tau}(-A) = -I^{\tau}(A).$$

Önerme 3.3.7. I ve J, R nin normal hiperidealleri olsun. Bu durumda $I^{\tau}(J) = J^{\tau}(I)$ (Davvaz, 2009).

İspat. $x \in I^{\tau}(J)$ olsun. Bu durumda $(x + I) \sim J$ dir. Buradan $y \in (x + I) \cap J$ olacak şekilde bir y vardır. Dolayısıyla $y \in J$ ve $y \in x + I$. $y \in x + I$ olduğundan $-y \in -x + I$ ve olup $x - y \subseteq I$ elde edilir. Ayrıca, $y \in J$ olduğundan $-y \in J$ elde edilir. Böylece $x - y \subseteq x + J$ olur. Bu durumda $(x + J) \sim Ax \in J^{\tau}(I)$ bulunur. Böylece $I^{\tau}(J) \subseteq J^{\tau}(I)$ olur. Benzer şekilde $J^{\tau}(I) \subseteq I^{\tau}(J)$ elde edilir.

Önerme 3.3.8. I, R nin normal bir hiperideali olsun. Bu durumda her $a, b \in R$ olmak üzere her $c \in a + b$ için

$$a + b + I = c + I$$

dir (Davvaz, 2009).

İspat. $c \in a + b$ olsun. Bu durumda $c + I \subseteq a + b + I$ olduğu açıktır. $x \in a + b + I$ olsun. Bu durumda $a \subseteq x + I - b$ ve dolayısıyla $a + b \subseteq x + I - b + b$ elde edilir. I normal olduğundan, $a + b \subseteq x - b + I + b \subseteq x + I$ bulunur. Böylece her $c \in a + b$ için $c \in x + I$ olup $x \in c + I$ dir.

Önerme 3.3.9. I, R nin bir normal hiperideali ve J, R nin bir hiperideali olsun. Bu durumda $I^\tau(J), R$ nin bir hiperidealidir (Davvaz, 2009).

İspat. $a, b \in I^\tau(J)$ ve $r \in R$ olsun. Bu durumda $(a + I) \sim J$ ve $(b + I) \sim J$. Buradan $x \in (a + I) \cap J$ ve $y \in (b + I) \cap J$ olacak şekilde x, y vardır. J, R nin bir hiperideali olduğundan $x - y \subseteq J$ ve $x - y \subseteq (a + I) - (b + I) = a - b + I$ elde edilir. Önerme 3.3.8'e göre her $c \in a - b$ için $x - y \subseteq c + I$. Bu nedenle $(c + I) \sim J$ olup $c \in I^\tau(J)$. Ayrıca, $rx \in J$ ve $rx \in r(a + I) = ra + I$ elde edilir. Böylece $(ra + I) \sim J$ olup $ra \in I^\tau(J)$ bulunur. Sonuç olarak, $I^\tau(J), R$ nin bir hiperidealidir.

Önerme 3.3.10 I, R nin normal bir hiperideali ve J, R nin bir alt hipergrubu olsun. Bu durumda $I_\tau(J) \neq \emptyset$ ise $I \subseteq J$ dir (Davvaz, 2009).

İspat. $I_\tau(J) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda, $x \in I_\tau(J)$ olacak şekilde bir x vardır ve $x + I \subseteq J$ olur. $0 \in I$ olduğundan $x + 0 = x \in J$ ve dolayısıyla $-x \in J$ elde edilir. Bu nedenle,

$$I = -x + x + I \subseteq -x + J \subseteq J$$

olup $I \subseteq J$ bulunur.

Önerme 3.3.11. I, R nin bir normal hiperideali ve J, R nin bir alt hipergrubu olsun. Bu durumda $I_\tau(J)$ boş olmayan bir küme ise $I_\tau(J) = J$ dir.

İspat. $I_\tau(J) \subseteq J$ olsun $J \subseteq I_\tau(J)$ olduğunu göstereceğiz. b, J nin herhangi bir elemanı olsun. Bu durumda Önerme 3.3.10 a göre $I \subseteq J$ elde edilir. J bir alt hipergrup olduğundan $b + I \subseteq J$ olup $b \in I_\tau(J)$ bulunur. Böylece $I_\tau(J) = J$ dir.

Sonuç 3.3.2. I, R nin normal bir hiperideali ve J, R nin bir hiperideali olsun. Bu durumda $I \subseteq J$ ise $I_\tau(J)$ ve $I^\tau(J), R$ nin hiperidealleridir (Davvaz, 2009).

Teorem 3.3.1. I, R nin bir normal hiperideali ve P, R nin asal bir hiperideali olmak üzere $I \subseteq P$ olsun. Bu durumda $I_\tau(P)$ ve $I^\tau(P), R$ nin asal hiperidealleridir (Davvaz, 2009).

İspat. $I^\tau(P)$ R nin bir asal ideali olduğunu göstermek yeterlidir. $x, y \in R$ için $xy \in I^\tau(P)$ olsun. Bu durumda $(xy + I) \sim P$. Böylece $a \in I$ olacak şekilde $(xy + a) \sim P$ olup $b \in P$ ve $b \in xy + a$ elde edilir. Böylece $xy \in b - a \subseteq P + I \subseteq P$ bulunur. P asal olduğundan, $x \in P$ veya $y \in P$ olur. Böylece $(x + I) \sim P$ veya $(y + I) \sim P$ olup $x \in I^\tau(P)$ veya $y \in I^\tau(P)$ dir.

Sonuç 3.3.3. I ve J, R nin normal hiperidealler ise $I + J$ kümesi de bir normal hiperidealdir (Davvaz, 2009).

Önerme 3.3.12. I ve J, R nin normal hiperidealleri ve A, R nin bir alt hiperhalkası olsun. Bu durumda

- (i) $I^\tau(A) + J^\tau(A) = [I + J]^\tau(A)$,
- (ii) $I_\tau(A) + J_\tau(A) = [I + J]_\tau(A)$ (Davvaz, 2009).

İspat. (i) $I \subseteq I + J$ ve $J \subseteq I + J$ olduğundan, $I^\tau(A) \subseteq [I + J]^\tau(A)$ ve $J^\tau(A) \subseteq [I + J]^\tau(A)$ elde edilir. Bu nedenle $I^\tau(A) + J^\tau(A) \subseteq [I + J]^\tau(A)$. Tersine, $x \in [I + J]^\tau(A)$ olsun. Bu durumda $(x + I + J) \sim A$. Buradan, $a \in I$ olacak şekilde $(x + a + J) \sim A$ vardır. Bu ise $b \in x + a$ ve $b \in J^\tau(A)$ olacak şekilde bir b olduğunu gösterir. Burada A bir alt hiperhalka ve $0 \in (-a + I) \cap A$ olduğundan

$$x \in b - a = -a + b \in I^\tau(A) + J^\tau(A)$$

dir.

(ii) $I \subseteq I + J$ ve $J \subseteq I + J$ olduğundan $[I + J]_\tau(A) \subseteq I_\tau(A)$ ve $[I + J]_\tau(A) \subseteq J_\tau(A)$ elde edilir. Dolayısıyla $[I + J]_\tau(A) \subseteq I_\tau(A) + J_\tau(A)$ dir. Ayrıca $x \in I_\tau(A) + J_\tau(A)$ olsun. Bu durumda, $x \in a + b$ olacak şekilde $a \in I_\tau(A)$ ve $b \in J_\tau(A)$ vardır. Buradan $a + I \subseteq A$ ve $b + J \subseteq A$ dır. Böylece

$$x + I + J \subseteq a + b + I + J = a + I + b + J \subseteq A + A = A$$

olup $x \in [I + J]_\tau(A)$ bulunur.

Önerme 3.3.13. I ve J, R nin normal hiperidealleri ve A, R nin bir alt hiperhalkası olsun. Bu durumda

- (i) $I^\tau(A) \cdot J^\tau(A) \subseteq [I + J]^\tau(A)$,
- (ii) $I_\tau(A) \cdot J_\tau(A) = [I + J]_\tau(A)$ (Davvaz, 2009).

İspat. (i) $x \in I^\tau(A) \cdot J^\tau(A)$ olsun. Bu durumda $x \in \sum_{i=1}^b a_i b_i$ olacak şekilde $a_i \in I^\tau(A)$ ve $b_i \in J^\tau(A)$ vardır. Böylece $(a_i + I) \sim A$ ve $(b_i + J) \sim A$. Ayrıca $x_i, y_i \in R$ olacak şekilde $x_i \in (a_i + I) \cap A$ ve $y_i \in (b_i + J) \cap A$ vardır. A, R 'nin bir alt hiperhalkası olduğundan, $\sum_{i=1}^b x_i y_i \subseteq A$ dir.

$$x \in \sum_{i=1}^b a_i b_i \subseteq \sum_{i=1}^b x_i y_i + I + J \subseteq A + I + J$$

olduğundan $a \in A$ olacak şekilde $x \in a + I + J$ veya $a \in x + I + J$ vardır.

Böylece $(x + I + J) \sim A$ olup $x \in [I + J]^\tau(A)$ elde edilir.

- (ii) $x \in I_\tau(A) \cdot J_\tau(A)$ olsun. Bu durumda $x \in \sum_{i=1}^b a_i b_i$ olacak şekilde $a_i \in I_\tau(A)$ ve $b_i \in J_\tau(A)$ vardır. Böylece $a_i + I \subseteq A$ ve $b_i + J \subseteq A$ dir. Ayrıca

$$\sum_{i=1}^b (a_i + I)(b_i + J) \subseteq A \text{ veya } \sum_{i=1}^b a_i b_i + I + J \subseteq A$$

olup $\sum_{i=1}^b a_i b_i \subseteq [I + J]_\tau(A)$ elde edilir ve dolayısıyla $x \in [I + J]_\tau(A)$ olur. Tersine, $I \subseteq I + J$ ve $J \subseteq I + J$ olduğundan $[I + J]_\tau(A) \subseteq I_\tau(A)$ ve $[I + J]_\tau(A) \subseteq J_\tau(A)$. Dolayısıyla $[I + J]_\tau(A) \subseteq (A) \cdot J_\tau(A) \cdot [I + J]_\tau(A)$, R 'nin bir alt hiperhalkası olduğundan, $[I + J]_\tau(A) \subseteq I_\tau(A) \cdot J_\tau(A)$ elde edilir.

Önerme 3.3.14. R ve R^* iki hiperhalka ve $f: R \rightarrow R^*$ bir izomorfizma olsun. I, R nin bir normal hiperideali ve A, R nin boş olmayan bir alt kümesi ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

- (i) $[f(I)]^\tau(f(A)) = f(I^\tau(A))$,

(ii) $[f(I)]_\tau(f(A)) = f(I_\tau(A))$ (Davvaz, 2009).

İspat. (i) $y \in f(I^\tau(A))$ olsun. Bu durumda $x \in I^\tau(A)$ olacak şekilde $f(x) = y$ vardır. Bu durumda $(x + I) \sim A$ olup $a \in (x + I) \cap A$ olacak şekilde bir a vardır. Böylece $f(a) \in f(A)$ ve $f(a) \in f(x) + f(I)$. Dolayısıyla $f(x) + f(I) \sim f(A)$, ve $y = f(x) \in [f(I)]^\tau(f(A))$ elde edilir. Böylece $f(I^\tau(A)) \subseteq [f(I)]^\tau(f(A))$ bulunur. Tersine, $y \in [f(I)]^\tau(f(A))$ olsun. Bu durumda $x \in R$ olacak şekilde $f(x) = y$ vardır. Ayrıca, $(f(x) + f(I)) \sim f(A)$ olup $a \in A$ olacak şekilde $f(a) \in f(A)$ ve $f(a) \in f(x) + f(I)$ olur. Böylece $x + I \sim A$, olup $x \in I^\tau(A)$ dır. Dolayısıyla $y = f(x) \in f(I^\tau(A))$ elde edilir ve $[f(I)]^\tau(f(A)) \subseteq f(I^\tau(A))$ sonucuna ulaşılır.

(ii) $y \in f(I_\tau(A))$ olsun. Bu durumda $x \in I_\tau(A)$ olacak şekilde $f(x) = y$ vardır. Ayrıca $(x + I) \subseteq A$. $z \in (y + f(I))$ olacak şekilde bir z seçilsin. Bu durumda $c \in R$ olacak şekilde $f(c) = z$ ve $f(c) \in f(x) + f(I)$ bulunur. $c \in x + I \subseteq A$ olduğu için $z = f(c) \in f(A)$ dır. Böylece $y + f(I) \subseteq f(A)$ ve $y \in [f(I)]_\tau(f(A))$ elde edilir. Dolayısıyla $I_\tau(A) \subseteq [f(I)]_\tau(f(A))$ dır.

Tersine, $y \in [f(I)]_\tau(f(A))$ olsun. Bu durumda $x \in R$ olacak şekilde $f(x) = y$ ve $(f(x) + f(I)) \subseteq f(A)$ vardır. $a \in x + I$ ise $f(a) \in f(x) + f(I) \subseteq f(A)$ ve f birebir olduğundan, $a \in A$. Dolayısıyla $x + I \subseteq A$ olup $x \in I_\tau(A)$ dır. Böylece $y = f(x) \in f(I_\tau(A))$ elde edilir ve $[f(I)]_\tau(f(A)) \subseteq f(I_\tau(A))$ bulunur.

Sonuç 3.3.4. R ve R^* iki hiperhalka ve $f: R \rightarrow R^*$ bir izomorfizma olsun. Bu durumda J, R nin bir normal hiperideali ve B, R^* ın boş olmayan bir alt kümesi ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

- (i) $[f^{-1}(J)]^\tau(f^{-1}(B)) = f^{-1}(J^\tau(B))$,
- (ii) $[f^{-1}(J)]_\tau(f^{-1}(B)) = f^{-1}(J_\tau(B))$ (Davvaz, 2009).

Sonuç 3.3.5. R ve R^* iki hiperhalka ve $f: R \rightarrow R^*$ bir izomorfizma olsun. Bu durumda I ve J, R nin normal hiperidealleri ve A, R nin boş olmayan bir alt kümesi ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

- (i) $f([I + J]^\tau(A)) = [f(I)]^\tau(f(A)) + [f(J)]^\tau(f(A))$,
(ii) $f([I + J]_\tau(A)) = [f(I)]_\tau(f(A)) + [f(J)]_\tau(f(A))$ (Davvaz, 2009).

Sonuç 3.3.6. R ve R^* iki hiperhalka ve $f: R \rightarrow R^*$ bir izomorfizma olsun. Bu durumda J, R^* ın normal bir hiperideali ve A, R nin boş olmayan bir alt kümesi ise

- (i) $[f^{-1}(J)]^\tau(A)$ R nin bir hiperidealidir $\Leftrightarrow J^\tau(f(A))$ R^* ın bir hiperidealidir,
(ii) $[f^{-1}(J)]^\tau(A)$ asaldir $\Leftrightarrow J^\tau(f(A))$ asaldir (Davvaz, 2009).

İspat. (i) $[f^{-1}(J)]^\tau(A)$ kümesinin R üzerinde bir hiperideal olsun. Bu durumda, $J^\tau(f(A))$ kümesinin de R^* üzerinde bir hiperideal olduğu gösterilecektir.

$x, y \in J^*(f(A))$ olsun. Bu durumda $f^{-1}(x)$ ve $f^{-1}(y), f^{-1}(J^*(f(A)))$ dir.

Önerme 3.3.14. e göre

$$f^{-1}(x) \text{ ve } f^{-1}(y) \in [f^{-1}(J)]^\tau(A)$$

olup dolayısıyla

$$f^{-1}(x) - f^{-1}(y) = f^{-1}(x - y) \subseteq [f^{-1}(J)]^\tau(A)$$

olup $(x - y) \subseteq J^\tau(f(A))$ sonucunu verir.

Ayrıca, her $r \in R$ için

$$r \cdot [f^{-1}(J)]^\tau(A) \subseteq [f^{-1}(J)]^\tau(A)$$

olduğundan,

$$f(r) \cdot [f^{-1}(J)]^\tau(A) \subseteq f([f^{-1}(J)]^\tau(A))$$

Önerme 3.3.14. e göre

$$r' \cdot J^\tau(f(A)) \subseteq J^\tau(f(A))$$

elde edilir. Böylece $J^\tau(f(A))$ kümesinin, R^* üzerinde bir hiperidealdir.

Benzer şekilde terside kanıtlanabilir.

- (ii) $[f^{-1}(J)]^\tau(A)$ kümesinin asal ve $x, y \in R^*$ olacak şekilde $x \cdot y \in J^\tau(f(A))$ alalım.

Buna göre, $a, b \in R$ olmak üzere

$$f(a) = x, f(b) = y \text{ ve } (f(ab) + J) \cap f(A) \neq \emptyset$$

koşulunu sağlayan elemanlar bulunmaktadır.

Bu durumda $(f(a) + J)(f(b) + J) \cap f(A) \neq \emptyset$ olduğu için

$$f(r) \in f(a) + J \text{ ve } f(s) \in f(b) + J \text{ dir.}$$

Bu ifadeler $f(r)f(s) = f(rs) \in f(A)$ eşitliğini sağlamakta olup, buradan $rs \in A$ sonucu elde edilir. Ayrıca,

$$r \in a + f^{-1}(J), s \in b + f^{-1}(J)$$

olduğundan, $rs \in ab + f^{-1}(J)$ olduğu görülmektedir. Bu durumda

$$(ab + f^{-1}(J)) \cap f(A) \neq \emptyset$$

koşulu sağlanır ve dolayısıyla

$$ab \in [f^{-1}(J)]^\tau(A)$$

olur. $[f^{-1}(J)]^\tau(A)$ kümesinin asal olduğundan

$$a \in [f^{-1}(J)]^\tau(A) \text{ veya } b \in [f^{-1}(J)]^\tau(A)$$

elde edilir.

Önerme 3.3.14. e göre

$$x \in J^\tau(f(A)) \text{ veya } y \in J^\tau(f(A))$$

dir.

Sonuç olarak, $x \in J^*(f(A))$ asaldır.

Benzer şekilde tersi de kanıtlanabilir.

Sonuç 3.3.7. R ve R^* iki hiperhalka ve $f: R \rightarrow R^*$ bir izomorfizma olsun. Bu durumda J, R^* nin bir normal hiperideali ve A, R nin boş olmayan bir alt kümesi ise

- (i) $[f^{-1}(J)]_\tau(A), R$ nin bir hiperidealidir $\Leftrightarrow J_\tau(f(A)), R^*$ nin bir hiperidealidir.
- (ii) $[f^{-1}(J)]_\tau(A)$ asaldır $\Leftrightarrow J_\tau(f(A))$ asaldır (Davvaz, 2009)

4. BULGULAR

Cebirsel hiperyapılar, belirsizlik ve çoklu değerli işlemler içeren durumları ele almak amacıyla tanımlanmış yapılardır. Klasik gruplar ve halkalar gibi yapılar üzerindeki tekil sonuç anlayışının ötesine geçilerek bir alt küme olması bu yapıların esneklik seviyesini artırmaktadır. Bu yaklaşım klasik aksiyomları korumakla birlikte çoklu sonuca izin vererek belirsizlik içeren problemlerde modelleme olanaklarını genişletir.

Cebirsel hiperyapıların tanımlanmasında grup ve halka kavramları temel alınmış; hipergrup, poligrup ve hiperhalka gibi türler, birleşme, ters eleman ve birim eleman gibi özelliklerin çoklu sonuç çerçevesinde nasıl uyarlanabileceğini göstermektedir. Böylece klasik yapılarda belirli sınırlar dahilinde ele alınan işlemlerin hiperyapı çerçevesinde daha esnek bir yapıya kavuştuğu gözlemlenmiştir.

Sonuç olarak cebirsel hiperyapıların hem klasik yapıları kapsadığını hem de yeni tür belirsizlik ve çoklu sonuç içeren problemleri modellemeye elverişli olduğunu ortaya koymuştur.

5. TARTIŞMA

Cebirsel hiperyapılar, klasik cebirsel yapıların bir uzantısı olarak ele alınmakta ve belirsizlik ile çoklu sonuçların bulunduğu durumları modellemek için değerlendirilmektedir. Grup ve halka gibi yapıların aksiyomlarının esnetilmesiyle ortaya çıkan bu yaklaşım bir işlemin tek bir sonuca değil, birden fazla olası çıktıya izin vermesi sayesinde esnek bir model sunar. Cebirsel hiperyapıların esneklik ve belirsizlik içeren durumları modellemeye uygun oluşu çeşitli uygulama alanlarında ilgi görmesini sağlar. Veri analizi, karar verme süreçleri, kriptografi ve optimizasyon problemleri bu yapılardan yararlanılabilecek konular arasındadır. Birden çok çıktının aynı anda değerlendirilmesi gereken karmaşık sistemlerde, klasik yapılara kıyasla daha geniş bir çözüm uzayı oluşması mümkündür. Bu özellik farklı disiplinlerde ortaya çıkan belirsizlik ve çoklu etkileşimleri modellemede yarar sağlayabilir.

6. SONUÇ

“Cebirsel Hiperyapılar Üzerinde Kaba Yaklaşım Operatörleri” başlıklı bu tezde klasik cebirsel yapıların genelleştirilmesi sonucu ortaya çıkan hiperyapılar ile belirsizlik modellerinden biri olan kaba küme teorisi arasında bir köprü kurulmaya çalışılmıştır. İlk olarak; grup ve halka gibi cebirsel yapılar tanımlanmış ve bu yapıların özellikleri, örnekleri ile temel teoremleri ele alınmıştır. Ayrıca bu yapıların birden fazla çıktıyı içeren hipergrup, poligrup ve hiperhalka gibi hiperyapılar detaylandırılmıştır. Bu sayede klasik yapılar üzerinde gerçekleştirilen çalışmaların belirsizlik içeren durumların modellenmesinde daha esnek çözümler incelenmiştir. Böylece tezde klasik cebirsel yapılar, hiperyapılar ve kaba küme teorisi arasında bir analiz gerçekleştirilmiş olup kaba hipergruplar, kaba poligruplar ve kaba hiperhalkalar detaylı olarak çalışılmıştır.

7. ÖNERİLER

Hiperyapı kavramlarının daha karmaşık örnekler ve grafiksel gösterimlerle desteklenmesi ve ayrıca uygulamalı alanlarda özellikle belirsizlik içeren sistemlerin modellenmesi ve hata düzeltme gibi konularda hiperyapıların kullanılabilirliği araştırılması disiplinler arası yaklaşımlarla konunun derinleştirilmesi sağlanabilir.

KAYNAKLAR

- Al Tahan, M., Hoskova Mayerova, S., Davvaz, B., & Sonea, A. C. (2023). On subpolygroup commutativity degree of finite polygroups.
- Aldridge, C. H. (1999). Discerning landslide hazard using a rough set based geographic knowledge discovery methodology. In *The 11th Annual Colloquium of the Spatial Information Research Centre, University of Otago, Dunedin, New Zealand, December*.
- Ameri, R., & Norouzi, M. (2014). On commutative hyperrings. *International journal of algebraic hyperstructures and its applications*, 1(1), 45-58.
- Bağırmaz N., (2015) “Topolojik Rough Gruplar” Tezi, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
- Bhattacharya, P. B., Jain, S. K., & Nagpaul, S. R. (1994). *Basic abstract algebra*. Cambridge University Press.
- Biwas, R., & Nanda, S. (1994). 10. Rough Groups and Rough Subgroups. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences-Mathematics*, 42(3), 251.
- Bloom, W. R., & Heyer, H. (2011). *Harmonic analysis of probability measures on hypergroups* (Vol. 20). Walter de Gruyter.
- Burton, D. M. (1970). A first course in rings and ideals. Reading, Massachusetts.
- Comer, S. D. (1984). Polygroups derived from cgroups. *Journal of Algebra*, 89(2), 397-405.
- Connes, A., & Consani, C. (2011). The hyperring of adele classes. *Journal of Number Theory*, 131(2), 159-194.
- Corsini, P., & Leoreanu, V. (2013). *Applications of hyperstructure theory* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.
- Çallıalp, F. (2011). *Örneklerle soyut cebir*. Birsen yayınevi.
- Çallıalp, F., Tekir, Ü. (2009). *Değişmeli halkalar ve modüller*. Birsen Yayınevi.
- Davvaz, B. (2002). Rough polygroups. *Italian journal of pure and applied mathematics*, (12), 91-96.
- Davvaz, B. (2006). Rough subpolygroups in a factor polygroup. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 17(6), 613-621.

- Davvaz, B. (2009). Approximations in Hyperrings. *Journal of Multiple-Valued Logic & Soft Computing*, 15.
- Davvaz, B. (2012). *Polygroup theory and related systems*. World scientific.
- Davvaz, B., & Alp, M. (2014). Cat $\mathcal{A}^1$ -polygroups and pullback cat $\mathcal{A}^1$ -polygroups. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 40(3), 721-735.
- Davvaz, B., & Leoreanu-Fotea, V. (2007). *Hyperring theory and applications* (Vol. 347). International Academic Press, USA.
- Davvaz, B., & Poursalavati, N. S. (1999). On polygroup hyperrings and representations of polygroups. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 36(6), 1021-1031.
- Erden, C. *Kaba kümeler teorisi ve trafik kazaları üzerine uygulaması* (Master's thesis, Fen Bilimleri Enstitüsü).
- Fotea, V. L. (2008). The lower and upper approximations in a hypergroup. *Information Sciences*, 178(18), 3605-3615.
- Hungerford, T. W. (2012). *Algebra* (Vol. 73). Springer Science & Business Media.
- Ioulidis S., Polygroups et certains de leurs propriétés, Bull. Greek Math. Soc., 22 (1981), 95-104.
- Jewett, R. I. (1975). Spaces with an abstract convolution of measures. *Advances in Mathematics*, 18(1), 1-101.
- Koskas M., “Groupoids, semi-hypergroups and hypergroups,” *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 49, no. 2, p. 155, 1970.
- Leung, Y., Fung, T., Mi, J. S., & Wu, W. Z. (2007). A rough set approach to the discovery of classification rules in spatial data. *International Journal of Geographical Information Science*, 21(9), 1033-1058.
- Liang, X., & Li, D. (2009). On Rough Subgroup of a Group. *Formaliz. Math.*, 17(1-4), 213-217.
- Marty F., “Sur un généralisation de la notion de groupe”, *8th Congress of Scandinavian Mathematicians*, 45-49, 1934.
- Miao, D., Han, S., Li, D., & Sun, L. (2005). Rough group, rough subgroup and their properties. *10th International Conference, Regina, Canada, August 31-September 3, 2005, Proceedings, Part I 10* (pp. 104-113). Springer Berlin Heidelberg.

- Murray, J. D. (2007). *Mathematical biology: I. An introduction* (Vol. 17). Springer Science & Business Media.
- Novak, M. I. C. H. A. L. (2009). Potential of the Ends lemma to create ring-like hyperstructures from quasi-ordered (semi) groups. *South Bohemia Math*, 17(1), 39-50.
- Oğuz, G. (2020). A new view on topological polygroups. *Turkish Journal of Science*, 5(2), 110-117.
- Pan, X., Zhang, S., Zhang, H., Na, X., & Li, X. (2010). A variable precision rough set approach to the remote sensing land use/cover classification. *Computers & Geosciences*, 36(12), 1466-1473.
- Paterson, G. I. (1994). Rough classification of pneumonia patients using a clinical database. In *Rough Sets, Banff, Alberta, Canada, 12–15 October 1993* (pp. 412-419)
- Pawlak, Z. (1982). Rough sets. *International journal of computer & information sciences*, 11, 341-356.
- Pawlak, Z. (2002). Rough sets and intelligent data analysis. *Information sciences*, 147(1-4), 1-12.
- Pawlak, Z. (2012). *Rough sets: Theoretical aspects of reasoning about data* (Vol. 9). Springer Science & Business Media.
- Pawlak, Z., & Skowron, A. (2007). Rudiments of rough sets. *Information sciences*, 177(1), 3-27.
- Pawlak, Z., & Skowron, A. (2007). Rudiments of rough sets. *Information sciences*, 177(1), 3-27.
- Saçlı, V. (2018) *Hiper cebirsel yapılar ve bulanık yapılar*, Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
- Suraj, Z. (2004). An introduction to rough set theory and its applications. *ICENCO, Cairo, Egypt*, 3, 80.
- Tay, F. E., & Shen, L. (2003). Fault diagnosis based on rough set theory. *Engineering applications of artificial intelligence*, 16(1), 39-43.
- Thangavel, K. J. P. P. A. K. M., Jaganathan, P., Pethalakshmi, A., & Karnan, M. (2005). Effective classification with improved quick reduct for medical database using rough system. *BIME Journal*, 5(1), 7-14.

- Von Neumann, J. (2018). *Mathematical foundations of quantum mechanics: New edition*. Princeton university press.
- Vougiouklis, T. (1994). *Hyperstructures and their representations*. Hadronic Press.
- Yan, Y. H., Li, J. P., & Wang, D. S. (2008, December). Rough invariant subgroup's properties and rough quotient group. In *2008 International Conference on Apperceiving Computing and Intelligence Analysis* (pp. 181-184). IEEE.