T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN AKBARİ-GANJİ VE EXP FONKSİYON YÖNTEMİYLE ANALİZİ

Esma KARASAKAL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2025

T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ONAY SAYFASI

Prof. Dr. Tanfer TANRIVERDİ danışmanlığında, Esma KARASAKAL'ın hazırladığı **"Bazı Diferansiyel Denklemlerin Akbari-Ganji ve Exp Fonksiyon Yöntemiyle Analizi"** konulu bu çalışma 21/01/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

☐ Oybirliğiyle / ☐ Oy çokluğu ile

İmza

Danışman	: Prof. Dr. Tanfer TANRIVERDİ	…………………
Üye	: Prof. Dr. Hacı Mehmet BAŞKONUŞ	…………………
Üye	: Doç. Dr. Esin İLHAN	…………………

Bu tezin Matematik Ana Bilim Dalında yapıldığını ve enstitümüz kurallarına göre düzenlendiğini onaylarım.

Doç. Dr. Mustafa ULUKAVAK
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN AKBARİ-GANJİ VE EXP FONKSİYON YÖNTEMİYLE ANALİZİ

Esma KARASAKAL

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Tanfer TANRIVERDİ
Yıl: 2025, Sayfa: 38

Birçok disiplinde ortaya çıkan problemleri diferansiyel denklemlerle ifade etmek mümkündür. Bu diferansiyel denklemlerin tipleri lineer veya lineer olmayabilir. Oluşturulan mevcut diferansiyel denklemlerin bir çözüme sahip olup olmadığını bilmek çok önemlidir. Bir çözüm varsa, çözümünü bulmak her zaman kolay olmayabilir. Modellenen denklemin bir çözümü varsa, verilen denklemin kesin veya yaklaşık çözümlerini elde etmek için çeşitli yarı analitik yöntemler mevcuttur. Akbari-Ganji yöntemi ve Exp fonksiyon yöntemi bu istenen yaklaşık çözümlere ulaşmak için kullanılan yöntemlerden biridir. Burada, lineer olmayan adi diferansiyel denklemin yaklaşık çözümleri Akbari-Ganji yöntemi ve Exp fonksiyon yöntemi ile analiz edilecektir. Son olarak, yaklaşık çözümler grafiklerle gösterilecektir.

ANAHTAR KELİMELER: Akbari-Ganji yöntemi, Exp fonksiyon yöntemi, Diferansiyel denklemler, yaklaşık çözüm, tam çözüm

ABSTRACT

MSc Thesis

ANALYSIS OF SOME DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH AKBARİ-GANJİ AND EXP FUNCTIONS METHODS

Esma KARASAKAL

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Tanfer TANRIVERDİ
Year: 2025, Page: 38

It is possible to express the problems that arise in many disciplines with differential equations. The types of these differential equations can be linear or non linear. It is worth to know whether the existing differential equations created have a solution. If a solution exists, it may not be easy to find its solution. If the modelled equation has a solution, various semi-analytical methods are available to obtain their exact or approximate solutions of given equation. Akbari-Ganji method and Exp function method are one of the methods to reach these desired approximate solutions. Here, the approximate solutions of non linear ordinary differential equation will be analyzed with the Akbari-Ganji method and and Exp function method with Finally, approximate solutions will be graphed as well.

KEY WORDS: Akbari-Ganji method, Exp function method, differential equations, approximate solutions, exact solutions

TEŞEKKÜR

Tez konusunun seçimi, yürütülmesi ve yazımı konusundaki yardımları ve yakın ilgisinden dolayı tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Tanfer TANRIVERDİ'ye, tez jürimde görev alan değerli akademisyen hocalarıma, bana yaşamım boyunca öğreten herkese ve her zaman desteklerini esirgemeyen ailemdeki herkese ayrı ayrı teşekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Bilinen temel tanımlar ve formüller ifade edilecektir.

Tanım 1 "Bağımlı değişkenin bir veya daha fazla bağımsız parametreye göre türevlerini ihtiva eden denkleme türevli denklem denir. Denklem bir bağımsız parametreli ise denkleme sıradan (bayağı) diferansiyel denklem denir. Diğer halde, denkleme parçalı türevli denklem denir. Teknik olarak, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ için x_k verilsin ve $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ise

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}) = 0$$

denklemi n. meretebeden parçalı türevli denklem denir". (Biz, 2019)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = h(x), \; u_t = cu_{xy}$$

veya

$$xu_t + t^2u^2 = \sin(x)$$

ifadeleri parçalı diferansiyel denklemlere birer örnek olarak verilebilir. İkinci mertebeden parçalı türevli denklemler oldukça önemlidir. Aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir.

Tanım 2 "İkinci mertebeden

$$D(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + F(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

parçalı türevli denklemde

- $E^2 - 4DF < 0$ ise eliptik,
- $E^2 - 4DF = 0$ ise parabolik,
- $E^2 - 4DF > 0$ ise hiperboliktir". (Biz, 2019)

Tanım 3 "Tek parametreli $h(x)$ fonksiyonun $x = x_0$ komşuluğundaki Taylor seri açılımı

$$h(x) = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0) + \frac{h''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{h'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots$$
$$+ \frac{h^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots .$$

Eğer $x_0 = 0$ olarak alınırsa seri literatürde Maclaurin seri açılımı olarak bilinir". (Biz, 2019)

Tanım 4 "İki parametreli $h(x, y)$ fonksiyonunun $(x, y) = (x_0, y_0)$ noktasında Taylor serisi

$$\begin{aligned} h(x, y) = {} & h(x_0, y_0) + h_x(x_0, y_0)(x - x_0) + h_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ & + \frac{h_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + h_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + h_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2}{2!} \\ & + \cdots \end{aligned}$$

biçimindedir". (Biz, 2019)

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Helmholtz denklemi olarak bilinen lineer olmayan salınım denklemi

$$u'' + 2u + u^2 = 0,\ u(0) = 0.1,\ u'(0) = 0,$$

biçimindedir. Benzer olarak, Duffing denklemi olarak bilinen lineer olmayan salınım denklemi

$$u'' - 2u^3 = t,\ u(0) = 0,\ u'(0) = 1$$

biçimindedir. Lineer olmayan salınımlar fizik ve mühendisliğin çeşitli dallarında ortaya çıkan bir modeldir. Lineer olmayan salınımlar büyük genlikli bir fiziksel sarkacın salınımları, doğrusal olmayan elektrik devreleri, görüntü işleme, uyduların hareketi gibi çeşitli problemleri incelemek için kullanılmıştır (Davis, 1962; Debnath, 2005; Logan, 1994; Whitham, 1974; Chakraverty ve ark., 2019).

Dördüncü mertebeden lineer olmayan (3+1) boyutlu genelleştirilmiş Kadomtsev–Petviashvili–Benjamin–Bona–Mahony (KPBBM) denklemininin çözümünün geliştirilmiş Bernoulli alt denklem fonksiyon yöntemi ve değiştirilmiş-genişletilmiş $\tanh$ fonksiyon yöntemi ve KPBBM problemi (Mahmud ve ark., 2023)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \mu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial (u \frac{\partial u}{\partial x})}{\partial x} - \mu_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} + \mu_4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu_5 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

formuna sahiptir. Burada, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 ve μ_5 reel sabitlerdir ve $u(x, y, z, t)$ bir dalganın genliği fonksiyonunu belirtir. Lineer olmayan teoriler daha çok lineer olmayan diferansiyel denklemler olarak modelize edilirler. Aynı şekilde, akışkanlar mekaniği, hidrodinamik gibi fiziksel ve uygulamalı çalışmalarda doğa olayları yorumlamak için kısmi diferansiyel denklemler (KDD) sıklıkla karşımıza çıkar. Kısaca, KDD matematiksel fizik, optik, elastik medya, kimyasal reaksiyonlar, astrofizik, ekosistemler, kuantum teorisi, jeoloji, plazma fiziği, dalga yayılımı ve sığ su gibi benzeri alanlarda ortaya çıkar.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \tau \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + l \frac{\partial \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)}{\partial x} = 0$$

(3+1) boyutlu genelleştirilmiş Korteweg de Vries-Zakharov-Kuznetsov (gKdVZK) denklemini ele alalım. Burada, $u(x, y, z)$ dalgayı tanımlar ve α, τ ve l reel sabitleri ise sırasıyla sıcak izotermal, sıcak adyabatik sıvı ve soğuk hareketsiz organizmaları tanımlayan reel sabitlerdir. (3+1)-boyutlu gKdVZK denklemi için elde edilen çözümler ve kullanılan değiştirilmiş-genişletilmiş $\tanh$ ve genişletilmiş rasyonel $\sinh - \cosh$ yöntemleri için (Mahmud ve ark., 2023a) bakılabilir.

Diferansiyel denklemlerin çözümleri için değişik metotlar mevcuttur. İteratif yöntem (Alıcı ve Tanriverdi, 2020; Alıcı ve Tanriverdi, 2021) Bernoulli alt denklem fonksiyon yöntemi (BADFY) ve geliştirmiş BADFY (Baskonus ve ark., 2022; Baskonus ve ark., 2022a; Mahmud ark., 2023b; Hoşer, 2023) ve Caputo kesirli Laplace dönüşümü ile (Tanrıverdi ve ark., 2021; Podlubny, 1998), popülasyon modelleri (Waltman, 1983), Mittag-Leffler yaklaşımıyla çözüm (Güneş, 2021; İşleyen, 2024), contour integral metodu (Tanriverdi, 2001; Tanriverdi ve Mcleod, 2007; Tanriverdi ve Mcleod, 2008; Tanriverdi, 2009; Tanriverdi, 2019; Tanriverdi, 2019a), klasik analiz (Tanriverdi, 2012; Tanriverdi, 2012a; Tanriverdi, 2017; Tanriverdi, 2019), Laplace dönüşüm metodu (Tanriverdi, 2018), Laplace integrali (Tanriverdi, 2018), asimtotik analiz (Merca ve Tanriverdi, 2013), atış metodu (Hastings ve McLeod, 2011; Tanrıverdi ve Mcleod, 2010), diferansiyel dönüşüm metodu (Tanriverdi ve Ağırağaç, 2018), asimtotik metodu (Tanriverdi, 2021), Riemann zeta hipotezi üzerine özgün bir bakış için (Tanriverdi, 2021), değiştirilmiş eksponansiyel fonksiyon metodu (Muhamad ve ark., 2023b), genişletilmiş rasyonel sinh-cosh ve değiştirilmiş ve genişletilmiş tanh-function metodu ve diğer metotlar için (Mahmud, 2023; Muhamad, 2023; Mahmud ve ark., 2023c; Mahmud ve ark., 2023d; Mahmud ve ark., 2024; Mahmud ve ark., 2024a) ve sine-Gordon açılım metodu (Şap, 2024).

3. GEREÇ VE YÖNTEM

Burada, diferansiyel denklemlerin dalga çözümlerininin yaklaşığını veya tam çözümünü bulmak için Akbari-Ganji metodu ve Exp fonksiyon metodu anlatılacaktır. İlk olarak Akbari-Ganji metodunu ele alalım.

3.1. Akbari-Ganji Metodu

Bildiğimiz gibi lineer diferansiyel denklemleri çözmek için değişik birçok analitik ve nümerik yöntemler vardır. Fakat lineer olmayan diferansiyel denklemleri çözen metodlar oldukça azdır. Bu metotlardan birisi Akbari-Ganji metodudur (AGM). AGM başlangıçta cebirsel bir yaklaşım olarak ifade edildi ama sonradan literatürde Akbari-Ganji metodu olarak ifade edildi. AGM lineer olmayan diferansiyel denklemlerinin yaklaşık çözümünü verir. F lineer ve lineer olmayan terimler içeren bir bayağı diferansiyel denklem olsun. Yani,

$$F = A(v) - f(t)$$

olsun. Burada, $A(v) = L(v) + N(v)$ olup $L(v)$ ele alınan diferansiyel denklemin lineer kısmı, $N(v)$ lineer olmayan kısmı ve $f(t)$ dış kuvveti gösterir. Ayrıca, F aşağıdaki gibi de yazılabilir.

$$F(t, v(t), v'(t), v''(t), \ldots) = 0, \tag{3.1}$$

burada

$$F(t, v(t), v'(t), v''(t), \ldots) = A(v) - f(t)$$

denklemine ait başlangıç koşulları

$$v'(0) = A, \; v(0) = B \tag{3.2}$$

ile verilir. Başlangıç değer problemi (BDP) için yaklaşık çözüm elde etmede kullanacağımız AGM için gerekli adımlar sırasıyla aşağıdaki gibidir.

1. Adım (3.1) denkleminin homojen olması halinde çözüm

$$v(t) = e^{-bt}(a\cos(wt + \phi)) \tag{3.3}$$

şeklinde olsun. Benzer şekilde (3.1) denkleminin homojen olmaması halinde çözüm

$$v(t) = e^{-bt}(a\cos(wt + \phi)) + d\cos(w_0 t + \psi) \tag{3.4}$$

şeklinde kabul edilir. Bundan sonraki hedef kabul edilen çözümlerdeki bilinmeyen a, b, d, w, ϕ, w_0 ve ψ katsayılarını belirlemektir.

2. Adım Çözüm (3.3) denkleminde başlangıç koşulları kullanılırsa

$$a\cos\phi = A$$

ve

$$-ab\cos\phi - aw\sin\psi = B$$

elde edilir. Dış kuvvetin olduğu durumda çözüm kabul ettiğimiz (3.4) eşitliğinde başlangıç koşulları kullanıldığında ise aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$a\cos\phi + d\cos\psi = A$$

ve

$$-ab\cos\phi - aw\sin\phi - dw_0\sin\psi = B.$$

Bu adımda elde edilen iki denklem bilinmeyen katsayıları belirlemede kullanılacaktır.

3. Adım Kabul edilen (3.3) ya da (3.4) çözümler (3.1) denkleminde yazılırsa

$$G(t, v(t), v'(t), v''(t), \ldots) = 0 \tag{3.5}$$

elde edilir. Elde edilen bu diferansiyel denklemin türevleri alınarak $t = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&G(0, v(0), v'(0), v''(0), \ldots) = 0,\\
&G'(0, v(0), v'(0), v''(0), \ldots) = 0,\\
&G''(0, v(0), v'(0), v''(0), \ldots) = 0,\\
&G'''(0, v(0), v'(0), v''(0), \ldots) = 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

cebirsel sistemi elde edilir. Elde edilen sistem çözülürse başlangıç değer probleminin yaklaşık çözüm bulunur. Burada, (3.6) denklem sayısı başlangıç koşulları hariç diğer bilinmeyen sayısı ile eşit olmalıdır.

3.2. Eksponansiyel Fonksiyon Metodu

Burada, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin soliter çözümlerini, periyodik çözümlerini ve kompakton benzeri çözümlerini bulmak için Exp (eksponansiyel) fonksiyon yöntemi (He ve Wu, 2006) işlenecektir. Önerilen yöntem soliter çözümleri bulmada etkilidir. Bu metodu kullanabilmek için ele alınan kısmi diferansiyel denklemler ilk olarak bayağı diferansiyel denklemlere indirgenir.

$$F(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, \ldots) = 0 \tag{3.7}$$

kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. (3.7) denklemine

$$u(\xi) = kx + wt \tag{3.8}$$

dönüşümü uygulanırsa

$$H(u, u', u'', \ldots) = 0 \tag{3.9}$$

bayağı diferansiyel denklemi elde edilir. (3.9) bayağı diferansiyel denkleminin çözümü

$$u(\xi) = \frac{\sum\limits_{n=-c}^{d} a_n exp(n\xi)}{\sum\limits_{n=-p}^{q} b_n exp(n\xi)} \tag{3.10}$$

şeklinde olsun. Burada, a_n, b_n, c, d, p ve q belirlenmesi gereken katsayılardır. c ve p parametreleri (3.9) denklemindeki en düşük mertebeli lineer ve lineer olmayan terimlerin kuvvetlerinin dengelenmesiyle elde edilir. Benzer olarak, d ve q parametreleri (3.9) denklemindeki en yüksek mertebeli lineer ve lineer olmayan terimlerin kuvvetlerinin dengelenmesiyle elde edilir.

Daha sonra çözüm kabul ettiğimiz (3.10) denklemi (3.9) denkleminde yerine yazılarak $exp(n\xi)$ fonksiyonların katsayıları sıfıra eşitlenerek cebirsel bir sistem elde edilir. Bu son sistem çözülerek sonuca varılır.

Uygulamada kullanılacak çözümün bazı kuvvetleri alınırsa

$$U^2(\xi) = \frac{E_{-c}e^{-2c\xi} + \cdots + E_d e^{2d\xi}}{E_{-p}e^{-2p\xi} + \cdots + E_q e^{2q\xi}},$$

$$U^3(\xi) = \frac{F_{-c}e^{-3c\xi} + \cdots + F_d e^{3d\xi}}{F_{-p}e^{-3p\xi} + \cdots + F_q e^{3q\xi}}$$

şeklindedir. Benzer şekilde çözümün türevleri alındığında ise

$$U'(\xi) = \frac{G_{-c}e^{(-c-p)\xi} + \cdots + G_d e^{(d+q)\xi}}{G_{-p}e^{-2p\xi} + \cdots + G_q e^{2q\xi}},$$

$$U''(\xi) = \frac{H_{-c}e^{(-c-3p)\xi} + \cdots + H_d e^{(d+3q)\xi}}{H_{-p}e^{-4p\xi} + \cdots + H_q e^{4q\xi}},$$

$$(UU')'(\xi) = \frac{K_{-c}e^{(-4p-2c)\xi} + \cdots + K_d e^{(2d+4q)\xi}}{K_{-p}e^{-6p\xi} + \cdots + K_q e^{6q\xi}}$$

ifadeleri elde edilebilir.

4. BULGULAR

Burada, AGM ve EFM metotları lineer olmayan diferansiyel denklemlere uygulanarak yaklaşık ve tam çözümler elde edilecektir.

4.1. Helmoltz Denklemi

Lineer olmayan salınım özelliğine sahip fizik ve mühendisliğin çeşitli dallarında ortaya çıkan Helmoltz denklemine AGM uygulanacaktır.

$$U''(t)+2U(t)+U^2(t)=0, U(0)=0.1,\ U'(0)=0 \tag{4.1}$$

denklemini AGM ile çözelim.

Denklem homojen olduğundan çözüm

$$U(t)=e^{-bt}\big(a\cos(wt+\phi)\big) \tag{4.2}$$

şeklinde kabul edilir. Kabul edilen çözümün türevleri alınırsa

$$U'(t)=ae^{-bt}\big(-b\cos(wt+\phi)-w\sin(wt+\phi)\big) \tag{4.3}$$

$$U''(t)=ae^{-bt}\big((b^2-w^2)\cos(wt+\phi)+2bw\sin(wt+\phi)\big) \tag{4.4}$$

elde edilir. (4.2) ve (4.4) denklemleri (4.1) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned} &e^{-bt}\big(2a+ab^2-aw^2)\cos(wt+\phi)+2abw\sin(wt+\phi)\big)\\ &+a^2e^{-2bt}\cos^2(wt+\phi)=0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

bulunur. Bulunan denklemin tekrar türevi alınırsa

$$\begin{aligned} &e^{-bt}\big((-2ab-ab^3+3abw^2)\cos(wt+\phi)+(-2aw-3ab^2w+aw^3)\sin(wt+\phi)\big)\\ &-2a^2e^{-2bt}\big((b\cos^2(wt+\phi)+w\cos(wt+\phi)\sin(wt+\phi)\big) \end{aligned} \tag{4.6}$$

elde edilir. Elde edilen ifadelerde $t=0$ alınarak başlangıç koşullarıyla birlikte aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$
\begin{aligned}
& a\cos\phi - 0.1 = 0,\\
& -ab\cos\phi - aw\sin\phi = 0,\\
& (2a + ab^2 - aw^2)\cos\phi + 2abw\sin\phi + a^2\cos^2\phi = 0,\\
& (-2ab - ab^3 + 3abw^2)\cos\phi + (-2aw - 3ab^2w + aw^3)\sin\phi\\
& - 2a^2b\cos^2\phi - 2a^2w\cos\phi\sin\phi = 0.
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

Denklem sistemi çözüldüğünde aşağıdaki çözüm ailesi bulunur.

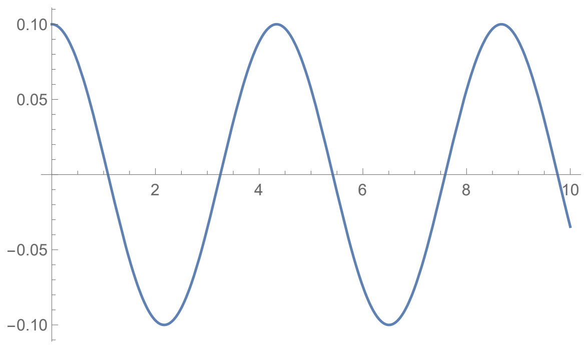
$$
\begin{aligned}
& a = 0.1,\ b = 0,\ w = -1.44914,\ \phi = -3.14159;\\
& a = -0.1,\ b = 0,\ w = -1.44914,\ \phi = 3.14159;\\
& a = -0.1,\ b = 0,\ w = 1.44914,\ \phi = -3.14159;\\
& a = -0.1,\ b = 0,\ w = 1.44914,\ \phi = 3.14159;\\
& a = 0.1,\ b = 0,\ w = -1.44914,\ \phi = 0;\\
& a = 0.1,\ b = 0,\ w = 1.44914,\ \phi = 0.
\end{aligned}
$$

Şimdi, $a = 0.1,\ b = 0,\ w = 1.44914,\ \phi = 0$ değerleri (4.2) çözümünde yerine yazılırsa problemin bir çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

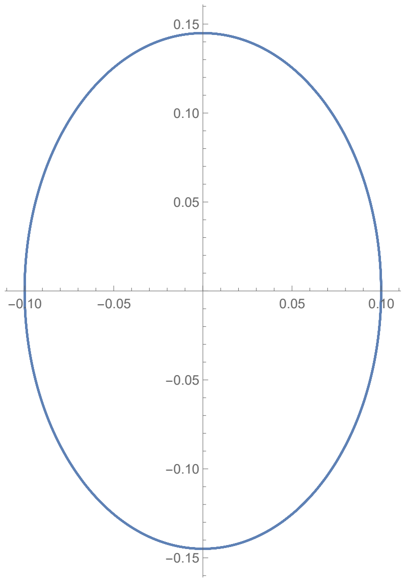
$$U(t) = 0.1\cos(1.4491t). \tag{4.8}$$

$$U'(t) = -0.14491\ \sin(1.4491t). \tag{4.9}$$

$U(t)$ ve $U(t)$ - $U'(t)$ sırasıyla çözümlerinin grafiği şekildeki gibidir.



Şekil 4.1: (4.8) denkleminin 2D grafiği $0 \leq t \leq 10$.



Şekil 4.2: (4.8)-(4.9) denkleminin parametrik grafiği $-10 \leq t \leq 10$.

4.2. Klasik AGM ile Çözüm

Lineer olmayan salınım özelliğine sahip fizik ve mühendisliğin çeşitli dallarında ortaya çıkan Duffing denklemine AGM uygulanacaktır.

$$U''(t) - 2U^3(t) = t, U(0) = 0, \; U'(0) = 1 \tag{4.10}$$

denklemini AGM ile çözelim.

Denklem homojen olmadığından yani denkleme etki eden dış kuvvet olduğundan çözüm

$$U(t) = d\cos(ct + \psi) + e^{-bt} a\cos(\phi + tw) \tag{4.11}$$

şeklinde kabul edilir. Burada hedef a, b, c, d, w, ψ ve ϕ parametrelerini belirlemektir. Bu parametreleri belirlemek için aşağıdaki adımlar izlenir.

Çözüm kabul ettiğimiz (4.11) ifadesinin U' ve U'' türevleri

$$\begin{aligned} U'(t) &= -abe^{-bt}\cos(\phi + tw) - cd\sin(ct + \psi) - awe^{-bt}\sin(\phi + tw), \\ U''(t) &= -c^2 d\cos(\psi + ct) + ab^2 e^{-bt}\cos(wt + \phi) \\ &\quad - aw^2 e^{-bt}\cos(wt + \phi) + 2abwe^{-bt}\sin(wt + \phi) \end{aligned} \tag{4.12}$$

bulunur. Daha sonra (4.11) ve (4.12) denklemleri (4.10) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned}
&-t-c^2d\cos(\psi+ct)-2d^3\cos^3(\psi+ct)+ab^2e^{-bt}\cos(wt+\phi)-\\
&aw^2e^{-bt}\cos(wt+\phi)-6ad^2e^{-bt}\cos(wt+\phi)\cos^2(\psi+ct)-6a^2de^{-2bt}\\
&\cos^2(wt+\phi)\cos(\psi+ct)-2a^3e^{-3bt}\cos^3(wt+\phi)+2abwe^{-bt}\sin(wt+\phi)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

elde edilir. Elde edilen (4.13) denkleminin türevi tekrar alınır ve $t=0$ değeri ile birlikte aşağıdaki sistem elde edilir.

$$\begin{aligned}
&a\cos\phi+d\cos\psi=0,\\
&-ab\cos\phi-cd\sin\psi-aw\sin\phi=0,\\
&-c^2d\cos\psi-2d^3\cos^3\psi+ab^2\cos\phi-aw^2\cos\phi-6ad^2\cos\phi\cos^2\psi\\
&-6a^2d\cos^2\phi\cos\psi-2a^3\cos^3\phi+2abw\sin\phi=0,\\
&-1-ab^2\cos\phi+3abw^2\cos\phi+6a^3b\cos^3\phi+12a^2bd\cos^2\phi\cos\psi\\
&+6abd^2\cos\phi\cos^2\psi-3ab^2w\sin\phi+aw^3\sin\phi 6a^3w\cos^2\phi\sin\phi\\
&+12a^2dw\cos\phi\cos\psi\sin\phi+6ad^2w\cos^2\psi\sin\phi+c^3d\sin\psi+6a^2cd\\
&\cos^2\phi\sin\psi+12acd^2\cos\phi\cos\psi\sin\psi+6cd^3\cos^2\psi\sin\psi=0,\\
&(ab^4-6ab^2w^2+aw^4)\cos\phi+(6a^3w^2-18a^3b^2)\cos^3\phi+c^4d\cos\psi\\
&(-24a^2b^2d+6a^2c^2d+12a^2dw^2)\cos^2\phi\cos\psi+(12ac^2d^2-6ab^2d^2\\
&+6ad^2w^2)\cos\phi\cos^2\psi+6c^2d^3\cos^3\psi+(4ab^3w-4abw^3)\sin\phi\\
&-36a^3bw\cos^2\phi\sin\phi-48a^2bdw\cos\phi\cos\psi\sin\phi-12abd^2w\cos^2\psi\\
&\sin\phi-12a^3w^2\cos\phi\sin^2\phi-12a^2dw^2\cos\psi\sin^3\phi-24a^2bcd\cos^2\phi\\
&\sin\psi-24abcd^2\cos\phi\cos\psi\sin\psi-24a^2cdw\cos\phi\sin\phi\sin\psi-24ac\\
&d^2w\cos\psi\sin\phi\sin\psi-12ac^2d^2\cos\psi\sin^2\psi-12c^2d^3\cos\psi\sin^2\psi=0,\\
&(ab^5+10ab^3w^2-5abw^4)\cos\phi+(54a^3b^3-54a^3bw^2)\cos^3\psi\\
&+(48a^2b^3d-36a^2bc^3d-72a^2bdw^2)\cos^2\phi\cos\psi+(6ab^3d^2-36ab\\
&c^2d^2-18abd^2w^2)\cos\phi\cos^2\psi+(10ab^2w^3-5ab^4w-aw^5)\sin\phi
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$+ (162a^3b^2w - 42a^3w^3)\cos^2\phi\sin\phi + (144a^2b^2dw - 36a^2c^2dw - 48$$
$$a^2dw^3)\cos\phi\sin\phi\cos\psi + (18ab^2d^2w - 36ac^2d^2 - 6ad^2w^3)\cos^2\psi$$
$$\sin\phi + 108a^3bw^2\cos\phi\sin^2\phi + 72a^2bdw^2\cos\psi\sin^2\phi + 12a^3w^3$$
$$\sin^3\phi - c^3d\sin\psi + (72a^2b^2cd - 6a^2c^3d - 36a^2cdw^2)\cos^2\phi\sin\psi$$
$$+ (36ab^2cd^2 - 48ac^3d^3 - 36acd^2w^2)\cos\phi\cos\psi\sin\psi - 42c^3d^3\cos^2\psi$$
$$\sin\psi + (144a^2bcdw + 72abcd^2w)\cos\psi\sin\phi\sin\psi + 36a^2cdw^2\sin^2\phi$$
$$\sin\psi + 36ac^2d^2w\sin^2\psi\sin\phi + 12c^3d^3\sin^3\psi = 0,$$
$$(ab^6 - 15ab^4w^2 + 15ab^2w^4 - aw^6)\cos\phi + (324a^3b^2w^2 - 162a^3b^4$$
$$- 42a^3w^4)\cos^3\psi - c^6d\cos\psi + (144a^2b^2c^2d - 96a^2b^4d - 6a^2c^4d$$
$$+ 288a^2b^2dw^2 - 72a^2c^2dw^2 - 48a^2dw^4)\cos^2\phi\cos\psi + (72ab^2c^2d^2$$
$$- 6ab^4d^2 - 48ac^4d^2 + 36ab^2d^2w^2 - 72ac^2d^2w^2 - 6ad^2w^2)\cos^2\psi\cos\phi$$
$$- 42c^4d^3\cos^3\psi + (6ab^5w - 20ab^3w^3 + 6abw^5)\sin\phi + (504a^3bw^3$$
$$- 648a^3b^3w)\cos^2\phi\sin\phi + (288a^2bc^2dw - 384a^2b^3dw + 384a^2bdw^3)$$
$$\cos\phi\cos\psi\sin\phi + (144abc^2d^2w - 24ab^3d^2w + 24abd^2w^3)\cos^2\psi$$
$$\sin\phi + (120a^3w^4 - 648a^3b^2w^2)\cos\psi\sin^2\phi + (72a^2c^2dw^2 - 288a^2$$
$$b^2dw^2 + 48a^2dw^4)\cos\psi\sin^2\phi - 144a^3bw^3\sin^3\phi + (48a^2bc^3d$$
$$- 192a^2b^3cd + 288a^2bcdw^2)\cos^2\psi\sin\psi + (192abc^3d^2 - 48ab^3cd^3$$
$$+ 144abcd^2w^2)\cos\phi\sin\psi\sin\phi + (48a^2c^3dw - 576a^3b^2cdw + 192a^2$$
$$cdw^3)\cos\phi\sin\psi\sin\phi + (192ac^3d^2w - 144ab^2cd^2w + 48acd^2w^3)$$
$$\cos\psi\sin\psi\sin\phi - 288a^2bcdw^2\sin\psi\sin^2\phi + (48ac^4d^2 - 72ab^2c^2d^2$$
$$72ac^2d^2w^2)\cos\phi\sin^2\psi + 120c^4d^3\cos\psi\sin\phi - 144abc^2d^2w\sin\phi\sin\phi = 0$$

Bu sistem çözülürse, bu çözümlerden bir tanesi

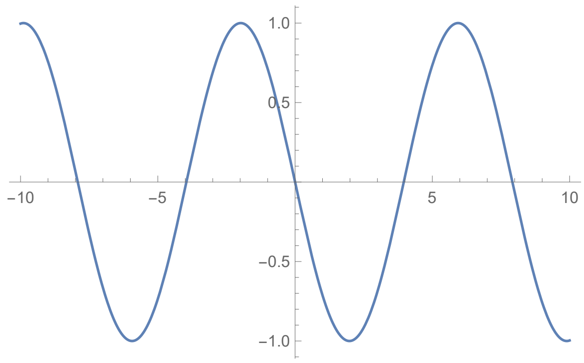
$$b = 0,\ d = -i,\ c = -\frac{i}{2^{1/3}a^{1/3}},\ w = -\frac{1}{2^{2/3}a^{1/3}}, \phi = -\frac{\pi}{2},\ \psi = \frac{\pi}{2} \tag{4.15}$$

biçimindedir. Burada, $a = 1$ seçilerek (4.11) denkleminde yazılırsa bir özel çözüm elde edilir

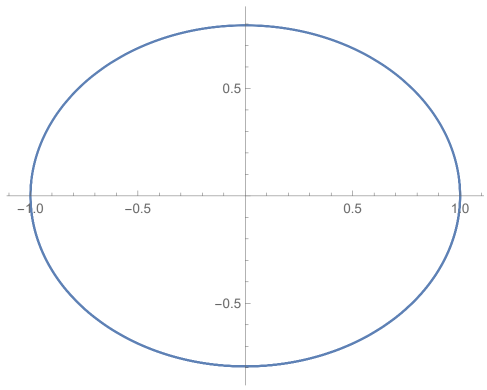
$$U(t) = -\sin\left[\frac{t}{2^{1/3}}\right] + i\sin\left[2^{2/3}t\right], \tag{4.16}$$

$$U'(t) = -\frac{\cos\left[\frac{t}{2^{1/3}}\right]}{2^{1/3}} + i2^{2/3}\cos\left[2^{2/3}t\right]. \tag{4.17}$$

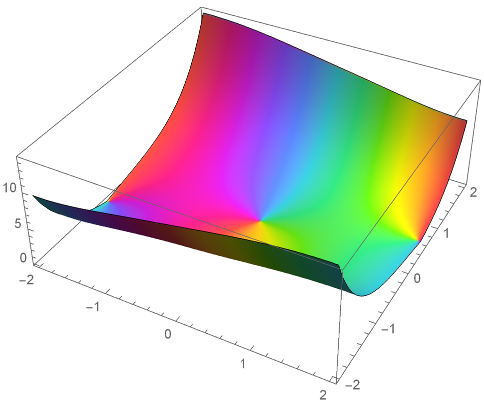
$U(t)$ ve $U(t) - U'(t)$ sırasıyla grafiği ve parametrik grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.3: (4.16) denkleminin 2D grafiğinin reel kısmı $-10 \leq t \leq 10$.



Şekil 4.4: (4.16)-(4.17)'nin reel kısmının parametrik grafiği $-10 \leq t \leq 10$.



Şekil 4.5: (4.16) denkleminin 3D grafiğinin imajineer kısmı $z \in [-2 - 2i, 2 + 2i]$.

4.3. Denkleminin AGM ile Alternatif Çözümü

$$U''(t) - 2U^3(t) = t, U(0) = 0,\ U'(0) = 1 \tag{4.18}$$

denklemini AGM ile çözelim.

Denklem homojen olmadığından yani denkleme etki eden dış kuvvet olduğundan çözüm bu kez

$$U(t) = bt + a\cos(\phi + tw) + d\cos(\phi + 2tw) \tag{4.19}$$

şeklinde olsun (Akbari ve ark., 2015). Burada a, b, d, w ve ϕ belirlenmesi gereken parametrelerdir. Bu parametreleri belirlemek için, çözüm kabul edilen (4.19) ifadesinin U' ve U'' türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} U'(t) &= b - aw\sin(\phi + tw) - 2dw\sin(\phi + 2tw), \\ U''(t) &= -aw^2\cos(\phi + tw) - 4dw^2\cos(\phi + 2tw) \end{aligned} \tag{4.20}$$

bulunur. (4.19) ve (4.20) denklemleri (4.18) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned} &- t - 2b^3t^3 - 6ab^2t^2\cos(\phi + tw) - aw^2\cos(\phi + tw) \\ &- 6a^2bt\cos^2(\phi + tw) - 2a^3\cos^3(\phi + tw) - 6b^2dt^2\cos(\phi + 2tw) \\ &- 4dw^2\cos(\phi + 2tw) - 12abdt\cos(\phi + tw)\cos(\phi + 2tw) \\ &- 6a^2d\cos^2(\phi + tw)\cos(\phi + 2tw) - 6bd^2t\cos^2(\phi + 2tw) \\ &- 6ad^2\cos(\phi + tw)\cos^2(\phi + 2tw) - 2d^3\cos^3(\phi + 2tw) \end{aligned} \tag{4.21}$$

elde edilir. Tekrar (4.21) denkleminin iki türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
&-1-6b^3t^2-12ab^2t\cos(\phi+tw)-6a^2b\cos^2(\phi+tw)\\
&-12b^2dt\cos(\phi+2tw)-12abd\cos(\phi+tw)\cos(\phi+2tw)\\
&-6bd^2\cos(\phi+2tw)+6ab^2t^2w\sin(\phi+tw)+aw^3\sin(\phi+tw)\\
&+12a^2btw\cos(\phi+tw)\sin(\phi+tw)+6a^3w\cos^2(\phi+tw)\cos(\phi+tw)\\
&+12abdtw\cos(\phi+2tw)\sin(\phi+tw)+12a^2dw\cos(\phi+tw)\\
&\cos(\phi+2tw)\sin(\phi+tw)+6ad^2w\cos^2(\phi+2tw)\sin(\phi+tw)\\
&+12b^2dt^2w\sin(\phi+2tw)+8dw^3\sin(\phi+2tw)+24abdtw\cos(\phi+tw)\\
&\sin(\phi+2tw)+12a^2dw\cos^2(\phi+tw)\sin(\phi+2tw)+24bd^2tw\cos(\phi+2tw)\\
&\sin(\phi+2tw)+24ad^2w\cos(\phi+tw)\cos(\phi+2tw)\sin(\phi+2tw)\\
&+12d^3w\cos^2(\phi+2tw)\sin(\phi+2tw)
\end{aligned}\tag{4.22}$$

ve

$$\begin{aligned}
&-12b^3t+\big(-12ab^2+6ab^2t^2w^2+aw^4\big)\cos(\phi+tw)+12a^2btw^2\\
&\cos^2(\phi+tw)+6a^3w^2\cos^3(\phi+tw)+\big(-12b^2d+24b^2dt^2w^2\\
&+16dw^4\big)\cos(\phi+2tw)+48bd^2tw^2\cos^2(\phi+2tw)+36a^2dw^2\cos^2(\phi+tw)\\
&\cos(\phi+2tw)+60abdtw^2\cos(\phi+tw)\cos(\phi+2tw)+54ad^2w^2\cos(\phi+tw)\\
&\cos^2(\phi+2tw)+24d^3w^2\cos^3(\phi+2tw)+24ab^2tw\sin(\phi+tw)+24a^2bw\\
&\cos(\phi+tw)\sin(\phi+tw)+24abdw\cos(\phi+2tw)\sin(\phi+tw)-12a^3w^2\\
&\cos(\phi+tw)\sin^2(\phi+tw)-12a^2dw^2\cos(\phi+2tw)\sin^2(\phi+tw)\\
&+48abdw\cos(\phi+tw)\sin(\phi+2tw)+48b^2dtw\sin(\phi+2tw)-12a^2btw^2\\
&\sin^2(\phi+tw)+48bd^2w\cos(\phi+2tw)\cos(\phi+2tw)-48abdtw^2\sin(\phi+tw)\\
&\sin(\phi+2tw)-48bd^2tw^2\sin^2(\phi+2tw)-48a^2dw^2\cos(\phi+tw)\sin(\phi+tw)\\
&\sin(\phi+2tw)-48ad^2w^2\cos(\phi+2tw)\sin(\phi+tw)\sin(\phi+2tw)-48ad^2w^2\\
&\cos(\phi+tw)\sin^2(\phi+2tw)-48d^3w^2\cos(\phi+2tw)\cos^2(\phi+2tw)
\end{aligned}\tag{4.23}$$

denklemleri bulunur. Bulduğumuz denklemlerde $t=0$ yazarak başlangıç koşulları ile birlikte

$$\begin{aligned}
&a\cos\phi + d\cos\phi = 0,\\
&b - aw\sin\phi - 2dw\sin\phi - 1 = 0,\\
&(-aw^2 - 4dw^2)\cos\phi - (2a^3 + 6a^2d + 6ad^2 + 2d^3)\cos^3\phi = 0,\\
&(aw^3 + 8dw^3)\sin\phi - (6a^2b - 12abd - 6bd^2)\cos^2\phi + (24a^2dw\\
&+ 30ad^2w + 6a^3w + 12d^3w)cos^2\phi\sin\phi - 1 = 0,\\
&(aw^4 - 12ab^2 - 12b^2d + 16dw^4)\cos\phi + (24a^2bw + 72abdw\\
&+ 48bd^2w)\cos\phi\sin\phi + (-12a^3w^2 - 60a^2dw^2 - 96ad^2w^2\\
&- 48d^3w^2)\cos\phi\sin^2\phi(6a^3w^2 + 36a^2dw^3 + 54ad^2w^2 + 24d^3w^2)\cos^3\phi = 0
\end{aligned} \tag{4.24}$$

denklem sistemi bulunur ve bu sistem çözülürse iki farklı durum söz konusudur.

Durum 1

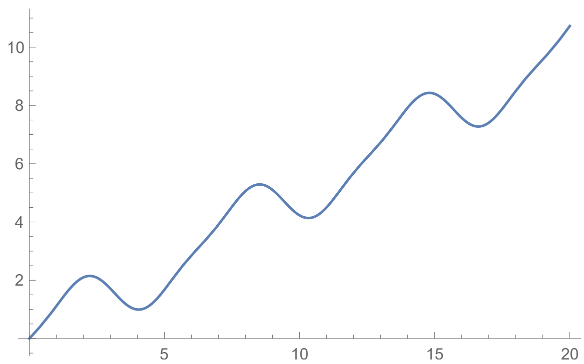
$$b = \frac{1 + 4w^2 - 3aw^3}{4w^2},\ d = \frac{-1 - aw^3}{8w^3},\ \phi = -\frac{\pi}{2},\ w = 1,\ a = 1$$

değerleri (4.19) denkleminde yazılırsa bir özel çözüm bulunur

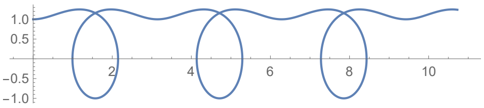
$$U(t) = \frac{t}{2} + \sin t + \frac{1}{4}\sin 2t, \tag{4.25}$$

$$U'(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \frac{1}{2}\cos 2t. \tag{4.26}$$

$U(t)$ ve $U(t) - U'(t)$ grafikleri şekildeki gibidir.



Şekil 4.6: (4.25) denkleminin 2D grafiği $0 \leq t \leq 20$.



Şekil 4.7: (4.25)-(4.26)'nin parametrik grafiği $0 \leq t \leq 20$.

Durum 2

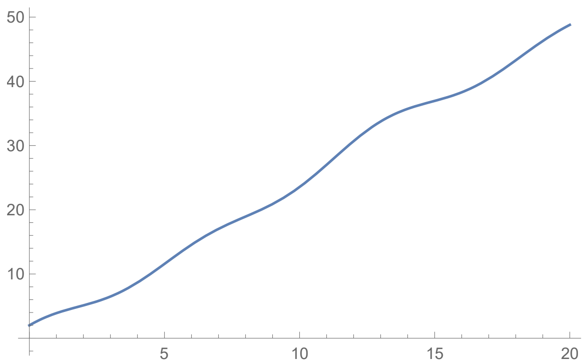
$$b = 1 + \frac{a^2}{((a+8d)^2)^{2/3}} + \frac{10ad}{((a+8d)^2)^{2/3}} + \frac{16d^2}{((a+8d)^2)^{2/3}},$$
$$w = -\frac{1}{(a^2+16ad+64d^2)^{1/6}}, \ \phi = 0, \ a = 1, \ d = 1$$

değerleri (4.19) denkleminde yazılırsa bir özel çözüm bulunur

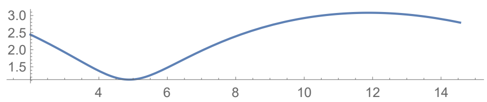
$$U(t) = t + 3^{1/3}t + \cos\left[\frac{t}{3^{2/3}}\right] + \cos\left[\frac{2t}{3^{2/3}}\right], \tag{4.27}$$

$$U'(t) = 1 + 3^{1/3} - \frac{\sin\left[\frac{t}{3^{2/3}}\right]}{3^{2/3}} - \frac{2\sin\left[\frac{2t}{3^{2/3}}\right]}{3^{2/3}}. \tag{4.28}$$

$U(t)$ ve $U(t) - U'(t)$ grafikleri şekildeki gibidir.



Şekil 4.8: (4.27) denkleminin 2D grafiği $0 \leq t \leq 20$.



Şekil 4.9: (4.27)-(4.28) denkleminin parametrik grafiği $0 \leq t \leq 6$.

4.4. (3+1)-Boyutlu Genelleştirilmiş KPBBM Denkleminin AGM ile Analizi

Dördüncü mertebeden lineer olmayan (3+1) boyutlu genelleştirilmiş KPBBM denklemi (Mahmud ve ark., 2023)

$$U_{tx} + \mu_1 U_{xx} + \mu_2 (UU_x)_x - \mu_3 U_{xxxt} + \mu_4 U_{yy} + \mu_5 U_{zz} = 0 \tag{4.29}$$

formuna sahiptir. Burada, $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ ve μ_5 reel sabitlerdir ve $U(x, y, z, t)$ bir dalganın genliği fonksiyonunu belirtir.

$$\begin{aligned} &K = \delta_1 x + \delta_2 y + \delta_3 z + \delta_4 t, \\ &U = U(K),\ U' = \frac{dU}{dK},\ U'' = \frac{d^2U}{dK^2}, \dots \end{aligned} \tag{4.30}$$

dönüşümü (4.29) denklemine uygulanırsa

$$(\delta_1\delta_4 + \mu_1\delta_1^2 + \mu_4\delta_2^2 + \mu_5\delta_3^2)U'' + \mu_2\delta_1^2(UU')' - \mu_3\delta_4\delta_1^3 U^{(4)} = 0 \tag{4.31}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin iki kez integrali alınırsa

$$2(\delta_1\delta_4 + \mu_1\delta_1^2 + \mu_4\delta_2^2 + \mu_5\delta_3^2)U + \mu_2\delta_1^2 U^2 - 2\mu_3\delta_4\delta_1^3 U'' = 0 \tag{4.32}$$

bulunur. Burada denklemi daha basite indirgemek için katsayılar

$$\begin{aligned} p &= 2(\delta_1\delta_4 + \mu_1\delta_1^2 + \mu_4\delta_2^2 + \mu_5\delta_3^2), \\ q &= \mu_2\delta_1^2, \\ r &= 2\mu_3\delta_4\delta_1^3 \end{aligned} \tag{4.33}$$

şeklinde seçilirse

$$G(t) = pU + qU^2 - rU'' = 0,\ U(0) = A,\ U'(0) = B \tag{4.34}$$

denklemi elde edilir. Elde edilen başlangıç değer probleminde dış kuvvet olmadığından çözüm

$$U(t) = e^{-bt}(a\cos(wt + \phi)) \tag{4.35}$$

şeklindedir. Kabul edilen çözümün türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} U'(t) &= ae^{-bt}(-b\cos(wt+\phi) - w\sin(wt+\phi)), \\ U''(t) &= ae^{-bt}((b^2-w^2)\cos(wt+\phi) + 2bw\sin(wt+\phi)) \end{aligned} \tag{4.36}$$

elde edilir. (4.35) ve (4.36) eşitlikleri (4.34) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &(ap - arb^2 + arw^2)e^{-bt}\cos(wt+\phi) + a^2qe^{-2bt} \\ &\cos^2(wt+\phi) + 2arbw\sin(wt+\phi) \end{aligned} \tag{4.37}$$

bulunur. Bulunan denklemin türevi alındığında

$$\begin{aligned} &(ab^3r - abp - 3abrw^2)e^{-bt}\cos(wt+\phi) + (3ab^2rw - apw \\ &- arw^3)e^{-bt}\sin(wt+\phi) - 2a^2wqe^{-2bt}\cos(wt+\phi)\sin(wt+\phi) \\ &- 2a^2bqe^{-2bt}\cos^2(wt+\phi) \end{aligned} \tag{4.38}$$

elde edilir. Elde edilen denklemlerde $t = 0$ yazarak başlangıç koşullarıyla birlikte aşağıdaki sistem elde edilir.

$$\begin{aligned} &a\cos\phi - A = 0, \\ &-ab\cos\phi - aw\sin\phi - B = 0, \\ &(-ab^2r + ap + arw^2)\cos\phi - 2abwr\sin\phi + a^2q\cos^2\phi = 0, \\ &(ab^3r - abp - 3abrw^2)\cos\phi + (3ab^2rw - apw - arw^3)\sin\phi \\ &- 2a^2bq\cos^2\phi - 2a^2wq\cos\phi\sin\phi = 0. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Bu sistem çözüldüğünde (4.34) denkleminin çözümündeki bilinmeyenler aşağıdaki gibi bulunur.

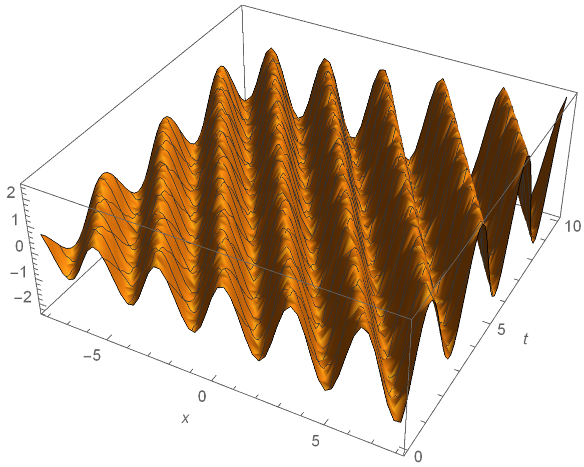
$$\begin{aligned} a &= \frac{\sqrt{-r(A^2(p+Aq) - B^2r)^3}}{\sqrt{4A^4(p+Aq)^3 - A^2B^2(8p^2+20Apq+11A^2q^2)r + 4B^4(p+2Aq)r^2}}, \\ b &= -\frac{A^2Bq}{2A^2(p+Aq) - 2B^2r}, \\ w &= -\frac{\sqrt{4A^4(p+Aq)^3 + A^2B^2(8p^2+20Apq+11A^2q^2)r - 4B^4(p+2Aq)r^2}}{2\sqrt{r(A^2(p+Aq)-B^2r)^2}}, \\ \phi &= \arctan\frac{\sqrt{4A^4(p+Aq)^3 - A^2B^2(8p^2+20Apq+11A^2q^2)r + 4B^4(p+2Aq)r^2}}{\sqrt{-r(A^2(p+Aq)-B^2r)^3}} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 1$ ve $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 1$ seçilirse $p = 8, q = 1, r = -2$ bulunur. Ayrıca, $A = 1$, $B = 1$, $y = 1$ ve $z = -1$ değerleri (4.35) denkleminde yazılırsa bir özel çözüm ve türevi

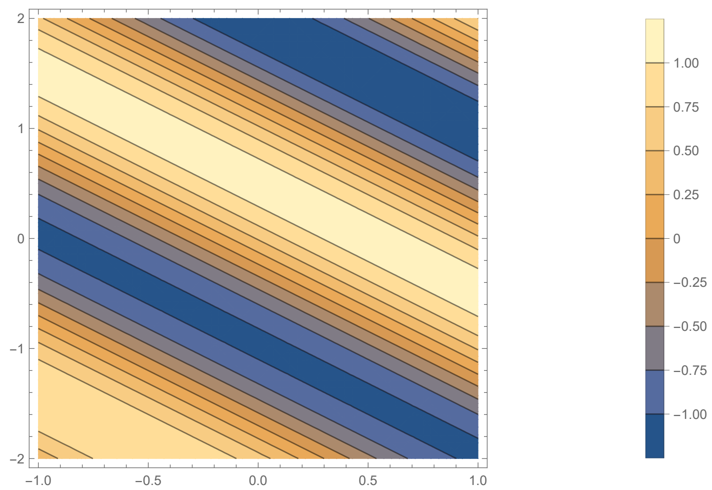
$$U(t) = 11\sqrt{\frac{22}{2221}}e^{\frac{1}{22}(t+x)}\cos\left[\frac{\sqrt{2221}t}{22} + \frac{\sqrt{2221}x}{22} - \operatorname{arccot}\left[11\sqrt{\frac{11}{4442}}\right]\right] \quad (4.40)$$

$$U'(t) = 11\sqrt{\frac{22}{2221}}e^{\frac{1}{22}(t+1)}\cos\left[\frac{\sqrt{2221}t}{22} + \frac{\sqrt{2221}}{22} - \operatorname{arccot}\left[11\sqrt{\frac{11}{4442}}\right]\right] \quad (4.41)$$

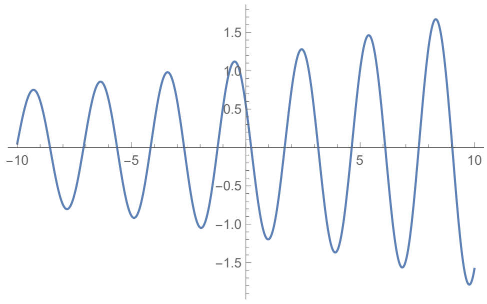
biçiminde bulunur. $U(t)$ ve $U(t) - U'(t)$ parametrik ve 3-boyutlu grafikleri şekildeki gibidir.



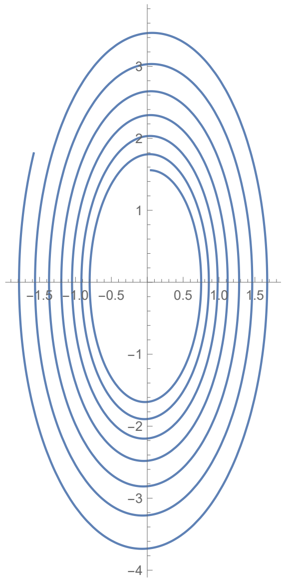
Şekil 4.10: (4.40) denkleminin 3D grafiği $0 \leq t \leq 10$ ve $-8 \leq x \leq 8$.



Şekil 4.11: (4.40) denkleminin 3D contour grafiği $-2 \leq t \leq 2$ ve $-1 \leq x \leq 1$.



Şekil 4.12: (4.41) denkleminin 2D grafiği $-10 \leq t \leq 10$.



Şekil 4.13: $U(t) - U'(t)$ denkleminin parametrik grafiği $-10 \leq t \leq 10$.

4.5. (3+1)-Boyutlu Genelleştirilmiş KPBBM Denkleminin EFM ile Analizi

Dördüncü mertebeden lineer olmayan (3+1) boyutlu genelleştirilmiş KPBBM denklemi (Mahmud ve ark., 2023)

$$(\delta_1\delta_4 + \mu_1\delta_1^2 + \mu_4\delta_2^2 + \mu_5\delta_3^2)U'' + \mu_2\delta_1^2(UU')' - \mu_3\delta_4\delta_1^3U^{(4)} = 0 \tag{4.42}$$

biçimindedir. Sadeleştirme için denklemde katsayılar

$$\begin{aligned} a &= \delta_1\delta_4 + \mu_1\delta_1^2 + \mu_4\delta_2^2 + \mu_5\delta_3^2, \\ b &= \mu_2\delta_1^2, \\ c &= -\mu_3\delta_4\delta_1^3 \end{aligned} \tag{4.43}$$

şeklinde yazılırsa

$$aU'' + b(UU')' + cU^{(4)} = 0 \tag{4.44}$$

denklem şeklini alır. Şimdi de (4.44) denklemi EFM ile çözelim. Denklemin çözümü

$$U(\xi) = \frac{a_{-c}e^{-c\xi} + \cdots + a_d e^{d\xi}}{b_{-p}e^{-p\xi} + \cdots + b_q e^{q\xi}} \tag{4.45}$$

olsun. Ayrıca, $(UU')'$, U'' ve $U^{(4)}$ değerleri

$$\begin{aligned}
(UU')'(\xi) &= \frac{E_{-c}e^{(-4p-2c)\xi} + \cdots + E_d e^{(2d+4q)\xi}}{E_{-p}e^{-6p\xi} + \cdots + E_q e^{6q\xi}}, \\
U''(\xi) &= \frac{F_{-c}e^{(-c-3p)\xi} + \cdots + F_d e^{(d+3q)\xi}}{F_{-p}e^{-4p\xi} + \cdots + F_q e^{4q\xi}}, \\
U^{(4)}(\xi) &= \frac{D_{-c}e^{(-c-15p)\xi} + \cdots + D_d e^{(d+15q)\xi}}{D_{-p}e^{-16p\xi} + \cdots + D_q e^{16q\xi}}
\end{aligned} \tag{4.46}$$

olarak bulunur. $(UU')'$ ve $U^{(4)}$ ifadelerinin en düşük dereceli terimleri ele alınırsa

$$\begin{aligned}
(UU')'(\xi) &= \frac{E_{-c}e^{(-4p-2c)\xi} + \cdots}{E_q e^{6q\xi} + \cdots}, \\
U^{(4)}(\xi) &= \frac{D_{-c}e^{(-c-15p)\xi} + \cdots}{D_q e^{16q\xi} + \cdots}
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Burada, $(UU')'$ eşitliğinin her iki yanı $e^{-10p\xi}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
(UU')'(\xi) &= \frac{E_{-c}e^{(-14p-2c)\xi} + \cdots}{E_q e^{16q\xi} + \cdots}, \\
U^{(4)}(\xi) &= \frac{D_{-c}e^{(-c-15p)\xi} + \cdots}{D_q e^{16q\xi} + \cdots}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

elde edilir. En düşük kuvvetlerin dengelenmesiyle p ve c arasındaki ilişki

$$-14p - 2c = -c - 15p \text{ ise } p = c$$

olarak belirlenir. Benzer şekilde, $(UU')'$ ve $U^{(4)}$ ifadelerinin en yüksek dereceli terimleri ele alınırsa

$$\begin{aligned}
(UU')'(\xi) &= \frac{\cdots + E_d e^{(2d+4q)\xi}}{\cdots + E_q e^{6q\xi}}, \\
U^{(4)}(\xi) &= \frac{\cdots + D_d e^{(d+15q)\xi}}{\cdots + D_q e^{16q\xi}}.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Burada, $(UU')'$ eşitliğinin her iki yanı $e^{10q\xi}$ ile çarpılırsa

$$(UU')'(\xi) = \frac{\cdots + E_d e^{(2d+14q)\xi}}{\cdots + E_q e^{16q\xi}},$$
$$U^{(4)}(\xi) = \frac{\cdots + D_d e^{(d+15q)\xi}}{\cdots + D_q e^{16q\xi}} \tag{4.50}$$

elde edlir. En yüksek kuvvetlerin dengelenmesiyle q ve d arasındaki ilişki

$$2d + 14q = d + 15q \text{ ise } q = d$$

olarak bulunur. Burada, $p = c = 1$ ve $d = q = 1$ alındığında (4.45) çözüm

$$U = \frac{e^{-x}a_{-1} + a_0 + e^x a_1}{e^{-x}b_{-1} + b_0 + e^x b_1} \tag{4.51}$$

biçimindedir. Bu çözümün U', U'', U''' ve U^4 türevleri (4.44) ana denkleminde yerine yazılır. Şimdi, $\exp\xi$ ifadesinin katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$ba_{-1}a_0b_{-1}^3 + aa_0b_{-1}^4 + ca_0b_{-1}^4 - ba_{-1}^2b_{-1}^2b_0 - aa_{-1}b_{-1}^3b_0 - ca_{-1}b_{-1}^3b_0 = 0,$$
$$2ba_0^2b_{-1}^3 + 4ba_{-1}a_1b_{-1}^3 + 4aa_1b_{-1}^4 + 16ca_1b_{-1}^4 - 3ba_{-1}a_0b_{-1}^2b_0 + aa_0b_{-1}^3b_0$$
$$- 11ca_0b_{-1}^3b_0 + ba_{-1}^2b_{-1}b_0^2 - aa_{-1}b_{-1}^2b_0^2 + 11ca_{-1}b_{-1}^2b_0^2 - 4ba_1^2b_{-1}^2b_1 - 4a$$
$$a_{-1}b_{-1}^3b_1 - 16ca_{-1}b_{-1}^3b_1 = 0,$$
$$9ba_1a_0b_{-1}^3 + ba_0^2b_{-1}^2b_0 + 2ba_{-1}a_1b_{-1}^2b_0 + 11aa_1b_{-1}^3b_0 - ca_1b_{-1}^3b_0 - 3ba_{-1}$$
$$a_0b_{-1}b_0^2 - aa_0b_{-1}^2b_0 + 11ca_0b_{-1}^2b_0 + 2ba_{-1}^2b_0^3 + aa_{-1}b_{-1}b_0^3 - 11ca_{-1}b_{-1}b_0^3$$
$$- 13ba_{-1}a_0b_{-1}^2b_1 - 4aa_0b_{-1}^3b_1 - 76ca_0b_{-1}^3b_1 + 2ba_{-1}^2b_{-1}b_0b_1 - 7aa_{-1}b_{-1}^2$$
$$b_0b_1 + 77ca_{-1}b_{-1}^2b_0b_1 = 0,$$
$$8ba_1^2b_{-1}^3 + 13ba_1a_0b_{-1}^2b_0 - ba_0^2b_{-1}b_0^2 - 2ba_{-1}a_1b_0^2b_{-1} + 11aa_1b_{-1}^2b_0 + 11c$$
$$a_1b_{-1}^2b_0^2 + 2ba_{-1}^2b_0^3 - aa_0b_{-1}b_0^3 - ca_0b_{-1}b_0^3 + aa_{-1}b_0^4 + ca_{-1}b_0^4 - 6ba_0^2b_{-1}^2b_1$$
$$- 12ba_{-1}a_1b_{-1}^2b_1 + 4aa_1b_{-1}^3b_1 - 176ca_1b_{-1}^3b_1 - 14ba_{-1}a_0b_{-1}b_0b_1 - 13aa_0$$
$$b_{-1}^2b_0b_1 + 47ca_0b_{-1}^2b_0b_1 + 9ba_{-1}^2b_0^2b_1 + 2aa_{-1}b_0^2b_1 - 58ca_{-1}b_{-1}b_0^2b_1 + 4b$$
$$a_{-1}^2b_{-1}b_1^2 - 4aa_{-1}b_{-1}^2b_1^2 + 176ca_{-1}b_{-1}b_1^2 = 0,$$

$$15ba_1^2b_{-1}^2b_0 + 5ba_0a_1b_0^2b_{-1} + 5aa_0b_{-1}b_0^3 + 5ca_1b_{-1}b_0^3 - 5ba_0a_1b_{-1}^2b_1$$
$$- 10ba_0^2b_{-1}b_0b_1 - 20ba_{-1}a_1b_{-1}b_0b_1 + 5aa_1b_{-1}^2b_0b_1 - 155ca_1b_{-1}^2b_0b_1$$
$$+ 5ba_{-1}a_0b_0^2b_1 - 10aa_0b_{-1}b_0^2b_1 - 10ca_0b_{-1}b_0^2b_1 + 5aa_{-1}b_0^3b_1 - 5ca_{-1}$$
$$b_0^3b_1 - 5ba_{-1}a_0b_1^2b_{-1} - 10aa_0b_{-1}^2b_1^2 + 230ca_0b_{-1}^2b_1^2 + 15ba_{-1}^2b_0b_1^2 + 5a$$
$$a_{-1}b_{-1}b_0b_1^2 - 155ca_{-1}b_{-1}b_0b_1^2 = 0,$$
$$9ba_1^2b_0^2b_{-1} + ba_1a_0b_0^3 + aa_1b_0^4 + ca_1b_0^4 + 4ba_1^2b_{-1}^2b_1 - 14ba_0a_0b_{-1}b_0b_1$$
$$- ba_0^2b_0^2b_1 - 2ba_{-1}a_1b_0^2b_1 + 2aa_1b_{-1}b_0^2b_1 - 58ca_1b_{-1}b_0^2b_1 - aa_0b_0^3b_1$$
$$- ca_0b_0^3b_1 - 6ba_0^2b_1^2b_{-1} - 12ba_{-1}a_1b_1^2b_{-1} - 4aa_1b_1^2b_{-1}^2 + 176ca_1b_1^2b_{-1}^2$$
$$+ 13ba_{-1}a_0b_0b_1^2 - 13aa_0b_{-1}b_0b_1^2 + 47ca_0b_{-1}b_0b_1^2 + 11aa_{-1}b_0^2b_1^2 + 11a$$
$$a_{-1}b_0^2b_1^2 + 8ba_{-1}^2b_1^3 + 4aa_{-1}b_1^3b_{-1} - 176ca_{-1}b_1^3b_{-1} = 0,$$
$$2ba_1^2b_0^3 + 2ba_1^2b_{-1}b_0b_1 - 3ba_0a_1b_0^2b_1 - aa_1b_0^3b_1 - 11ca_1b_0^3b_1 - 13ba_0$$
$$a_1b_{-1}b_1^2 + ba_0^2b_0b_1^2 + 2ba_{-1}a_1b_0b_1^2 - 7aa_1b_{-1}b_0b_1^2 + 77ca_1b_{-1}b_0b_1^2 - a$$
$$a_0b_0^2b_1^2 + 11ca_0b_0^2b_1^2 + 9ba_{-1}a_0b_1^3 - 4aa_0b_1^3b_{-1} - 76ca_0b_1^3b_{-1} + 11aa_{-1}$$
$$b_1^3b_0 - ca_{-1}b_1^3b_0 = 0,$$
$$ba_1^2b_0^2b_1 - 4ba_1^2b_{-1}b_1^2 - 3ba_0a_1b_0b_1^2 - aa_1b_0^2b_1^2 + 11ca_1b_0^2b_1^3 + 2ba_0^2b_1^3$$
$$+ 4ba_{-1}a_1b_1^3 - 4aa_1b_1^3b_{-1} - 16ca_1b_1^3b_{-1} + aa_0b_1^3b_0 - 11ca_0b_1^3b_0 + 4a$$
$$a_{-1}b_1^4 + 16ca_{-1}b_1^4 = 0,$$
$$- ba_1^2b_0b_1^2 + ba_0a_1b_1^3 - aa_1b_1^3b_0 - ca_1b_1^3b_0 + aa_0b_1^4 + ca_0b_1^4 = 0$$

sistemi elde edilir. Bu (4.51) denkleminin bir özel çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{-ab_{-1} - cb_{-1}}{b}, \quad & a_0 &= \frac{-ab_0 + 5cb_0}{b}, \\ a_1 &= -\frac{(a+c)b_0^2}{4bb_{-1}}, & b_1 &= \frac{b_0^2}{4b_{-1}}. \end{aligned} \tag{4.52}$$

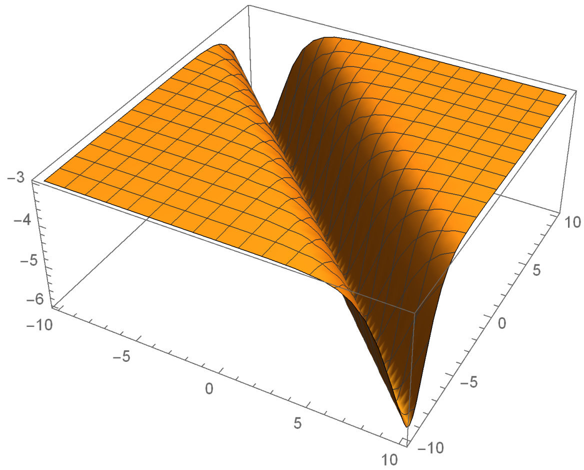
Burada, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 1$ ve $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 1$ seçilirse $a = 4,\ b = 1,\ c = -1$ bulunur. Ayrıca, $b_{-1} = 1,\ b_0 = 1,\ y = 1,\ z = -1$ değerleri (4.51) denkleminde yazılırsa bir özel çözüm

$$U = \frac{3(4 + e^{t+x}(12 + e^{t+x}))}{(2 + e^{t+x})^2} \tag{4.53}$$

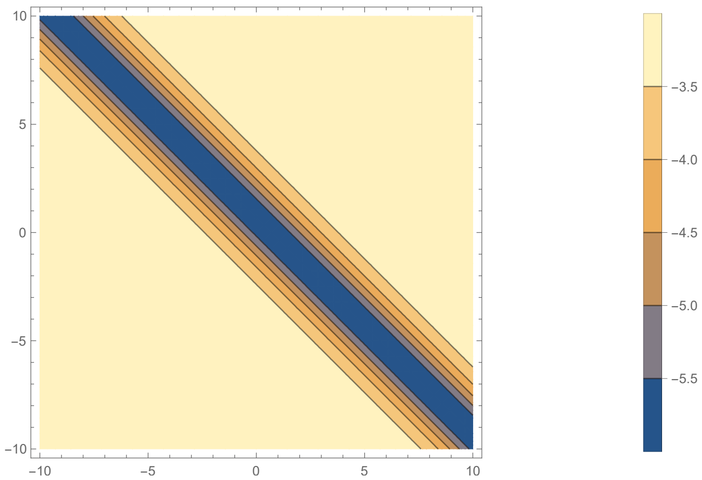
ve türevi

$$U' = \frac{48e^{t+1}}{(2+e^{t+1})^3} - \frac{24e^{2(t+1)}}{(2+e^{t+1})^3} \tag{4.54}$$

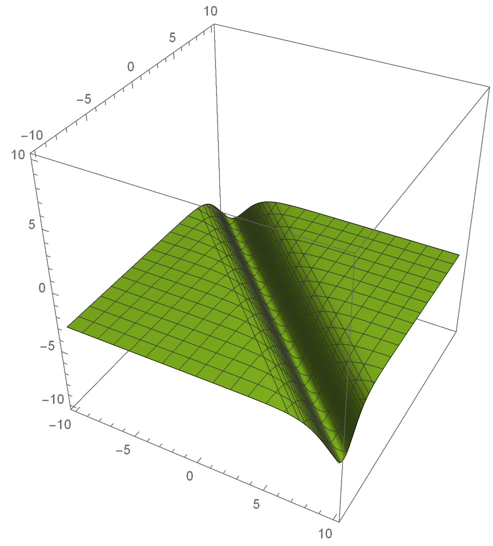
olarak elde edilir. $U(t)$ ve $U(t) - U'(t)$ grafikleri aşağıda verilmiştir.



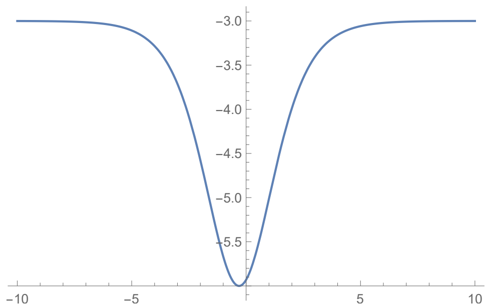
Şekil 4.14: (4.53) denkleminin 3D grafiği $-10 \le t \le 10$ ve $-10 \le x \le 10$.



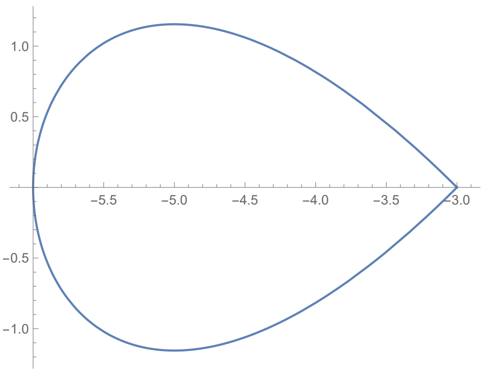
Şekil 4.15: (4.53) denkleminin 3D contour grafiği $-10 \le t \le 10$ ve $-10 \le x \le 10$.



Şekil 4.16: (4.53) denkleminin farklı 3D grafiği $-10 \leq t \leq 10$, $-10 \leq x \leq 10$ ve $-10 \leq U \leq 10$.



Şekil 4.17: U' denkleminin 2D grafiği $-10 \leq t \leq 10$.



Şekil 4.18: (4.53)- (4.54) denkleminin parametrik grafiği $-10 \leq t \leq 10$.

4.6. (3+1)-Boyutlu gKdVZK Denkleminin AGM ile Analizi

Bu kısımda, (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş KdVZK denklemini ele alacağız. Bu problem için elde elde edilen çözümler ve kullanılan referanslar için (Mahmud ve ark., 2023a) bakılabilir.

$$U_t + \alpha U^2 U_x + \tau U_{xxx} + l(U_{yy} + U_{zz})_x = 0. \tag{4.55}$$

Burada, $U(x, y, z)$ dalgayı tanımlar ve α, τ ve l reel sabitleri ise sırasıyla sıcak izotermal, sıcak adyabatik sıvı ve soğuk hareketsiz organizmaları tanımlayan reel sabitlerdir. Şimdi, (4.55) denklemini AGM ile çözelim.

$$\xi = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 t, U = U(\xi) \tag{4.56}$$

dönüşümleriyle birlikte (4.55) kısmi diferansiyel denklemi

$$\alpha\alpha_1 U^2 U' + (\tau\alpha_1^3 + l\alpha_2^2\alpha_1 + \alpha_3^2\alpha_1)U''' + \alpha_4 U' = 0 \tag{4.57}$$

bayağı diferansiyel denklemine dönüşür. Bu denklemin integrali alınırsa

$$\alpha\alpha_1 U^3 + 3(\tau\alpha_1^3 + l\alpha_2^2\alpha_1 + \alpha_3^2\alpha_1)U'' + 3\alpha_4 U = 0 \tag{4.58}$$

bulunur. Burada denklemi daha basite indirgemek adına

$$\begin{aligned} d &= \alpha\alpha_1, \\ f &= 3(\tau\alpha_1^3 + l\alpha_2^2\alpha_1 + \alpha_3^2\alpha_1), \\ g &= 3\alpha_4 \end{aligned} \tag{4.59}$$

alınırsa

$$H(\xi) = dU^3 + fU'' + gU = 0, U(0) = C, U'(0) = D \tag{4.60}$$

denklemi elde edilir. Dış kuvvet olmadığından denklemin çözümü

$$U(\xi) = ae^{-b(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 t)} \cos(w(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 t) + \phi) \tag{4.61}$$

şeklinde kabul edilir. (4.61) denkleminin türevleri $t = \xi$ alındığında

$$\begin{aligned} U'(t) &= ae^{-bt}(-b\cos(wt+\phi) - w\sin(wt+\phi)), \\ U''(t) &= ae^{-bt}((b^2-w^2)\cos(wt+\phi) + 2bw\sin(wt+\phi)) \end{aligned} \tag{4.62}$$

bulunur. Bu (4.61) denklemi (4.60) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned} &d(e^{-3bt}a^3\cos^3(wt+\phi)) + f(ae^{-bt}((b^2-w^2)\cos(wt+\phi) \\ &+ 2bw\sin(wt+\phi)) + g(ae^{-bt}\cos(wt+\phi)) \end{aligned} \tag{4.63}$$

elde edilir. (4.63) ifadesinin türevi alınırsa

$$\begin{aligned} &(3abw^2f - ab^3f - agb)e^{-bt}\cos(wt+\phi) + (aw^3f - 3ab^2wf \\ &- agw)e^{-bt}\sin(wt+\phi) - 3a^3dwe^{-3bt}\cos^2(wt+\phi)\sin(wt+\phi) \\ &- 3a^3bde^{-3bt}\cos^3(wt+\phi) \end{aligned} \tag{4.64}$$

bulunur. Bulunan denklemlerde $t = 0$ yazarak başlangıç koşulları ile birlikte

$$\begin{aligned} &a\cos\phi - C = 0, \\ &-ab\cos\phi - aw\sin\phi - D = 0, \\ &(ab^2f + ag - afw^2)\cos\phi + 2abwf\sin\phi + a^3d\cos^3\phi = 0, \\ &(-ab^3f - abg + 3abfw^2)\cos\phi + (-3ab^2fw - agf \\ &+ afw^3)\sin\phi - 3a^3bd\cos^3\phi - 3a^3dw\cos^2\phi\sin\phi = 0 \end{aligned} \tag{4.65}$$

sistemi elde edilir. Bu halde, (4.61) denkleminin çözümündeki katsayılar

$$\begin{aligned} a &= C\sec\phi, \\ b &= \frac{-\sec\phi(D\cos\phi + Cw\sin\phi)}{C}, \\ f &= -\frac{C^2Dg\cos^3\phi}{D^3\cos^3\phi + C^3w^3\cos^2\phi\sin\phi + C^3w^3\sin^3\phi}, \\ d &= -\frac{gw^2(D\cos\phi + Cw\sin\phi)}{D^3\cos^3\phi + C^3w^3\cos^2\phi\sin\phi + C^3w^3\sin^3\phi} \end{aligned} \tag{4.66}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} &\phi = 0,\ C = 3,\ D = 1,\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1,\ d = 1, \\ &\alpha_4 = -3,\ f = 81,\ b = \frac{-1}{3},\ w = \frac{-1}{3}\ \alpha = 1,\ \tau = 1,\ l = 1 \end{aligned} \tag{4.67}$$

olarak seçilirse (4.60) denkleminin bir özel çözüm ve türevi

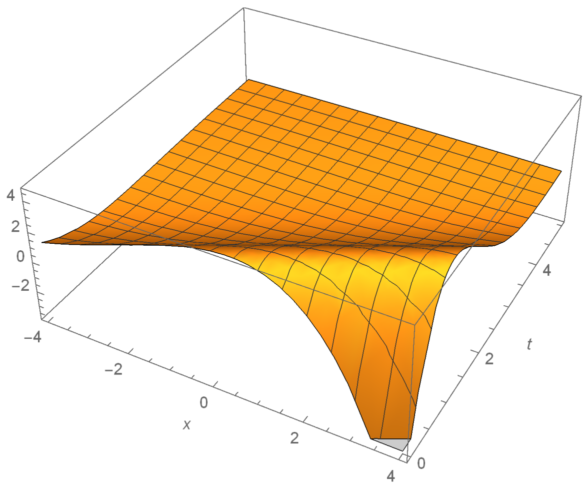
$$U(\xi) = 3e^{-\xi}\cos\xi, \tag{4.68}$$

$$U'(\xi) = -3e^{-\xi}(\cos\xi + \sin\xi) \tag{4.69}$$

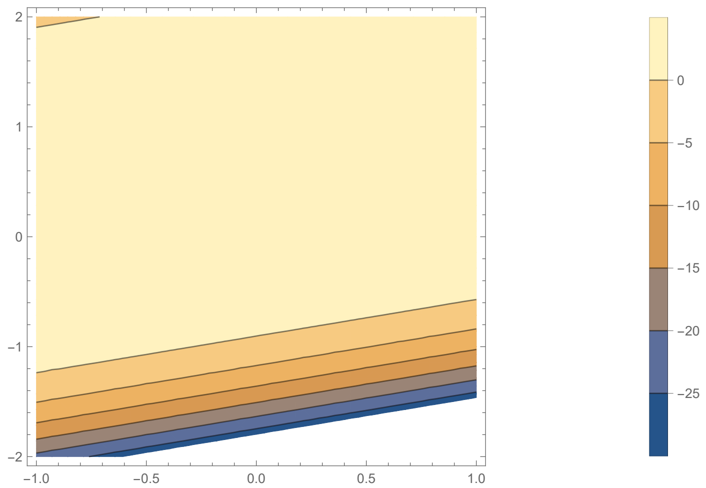
olarak elde edilir. Burada, (4.56) değişkenine dönülürse

$$U(x,y,z,t) = 3e^{\frac{1}{3}(x+y+z-3t)}\cos(t - \frac{x}{3} - \frac{y}{3} - \frac{z}{3}) \tag{4.70}$$

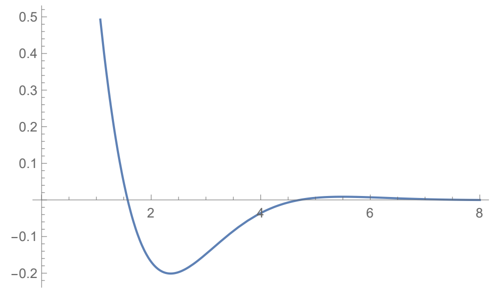
olarak elde edilir. sırasıyla $U(x,y,z,t)$ çözümünün 3D ve contour grafiği ve $U(\xi) - U'(\xi)$ parametrik grafikleri aşağıda verilmiştir.



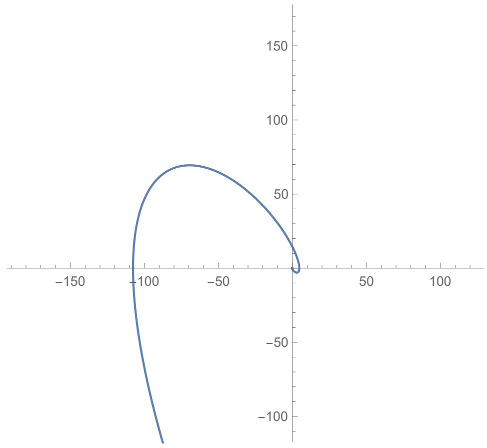
Şekil 4.19: (4.70) denkleminin 3D grafiği $0 \le t \le 10$ ve $-4 \le x \le 4$.



Şekil 4.20: (4.70) denkleminin 3D contour grafiği $-1 \le x \le 1$ ve $-2 \le t \le 2$.



Şekil 4.21: (4.68) denkleminin 2D grafiği $0 \leq \xi \leq 8$.



Şekil 4.22: (4.68)-(4.69) denkleminin parametrik grafiği $-10 \leq \xi \leq 10$.

5. TARTIŞMA

Bu tezde, dört farklı problem AGM ile bir problemd e EFM ile çözülmüştür. Problemlere AGM ve EFM metotları uygulanırken beklenen ve beklenilmeyen sonuçlar tartışılacaktır. Sağ tarafsız bir denkleme AGM uygulandığında yaklaşık çözümleri bulmada AGM etkili bir yöntemdir. (4.1) denkleminin AGM ile çözümü (4.8) ile verilmiştir. (4.8) çözümü (4.1) denkleminin bir yaklaşık çözümüdür.

Çalışılan denklemde sağ tarafın polinom olması halinde (4.2) olarak kabul edilen çözümün katsayıları belirlendiğinde elde edilen (4.16) çözümü (4.10) denkleminin başlangıç şartlarını sağlamıyor fakat (4.16) çözümünün reel ve imajineer kısımları kısmı olarak (4.10) denkleminin başlangıç şartlarını sağlıyor. AGM metodundaki bu dezavantajı ortadan kaldırmak için (4.11) çözümü yerine (4.19) ifadesi çözüm olarak kabul edilir. Bu halde, (4.18) denkleminin yaklaşığını veren çözüm (4.25) ile temsil edilir. Ayrıca, KPBBM (4.34) denkleminin AGM ile çözümü (4.35) olarak kabul edilerek yaklaşık çözümü (4.40) ile verilmiştir. gKdVZK (4.60) denkleminin AGM ile çözümü (4.61) olarak kabul edilerek yaklaşık çözümü (4.70) ile verilmiştir.

EFM metodu (4.44) KPBBM denklemine uygulandı. (4.44) denkleminin aday çözümü (4.51) olarak kabul edildi. Katsayılara bağlı olarak, bir denklemi sağlayan özel çözüm (4.51) denklemi ile verildi. (4.44) denklemini sağlayan bir özel çözüm (4.53) olarak bulundu. EFM metodu problemlere uygulanırken çözüm olarak kabul edilen denklemin pay kısmındaki katsayılar payda kısmında bulunan katsayılarla doğru orantılı olabilir. Bu durumda, beklenen çözüm veya yaklaşık çözüm yerine sabit çözüm elde edilebilir. Fakat, EFM ile elde edilen çözüm üzerinde çalışılan denklemi genellikle sağlıyor.

6. SONUÇLAR

AGM (4.1), (4.10), (4.29) ve (4.55) denklemlerine uygulandı. Ayrıca, (4.29) denklemine EFM uygulandı. Bazı yeni tam ve yaklaşık çözümler bu kısmında belirtilmiştir. AGM ile (4.1), (4.10), (4.18), (4.34) ve (4.60) denklemlerinin yaklaşık çözümleri bulundu. Ayrıca, (4.44) denkleminin EFM metodu ile tam çözümü elde edildi. Elde edilen tüm çözümlerin 2D-3D boyutlu ve contour grafikleri Bulgular kısmında verilmiştir.

7. ÖNERİLER

AGM ile tam çözüm yerine yaklaşık çözümler bulundu. AGM tam çözüm vermediği için çok kullanışlı değildir yorumu yapılabilir. AGM metodu eğer ele alınan çözüm salınımlı çözümlere sahipse kullanılabilir.

Hem AGM hem de EFM metotları yüksek mertebeli denklemler için oldukça uzun cebirsel işlemler gerektirebilir. EFM ile üzerinde çalışılan denklemin soliton çözümü bulunabilir. Burada, ele alınan problemlere uygulanan yöntemlerden fakl yöntemler tercih edilebilir.

KAYNAKLAR

Akbari, M. R., Ganji, D. D., Rostami, A. K., & Nimafar, M. (2015). Solving nonlinear differential equation governing on the rigid beams on viscoelastic foundation by AGM. *Journal of Marine Science and Application*, 14, 30-38.

Alıcı, H. and Tanrıverdi, T. (2020). General solution of the Schrödinger equation for some trigonometric potentials. *Journal of Mathematical Chemistry*, 58 (5), 1041–1057.

Alıcı, H. and Tanrıverdi, T. (2020). General Solution of the Schrödinger Equation for Some Hyperbolic Potentials. *Few-Body Systems*, 61 (4), 41.

Baskonus, H. M., Mahmud, A. A., Muhamad, K. A., Tanrıverdi, T., and Gao, W. (2022). Studying on Kudryashov-Sinelshchikov dynamical equation arising in mixtures liquid and gas bubbles. *Thermal Science*, 26(2 Part B), 1229-1244.

Baskonus, H. M., Mahmud, A. A., Muhamad, K. A., and Tanrıverdi, T. (2022). A study on Caudrey–Dodd–Gibbon–Sawada–Kotera partial differential equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45(14), 8737-8753.

Biz, A. (2019). *Kısmi Diferansiyel Denklemlerde Diferansiyel Dönüşüm Metodu* [Yayımlanmamış], Harran Üniversitesi.

Chakraverty, S., Mahato, N., Karunakar, P., & Rao, T. D. (2019). *Advanced numerical and semi-analytical methods for differential equations*. John Wiley & Sons.

Davis, H. T. (1960). *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*. Dover.

Debnath, L., (2005). *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Boston:Birkhäuser.

Hoşer, D. (2023). *Basit Denklem Metodu ve Uygulamaları* [Yayımlanmamış]. Harran Üniversitesi.

İşleyen, D. (2024). *Bazı Denklemlerin Mittag-Leffler Fonksiyonu ile Çözümü* [Yayımlanmamış]. Harran Üniversitesi.

Güneş, M. H. (2021). *Rabinovich-Fabrikant sisteminin Mittag-Leffler fonksiyonlarıyla çözümü* [Yayımlanmış yüksek lisans tezi]. Harran Üniversitesi.

Hastings, S. P. and McLeod, J. B. (2011). *Classical methods in ordinary differential equations: with applications to boundary value problems* (Vol. 129). American Mathematical Soc.

He, J. H., & Wu, X. H. (2006). Exp-function method for nonlinear wave equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 30(3), 700-708.

Logan, J. D. (2008). *An introduction to nonlinear partial differential equations*. John Wiley and Sons.

Mahmud, A. A. (2023). *Application of three different methods to several nonlinear partial differential equations modeling certain scientific phenomena* [Unpublished]. Harran University.

Mahmud, A. A., Baskonus, H. M., Tanriverdi, T., and Muhamad, K. A. (2023). Optical solitary waves and soliton solutions of the (3+ 1)-dimensional generalized Kadomtsev–Petviashvili–Benjamin–Bona–Mahony equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 63(6), 1085-1102.

Mahmud, A. A., Muhamad, K. A., Tanriverdi, T., and Baskonus, H. M. (2024). An investigation of Fokas system using two new modifications for the trigonometric and hyperbolic trigonometric function methods. *Optical and Quantum Electronics*, 56(5), 717.

Mahmud, A. A., Tanriverdi, T., Muhamad, K. A., & Baskonus, H. M. (2024). An investigation of the influence of time evolution on the solution structure using hyperbolic trigonometric function methods. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 10(4), 137.

Mahmud, A. A., Tanriverdi, T., Muhamad, K. A., and Baskonus, H. M. (2023). Characteristic of ion-acoustic waves described in the solutions of the (3+ 1)-dimensional generalized Korteweg-de Vries-Zakharov-Kuznetsov equation. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 22(2), 36-48.

Mahmud, A. A., Tanrıverdi, T., Muhamad, K. A., and Baskonus, H. M., (2023). Structure of the analytic solutions for the complex non-linear $(2 + 1)$-dimensional conformable time-fractional Schrödinger equation by. *Thermal Science*, 27(1), 211-225.

Mahmud, A. A., Tanriverdi, T., and Muhamad, K. A. (2023). Exact traveling wave solutions for (2+ 1)-dimensional Konopelchenko-Dubrovsky equation by using the hyperbolic trigonometric functions methods. *Int. J. Math. Comput. Eng*, 1(1), 1-14.

Merca, M., and Tanrıverdi, T. (2013). An asymptotic formula of cosine power sums. *Le Matematiche*, 68(1), 131-136.

Muhamad, K. A. (2023). *A study on some nonstandard partial differential equations* [Unpublished]. Harran University.

Muhamad, K. A., Tanriverdi, T., Mahmud, A. A., and Baskonus, H. M. (2023). Interaction characteristics of the Riemann wave propagation in the (2+ 1)-dimensional generalized breaking soliton system. *International Journal of Computer Mathematics*, 100(6), 1340-1355.

Podlubny, I. (1998). *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications* (Vol. 198). Elsevier.

Tanrıverdi, T. (2001). *Boundary value problems in ODE*[Unpublished]. University of Pittsburgh.

Tanrıverdi, T. (2009). Differential equations with contour integrals. *Integral Transforms and Special Functions*, 20 (2), 119-125.

Tanrıverdi, T. (2009). Contour integrals associated differential equations, *Mathematical and Computer Modelling*, 49 (3-4), 453-462.

Tanrıverdi, T. (2012). Reformulation of Shapiro's inequality. *International Mathematical Forum*, 7 (43), 2125-2130.

Tanrıverdi, T. (2012). Reverse Shapiro Type Inequality. *Int. Journal of Math. Analysis*, 6(38), 1871-1875.

Tanrıverdi, T. (2017). Oscillating Solutions of the Lane-Emden Equation for Polytropic Indices m = 0 and 1. *British J. Math. & Compute. Sci.*, 20(3), 1-5.

Tanrıverdi, T. (2018). An unnoticed way of obtaining the Binet form for Fibonacci numbers. *New Trends in Mathematical Sciences*, 6 (2), 97-101.

Tanrıverdi, T. (2018). Evaluating Sine and Cosine Type Integrals. *IJASM*, 5(2), 11-13.

Tanriverdi, T., and Ağirağaç, N. (2018). Differential transform applied to certain ode. *Advances in Differential Equations and Control Processes*, 19(3), 213-235.

Tanrıverdi, T. (2019). Classical way of looking at the Lane-Emden equation. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.*, 68 (1), 271-276.

Tanrıverdi, T. (2019). A Specific Sturm-Liouville Differential Equation. *Thermal Science*, 23(1), S47-S56.

Tanrıverdi, T. (2019). Schrödinger equation with potential function vanishing exponentially fast. *Journal of Taibah University for Science*, 13 (1), 639–643.

Tanrıverdi, T. (2021). The limit of the Riemann zeta function and its nontrivial zeros. *arXiv preprint, arXiv:1902.06695 [math.GM].*

Tanrıverdi, T. (2021). Existence of self-similar solutions to Smoluchowski's coagulation equation with product kernel. *Turkish Journal of Mathematics*, 44 (5), 1660-1672.

Tanrıverdi, T., Baskonus, H. M., Mahmud, A. A., and Muhamad, K. A. (2021). Explicit solution of fractional order atmosphere-soil-land plant carbon cycle system. *Ecological Complexity*, 48, 100966.

Tanrıverdi, T. and Mcleod, J. B. (2007). Generalization of the eigenvalues by contour integrals. *Appl. Math. Comput.*, 189(2), 1765-1773.

Tanrıverdi, T. and Mcleod, J. B. (2008). The analysis of contour integrals. *Abstr. Appl. Anal.*, Article ID 765920, 12 pages.

Tanrıverdi, T. and Mcleod, J. B. (2010). The Fanno model for turbulent compressible flow. *Journal of Differential Equations*, 249(12), 2955-2963.

Şap, A. (2024). *Sinüs-Gordon Açılım Metodu ve Uygulamaları* [Yayımlanmamış]. Harran Üniversitesi.

Waltman, P. (1983). *Competition models in population biology*. Society for industrial and applied mathematics.

Whitham, G. B. (1974). *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı **:** Esma KARASAKAL
Uyruğu **:** T.C.

EĞİTİM

Derece		**Adı**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Tes-İş Anadolu Lisesi, Şanlıurfa	2017
Üniversite	:	Harran Üni. Fen-Edb. Fak. Matematik, Şanlıurfa	2021
Yüksek Lisans	:	Harran Üni. Matematik Bölümü, Şanlıurfa	2025

DENEYİM

Ünvan		**Adı**	**Bitirme Yılı**
Öğretmen	:	Ufuk Koleji, Şanlıurfa	2021-2022

UZMANLIK ALANI : Matematik

YABANCI DİLLER : İngilizce

YAYINLAR :

BİLDİRİLER : KARASAKAL, E., 2024.
A Second Order Equation Application of the Akbari- Ganji Method.
Ege 12th International Conference On Applied Sciences,
December 26 - 30, İzmir, Türkiye