



**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**AKBARI-GANJİ VE EXP FOKSİYON METODUNUN UYGULAMALARI
ÜZERİNE**

Firdevs GÜZEN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ŞANLIURFA
2025**

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ	iv
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	3
3. GEREÇ ve YÖNTEM	5
3.1. Akbari-Ganji Metodu	5
3.2. Exponansiyel Fonksiyon Metodu	7
4. BULGULAR	9
4.1. Duffing Denklemine AG Metodunun Uygulanması	9
4.2. KS Denklemine AG Metodunun Uygulanması	13
4.3. KdV Denklemine AG Metodunun Uygulanması	18
4.4. KdV Denkleminin EFM ile Çözümü	23
5. TARTIŞMA	30
6. SONUÇLAR	31
7. ÖNERİLER	32
KAYNAKLAR	33
ÖZGEÇMİŞ	36

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

AKBARİ-GANJİ VE EXP FOKSİYON METODUNUN UYGULAMALARI ÜZERİNE

Firdevs GÜZEN

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Tanfer TANRIVERDİ

Yıl: 2025, Sayfa: 36

Literatürde, birçok gerçek yaşam problemini diferansiyel denklemlerle modellemek mümkündür. Bu diferansiyel denklemler lineer veya lineer olmayan tipte olabilir. Modellenen mevcut diferansiyel denklemlerin bir çözümü olup olmadığını bilmek çok önemlidir. Bir çözüm varsa, bir çözüm bulmak her zaman kolay olmayabilir. Modellenen denklemin bir çözümü varsa, modellenen denklemin kesin ve yaklaşık çözümlerini bulmak için literatürde çeşitli yöntemler vardır. Burada, tam veya yaklaşık çözümlere ulaşmak için Akbari-Ganji yöntemi ve Exp fonksiyon yöntemi kullanılacaktır. Ayrıca, elde edilen çözümler grafiksel olarak da verilecektir.

ANAHTAR KELİMELER: Akbari-Ganji yöntemi, Exp fonksiyon yöntemi, Diferansiyel denklemler, yaklaşık çözüm, tam çözüm

ABSTRACT

MSc Thesis

ON APPLICATIONS OF AKBARI-GANJİ AND EXP FUNCTION METHOD

Firdevs GÜZEN

**Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Tanfer TANRIVERDİ

Year: 2025, Page: 36

In the literature, it is possible to model many real-life problems with differential equations. These differential equations can be linear or non linear. If the modelled equation has a solution, there are several methods to find their exact and approximate solutions of the modelled equation. Here, the Akbari-Ganji method and the Exp function technique are used to reach exact or approximate solutions. In addition, the obtained solutions will be given graphically.

KEY WORDS: Akbari-Ganji method, Exp function method, differential equations, approximate solutions, exact solutions

TEŞEKKÜR

Öncelikle, tez çalışmamda bana rehberlik eden, bilgisi ve tecrübesiyle tezime yön veren danışmanım Sayın Prof. Dr. Tanfer TANRIVERDİ'ye en derin şükranlarımı sunarım. Sabırla ve kıymetli önerileriyle üzerimde büyük emeği var. Ayrıca, Jürimde bulunan ve bana katkı sağlayan hocalarıma da teşekkür ederim.

Ailem... Her anımda yanımda olan, sevgisini ve desteğini hiç esirgemeyen canım aileme sonsuz teşekkür ederim. En zor anlarımda bana güç veren, sevgiyle yanımda duran ve desteğini daima hissettiren annem ile babama ve daima bana inanan kardeşlerime minnettarım. Onların varlığı bu süreçte en büyük motivasyon kaynağım oldu. Bu yolculuk boyunca bana destek veren dostlarıma teşekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

4.1	(4.10) denkleminin 2D grafiği $-10 \leq t \leq 10$	11
4.2	(4.10)-(4.11) denkleminin parametrik grafiği $-10 \leq t \leq 10$	11
4.3	(4.12) denkleminin 3D grafiği $-8 \leq t \leq 8$ ve $-8 \leq x \leq 8$	11
4.4	(4.12) denkleminin contour grafiği $-8 \leq t \leq 8$ ve $-8 \leq x \leq 8$	12
4.5	(4.27) denkleminin 3D grafiği $-1 \leq t \leq 1$ ve $-1 \leq x \leq 1$	16
4.6	(4.27) denkleminin contour grafiği $-1 \leq t \leq 1$ ve $-2 \leq x \leq 2$	16
4.7	$U(t) = e^{2t-1} \cos(2t-1)$ grafiği $-3 \leq t \leq 3$	17
4.8	$U(t) - U'(t)$ parametrik grafiği $-10 \leq t \leq 10$	17
4.9	(4.44) denkleminin 3D grafiği $y = 1$, $-1 \leq x \leq 1$ ve $-1 \leq t \leq 1$	21
4.10	(4.44) denkleminin contour grafiği $y = 1$, $-2 \leq t \leq 2$ ve $-1 \leq x \leq 1$	21
4.11	$U(t) = 2e^{\frac{t}{2}} \cos(1.5t)$ denkleminin 2D grafiği $-4 \leq t \leq 4$	22
4.12	(4.45) denkleminin parametrik grafiği $-10 \leq t \leq 10$	22
4.13	(4.66) denkleminin 3D grafiği $y = 1$, $-10 \leq t \leq 10$ ve $-10 \leq x \leq 10$	28
4.14	(4.66) denkleminin contour grafiği $y = 1$, $-10 \leq t \leq 10$ ve $-10 \leq x \leq 10$	28
4.15	(4.67) ifadesinin 3D grafiği $y = 1$, $-10 \leq t \leq 10$, $-10 \leq x \leq 10$ ve $-6 \leq U \leq 6$	29
4.16	(4.65) denkleminin 2D grafiği $-10 \leq \eta \leq 10$	29

1. GİRİŞ

Burada temel tanımlar ve formüllerden bahsedilecektir.

Tanım 1 “Bağımlı değişkenin bir veya daha fazla bağımsız parametreye göre türevlerini içeren denklemlere diferansiyel denklem denir. Denklem bir bağımsız parametrelili ise denkleme bayağı diferansiyel denklem denir. Aksi durumda ise denkleme kısmi diferansiyel denklem denir. Teknik olarak ifade edilirse, $k = 1, 2, 3, \dots, n$ için x_k verilsin ve $U = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ise

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, U, U_{x_1}, \dots, U_{x_n}, \dots, \frac{\partial^n U}{\partial x^n}\right) = 0$$

denklemine n . meretebeden kısmi diferansiyel denklem denir” (Biz, 2019).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = h(x), \quad u_t = cu_{xy}$$

veya

$$xu_t + t^2 u^2 = \sin(x)$$

ifadeleri kısmi diferansiyel denklemlere birer örnek olarak verilebilir. İkinci mertebeden parçalı türevli denklemler oldukça önemlidir. Aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir.

Tanım 2 “İkinci mertebeden

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

parçalı türevli denklemde

- $B^2 - 4AC < 0$ ise eliptik,
- $B^2 - 4AC = 0$ ise parabolik,
- $B^2 - 4AC > 0$ ise hiperboliktir” (Biz, 2019).

Tanım 3 “Tek parametrelili $h(x)$ fonksiyonun $x = x_0$ komşuluğundaki Taylor seri açılımı

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

Eğer $x_0 = 0$ olarak alınırsa seri literatürde Maclaurin seri açılımı olarak bilinir” (Biz, 2019).

Tanım 4 “İki parametrelili $f(x, y)$ fonksiyonunun $(x, y) = (x_0, y_0)$ noktasında Taylor serisi

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ & + \frac{f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2}{2!} \\ & + \dots \end{aligned}$$

biçimindedir” (Biz, 2019).

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Duffing tipi olarak bilinen denklemlerden birisi

$$U'' + 3U - 2U^3 = 0, \quad U(0) = 0, \quad U'(0) = 0.5,$$

şeklindedir. Fizik ve mühendisliğin çeşitli dallarında karşılaşılan lineer olmayan salınımlar oldukça önemlidir. Lineer olmayan salınımların uygulamalarından bazıları fiziksel sarkacın salınımları, doğrusal olmayan elektrik devreleri, görüntü işleme ve uyduların hareketi olarak ortaya çıkar (Chakraverty ve ark., 2019; Akbari ve ark., 2015; Davis, 1960; Debnath, 2005; Logan, 1994; Whitham, 1974).

Gaz kabarcıklarıyla dolu bir sıvı karışımındaki basınç dalgalarının yayılımının analizi doğa, matematiksel fizik ve mühendislik alanında sıklıkla çalışılan önemli problemlerdendir. Kudryashov-Sinelshchikov (KS) sıvı ve ısı iletiminin viskozitesine bağlı olarak sıvı ve gaz kabarcıkları karışımındaki basınç dalgalarını tanımlayan daha genel ve lineer olmayan bir denklem olup

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + -\epsilon \frac{\partial(u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})}{\partial x} - \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \delta \frac{\partial(u \frac{\partial u}{\partial x})}{\partial x} = 0$$

şeklindedir. Burada, u yoğunluktur ve ısı transferini ve viskoziteyi tanımlar. Reel sabitler olan $\gamma, \epsilon, \alpha, \lambda$ ve δ gaz kabarcıklı sıvıdaki basınç dalgalarını belirleyen parametrelerdir ve basit denklem yöntemiyle çözüm (Baskonus ve ark., 2022).

Ayrıca, x ekseninin uzun bir dalga olduğu varsayılırsa x eksen ve y eksen boyunca yayılan bir Riemann dalgasının (2+1)-boyutlu etkileşimini tanımlayan genelleştirilmiş kırılma soliton denklemi ve farklı yöntemlerle çözümü için (Xu, 2015; Muhamad ve ark., 2023)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \sigma_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \sigma_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3 \partial y} + \sigma_3 u \frac{\partial u}{\partial x} + u \sigma_4 \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_5 v \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

formuna sahiptir. Burada, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ ve σ_5 reel sabitler olmak üzere $u(x, y, z, t)$ ve $v(x, y, z, t)$ yayılımın iki yönü için fiziksel özellikleri belirtir.

Doğada çeşitli alanlarda karşılaştığımız problemlerin çoğu diferansiyel

denklemlerle ifade edilir. Modellenen bu problemlerin bir çözüme sahip olup olmadığını bilmek önemlidir (Davis, 1960; Debnath, 2005; Logan, 1994; Whitham, 1974; Waltman, 1983). Problemlerin çözümü için değişik yöntemler vardır. Kesirli denklemlerin analiz için (Podlubny, 1998), Stabilité analizi (Teschl, 2024); Mittag-Leffler özel fonksiyonları ile çözüm ve Laplace yöntemi (Tanriverdi ve ark., 2021; Güneş, 2021; İşleyen, 2024; Tanriverdi, 2018), rezidü yöntemi (Tanriverdi, 2001; Tanriverdi ve McLeod, 2007; Tanriverdi ve McLeod, 2008; Tanriverdi, 2009; Tanriverdi, 2019; Tanriverdi, 2019a), klasik yöntemle analiz (Tanriverdi, 2012; Tanriverdi, 2012a; Tanriverdi, 2017; Tanriverdi, 2019), Laplace integrali (Tanriverdi, 2018a), trigonometrik serinin asimtotik analizi (Merca ve Tanriverdi, 2013), atış metodu (Hastings ve McLeod, 2011; Tanriverdi ve McLeod, 2010), dönüşüm metodu yaklaşımı (Tanriverdi ve Ağırbaş, 2018; Biz, 2019), ardışık yaklaşıklar yöntemi (Alıcı ve Tanriverdi, 2020; Alıcı ve Tanriverdi, 2021), asimtotik analiz tekniği (Tanriverdi, 2021), Riemann zeta fonksiyonuna uygulanan yeni bir teknik için (Tanriverdi, 2021a), Bernoulli alt-denklemler fonksiyon metodu ve geliştirilmiş versiyonları için (Başkonuş ve ark., 2022a; Mahmud ve ark., 2023; Hoşer, 2023), genişletilmiş rasyonel $\sinh - \cosh$ ve değiştirilmiş ve genişletilmiş $\tanh$ function metodu (Mahmud ve ark., 2023a; Mahmud, 2023; Muhamad, 2023; Mahmud ve ark., 2023b; Mahmud ve ark., 2024; Mahmud ve ark., 2024a) ve Sinüs-Gordon Açılım Metodu (Şap, 2024).

3. GEREÇ ve YÖNTEM

Bu bölümde, diferansiyel denklemlerin yaklaşık ya da tam çözümlerini bulmak için kullanılan Akbari-Ganji ve Exponansiyel Fonksiyon metotlarından detaylı olarak bahsedilecektir.

3.1. Akbari-Ganji Metodu

Doğrusal diferansiyel denklemleri çözebilmek için birbirinden farklı çok fazla analitik ve nümerik yöntemler vardır. Fakat doğrusal olmayan diferansiyel denklemleri çözen yöntemler oldukça azdır. Yaklaşık çözebilen yöntemlerden biri Akbari-Ganji metodudur. Akbari-Ganji metodu başlarda cebirsel bir yaklaşım olarak ifade edilsede literatüre Akbari-Ganji metodu olarak geçti. Bu metot doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü bulmada kullanılır. Şimdi de metodu detaylı olarak inceleyelim. F , genel bir doğrusal olmayan bayağı diferansiyel denklem olmak üzere,

$$F = A(U) - f(t)$$

denklemini ele alalım. Bu denklemde, $A(U) = L(U) + N(U)$ olup $L(U)$ ele alınan diferansiyel denklemin doğrusal kısmını, $N(U)$ doğrusal olmayan kısmını ve $f(t)$ ise uygulanan dış kuvveti temsil eder. Ek olarak F aşağıdaki gibi de ifade edilebilir.

$$F(t, U(t), U'(t), U''(t), \dots) = 0 \quad (3.1)$$

başlangıç koşulları ise,

$$U(0) = C, U'(0) = D$$

ile verilir. Akbari-Ganji metodunun adımları sırası ile aşağıdaki gibidir.

1. Adım Ele alınan diferansiyel denklemin homojen olması durumunda çözüm

$$U(t) = e^{-bt} (a \cos(wt + \phi)) \quad (3.2)$$

olarak kabul edilir. Burada, a , b , w ve ϕ belirlenmesi gereken parametrelerdir. Homejen olmaması durumunda ise çözüm

$$U(t) = e^{-bt} (a \cos(wt + \phi)) + d \cos(w_0 + \varphi) \quad (3.3)$$

olarak kabul edilir. Burada belirlenmesi gereken parametreler a , b , d , w , ϕ , w_0 ve φ .

2. Adım Kabul ettiğimiz homojen (3.2) denkleminde başlangıç koşulları kullanılırsa

$$\begin{aligned} a \cos(\phi) &= C, \\ -ab \cos(\phi) - aw \sin(\phi) &= D \end{aligned} \quad (3.4)$$

denklemleri bulunur. Benzer şekilde homojen olmayan (3.3) denkleminde başlangıç koşullarını uygulanırsa

$$\begin{aligned} a \cos(\phi) + d \cos(\varphi) &= C, \\ -ab \cos(\phi) - aw \sin(\phi) - dw_0 \sin(\varphi) &= D \end{aligned} \quad (3.5)$$

denklemleri bulunur.

3. Adım Amaç bilinmeyen katsayıları belirlemektir. Bilinmeyen katsayılarının sayısı kadar denklem (3.1) ve türevleri alınır. Yani,

$$\begin{aligned} F(0, U(0), U'(0), U''(0), \dots) &= 0, \\ F'(0, U(0), U'(0), U''(0), \dots) &= 0, \\ F''(0, U(0), U'(0), U''(0), \dots) &= 0, \\ F'''(0, U(0), U'(0), U''(0), \dots) &= 0, \\ F^{(4)}(0, U(0), U'(0), U''(0), \dots) &= 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

denklemleri elde edilir. Bu (3.4) ve (3.6) denklemleri çözülürse arzu edilen yaklaşık çözüm bulunur.

3.2. Exponansiyel Fonksiyon Metodu

Exponansiyel fonksiyon metodu (EFM) yarı analitik bir metottur. Metodu kullanabilmek için kısmi diferansiyel denklemleri bayağı diferansiyel denklemlere dönüştürmek gerekmektedir. Bu yöntem, genellikle doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılır. Metot aşağıda açıklanmıştır.

$$f(U, U_x, U_t, U_{xx}, U_{xt}, \dots) = 0 \quad (3.7)$$

kısmi diferansiyel denklemine

$$U(\eta) = kx + wt \quad (3.8)$$

dalga dönüşümü uygulanır. Bu dönüşüm uygulanırsa

$$f(U, U', U'', \dots) = 0 \quad (3.9)$$

bayağı diferansiyel denklemi elde edilir. EFM çözüm yöntemi çözüm olarak kabul edilen $U(\eta)$ denklemine dayanmaktadır.

$$U(\eta) = \frac{\sum_{n=-c}^d a_n \exp(n\eta)}{\sum_{n=-p}^q b_n \exp(n\eta)}, \quad (3.10)$$

(3.10) denklemindeki a_n , b_n , c , d , p ve q ifadeleri ise belirlenmesi gereken parametrelerdir. Bu işlem için (3.9) denklemindeki en düşük ve en yüksek mertebeli doğrusal ve doğrusal olmayan terimlerin kuvvetlerinin dengelenmesi gerekmektedir.

(3.10) denkleminin bazı kuvvetleri

$$\begin{aligned} U^2(\eta) &= \frac{G_1 \exp(-2c)\eta + \dots + G_5 \exp(2d)\eta}{H_1 \exp(-2p)\eta + \dots + H_5 \exp(2q)\eta}, \\ U^3(\eta) &= \frac{K_1 \exp(-3c)\eta + \dots + K_5 \exp(3d)\eta}{L_1 \exp(-3p)\eta + \dots + L_5 \exp(3q)\eta}, \dots \end{aligned} \quad (3.11)$$

biçimindedir. (3.10) denkleminin bazı türevleri ise

$$\begin{aligned} U'(\eta) &= \frac{C_1 \exp(-2c - 2p)\eta + \dots + C_5 \exp(2d + 2q)\eta}{D_1 \exp(-2p)\eta + \dots + D_5 \exp(2q)\eta}, \\ U''(\eta) &= \frac{E_1 \exp(-3p - c)\eta + \dots + E_5 \exp(d + 3q)\eta}{F_1 \exp(-4p)\eta + \dots + F_5 \exp(4q)\eta}, \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

biçimindedir.

Şimdi, (3.9) denklemine uygulanacak denge prensibi ile c , d , p ve q belirlenir. Kabul edilen (3.10) çözümü (3.9) denkleminde yerine yazılır ve bilinmeyenler $e^{m\eta}$ katsayıları ayrı ayrı sıfıra eşitlenerek cebirsel bir sisteme ulaşılır. Bu sistem çözülerek tam çözüm veya yaklaşık çözüm bulunur.

4. BULGULAR

Bu bölümde, bazı kısmi diferansiyel denklemlere Akbari-Ganji ve Exp fonksiyon metotları uygulanacak ve uygulanacak metotlar yardımıyla yaklaşık veya tam çözümler bulunacaktır.

4.1. Duffing Denkleminin AG Metodunun Uygulanması

Duffing denklemi

$$U_{xt} + 3U(t) - 2U^3(t) = 0 \quad (4.1)$$

denkleminin $\xi = x - t$ dönüşümü uygulanırsa ve yeni başlangıç şartlarıyla birlikte

$$U''(t) + 3U(t) - 2U^3(t) = 0, U(0) = 0, U'(0) = 0.5 \quad (4.2)$$

ele alalım. Burada, ilk olarak (4.2) denklemi AGM ile çözülecektir. Çözüm

$$U(t) = ae^{-bt} \cos(wt + \phi) \quad (4.3)$$

olsun. Burada, bilinmeyen a , b , w ve ϕ katsayıları belirlemek için dört denkleme ihtiyaç vardır. AG metodunu uygulamak için aşağıdaki adımlar takip edilir.

$$U'(t) = -abe^{-bt} \cos(wt + \phi) - awe^{-bt} \sin(wt + \phi), \quad (4.4)$$

$$U''(t) = (ab^2 - aw^2)e^{-bt} \cos(wt + \phi) + 2abwe^{-bt} \cos(wt + \phi) \quad (4.5)$$

elde edilir. (4.3), (4.4) ve (4.5) denklemleri (4.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} F = & (ab^2 - aw^2 + 3a)e^{-bt} \cos(wt + \phi) + 2abwe^{-bt} \sin(wt + \phi) \\ & - 2a^3e^{-3bt} \cos^3(wt + \phi) = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

bulunur. (4.6) fonksiyonunun türevi alınır

$$\begin{aligned} F' = & (-ab^3 + 3abw^2 - 3ab)e^{-bt} \cos(wt + \phi) + \\ & (-3ab^2w + aw^3 - 3aw)e^{-bt} \sin(wt + \phi) \\ & + 6a^3be^{-3bt} \cos^3(wt + \phi) + 6a^3we^{-3bt} \cos^2(wt + \phi) \sin(wt + \phi) = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir. (4.3), (4.4), (4.6) ve (4.7) denklemlerinde $t = 0$ yazılırsa

$$\begin{aligned} a \cos(\phi) &= 0, \\ -ab \cos \phi - aw \sin(\phi) - 0.5 &= 0, \\ F &= (ab^2 - aw^2 + 3a) \cos(\phi) + 2abw \sin(\phi) - 2a^3 \cos^3(\phi) = 0, \\ F' &= (-ab^3 + 3abw^2 - 3ab) \cos(\phi) + (-3ab^2w + aw^3 - 3aw) \sin(\phi) \\ &+ 6a^3b \cos^3(\phi) + 6a^3w \cos^2(\phi) \sin(\phi) = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} a &= -0.288675, \quad b = 0, \quad w = -1.73205, \quad \phi = -1.5708; \\ a &= -0.288675, \quad b = 0, \quad w = 1.73205, \quad \phi = 1.5708; \\ a &= 0.288675, \quad b = 0, \quad w = -1.73205, \quad \phi = 1.5708; \\ a &= 0.288675, \quad b = 0, \quad w = 1.73205, \quad \phi = -1.5708 \end{aligned} \quad (4.9)$$

(4.9) denklemindeki çözümlerin davranışları benzerdir. Bir durumu grafiksel olarak analiz etmek yeterlidir. Bir çözüm

$$U = -0.288675 \cos(1.5708 + 1.73205t) \quad (4.10)$$

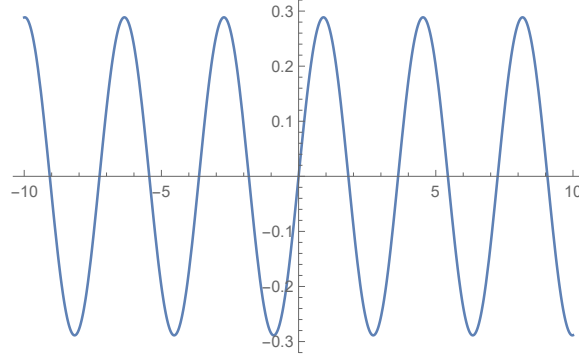
biçimindedir. Dolayısıyla,

$$U' = 0.4999995338 \sin(1.5708 + 1.73205t). \quad (4.11)$$

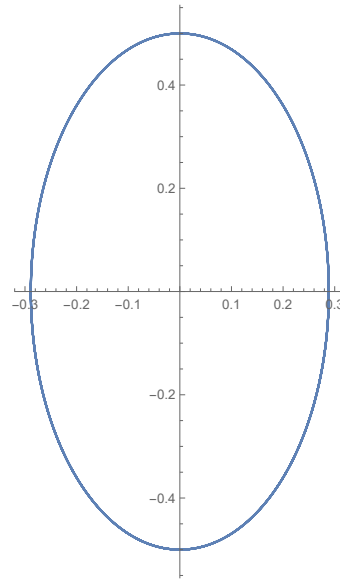
Buradan, (4.1) denkleminin çözümü

$$U(x, t) = 0.288675 \cos(1.5708 - 1.73205(x - t)) \quad (4.12)$$

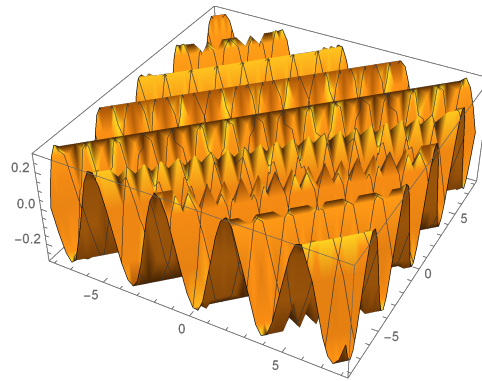
olarak elde edilir.



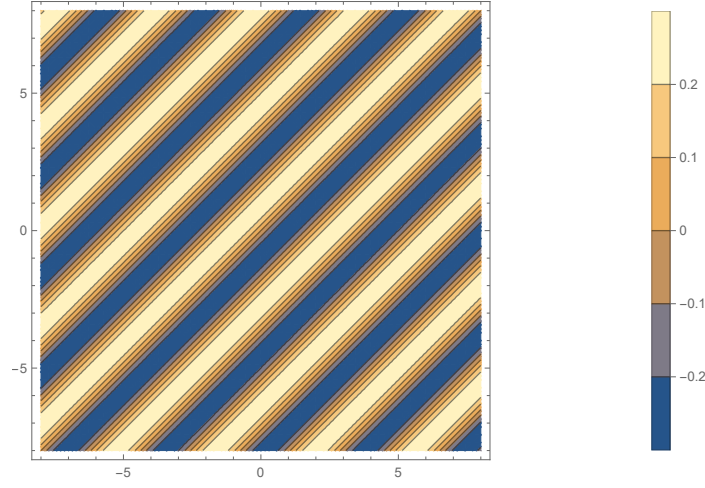
Şekil 4.1: (4.10) denkleminin 2D grafiği $-10 \leq t \leq 10$.



Şekil 4.2: (4.10)-(4.11) denkleminin parametrik grafiği $-10 \leq t \leq 10$.



Şekil 4.3: (4.12) denkleminin 3D grafiği $-8 \leq t \leq 8$ ve $-8 \leq x \leq 8$.



Şekil 4.4: (4.12) denkleminin contour grafiği $-8 \leq t \leq 8$ ve $-8 \leq x \leq 8$.

4.2. KS Denklemine AG Metodunun Uygulanması

KS denklemi

$$U_t + \gamma U U_x + U_{xxx} - \epsilon (U U_{xx})_x - \alpha U_x U_{xx} - \lambda U_{xx} - \delta (U U_x)_x = 0 \quad (4.13)$$

biçimindedir.

$$U = U(x, t) = U(\eta = kx - ct) \quad (4.14)$$

dönüşümü (4.13) denklemine uygulanırsa

$$\begin{aligned} & -cU' + \gamma k U U' + k^3 U''' - k^3 \epsilon (U U''' + U' U'') - k^3 \alpha U' U'' - k^2 \lambda U'' \\ & - k^2 \delta (U U'' + (U')^2) = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

elde edilir. Burada,

$$U = U(\eta), \quad U' = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad U'' = \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}, \dots \quad (4.16)$$

olur. Denklem (4.15) integre edilirse ve sabitler sıfır alınırsa

$$-cU + \frac{k\gamma}{2} U^2 + k^3 U'' - k^3 \epsilon U U'' - \frac{k^3 \alpha}{2} (U')^2 - k^2 \lambda U' - k^2 \delta U U' = 0 \quad (4.17)$$

olur. Denklem (4.17)

$$U(0) = 1, \quad U'(0) = 1 \quad (4.18)$$

başlangıç koşullarıyla birlikte AGM ile çözelim. Çözüm

$$U(t) = a e^{-bt} \cos(wt + \phi) \quad (4.19)$$

olsun. Burada bilinmeyen a , b , w ve ϕ katsayılarını belirlemek için dört denkleme ihtiyaç vardır. AG metodunun uygulamak için aşağıdaki adımlar takip edilir.

$$U'(t) = -a b e^{-bt} \cos(wt + \phi) - a w e^{-bt} \sin(wt + \phi), \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} U''(t) &= (ab^2 - aw^2) e^{-bt} \cos(wt + \phi) + 2abw e^{-bt} \sin(wt + \phi), \\ U^2(t) &= a^2 e^{-2bt} \cos^2(wt + \phi) \end{aligned} \quad (4.21)$$

elde edilir. (4.19), (4.20) ve (4.21) denklemleri (4.17) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
F &= (-ac + ab^2k^3 + abk^2\lambda - ak^3w^2)e^{-bt} \cos(wt + \phi) \\
&+ (2abk^3w + ak^2w\lambda)e^{-bt} \sin(wt + \phi) - \frac{1}{2}a^2k^3w^2\alpha e^{-2bt} \sin^2(wt + \phi) \\
&+ \left(\frac{-1}{2}a^2b^2k^3\alpha + \frac{1}{2}a^2k\gamma + a^2bk^2\delta - a^2b^2k^3\epsilon + a^2k^3w^2\epsilon\right)e^{-2bt} \cos^2(wt + \phi) \\
&+ (-a^2bk^3w\alpha + a^2k^2w\delta - 2a^2bk^3w\epsilon)e^{-2bt} \cos(wt + \phi) \sin(wt + \phi) = 0
\end{aligned} \tag{4.22}$$

bulunur. (4.22) denkleminin tekrar türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
F' &= (abc - ab^3k^3 - ab^2k^2\lambda + 3abk^3w^2 + ak^2w^2\lambda)e^{-bt} \cos(wt + \phi) \\
&+ (acw - 3ab^2k^3w - 2abk^2w\lambda + ak^3w^3)e^{-bt} \sin(wt + \phi) \\
&+ (a^2b^3k^3\alpha - a^2bk\gamma - 2a^2b^2k^2\delta + 2a^2b^3k^3\epsilon \\
&- a^2bk^3w^2\alpha + a^2k^2w^2\delta - 4a^2bk^3w^2\epsilon)e^{-2bt} \cos^2(wt + \phi) \\
&+ (2a^2bk^3w^2\alpha - a^2k^2w^2\delta + 2a^2bk^3w^2\epsilon)e^{-2bt} \sin^2(wt + \phi) \\
&+ (3a^2b^2k^3w\alpha - a^2kw\gamma - 4a^2bk^2w\delta + 6a^2b^2k^3w\epsilon \\
&- a^2k^3w^3\alpha - 2a^2k^3w^3\epsilon)e^{-2bt} \cos(wt + \phi) \sin(wt + \phi) = 0
\end{aligned} \tag{4.23}$$

elde edilir. (4.19), (4.20), (4.22) ve (4.23) denklemlerinde $t = 0$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
a \cos(\phi) &= 1, \\
-ab \cos(\phi) - aw \sin(\phi) &= 1, \\
(-ac + ab^2k^3 + abk^2\lambda - ak^3w^2) \cos(\phi) \\
&+ (2abk^3w + ak^2w\lambda) \sin(\phi) - \frac{1}{2}a^2k^3w^2\alpha \sin^2(\phi) \\
&+ \left(\frac{-1}{2}a^2b^2k^3\alpha + \frac{1}{2}a^2k\gamma + a^2bk^2\delta - a^2b^2k^3\epsilon + a^2k^3w^2\epsilon\right) \cos^2(\phi) \\
&+ (-a^2bk^3w\alpha + a^2k^2w\delta - 2a^2bk^3w\epsilon) \cos(\phi) \sin(\phi) = 0, \\
(abc - ab^3k^3 - ab^2k^2\lambda + 3abk^3w^2 + ak^2w^2\lambda) \cos(\phi) \\
&+ (acw - 3ab^2k^3w - 2abk^2w\lambda + ak^3w^3) \sin(\phi) \\
&+ (a^2b^3k^3\alpha - a^2bk\gamma - 2a^2b^2k^2\delta + 2a^2b^3k^3\epsilon \\
&- a^2bk^3w^2\alpha + a^2k^2w^2\delta - 4a^2bk^3w^2\epsilon) \cos^2(\phi) \\
&+ (2a^2bk^3w^2\alpha - a^2k^2w^2\delta + 2a^2bk^3w^2\epsilon) \sin^2(\phi) \\
&+ (3a^2b^2k^3w\alpha - a^2kw\gamma - 4a^2bk^2w\delta + 6a^2b^2k^3w\epsilon \\
&- a^2k^3w^3\alpha - 2a^2k^3w^3\epsilon) \cos(\phi) \sin(\phi) = 0
\end{aligned} \tag{4.24}$$

sistemi edilir. Bu denklem sistemi çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
a &= \sec \phi, \\
b &= -\sec \phi (\cos \phi + w \sin \phi), \\
c &= -k^2 \sec^3 \phi (-k \cos^3 \phi + \lambda \cos^3 \phi - kw^2 \cos^3 \phi + kw^2 \alpha \cos^3 \phi \\
&\quad + w^2 \delta \cos^3 \phi + 2kw^2 \epsilon \cos^3 \phi + w^2 \lambda \cos^3 \phi - 2kw^3 \cos^2 \phi \sin \phi \\
&\quad + 2kw^3 \epsilon \cos^2 \phi \sin \phi - kw^2 \cos \phi \sin^2 \phi + kw^2 \alpha \cos \phi \sin^2 \phi \\
&\quad + w^2 \delta \cos \phi \sin^2 \phi + 2kw^2 \epsilon \cos \phi \sin^2 \phi + w^2 \lambda \cos \phi \sin^2 \phi \\
&\quad - 2kw^3 \sin^3 \phi + 2kw^3 \epsilon \sin^3 \phi), \\
\gamma &= -k \sec^3 \phi (-k \alpha \cos^3 \phi - 2\delta \cos^3 \phi - 2k \epsilon \cos^3 \phi - 4kw^2 \cos^3 \phi \\
&\quad + 2kw^2 \alpha \cos^3 \phi + 2w^2 \delta \cos^3 \phi + 6kw^2 \epsilon \cos^3 \phi + 2w^2 \lambda \cos^3 \phi \\
&\quad - 4kw^3 \cos^2 \phi \sin \phi + 4kw^3 \epsilon \cos^2 \phi \sin \phi - 4kw^2 \cos \phi \sin^2 \phi \\
&\quad + 2kw^2 \alpha \cos \phi \sin^2 \phi + 2w^2 \delta \cos \phi \sin^2 \phi + 6kw^2 \epsilon \cos \phi \sin^2 \phi \\
&\quad + 2w^2 \lambda \cos \phi \sin^2 \phi - 4kw^3 \sin^3 \phi + 4kw^3 \epsilon \sin^3 \phi)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

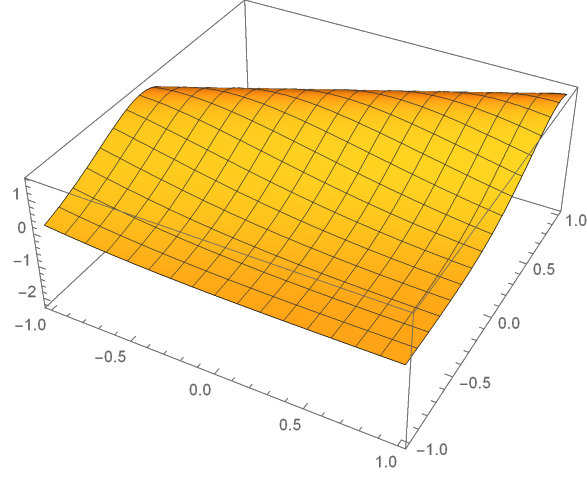
Bu parametrelerle birlikte aşağıdaki keyfi seçimler

$$\phi = 0, w = 1, k = -1, \lambda = 1, \alpha = 1, \delta = 1, \epsilon = 1 \tag{4.26}$$

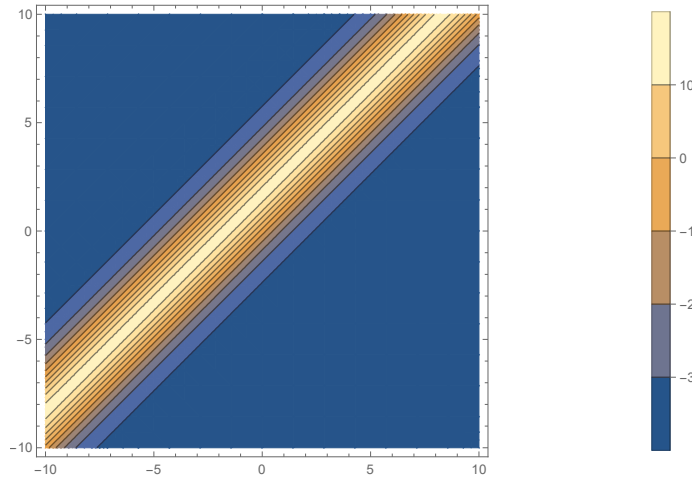
yapılırsa ve baştaki orijinal değişkene dönülürse çözüm

$$U(x, t) = e^{2t-x} \cos(2t - x) \tag{4.27}$$

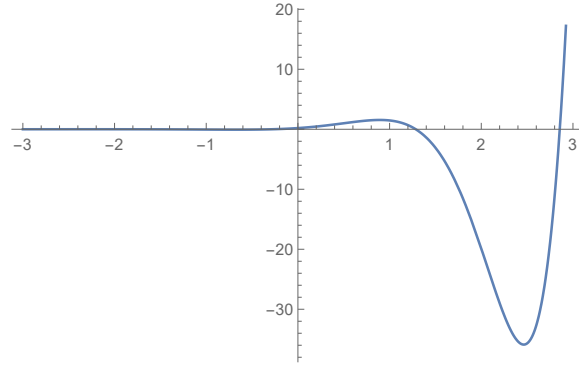
biçimindedir.



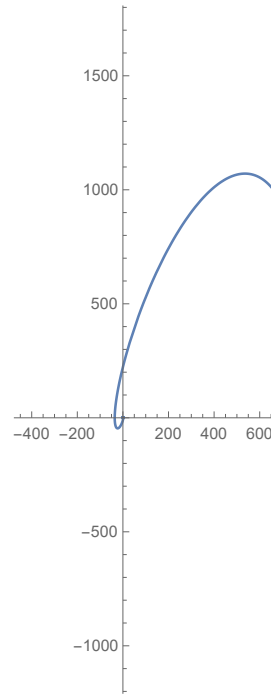
Şekil 4.5: (4.27) denkleminin 3D grafiği $-1 \leq t \leq 1$ ve $-1 \leq x \leq 1$.



Şekil 4.6: (4.27) denkleminin contour grafiği $-1 \leq t \leq 1$ ve $-2 \leq x \leq 2$.



Şekil 4.7: $U(t) = e^{2t-1} \cos(2t-1)$ grafiği $-3 \leq t \leq 3$.



Şekil 4.8: $U(t) - U'(t)$ parametrik grafiği $-10 \leq t \leq 10$.

4.3. KdV Denklemine AG Metodunun Uygulanması

Bu kısımda, (2+1)-boyutlu KdV denklemi AGM ile çözülecektir. KdV denklemi

$$\begin{aligned} U_t + \sigma_1 U_{xxx} + \sigma_2 U_{xy} + \sigma_3 U U_x + \sigma_4 U V_x + \sigma_5 U_x V &= 0, \\ V_x - U_y &= 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

biçimindedir.

$$U(x, y, t) = U(\eta), \quad V(x, y, t) = V(\eta), \quad \eta = \beta_1 x + \beta_2 y - \beta_3 t, \quad (4.29)$$

Buradaki, β_1 , β_2 ve β_3 sıfırdan farklı keyfi parametrelerdir. (4.28) denkleminde $V_x = U_y$ olduğundan $V = \frac{\beta_2}{\beta_1} U$ olur. (4.29) dönüşümü (4.28) denklemine uygulanırsa

$$-\beta_3 U' + (\sigma_1 \beta_1^3 + \sigma_2 \beta_1^2 \beta_2) U''' + (\sigma_3 \beta_1 + \sigma_4 \beta_2 + \sigma_5 \beta_2) U U' = 0 \quad (4.30)$$

olur. Burada,

$$U = U(\eta), \quad U' = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad U'' = \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}, \dots \quad (4.31)$$

olur. Daha sonra (4.30) denklemini integre edilirse

$$-2\beta_3 U + 2(\sigma_1 \beta_1^3 + \sigma_2 \beta_1^2 \beta_2) U'' + (\sigma_3 \beta_1 + \sigma_4 \beta_2 + \sigma_5 \beta_2) U^2 = 0, \quad (4.32)$$

bulunur.

Şimdi, (4.32) denklemini aşağıdaki yeni başlangıç koşulları kullanılarak AGM ile çözülecektir.

$$U(0) = C, \quad U'(0) = D \quad (4.33)$$

Olsun. İşlem kolaylığı için öncelikle aşağıdaki kısaltmaları dikkate alalım.

$$\begin{aligned} k &= -2\beta_3, \\ l &= 2(\sigma_1 \beta_1^3 + \sigma_2 \beta_1^2 \beta_2), \\ m &= \sigma_3 \beta_1 + \sigma_4 \beta_2 + \sigma_5 \beta_2. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Dolayısıyla, (4.32) denklemini

$$lU'' + kU + mU^2 = 0 \quad (4.35)$$

olur. Çözüm

$$U(t) = ae^{-bt} \cos(wt + \phi) \quad (4.36)$$

olsun. Bu denklemdeki bilinmeyen a , b , w ve ϕ parametrelerini belirlemek için dört denklem gerekmektedir. Çözümün türevleri

$$U'(t) = -abe^{-bt} \cos(wt + \phi) - awe^{-bt} \sin(wt + \phi), \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} U''(t) &= (ab^2 - aw^2)e^{-bt} \cos(wt + \phi) + 2abwe^{-bt} \sin(wt + \phi), \\ U^2(t) &= a^2e^{-2bt} \cos^2(wt + \phi) \end{aligned} \quad (4.38)$$

denklemleri elde edilir. (4.36) ve (4.38) denklemleri (4.35) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} F &= (ak + ab^2l - aw^2l)e^{-bt} \cos(wt + \phi) + 2abwle^{-bt} \sin(wt + \phi) \\ &+ a^2me^{-2bt} \cos^2(wt + \phi) = 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

bulunur. (4.39) denkleminin tekrar türevi alınır

$$\begin{aligned} F' &= (-abk - ab^3l + 3abw^2l)e^{-bt} \cos(wt + \phi) - \\ &(awk + 3ab^2wl - aw^3l)e^{-bt} \sin(wt + \phi) - 2a^2bme^{-2bt} \cos^2(wt + \phi) \\ &- 2a^2wme^{-2bt} \cos(wt + \phi) \sin(wt + \phi) = 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

elde edilir. (4.36), (4.37), (4.39) ve (4.40) denklemlerinde $t = 0$ yazılırsa

$$\begin{aligned} a \cos(\phi) - C &= 0, \\ -ab \cos(\phi) - aw \sin(\phi) - D &= 0, \\ (ak + ab^2l - aw^2l) \cos(\phi) + 2abwl \sin(\phi) + a^2m \cos^2(\phi) &= 0, \\ (-abk - ab^3l + 3abw^2l) \cos(\phi) - (awk + 3ab^2wl - aw^3l) \sin(\phi) \\ - 2a^2bm \cos^2(\phi) - 2a^2wm \cos(\phi) \sin(\phi) &= 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümü C , D , k ve l aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
 C &= a \cos(\phi), \\
 D &= -ab \cos(\phi) - aw \sin(\phi), \\
 k &= \frac{-a(b^3m \cos^3(\phi) + bmw^2 \cos^3(\phi) + 3b^2mw \cos^2(\phi) \sin(\phi))}{2bw^2} \\
 &\quad + \frac{-mw^3 \cos^2(\phi) \sin(\phi) + 4bmw^2 \cos(\phi) \sin^2(\phi)}{2bw^2}, \\
 l &= \frac{a(bm \cos^3(\phi) + mw \cos^2(\phi) \sin(\phi))}{2bw^2}
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

ve (4.29) dönüşümü (4.36) denkleminde yazılırsa genel çözümü

$$U(\eta) = ae^{-b(x\beta_1+y\beta_2-t\beta_3)} \cos(xw\beta_1 + yw\beta_2 - tw\beta_3 + \phi) \tag{4.43}$$

elde edilir.

$$\phi = 0, \quad a = 2, \quad b = \frac{-1}{2}, \quad k = -2, \quad l = 4, \quad m = 3, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3 = 1, \quad w = 1.5$$

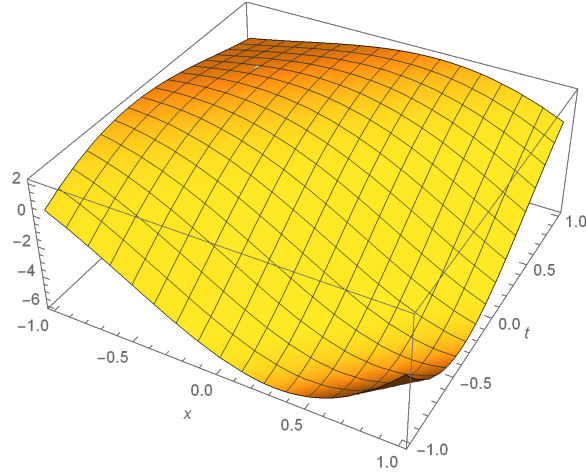
seçimi yapılırsa özel çözüm

$$2e^{\frac{1}{2}(x+y-t)} \cos(1.5x + 1.5y - 1.5t) \tag{4.44}$$

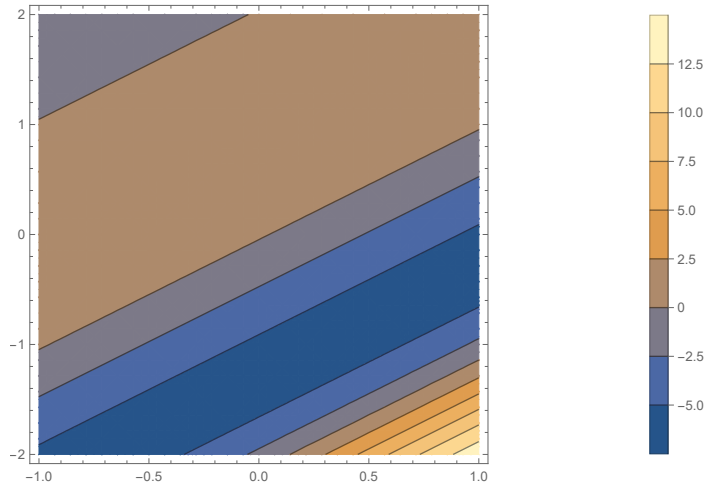
olarak bulunur.

$$\begin{aligned}
 U(\eta) &= 2e^{\frac{\eta}{2}} \cos(1.5\eta) \\
 U'(\eta) &= e^{\frac{\eta}{2}} \cos(1.5\eta) - 3e^{\frac{\eta}{2}} \sin(1.5\eta).
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

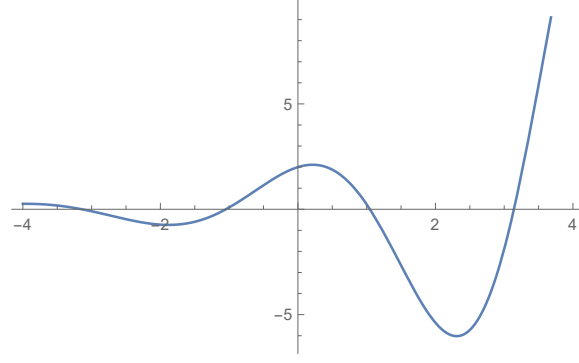
Son olarak, V çözümü $V = \frac{\beta_2}{\beta_1}U$ olduğundan grafiklerine yer verilmemiştir.



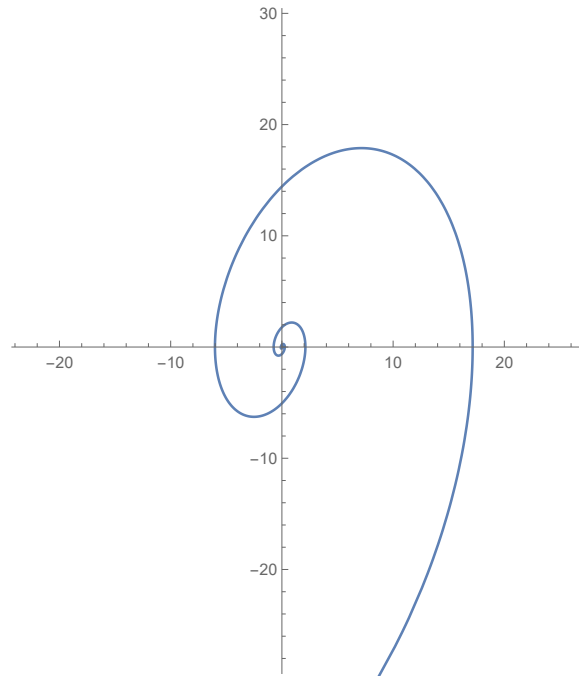
Şekil 4.9: (4.44) denkleminin 3D grafiği $y = 1$, $-1 \leq x \leq 1$ ve $-1 \leq t \leq 1$.



Şekil 4.10: (4.44) denkleminin contour grafiği $y = 1$, $-2 \leq t \leq 2$ ve $-1 \leq x \leq 1$.



Şekil 4.11: $U(t) = 2e^{\frac{t}{2}} \cos(1.5t)$ denkleminin 2D grafiği $-4 \leq t \leq 4$.



Şekil 4.12: (4.45) denkleminin parametrik grafiği $-10 \leq t \leq 10$.

4.4. KdV Denkleminin EFM ile Çözümü

Şimdi de, KdV denklemi EFM metodu ile ele alınacaktır.

$$-\beta_3 U' + (\sigma_1 \beta_1^3 + \sigma_2 \beta_1^2 \beta_2) U''' + (\sigma_3 \beta_1 + \sigma_4 \beta_2 + \sigma_5 \beta_2) U U' = 0 \quad (4.46)$$

Bu denklem için çözüm

$$U(\eta) = \frac{a_{-c} \exp(-c\eta) + \dots + a_d \exp(d\eta)}{b_{-p} \exp(-p\eta) + \dots + b_q \exp(q\eta)} \quad (4.47)$$

olsun. Burada, c , d , p ve q bilinmeyen katsayılar olup (4.46) diferansiyel denklemindeki U''' ile $U U'$ arasında denge prensibi uygulanarak belirlenecektir.

$$U''' = \frac{M_1 \exp(-7p - c)\eta + \dots + M_5 \exp(d + 7q)\eta}{N_1 \exp(-8p)\eta + \dots + N_5 \exp(8q)\eta} \quad (4.48)$$

ve

$$U U' = \frac{K_1 \exp(-p - 2c)\eta + \dots + K_5 \exp(2d + q)\eta}{R_1 \exp(-3p)\eta + \dots + R_5 \exp(3q)\eta} \quad (4.49)$$

bulunur. İlk olarak, (4.49) denklemi $\exp(-5p)\eta$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} U U' &= \frac{K_1 \exp(-6p - 2c)\eta + \dots}{K_3 \exp(-8p)\eta + \dots}, \\ U''' &= \frac{M_1 \exp(-7p - c)\eta + \dots}{M_3 \exp(-8p)\eta + \dots} \end{aligned} \quad (4.50)$$

bulunur. Bu durumda, en düşük terimlilerin dengelenmesiyle

$$-6p - 2c = -7p - c \text{ ise } p = c$$

bulunur. En yüksek dereceli terimliler için (4.49) denklemi $\exp(5q)\eta$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} U U' &= \frac{\dots + K_2 \exp(2d + 6q)\eta}{\dots + K_4 \exp(8q)\eta} \\ U''' &= \frac{\dots + M_2 \exp(d + 7q)\eta}{\dots + M_4 \exp(8q)\eta} \end{aligned} \quad (4.51)$$

elde edilir. Buradan,

$$2d + 6q = d + 7q \text{ ise } d = q$$

olduğu görülür. Amaca hizmet etmek için $p = c = d = q = 1$ olarak seçilsin. Dolayısıyla, (4.47) denkleminin açık şekli

$$U(t) = \frac{a_{-1}e^{-x} + a_0 + a_1e^x}{b_{-1}e^{-x} + b_0 + b_1e^x} \quad (4.52)$$

olduğu görülür. Ayrıca,

$$U'(t) = - \frac{(a_{-1}e^{-x} + a_0 + a_1e^x)(-b_{-1}e^{-x} + b_1e^x)}{(b_{-1}e^{-x} + b_0 + b_1e^x)^2} + \frac{-a_{-1}e^{-x} + a_1e^x}{b_{-1}e^{-x} + b_0 + b_1e^x} \quad (4.53)$$

$$U''(t) = \frac{2(a_{-1}e^{-x} + a_0 + a_1e^x)(-b_{-1}e^{-x} + b_1e^x)^2}{(b_{-1}e^{-x} + b_0 + b_1e^x)^3} - \frac{2(-a_{-1}e^{-x} + a_1e^x)(-b_{-1}e^{-x} + b_1e^x)}{(b_{-1}e^{-x} + b_0 + b_1e^x)^2} - \frac{(a_{-1}e^{-x} + a_0 + a_1e^x)(b_{-1}e^{-x} + b_1e^x)}{(b_{-1}e^{-x} + b_0 + b_1e^x)^2} + \frac{a_{-1}e^{-x} + a_1e^x}{b_{-1}e^{-x} + b_0 + b_1e^x} \quad (4.54)$$

$$U'''(t) = \frac{-6(a_{-1}e^{-x} + a_0 + a_1e^x)(-b_{-1}e^{-x} + b_1e^x)^3}{(b_{-1}e^{-x} + b_0 + b_1e^x)^4} + \frac{6(-a_{-1}e^{-x} + a_1e^x)(-b_{-1}e^{-x} + b_1e^x)^2}{(b_{-1}e^{-x} + b_0 + b_1e^x)^3} + \frac{6(a_{-1}e^{-x} + a_0 + a_1e^x)(-b_{-1}e^{-x} + b_1e^x)(b_{-1}e^{-x} + b_1e^x)}{(b_{-1}e^{-x} + b_0 + b_1e^x)^3} - \frac{3(a_{-1}e^{-x} + a_1e^x)(-b_{-1}e^{-x} + b_1e^x)}{(b_{-1}e^{-x} + b_0 + b_1e^x)^2} - \frac{(a_{-1}e^{-x} + a_0 + a_1e^x)(-b_{-1}e^{-x} + b_1e^x)}{(b_{-1}e^{-x} + b_0 + b_1e^x)^2} - \frac{3(-a_{-1}e^{-x} + a_1e^x)(b_{-1}e^{-x} + b_1e^x)}{(b_{-1}e^{-x} + b_0 + b_1e^x)^2} + \frac{-a_{-1}e^{-x} + a_1e^x}{b_{-1}e^{-x} + b_0 + b_1e^x} \quad (4.55)$$

denklemleri elde edilir. Bulunan bu denklemler (4.46) denkleminde yerine yazılır

$$(b_{-1}e^{-x} + b_0 + b_1e^x)^4$$

ifadesi ile çarpılırsa ve $e^0, e^x, e^{2x}, \dots, e^{6x}$ terimlerinin her birinin katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$\begin{aligned}
e^0 : & -a_0 b_{-1}^3 \beta_3 + a_{-1} b_{-1}^2 b_0 \beta_3 + a_0 b_{-1}^3 \beta_1^3 \sigma_1 - a_{-1} b_{-1}^2 b_0 \beta_1^3 \sigma_1 \\
& + a_0 b_{-1}^3 \beta_1^2 \beta_2 \sigma_2 - a_{-1} b_{-1}^2 b_0 \beta_1^2 \beta_2 \sigma_2 + a_{-1} a_0 b_{-1}^2 \beta_1 \sigma_3 \\
& - a_{-1}^2 b_{-1} b_0 \beta_1 \sigma_3 + a_{-1} a_0 b_{-1}^2 \beta_2 \sigma_4 - a_{-1}^2 b_{-1} b_0 \beta_2 \sigma_4 \\
& + a_{-1}^2 b_{-1} b_0 \beta_2 \sigma_4 + a_{-1} a_0 b_{-1}^2 \beta_2 \sigma_5 - a_{-1}^2 b_{-1} b_0 \beta_2 \sigma_5 = 0,
\end{aligned} \tag{4.56}$$

$$\begin{aligned}
e^x : & -2a_1 b_{-1}^3 \beta_3 - 2a_0 b_{-1}^2 b_0 \beta_3 + 2a_{-1} b_{-1} b_0^2 \beta_3 + 2a_{-1} b_{-1}^2 b_1 \beta_3 + 8a_1 b_{-1}^3 \beta_1^3 \sigma_1 \\
& - 4a_0 b_{-1}^2 b_0 \beta_1^3 \sigma_1 + 4a_{-1} b_{-1} b_0^2 \beta_1^3 \sigma_1 - 8a_{-1} b_{-1}^2 b_1 \beta_1^3 \sigma_1 + 8a_1 b_{-1}^3 \beta_1^2 \beta_2 \sigma_2 \\
& - 4a_0 b_{-1}^2 b_0 \beta_1^2 \beta_2 \sigma_2 + 4a_{-1} b_{-1} b_0^2 \beta_1^2 \beta_2 \sigma_2 - 8a_{-1} b_{-1}^2 b_1 \beta_1^2 \beta_2 \sigma_2 \\
& + a_0^2 b_{-1}^2 \beta_1 \sigma_3 + 2a_{-1} a_1 b_{-1}^2 \beta_1 \sigma_3 - 2a_{-1}^2 b_{-1} b_1 \beta_1 \sigma_3 + a_0^2 b_{-1}^2 \beta_2 \sigma_4 \\
& 2a_{-1} a_1 b_{-1}^2 \beta_2 \sigma_4 - a_{-1}^2 b_0^2 \beta_2 \sigma_4 - 2a_{-1}^2 b_{-1} b_1 \beta_3 \sigma_4 + a_0^2 b_{-1}^2 \beta_2 \sigma_5 \\
& + 2a_{-1} a_1 b_{-1}^2 \beta_2 \sigma_5 - a_{-1}^2 b_0^2 \beta_2 \sigma_5 - 2a_{-1}^2 b_{-1} b_1 \beta_2 \sigma_5 = 0,
\end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}
e^{2x} : & -5a_1 b_{-1}^2 b_0 \beta_3 - a_0 b_{-1} b_0^2 \beta_3 + a_{-1} b_0^3 \beta_3 - a_0 b_{-1}^2 b_1 \beta_3 + 6a_{-1} b_{-1} b_0 b_1 \beta_3 \\
& + 5a_1 b_{-1}^2 b_0 \beta_1^3 \sigma_1 + a_0 b_{-1} b_0^2 \beta_1^3 \sigma_1 - a_{-1} b_0^3 \beta_1^3 \sigma_1 - 23a_0 b_{-1}^2 b_1 \beta_1^3 \sigma_1 \\
& + 18a_{-1} b_{-1} b_0 b_1 \beta_1^3 \sigma_1 + 5a_1 b_{-1}^2 b_0 \beta_1^2 \beta_2 \sigma_2 + a_0 b_{-1} b_0^2 \beta_1^2 \beta_2 \sigma_2 \\
& - a_{-1} b_0^3 \beta_1^2 \beta_2 \sigma_2 - 23a_0 b_{-1}^2 b_1 \beta_1^2 \beta_2 \sigma_2 + 18a_{-1} b_{-1} b_0 b_1 \beta_1^2 \beta_2 \sigma_2 \\
& + 3a_0 a_1 b_{-1}^2 \beta_1 \sigma_3 + a_0^2 b_{-1} b_0 \beta_1 \sigma_3 + 2a_{-1} a_1 b_{-1} b_0 \beta_1 \sigma_3 - a_{-1} a_0 b_0^2 \beta_1 \sigma_3 \\
& - 2a_{-1} a_0 b_{-1} b_1 \beta_1 \sigma_3 - 3a_{-1}^2 b_0 b_1 \beta_1 \sigma_3 + 3a_0 a_1 b_{-1}^2 \beta_2 \sigma_4 + a_0^2 b_{-1} b_0 \beta_2 \sigma_4 \\
& + 2a_{-1} a_1 b_{-1} b_0 \beta_2 \sigma_4 - a_{-1} a_0 b_0^2 \beta_2 \sigma_4 - 2a_{-1} a_0 b_{-1} b_1 \beta_2 \sigma_4 - 3a_{-1}^2 b_0 b_1 \beta_2 \sigma_4 \\
& + 3a_0 a_1 b_{-1}^2 \beta_2 \sigma_5 + a_0^2 b_{-1} b_0 \beta_2 \sigma_5 + 2a_{-1} a_1 b_{-1} b_0 \beta_2 \sigma_5 - a_{-1} a_0 b_0^2 \beta_2 \sigma_5 \\
& - 2a_{-1} a_0 b_{-1} b_1 \beta_2 \sigma_5 - 3a_{-1}^2 b_0 b_1 \beta_2 \sigma_5 = 0,
\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
e^{3x} : & -4a_1b_{-1}b_0^2\beta_3 - 4a_1b_{-1}^2b_1\beta_3 + 4a_{-1}b_0^2b_1\beta_3 + 4a_{-1}b_{-1}b_1^2\beta_3 + 4a_1b_{-1}b_0^2\beta_1^3\sigma_1 \\
& - 32a_1b_{-1}^2b_1\beta_1^3\sigma_1 - 4a_{-1}b_0^2b_1\beta_1^3\sigma_1 + 32a_{-1}b_{-1}b_1^2\beta_1^3\sigma_1 + 4a_1b_{-1}b_0^2\beta_1^2\beta_2\sigma_2 \\
& - 32a_1b_{-1}^2b_1\beta_12\beta_2\sigma_2 - 4a_{-1}b_0^2b_1\beta_1^2\beta_2\sigma_2 + 32a_{-1}b_{-1}b_1^2\beta_1^2\beta_2\sigma_2 \\
& + 2a_1^2b_{-1}^2\beta_1\sigma_3 + 4a_0a_1b_{-1}b_0\beta_1\sigma_3 - 4a_{-1}a_0b_0b_1\beta_1\sigma_3 - 2a_{-1}^2b_1^2\beta_1\sigma_3 \\
& + 2a_1^2b_{-1}^2\beta_2\sigma_4 + 4a_0a_1b_{-1}b_0\beta_2\sigma_4 - 4a_{-1}a_0b_0b_1\beta_2\sigma_4 - 2a_{-1}^2b_1^2\beta_2\sigma_4 \\
& + 2a_1^2b_{-1}^2\beta_2\sigma_5 + 4a_0a_1b_{-1}b_0\beta_2\sigma_5 - 4a_{-1}a_0b_0b_1\beta_2\sigma_5 - 2a_{-1}^2b_1^2\beta_2\sigma_5 = 0,
\end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
e^{4x} : & -a_1b_0^3\beta_3 - 6a_1b_{-1}b_0b_1\beta_3 + a_0b_0^2b_1\beta_3 + a_0b_{-1}b_1^2\beta_3 + 5a_{-1}b_0b_1^2\beta_3 \\
& + a_1b_0^3\beta_1^3\sigma_1 - 18a_1b_{-1}b_0b_1\beta_1^3\sigma_1 - a_0b_0^2b_1\beta_1^3\sigma_1 + 23a_0b_{-1}b_1^2\beta_1^3\sigma_1 \\
& - 5a_{-1}b_0b_1^2\beta_1^3\sigma_1 + a_1b_0^3\beta_1^2\beta_2\sigma_2 - 18a_1b_{-1}b_0b_1\beta_1^2\beta_2\sigma_2 \\
& - a_0b_0^2b_1\beta_1^2\beta_2\sigma_2 + 23a_0b_{-1}b_1^2\beta_1^2\beta_2\sigma_2 - 5a_{-1}b_0b_1^2\beta_1^2\beta_2\sigma_2 \\
& + 3a_1^2b_{-1}b_0\beta_1\sigma_3 + a_0a_1b_0^2\beta_1\sigma_3 + 2a_0a_1b_{-1}b_1\beta_1\sigma_3 - a_0^2b_0b_1\beta_1\sigma_3 \\
& - 2a_{-1}a_1b_0b_1\beta_2\sigma_3 - 3a_{-1}a_0b_1^2\beta_1\sigma_3 + 3a_1^2b_{-1}b_0\beta_2\sigma_4 + a_0a_1b_0^2\beta_2\sigma_4 \\
& + 2a_0a_1b_{-1}b_1\beta_2\sigma_4 - a_0^2b_0b_1\beta_2\sigma_4 - 2a_{-1}a_1b_0b_1\beta_2\sigma_4 - 3a_{-1}a_0b_1^2\beta_2\sigma_4 \\
& + 3a_1^2b_{-1}b_0\beta_2\sigma_5 + a_0a_1b_0^2\beta_2\sigma_5 + 2a_0a_1b_{-1}b_1\beta_2\sigma_5 - a_0^2b_0b_1\beta_2\sigma_5 \\
& - 2a_{-1}a_1b_0b_1\beta_2\sigma_5 - 3a_{-1}a_0b_1^2\beta_2\sigma_5 = 0,
\end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}
e^{5x} : & -2a_1b_0^2b_1\beta_3 - 2a_1b_{-1}b_1\beta_3 + 2a_0b_0b_1^2\beta_3 + 2a_{-1}b_1^3\beta_3 - 4a_1b_0^2b_1\beta_1^3\sigma_1 \\
& + 8a_1b_{-1}b_1^2\beta_1^3\sigma_1 + 4a_0b_0b_1^2\beta_1^3\sigma_1 - 8a_{-1}b_1^3\beta_1^3\sigma_1 - 4a_1b_0^2b_1\beta_1^2\beta_2\sigma_2 \\
& + 8a_1b_{-1}b_1^2\beta_1^2\beta_2\sigma_2 + 4a_0b_0b_1^2\beta_1^2\beta_2\sigma_2 - 8a_{-1}b_1^3\beta_1^2\beta_2\sigma_2 + a_1^2b_0^2\beta_1\sigma_3 \\
& + 2a_1^2b_{-1}b_1\beta_1\sigma_3 - a_0^2b_1^2\beta_1\sigma_3 - 2a_{-1}a_1b_1^2\beta_1\sigma_3 + a_1^2b_0^2\beta_2\sigma_4 \\
& + 2a_1^2b_{-1}b_1\beta_2\sigma_4 - a_0^2b_1^2\beta_2\sigma_4 - 2a_{-1}a_1b_1^2\beta_2\sigma_4 + a_1^2b_0^2\beta_2\sigma_5 \\
& + 2a_1^2b_{-1}b_1\beta_2\sigma_5 - a_0^2b_1^2\beta_2\sigma_5 - 2a_{-1}a_1b_1^2\beta_2\sigma_5 = 0,
\end{aligned} \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}
e^{6x} : & -a_1b_0b_1^2\beta_3 + a_0b_1^3\beta_3 + a_1b_0b_1^2\beta_1^3\sigma_1 - a_0b_1^3\beta_1^3\sigma_1 + a_1b_0b_1^2\beta_1^2\beta_2\sigma_2 \\
& - a_0b_1^3\beta_1^2\beta_2\sigma_2 + a_1^2b_0b_1\beta_1\sigma_3 - a_0a_1b_1^2\beta_1\sigma_3 + a_1^2b_0b_1\beta_2\sigma_4 \\
& - a_0a_1b_1^2\beta_2\sigma_4 + a_1^2b_0b_1\beta_2\sigma_5 - a_0a_1b_1^2\beta_2\sigma_5 = 0.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

denklemleri elde edilir. Bir çözüm

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{b_0^2(\beta_3 - \beta_1^3\sigma_1 - \beta_1^2\beta_2\sigma_2)}{4b_1(\beta_1\sigma_3 + \beta_2\sigma_4 + \beta_2\sigma_5)}, a_0 = \frac{b_0(\beta_3 + 5\beta_1^3\sigma_1 + 5\beta_1^2\beta_2\sigma_2)}{\beta_1\sigma_3 + \beta_2\sigma_4 + \beta_2\sigma_5}, \\ a_1 &= \frac{b_1\beta_3 - b_1\beta_1^3\sigma_1 - b_1\beta_1^2\beta_2\sigma_2}{\beta_1\sigma_3 + \beta_2\sigma_4 + \beta_2\sigma_5}, b_{-1} = \frac{b_0^2}{4b_1} \end{aligned} \quad (4.63)$$

olur ve aşağıdaki

$$\begin{aligned} b_1 &= 1, b_0 = 1, \beta_1 = 1, \beta_2 = 1, \beta_3 = 1, \sigma_1 = 1, \\ \sigma_2 &= 1, \sigma_3 = 1, \sigma_4 = 1, \sigma_5 = 1 \end{aligned} \quad (4.64)$$

seçimi yapılırsa bir özel çözüm

$$U(\eta) = -\frac{1 + 4e^\eta(-11 + e^\eta)}{3(1 + 2e^\eta)^2} \quad (4.65)$$

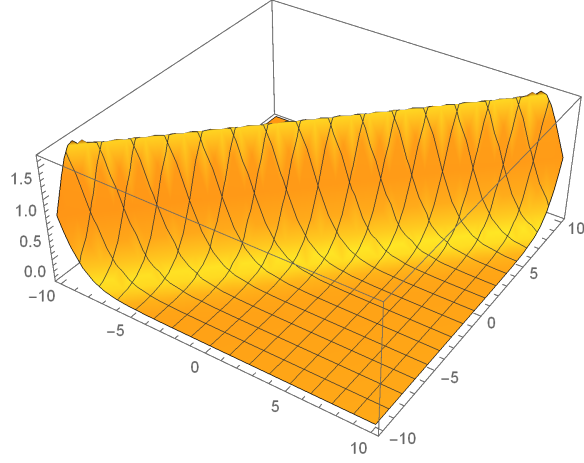
biçimindedir. Orijinal $\eta = \beta_1x + \beta_2y - \beta_3t$ değişkenine dönülürse (4.52) denkleminin çözümü

$$U(x, y, t) = -\frac{1 + 4e^{x+y-t}(-11 + e^{x+y-t})}{3(1 + 2e^{x+y-t})^2} \quad (4.66)$$

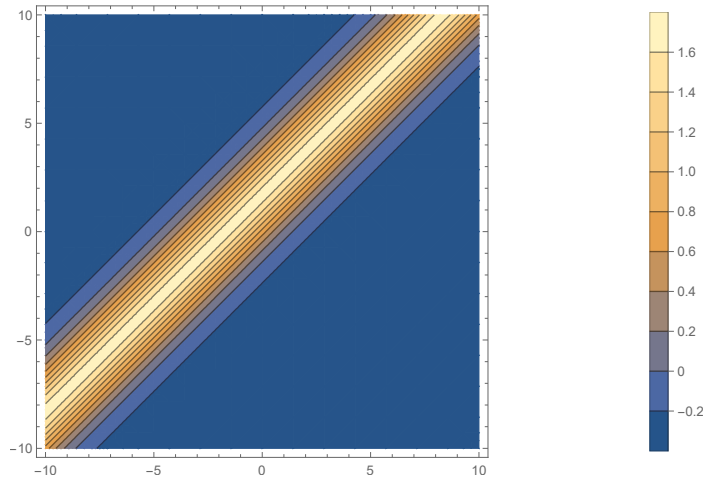
olur. Ayrıca,

$$U + \frac{1 + 4e^{x+y-t}(-11 + e^{x+y-t})}{3(1 + 2e^{x+y-t})^2} = 0. \quad (4.67)$$

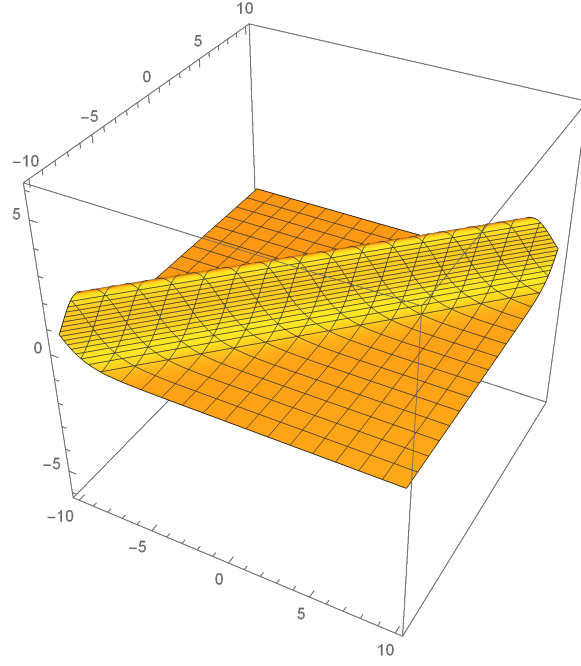
Son olarak, V çözümü $V = \frac{\beta_2}{\beta_1}U$ olduğundan grafiklerine yer verilmemiştir.



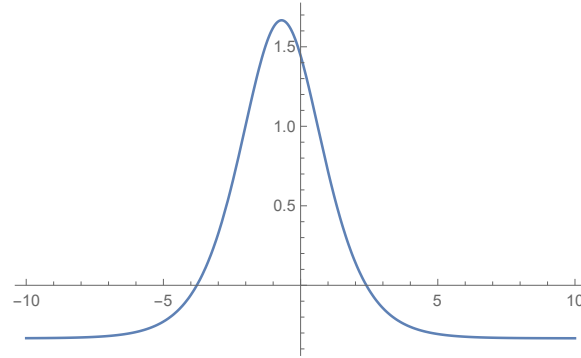
Şekil 4.13: (4.66) denkleminin 3D grafiği $y = 1$, $-10 \leq t \leq 10$ ve $-10 \leq x \leq 10$.



Şekil 4.14: (4.66) denkleminin contour grafiği $y = 1$, $-10 \leq t \leq 10$ ve $-10 \leq x \leq 10$.



Şekil 4.15: (4.67) ifadesinin 3D grafiği $y = 1$, $-10 \leq t \leq 10$, $-10 \leq x \leq 10$ ve $-6 \leq U \leq 6$



Şekil 4.16: (4.65) denkleminin 2D grafiği $-10 \leq \eta \leq 10$.

5. TARTIŞMA

Bu tezde, üç farklı denklem AGM ile bir denklem de EFM ile ele alınmıştır. AGM ile ele alınan denklemlerin tümü homojen denklemlerdir. Denklemlere AGM ve EFM yöntemleri tatbik edilirken arzu edilen beklentiler ve istenilmeyen beklentiler tartışılacaktır. Homojen bir denkleme AGM tatbik edildiğinde yaklaşık çözümleri inşa etmede etkili bir yöntemdir. Burada, (4.1) Duffing denklemi ilk defa AGM ile yaklaşık çözümü (4.12) ile verilmiştir. KS denklemine karşılık gelen (4.17) bayağı denklemi (4.18) koşulları ilk defa AGM ile analiz edilmiştir. Burada, (4.17) denkleminin çözümü (4.27) ile verilmiştir. KdV denklemine karşılık gelen (4.32) bayağı denklemi (4.33) koşulları ilk defa AGM ile analiz edilmiştir. Burada, (4.32)-(4.33) denkleminin AGM ile yaklaşık çözümü (4.43) ve bir özel yaklaşık çözümü ise (4.44) ile ifade edilmiştir.

EFM metodu (4.46) KdV denklemine tatbik edildi. (4.46) denkleminin test çözümü (4.52) denklemi olarak ele alındı. (4.52) denklemindeki sabit katsayılar bulunduktan sonra (4.46) denklemi sağlayan bir özel çözüm (4.65) ile verildi. EFM metodu denklemlere uygulanırken çözüm olarak kabul edilen denklemin pay kısmındaki katsayılar payda kısmında bulunan katsayılarla sayı olarak doğru orantılı olabilir. Bu halde, istenilen çözüm veya yaklaşık çözüm yerine sabit bir çözüm bulunur. EFM ile elde edilen yaklaşık çözüm ele alınan denklemi sağlıyor.

6. SONUÇLAR

Bu kısımda, ele alınan problemlere AGM ve EFM metotları uygulanırken elde edilen sonuçlar ifade edilecektir. Sağ tarafsız diferansiyel denklemlerin çözümünde AGM metodu tatbik edilirken çalışılan denklemleri sağlayan tam çözüm yerine ele alınan problemlerin AGM ile başlangıç değer koşullarını sağlayan yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Denklemlerin çözümünde EFM metodu uygulandığında ele alınan problemi sağlayan çözüm bulunmuştur. Duffing, KS ve KdV denklemlerini sağlayan yaklaşık ve tam çözümlerin grafikleri Bulgular kısmında verilmiştir.

7. ÖNERİLER

Bu tezde, diferansiyel denklemler analiz edilirken AGM ve EFM metotları kullanılmıştır. Öneri olarak yaklaşık veya tam çözümleri elde etmek için farklı metotlar kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- Akbari, M. R., Ganji, D. D., Rostami, A. K., & Nimafar, M. (2015). Solving nonlinear differential equation governing on the rigid beams on viscoelastic foundation by AGM. *Journal of Marine Science and Application*, 14, 30-38.
- Alıcı, H. and Tanrıverdi, T. (2020). General solution of the Schrödinger equation for some trigonometric potentials. *Journal of Mathematical Chemistry*, 58 (5), 1041–1057.
- Alıcı, H. and Tanrıverdi, T. (2020). General Solution of the Schrödinger Equation for Some Hyperbolic Potentials. *Few-Body Systems*, 61 (4), 41.
- Baskonus, H. M., Mahmud, A. A., Muhamad, K. A., Tanrıverdi, T., and Gao, W. (2022). Studying on Kudryashov-Sinelshchikov dynamical equation arising in mixtures liquid and gas bubbles. *Thermal Science*, 26(2 Part B), 1229-1244.
- Baskonus, H. M., Mahmud, A. A., Muhamad, K. A., and Tanrıverdi, T. (2022). A study on Caudrey–Dodd–Gibbon–Sawada–Kotera partial differential equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45(14), 8737-8753.
- Biz, A. (2019). *Kısmi Diferansiyel Denklemlerde Diferansiyel Dönüşüm Metodu* [Yayımlanmamış], Harran Üniversitesi.
- Chakraverty, S., Mahato, N., Karunakar, P., & Rao, T. D. (2019). *Advanced numerical and semi-analytical methods for differential equations*. John Wiley & Sons.
- Davis, H. T. (1960). *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*. Dover.
- Debnath, L., (2005). *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Boston: Birkhäuser.
- Güneş, M. H. (2021). *Rabinovich-Fabrikant sisteminin Mittag-Leffler fonksiyonlarıyla çözümü* [Yayımlanmış yüksek lisans tezi]. Harran Üniversitesi.
- Hastings, S. P. and McLeod, J. B. (2011). *Classical methods in ordinary differential equations: with applications to boundary value problems* (Vol. 129). American Mathematical Soc.
- He, J. H., & Wu, X. H. (2006). Exp-function method for nonlinear wave equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 30(3), 700-708.
- Hoşer, D. (2023). *Basit Denklem Metodu ve Uygulamaları* [Yayımlanmamış]. Harran Üniversitesi.
- İşleyen, D. (2024). *Bazı Denklemlerin Mittag-Leffler Fonksiyonu ile Çözümü* [Yayımlanmamış]. Harran Üniversitesi.
- Logan, J. D. (1994). *An introduction to nonlinear partial differential equations*. John Wiley and Sons.
- Mahmud, A. A. (2023). *Application of three different methods to several nonlinear partial differential equations modeling certain scientific phenomena* [Unpublished]. Harran University.
- Mahmud, A. A., Baskonus, H. M., Tanrıverdi, T., and Muhamad, K. A. (2023). Optical solitary waves and soliton solutions of the (3+ 1)-dimensional generalized Kadomtsev–Petviashvili–Benjamin–Bona–Mahony equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 63(6), 1085-1102.

- Mahmud, A. A., Muhamad, K. A., Tanriverdi, T., and Baskonus, H. M. (2024). An investigation of Fokas system using two new modifications for the trigonometric and hyperbolic trigonometric function methods. *Optical and Quantum Electronics*, 56(5), 717.
- Mahmud, A. A., Tanriverdi, T., Muhamad, K. A., & Baskonus, H. M. (2024). An investigation of the influence of time evolution on the solution structure using hyperbolic trigonometric function methods. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 10(4), 137.
- Mahmud, A. A., Tanriverdi, T., Muhamad, K. A., and Baskonus, H. M. (2023). Characteristic of ion-acoustic waves described in the solutions of the $(3+1)$ -dimensional generalized Korteweg-de Vries-Zakharov-Kuznetsov equation. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 22(2), 36-48.
- Mahmud, A. A., Tanriverdi, T., Muhamad, K. A., and Baskonus, H. M., (2023). Structure of the analytic solutions for the complex non-linear $(2+1)$ -dimensional conformable time-fractional Schrödinger equation by. *Thermal Science*, 27(1), 211-225.
- Mahmud, A. A., Tanriverdi, T., and Muhamad, K. A. (2023). Exact traveling wave solutions for $(2+1)$ -dimensional Konopelchenko-Dubrovsky equation by using the hyperbolic trigonometric functions methods. *Int. J. Math. Comput. Eng*, 1(1), 1-14.
- Merca, M., and Tanriverdi, T. (2013). An asymptotic formula of cosine power sums. *Le Matematiche*, 68(1), 131-136.
- Muhamad, K. A. (2023). *A study on some nonstandard partial differential equations* [Unpublished]. Harran University.
- Muhamad, K. A., Tanriverdi, T., Mahmud, A. A., and Baskonus, H. M. (2023). Interaction characteristics of the Riemann wave propagation in the $(2+1)$ -dimensional generalized breaking soliton system. *International Journal of Computer Mathematics*, 100(6), 1340-1355.
- Podlubny, I. (1998). *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications* (Vol. 198). Elsevier.
- Şap, A. (2024). *Sinüs-Gordon Açılım Metodu ve Uygulamaları* [Yayımlanmamış]. Harran Üniversitesi.
- Tanriverdi, T. (2001). *Boundary value problems in ODE*[Unpublished]. University of Pittsburgh.
- Tanriverdi, T. (2009). Differential equations with contour integrals. *Integral Transforms and Special Functions*, 20 (2), 119-125.
- Tanriverdi, T. (2009). Contour integrals associated differential equations, *Mathematical and Computer Modelling*, 49 (3-4), 453-462.
- Tanriverdi, T. (2012). Reformulation of Shapiro's inequality. *International Mathematical Forum*, 7 (43), 2125-2130.
- Tanriverdi, T. (2012). Reverse Shapiro Type Inequality. *Int. Journal of Math. Analysis*, 6(38), 1871-1875.
- Tanriverdi, T. (2017). Oscillating Solutions of the Lane-Emden Equation for Polytropic Indices $m = 0$ and 1 . *British J. Math. & Compute. Sci.*, 20(3), 1-5.
- Tanriverdi, T. (2018). An unnoticed way of obtaining the Binet form for Fibonacci numbers. *New Trends in Mathematical Sciences*, 6 (2), 97-101.
- Tanriverdi, T. (2018). Evaluating Sine and Cosine Type Integrals. *IJASM*, 5(2), 11-13.

- Tanriverdi, T., and Ağırağaç, N. (2018). Differential transform applied to certain ode. *Advances in Differential Equations and Control Processes*, 19(3), 213-235.
- Tanriverdi, T. (2019). Classical way of looking at the Lane-Emden equation. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.*, 68 (1), 271-276.
- Tanriverdi, T. (2019). A Specific Sturm-Liouville Differential Equation. *Thermal Science*, 23(1), S47-S56.
- Tanriverdi, T. (2019). Schrödinger equation with potential function vanishing exponentially fast. *Journal of Taibah University for Science*, 13 (1), 639–643.
- Tanriverdi, T. (2021). The limit of the Riemann zeta function and its nontrivial zeros. *arXiv preprint, arXiv:1902.06695 [math.GM]*.
- Tanriverdi, T. (2021). Existence of self-similar solutions to Smoluchowski's coagulation equation with product kernel. *Turkish Journal of Mathematics*, 44 (5), 1660-1672.
- Tanriverdi, T., Baskonus, H. M., Mahmud, A. A., and Muhamad, K. A. (2021). Explicit solution of fractional order atmosphere-soil-land plant carbon cycle system. *Ecological Complexity*, 48, 100966.
- Tanriverdi, T. and Mcleod, J. B. (2007). Generalization of the eigenvalues by contour integrals. *Appl. Math. Comput.*, 189(2), 1765-1773.
- Tanriverdi, T. and Mcleod, J. B. (2008). The analysis of contour integrals. *Abstr. Appl. Anal.*, Article ID 765920, 12 pages.
- Tanriverdi, T. and Mcleod, J. B. (2010). The Fanno model for turbulent compressible flow. *Journal of Differential Equations*, 249(12), 2955-2963.
- Teschl, G. (2024). *Ordinary differential equations and dynamical systems*. American Mathematical Society.
- Tanriverdi, T. and Ağırağaç, N. (2018). Differential Transform Applied to Certain ODE. *Advances in Differential Equations and Control Processes*, 19 (3), 213-235.
- Waltman, P. (1983). *Competition models in population biology*. Society for industrial and applied mathematics.
- Whitham, G. B. (1974). *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley.
- Xu, G. Q. (2015). Integrability of a $(2+1)$ -dimensional generalized breaking soliton equation. *Applied Mathematics Letters*, 50, 16-22.