T.C.
Harran Üniversitesi
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

Mehmet ÖZBAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Şanlıurfa
2024

T.C.
Harran Üniversitesi
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

Mehmet ÖZBAY

MATEMATİK
Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Döne KARAHAN DİNSEVER

Şanlıurfa
2024

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

Mehmet ÖZBAY

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Döne KARAHAN DİNSEVER

Yıl: 2024, sayfa: 40

Bu tezde, q-Bernstein operatörlerinin Kantorovich tipli bir genellemesi tanıtılarak bu operatörlerin klasik ve istatistiksel yakınsama özellikleri incelenmiştir. Tez çalışması, q-parametrelerine dayalı olarak geliştirilen bu genellemenin, $[-1, 1]$ kompakt aralığında fonksiyonların daha esnek ve hassas bir şekilde yaklaşık olarak ifade edilmesine olanak tanıyan özelliklerini kapsamaktadır. Çalışmada, q-analizden faydalanılarak q-integral kullanımıyla genelleştirilen bu operatörlerin süreklilik modülü ve yakınsama hızı gibi temel özellikleri detaylı bir şekilde ele alınmıştır.

Özellikle, istatistiksel yakınsama kavramı üzerinde durularak q-Bernstein-Kantorovich operatörlerinin bu bağlamdaki performansı değerlendirilmiştir. Ayrıca, tezin son bölümünde, oluşturulan genellemenin Riemann tipi q-integral ile genişletilmesi ve bunun sonucunda elde edilen ”İkinci Tip q-Bernstein-Kantorovich Operatörü”ne ilişkin sonuçlar tartışılmıştır.

Bu tez, pozitif doğrusal operatörler ve yaklaşım teorisi alanına katkı sağlamayı hedeflemektedir. Elde edilen bulgular, hem matematiksel teori hem de uygulamalı alanlarda kullanılabilecek yeni yöntemlerin geliştirilmesine ışık tutmaktadır.

ANAHTAR KELİMELER: q-Bernstein operatörleri, Kantorovich genellemesi, istatistiksel yakınsama, q-analiz, yaklaşım teorisi.

ABSTRACT

MSc Thesis

ON THE APPROXIMATION PROPERTIES OF GENERALIZED LINEAR POSITIVE OPERATORS

Mehmet ÖZBAY

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Dr. Döne KARAHAN DİNSEVER
Year: 2024, page: 40

In this thesis, a Kantorovich-type generalization of q-Bernstein operators is introduced, and the classical and statistical convergence properties of these operators are analyzed. The study covers the features of this generalization, developed based on q-parameters, that allow functions in the compact interval $[-1, 1]$ to be approximated in a more flexible and precise manner. The properties such as the modulus of continuity and the rate of convergence of these operators, generalized using q-integrals, are examined in detail through the use of q-analysis.

Particular attention is given to the concept of statistical convergence, and the performance of q-Bernstein-Kantorovich operators in this context is evaluated. Furthermore, in the final section of the thesis, the generalization is extended with Riemann-type q-integrals, and the results related to the ”Second Type q-Bernstein-Kantorovich Operator” are discussed.

This thesis aims to contribute to the field of positive linear operators and approximation theory. The findings provide new insights that can be applied both in mathematical theory and in practical domains.

KEYWORDS: q-Bernstein operators, Kantorovich generalization, statistical convergence, q-analysis, approximation theory.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında bilgi ve tecrübeleriyle yol gösteren, değerli zamanını esirgemeyerek destek olan ve bana akademik hayatım boyunca rehberlik eden danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Döne KARAHAN DİNSEVER'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez sürecimde ve hayatımın her anında yanımda olan, beni destekleyen ve teşvik eden aileme minnettarım. Özellikle babama ve anneme, bana verdikleri emek, sevgi ve fedakarlıkla bu günlere ulaşmamda en büyük paya sahiptirler. Eşime, her daim yanımda olduğu, anlayış ve sabrıyla bana güç verdiği için şükranlarımı sunarım.

Ayrıca, bu süreçte bilgi birikimi ve dostluğuyla yanımda olan değerli arkadaşlarım Muhammet Yasin AYDIN ve Sedat ABRAK'a teşekkür ederim.Onların desteği, bu çalışmanın ortaya çıkmasında önemli bir katkı sağlamıştır.

Bu çalışmayı, her daim gurur kaynağım olan evlatlarıma ithaf ediyorum.

Tüm aileme, bana sağladıkları manevi destek ve sabır için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$L(h;\xi)$	Lh fonksiyonunun ξ noktasında aldığı değer
$B[a,b]$	$[a,b]$ aralığındaki sınırlı fonksiyonların uzayı
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonların uzayı
$L^1[a,b]$	$[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların uzayı
$\|h\|_{C[a,b]}$	$C[a,b]$ fonksiyon uzayı üzerinde tanımlı norm
$B_\mu(h;\xi)$	h fonksiyonunun Bernstein polinomu
$h_\mu \rightrightarrows h$	h_μ fonksiyon dizisinin h fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$w(h;\upsilon)$	h fonksiyonun süreklilik modülü
$K_\mu(h;\xi)$	Bernstein-Kantorovich operatörü
$d_q h(\xi)$	$h(\xi)$ fonksiyonunun q-diferensiyeli
$I_q(h;a,b)$	$h(\xi)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki q-integrali
$R_q(h;a,b)$	$h(\xi)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki Riemann tipi q-integrali
$B_\mu(h;q;\xi)$	h fonksiyonun q-Bernstein operatörü
$K_\mu^*(h;q;\xi)$	q-Bernstein-Kantorovich operatörü
$\tilde{K}_\mu(h;q;\xi)$	İkinci tip q-Bernstein-Kantorovich operatörü

1. GİRİŞ

Pozitif lineer operatörler aracılığıyla yapılan yaklaşım çalışmaları, matematiğin farklı alanlarıyla sıkı bir ilişki içinde olan bir konudur ve kökeni, Weierstrass'ın 1885 yılında ortaya koyduğu temel yaklaşıma dayanmaktadır. Weierstrass, kompakt bir bölgede süreklilik sağlayan tüm fonksiyonların aynı bölgede bir polinom ile yaklaştırılabileceğini kanıtlamıştır. Bu çerçevede, 20. yüzyılın başlarında S.N. Bernstein, Weierstrass'ın yaklaşım teoremini ispatlamak üzere, kendi adıyla anılan ve ”Bernstein polinomları” olarak bilinen yeni bir polinom sınıfını tanımlamıştır. Başlangıçta bu polinomlar, Weierstrass yaklaşım teoreminin daha basit bir ispatına olanak sağlamak dışında fazla bir önem arz etmiyordu; Bernstein polinomlarının, Weierstrass yaklaşım teoreminin ispatında basit bir yöntem sunduğu anlaşıldıktan sonra, bu polinomların daha geniş bir kullanım alanına sahip olduğu 20. yüzyılın ortalarına kadar fark edilmemiştir. Özellikle otomotiv ve endüstriyel tasarım alanlarında geometrik modelleme amacıyla Bernstein polinomlarının kullanımı, bu polinomların önemini ortaya çıkarmıştır.

P. Faget ve P. Bezier gibi mühendisler, Citroen ve Renault gibi büyük Fransız otomotiv firmalarında araç gövdelerinin hassas geometrik modellemesini gerçekleştirmek için Bernstein polinomlarından yararlanmışlardır. Bezier, Bernstein polinomlarını temel alarak geliştirdiği Bezier eğrileri ile bilgisayar destekli tasarım (CAD) ve bilgisayar grafiği alanlarında çığır açmıştır. Bu gelişmeler, Bernstein operatörlerinin yalnızca matematiksel bir araç değil, aynı zamanda mühendislik ve tasarım alanlarında geniş uygulama potansiyeline sahip olduklarını göstermiştir.

Bu bağlamda, Bernstein polinomları ve pozitif lineer operatörlerle yaklaşım teorisi, hem teorik hem de uygulamalı matematik alanlarında değerli bir araştırma konusu olarak birçok araştırmacının dikkatini çekmiştir.

Yaklaşım teorisinin temel amacı, mevcut fonksiyonlardan daha kullanışlı olanları bulmaktır; zira bu fonksiyonlar işlem kolaylığı ve hesaplamada sağladıkları avantajlarla öne çıkar. Özgün fonksiyonlar, kimi zaman karmaşık, doğrusal olmayan veya analitik olarak çözülemeyen yapılar sergiler. Bu gibi durumlarda, yaklaşım teorisi sayesinde fonksiyonların, polinomlar veya daha basit yapıdaki pozitif lineer operatörlerle temsil edilen yaklaşık değerleri hesaplanabilir.

Daha kullanışlı hale getirilmiş bu fonksiyonlar, özellikle hesaplamaların sıkça tekrarlandığı mühendislik, fizik ve bilgisayar bilimleri gibi alanlarda önem kazanmaktadır. Bu yaklaşımların sağladığı en önemli fayda; sayısal analiz, bilgisayar destekli tasarım ve simülasyon gibi alanlarda işlem süresini kısaltmak, hata oranını düşürmek ve daha verimli sonuçlar elde etmektir. Dolayısıyla, bu yöntemlerle karmaşık problemler daha basit ve işlenmesi kolay fonksiyon dizileri üzerinden analiz edilebilmektedir.

Yaklaşım teorisi, pozitif doğrusal operatör dizilerinin yakınsama özelliklerini anlamada Bohman ve Korovkin'in katkılarından büyük ölçüde faydalanmıştır. Özellikle Korovkin teoremi, sürekli fonksiyonlar üzerindeki pozitif doğrusal operatörlerin yakınsamasını belirlemek için temel bir sonuç sunmaktadır. Korovkin teoremi, bir fonksiyon uzayına etki eden pozitif doğrusal operatörler dizisinin, bu operatörlerin küçük bir test fonksiyonları kümesi üzerinde yakınsamasının yeterli olduğunu belirtir. Kompakt bir aralıkta tanımlanan fonksiyonlar için bu test kümesi tipik olarak 1, t ve t^2 fonksiyonlarından oluşur. Eğer operatör dizisi bu fonksiyonlar üzerinde yakınsarsa, o zaman bu yakınsama aralıktaki tüm sürekli fonksiyonlar uzayında gerçekleşir.

Bohman'ın çalışması ise, pozitif operatörler aracılığıyla yaklaşım çerçevesini genişleterek, bu operatörlerin salınım davranışlarını kontrol etmek ve yumuşatma özelliklerini incelemek için teknikler sunmuştur. Bu özellikleri ele alarak, Bohman yaklaşım için daha derinlemesine bir inceleme yapılmasını sağlamış ve araştırmacılara daha geniş bir araç seti sunmuştur. Bohman (Bohman, 1994) ve Korovkin'in (Korovkin, 1953) katkıları bir arada, yaklaşım teorisinin gelişimini ilerleterek, hem teorik hem de pratik bağlamlarda verimli ve yaygın olarak uygulanabilen yaklaşım şemalarını analiz etmek ve inşa etmek için temel araçları sağlamıştır. Bu ilerlemelerin sonrasında, birçok matematikçi tarafından lineer pozitif operatörlerin farklı versiyonları tanımlanarak yaklaşım özellikleri analiz edilmiştir. Bu bağlamda, Szasz operatörü, Meyer-König ve Zeller operatörü, Bleimann-Butzer-Hahn operatörü gibi çeşitli operatörler literatürde yerini almıştır. Bu tür operatörler, farklı özellikler sergileyerek, özellikle belirli fonksiyonların yaklaşık değerlerinin daha etkin ve hassas bir şekilde bulunmasına olanak tanımakta ve yaklaşım teorisinin pratik uygulamalarını genişletmektedir.

Bernstein operatörleri, genellikle sürekli fonksiyonlar üzerinde çalışırken, pratikte bazı fonksiyon sınıflarına, örneğin integrallenebilir fonksiyonlara ya da daha geniş fonksiyon uzaylarına uygulandığında yetersiz kalabilir. Bu noktada, Bernstein operatörlerinin daha geniş bir sınıf üzerinde geçerli olabilmesi için çeşitli genellemeler yapılmıştır.Bu genellemeler integral türündeki versiyonlarını içerir.Kantorovich, Durrmeyer ve Derriennic gibi matematikçiler tarafından geliştirilmiştir (Kantorovich, 1930), (Durrmeyer, 1967) ve (Derriennic, 2005) . Bu yeni genellemeler, operatörlerin yakınsama özelliklerini incelemek için kullanılan klasik yöntemlere alternatif olarak, fonksiyonlar üzerinde daha genel koşullar altında çalışabilmelerine olanak sağlar. İntegral tipli genellemeler, fonksiyonların daha geniş bir yelpazede yakınsamasını mümkün kılar ve Bernstein operatörlerinin yalnızca sürekli fonksiyonlar üzerinde değil, aynı zamanda integrallenebilir fonksiyonlar üzerinde de kullanılabilmesini sağlar.

Bernstein operatörlerinin bir başka önemli modifikasyonu, Kuantum analizi temel alarak geliştirilmiştir. 18. yüzyılda Euler tarafından temelleri atılan Kuantum analizi 19. yüzyılda oldukça önemli ilerlemeler kaydetmiştir. 20. yüzyılın ikinci yarısında, q-analiz hem matematik hem de fizik alanlarında farklı uygulama alanları bulmuş ve bu süreç, q-analize olan ilginin giderek artmasına neden olmuştur. Günümüzde, klasik analizde bilinen birçok tanım ve teorem, q-analiz bağlamında yeniden ele alınmakta, ayrıca bazı integral eşitsizliklerinin q-genelleştirmeleri üzerine yoğun çalışmalar yapılmaktadır.

Yaklaşım teorisinde klasik yakınsaklık kavramı üzerine çalışmalar sürerken, istatistiksel yakınsaklık kavramı son yıllarda dikkat çeken bir araştırma alanı haline gelmiş ve birçok akademik çalışmaya konu olmuştur. İlk kez 1950'lerde Gadijev ve Orhan (Gadjiev ve Orhan, 2002) tarafından Korovkin türü yaklaşım teoreminin gelişmesini sağlayan istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanılmıştır. Bu teorem aracılığıyla, pek çok operatörün istatistiksel yaklaşım özellikleri detaylı bir şekilde analiz edilmiş ve bu operatörlerin yaklaşım oranları kapsamlı biçimde incelenmiştir. Elde edilen bulgular, çeşitli operatör ailelerinin istatistiksel yakınsaması hakkında önemli bilgiler sunmuş ve yaklaşım teorisinin gelişimine anlamlı katkılar sağlamıştır.

Bernstein polinomları genelde $[0, 1]$ aralığında tanımlı olsalar da, bu polinomları $[-1, 1]$ aralığına uyarlamak mümkündür. Bu, q-analiz gibi modern yöntemlerle yapılır ve genellikle Bernstein-Kantorovich operatörleri gibi yapılarla birlikte ele alınır. Bu tür operatörlerin çalışmaları, bu tezde üzerinde çalıştığımız İkinci tip q-Bernstein-Kantorovich operatörünün istatistiksel yakınsaklığı konusu için önemlidir, çünkü q-parametreleri, $[-1, 1]$ aralığındaki fonksiyonları daha esnek bir şekilde yaklaşık olarak ifade etmeye olanak tanır.

Bu tez, q-Bernstein operatörlerinin Kantorovich tipindeki bir genellemesi tanımlanarak, söz konusu operatörün hem klasik hem de istatistiksel yakınsama özelliklerini inceleyen beş anabölümden oluşmaktadır. Tezin ilk bölümü giriş olmak üzere ikinci bölümü, konuya ilişkin daha önce yapılmış araştırmaları ele almaktadır. Üçüncü bölümde Materyal-yöntemlere yer verilmiş ve okuyucuya gerekli altyapı sunulmuştur. Dördüncü bölümde ise, $[-1, 1]$ kompakt aralığında q-Bernstein-Kantorovich operatörünün klasik yakınsama,istatistiksel yakınsama özellikleri içeren yaklaşım özellikleri incelenmiştir.Ayrıca ikinci tip Riemann integrali ile operatörü yeniden tanımlayıp yaklaşım hızı incelenmiştir. Son olarak beşinci bölümde tezin sonuçlarından ve gelecek çalışmalar için önerilerden bahsedilmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Weierstrass, 1885 yılında sürekli fonksiyonlara polinomlar kullanılarak yaklaşılabileceğini ispatlayarak yaklaşım teorisinin temel taşlarından birini atmıştır (Weierstrass, 1885). Ancak, Weierstrass tarafından verilen bu teoremin ispatı, döneminin matematikçileri tarafından uzun ve karmaşık bulunmuştur. 1912 yılında ise S.N. Bernstein, kendi adıyla anılan

$$B_\mu(h;\xi) = \sum_{\kappa=0}^{\mu} h\left(\frac{\kappa}{\mu}\right)\binom{\mu}{\kappa}\xi^\kappa(1-\xi)^{\mu-\kappa}, \quad \forall\mu\in\mathbb{N}, \quad \xi\in[0,1]$$

polinom dizileri yardımıyla sürekli bir h fonksiyonunun yakınsamasını sağlamak üzere daha kısa ve anlaşılır bir ispat yöntemi geliştirmiştir (Bernstein, 1912-1913). Bernstein operatörlerinin tanımlanmasının ardından, bu operatörlerin çeşitli genellemeleri üzerine çok sayıda çalışma gerçekleştirilmiştir. Özellikle, analizin temel teoremlerini kullanan araştırmacılar, Bernstein operatörlerinin integral tabanlı genellemelerini tanımlamış ve bu genellemelerin yaklaşım özelliklerini detaylı bir şekilde incelemiştir ((Kantorovich, 1930), (Durrmeyer, 1967)).

Bu çalışmalar sonucunda, Durrmeyer ve Kantorovich tipli genellemeler olarak adlandırılan integral tabanlı genişlemeler, integrallenebilir fonksiyonlar uzayında yakınsama gereksinimini karşılamak üzere geliştirilmiş ve bu süreçte aşağıda Bernstein-Kantorovich operatörü olarak bilinen yapı tanımlanmıştır.

Bu açıklamaya göre

$M_\mu : L^1([0,1]) \to C([0,1])$ olmak üzere $\forall\mu\in\mathbb{N}$ ve $\forall\xi\in[0,1]$

$$M_\mu(h;\xi) = (\mu+1)\sum_{\kappa=0}^{\mu}\tau_{\mu,\kappa}(\xi)\int_{\frac{\kappa}{\mu+1}}^{\frac{\kappa+1}{\mu+1}} h(t)dt$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\tau_{\mu,\kappa}(\xi) = \binom{\mu}{\kappa}\xi^\kappa(1-\xi)^{\mu-\kappa}$$

dır. Bu operatörün her $h \in C([0,1])$ için, $[0,1]$ aralığında h fonksiyonuna düzgün yakınsaması, Korovkin teoremi yardımıyla gösterilmiştir (Altomare ve Campiti, 1994).

Yaklaşım teorisinde, son yıllarda gerçekleştirilen araştırmalarda, q-analiz pozitif lineer operatörler üzerine uygulanmış ve q-analiz çerçevesinde tanımlanan yeni operatörlerin yaklaşım özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Bu çalışmalar, yaklaşım teorisinin gelişimine önemli katkılar sağlamıştır.

q-analizi temel alan bu operatörlerden biri, L. Lupaş tarafından tanıtılmıştır (Lupaş, 1987). Bunun yanı sıra, 1996 yılında Philips, q-analiz altında Bernstein polinomlarının yaklaşım özelliklerini incelemiş ve bu polinomların q-analiz bağlamında uyarlanabilirliğini analiz etmiştir (Dökmen, 2009). Bu öncü çalışmaları takiben, q-analizin yaklaşım teorisine uygulanması, pek çok araştırmacının ilgisini çekmiş ve bu doğrultuda çeşitli çalışmalar yapılmıştır.

Örneğin, H. Oruç ve N. Tuncer, 2002 yılında gerçekleştirdikleri araştırmada, q-Bernstein polinomlarının yakınsama özelliklerini detaylandırmış ve bu operatörün genelleştirilmiş bir versiyonunu ortaya koymuşlardır. Bu tür çalışmalar, q-analizin yaklaşım teorisindeki yerini sağlamlaştırarak teorinin ilerlemesine katkı sunmuştur.

$h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$B_\mu(h; q; \xi) = \sum_{\kappa=0}^{\mu} h\left(\frac{[\kappa]_q}{[\mu]_q}\right) \begin{bmatrix} \mu \\ \kappa \end{bmatrix}_q \xi^\kappa (1 - q^s\xi)^{\mu-\kappa} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanmış ve bu operatörün yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

1980 yılında Blemann ve arkadaşları, Blemann-Butzer-Hahn operatörünü ve başka bazı operatörleri tanımlamışlardır. Bu operatörler, fonksiyon yaklaşımı alanında birçok önemli genellemenin elde edilmesine olanak sağlamıştır. Blemann-Butzer-Hahn operatörü ve benzer yapılar, klasik yaklaşım yöntemlerinin yetersiz kaldığı durumlarda daha esnek ve etkili çözümler sunarak, fonksiyonların daha doğru bir şekilde yakınsamasını mümkün kılmıştır. Bu tür operatörler, matematiksel ve uygulamalı alanlarda yaklaşım teorisinin geliştirilmesinde önemli bir rol oynamıştır.

Abel (Abel, 1998) çalışmasında, Kantorovich operatörlerinin asimptotik yaklaşımını incelemiştir. Bu çalışma, operatörlerin uzun vadeli davranışlarını ve yakınsama özelliklerini araştırarak önemli sonuçlar elde etmiştir. Ayrıca, Kivinukk ve Metsmagi (Kivinukk,Metsmagi, 2011) ise Kantorovich operatörlerini, sınırlı salınımlı fonksiyonlar için ele almış ve bu fonksiyonların salınım davranışlarını derinlemesine incelemişlerdir. Bu çalışmalar, Kantorovich operatörlerinin özelliklerini ve uygulama alanlarını daha iyi anlamamıza katkı sağlamıştır.

3. GEREÇ VE YÖNTEM

Bu bölümde, Araştırma Bulguları ve Tartışma kısmında kullanılmak üzere, çalışmanın teorik zeminini oluşturan temel tanım ve teoremler ayrıntılı bir şekilde sunulmuştur. Söz konusu tanım ve teoremler, ilerleyen aşamalarda gerçekleştirilecek analizlerin metodolojik temelini teşkil etmekte olup, tartışmaların bilimsel doğruluk ve tutarlılık çerçevesinde yürütülmesine olanak sağlayacak teorik altyapıyı sağlamaktadır.

3.1 Lineer Pozitif Operatörler

X ve Y fonksiyon uzayları olsun. $L : X \to Y$ dönüşümüne L operatörü denir. Bu durumda, L operatörü X uzayında tanımlı her h fonksiyonuna, Y uzayında bir Lh fonksiyonu atar. Bu Lh fonksiyonunun ξ noktasındaki değeri ise $L(h;\xi)$ ile gösterilir. $\forall h, g \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için, L operatörü

$$L(\alpha h + \beta g, .) = \alpha L(h, .) + \beta L(g, .)$$

koşulunu sağlıyorsa, bu operatör lineer olarak adlandırılır. Eğer L operatörü, pozitif bir h fonksiyonunu yine pozitif bir Lh fonksiyonuna dönüştürüyorsa, bu durumda L operatörü pozitif bir dönüşüm olarak kabul edilir; yani,

$h(.) \geq 0$ iken $L(h, .) \geq 0$

sağlanıyorsa, $L(h, .)$ operatörüne pozitiftir denir.

3.2 Lineer Pozitif Operatörlerin Yakınsaklığı

Kapalı bir $[a, b]$ aralığında tanımlı ve sürekli olan tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye, $C[a, b]$ fonksiyon uzayı denir. $h \in C[a, b]$ olmak üzere, bu uzaydaki norm

$$\|h\|_{C[a,b]} = \max_{\xi \in [a,b]} |h(\xi)| \tag{3.1}$$

ile gösterilir. Eğer her $\xi \in [a, b]$ için

$$\lim_{\mu \to \infty} \|h_\mu - h\|_{C[a,b]} = \lim_{\mu \to \infty} \max_{\xi \in [a,b]} |h_\mu(\xi) - h(\xi)| = 0 \tag{3.2}$$

sağlanıyorsa, h_μ dizi fonksiyonu h fonksiyonuna $C[a, b]$ normunda düzgün yakınsaktır denir ve

$$h_\mu \rightrightarrows h$$

şeklinde yazılır.

Yaklaşımlar teorisinde düzgün yakınsaklık kavramı, Weierstrass tarafından ilk kez aşağıdaki şekilde ortaya konulmuştur.

Teorem 3.1. *(Weierstrass, 1885) $h(\xi) \in C[a, b]$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için*

$$|h(\xi) - p_\mu(\xi)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $p_\mu(\xi)$ polinomu bulunur.

Sonuç olarak, kapalı bir aralıkta tanımlı herhangi bir sürekli fonksiyonun, bu aralık üzerinde kendisine düzgün yakınsayan bir polinom ile temsil edilebileceği gösterilmiştir.

Bu temel teorem, ilk kez 1885 yılında Weierstrass tarafından ortaya konulmuş ve zamanla farklı yöntemlerle ispatlanmıştır. Bu ispatlar arasında, 1912 yılında Bernstein tarafından sunulan yaklaşım, sade ve etkili bir yöntem olarak öne çıkmıştır.

Teorem 3.2. *(Bernstein, 1912-1913) $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ olmak üzere h fonksiyonun Bernstein polinomu*

$$B_\mu(h; \xi) = \sum_{\kappa=0}^{\mu} \binom{\mu}{\kappa} h\left(\frac{\kappa}{\mu}\right) \xi^\kappa (1 - \xi)^{\mu-\kappa} \tag{3.3}$$

ile tanımlanır ve $h \in C[0, 1]$ olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$|h(\xi) - B_\mu(h; \xi)| < \varepsilon$$

dir.

Bernstein, bu teoremiyle yalnızca $[0, 1]$ aralığında bir polinomun düzgün yakınsaklığına işaret etmekle kalmamış, aynı zamanda bu polinomu açıkça ifade etmiştir. Böylece, Weierstrass'ın yaklaşım teoremi daha sade ve anlaşılır bir biçimde ispatlanmıştır.

1953 yılında Korovkin, lineer pozitif operatörlerin kullanımı yoluyla h fonksiyonuna yaklaşım problemine ilişkin kayda değer ve etkili bir teorem sunmuştur.

Teorem 3.3. *(Korovkin, 1953) $h(\xi) \in C[a,b]$ ve reel eksenin diğer tüm noktalarında $|h(\xi)| \leq M_h$ olsun.$L_\mu(h)$ lineer pozitif operatör dizisi, her $\xi \in [a,b]$ ve $\rho_i = t^i$ olmak üzere $i = 0,1,2$ için*

$$L_\mu(\rho_i;\xi) \rightrightarrows \xi^i$$

koşullarını sağlıyorsa, bu durumda $[a,b]$ aralığında

$$L_\mu(h;\xi) \rightrightarrows h(\xi)$$

dir.

Korovkin Teoremi, lineer pozitif operatörlerin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsama özelliklerini ispatlamak için oldukça basit bir yöntem sunmaktadır. Bernstein polinomlarıyla verilen (3.3) formülü, $[0,1]$ aralığında lineer pozitif operatörler olduğundan, bu operatörlerin $[0,1]$ aralığında sürekli olan h fonksiyonlarına düzgün yakınsadığı, Korovkin teoremi yardımıyla kolaylıkla ispatlanabilir.

3.3 Lineer Pozitif Operatörlerin Yaklaşım Hızı

Yaklaşımlar teorisinde önemli bir yere sahip olan 'düzgün yakınsama' kavramını ele aldıktan sonra, şimdi de 'yakınsama hızı' kavramını incelemeye başlayalım.

Tanım 3.4. *$(h_\mu(\xi))$ fonksiyon dizisi*

$$\lim_{\mu\to\infty} h_\mu(\xi) = 0$$

eşitliğini sağlıyorsa bu durumda $(h_\mu(\xi))$ dizisine sonsuz azalan dizi denir.

Tanım 3.5. *Her $\mu \in \mathbb{N}^+$ için (α_μ) ve (β_μ) dizileriyle ilgili olarak, $\alpha_\mu \leq \beta_\mu$ ve $\mu \to \infty$ için $\alpha_\mu \to 0$ ile birlikte $\beta_\mu \to 0$ koşullarını sağlayan fonksiyon dizileri verilsin. Bu durumda, (α_μ) dizisinin sıfıra yaklaşım hızı, (β_μ) dizisinin hızından daha hızlıdır denir.*

Önceki bölümde, belirli koşullar altında, lineer pozitif bir $L_\mu(h;\xi)$ operatör dizisinin, $h(\xi)$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını ifade etmiştik. Böyle bir durumda, $\|L_\mu(h) - h\|$ ifadesini, sıfıra yakınsayan bir dizi olarak kabul edebiliriz. Bu durumda $\mu \to \infty$ için $\beta_\mu \to 0$ iken,

$$\|L_\mu(h) - h\| \leq C\beta_\mu$$

koşulunu sağlayan (β_μ) dizisi bulunabilirse, bu dizinin sıfıra yaklaşma hızı, $L_\mu(h;\xi)$ nin $h(\xi)$ ye yaklaşma hızının değerlendirilmesinde bize önemli bir yardımcı olur. Bu değerlendirme genellikle 'süreklilik modülü' ve 'Lipschitz sınıfı' fonksiyonları kullanılarak yapılmaktadır.

3.4 Süreklilik Modülü ve Özellikleri

Tanım 3.6. *$I \subset \mathbb{R}$ ve h, I kümesinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere*

$$\omega(h;\upsilon) = \sup_{\substack{\xi_1,\xi_2 \in I \\ |\xi_1-\xi_2| \leq \upsilon}} |h(\xi_1) - h(\xi_2)| \tag{3.4}$$

ifadesine, h fonksiyonunun I aralığında süreklilik modülü denir.

$\omega(h;\upsilon)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $\omega(h;\eta) \geq 0$
2. $\eta_1 \leq \eta_2$ *ise* $\omega(h;\eta_1) \leq \omega(h;\eta_2)$
3. $\omega(h+g;\eta) \leq \omega(h;\eta) + \omega(g;\eta)$
4. $c \in \mathbb{N}$ *için* $\omega(h;c\eta) \leq c\omega(h;\eta)$
5. $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+$ *için* $\omega(h;\lambda_1\eta) \leq (\lambda_1+1)\omega(h;\eta)$
6. $|h(t) - h(\xi)| \leq \omega(h;|t-\xi|)$
7. $|h(t) - h(\xi)| \leq \left(\frac{|t-\xi|}{\eta} + 1\right)\omega(h;\eta)$

Eğer $h \in C[a,b]$ ise,

$$\lim_{\eta \to 0^+} \omega(h;\eta) = 0 \tag{3.5}$$

dir.

3.5 q-Analiz

Tanım 3.7. *q pozitif reel sayılar olmak üzere, negatif olmayan bir κ sayısının q-genelleşmesi:*

$$[\kappa]_q = \begin{cases} \frac{q^\kappa - 1}{q-1}, & q \neq 1 \\ \kappa, & q = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca q-binom katsayısı:

$$\begin{bmatrix} \mu \\ \kappa \end{bmatrix}_q = \frac{[\mu]!_q}{[\kappa]!_q[\mu-\kappa]!_q} \quad (0 \leq \kappa \leq \mu)$$

Burada $[\mu]!_q$ ifadesi q-faktöriyel olarak tanımlanır:

$$[\kappa]_q! = \begin{cases} 1, & \kappa = 0 \\ [\kappa]_q[\kappa-1]_q!...[1]_q, & \kappa \geq 1 \end{cases}$$

Tanım 3.8. *Herhangi bir $h(\xi)$ fonksiyonunun q-diferansiyeli:*

$$d_q h(\xi) = h(q\xi) - h(\xi)$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak:

$$d_q\xi = (q-1)\xi$$

şeklindedir.

Tanım 3.9. *$(\xi - a)^\mu$ ifadesinin q-genellemesi:*

$$(\xi - a)_q^\mu = \begin{cases} 1 & \mu = 0 \\ ((\xi-a)(\xi-qa)...(\xi-q^{\mu-1}a)), & \mu \geq 1 \end{cases}$$

şeklindedir.

Tanım 3.10. *$0 < a < b$ ve $0 < q < 1$ olsun. $h(\xi)$ fonksiyonunun $[0,b]$ aralığındaki q-integrali:*

$$I_q(h;0,b) = \int_0^b h(\xi)\, d_q\xi = (1-q)b\sum_{j=0}^{\infty} h(q^j b)q^j \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $h(\xi)$ fonksiyonu $[0,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ise,

$$\lim_{q\to 1^-} \int_0^b h(\xi)\, d_q\xi = \int_0^b h(\xi)\, d\xi \tag{3.7}$$

eşitliği sağlanır.

$h(\xi)$ *fonksiyonunun* $[a,b]$ *aralığındaki* q*-integrali:*

$$\begin{aligned} I_q(h;a,b) &= \int_a^b h(\xi)\,d_q\xi = \int_0^b h(\xi)\,d_q\xi - \int_0^a h(\xi)\,d_q\xi \\ &= (1-q)\sum_{j=0}^{\infty}(bh(q^j b) - ah(q^j a))q^j \end{aligned} \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlanır (Kac ve Cheung, 1953). Eğer yukarıdaki seriler yakınsak ise bu durumda h *fonksiyonu sırasıyla* $[0,b]$ *ve* $[a,b]$ *aralıklarında* q*-integrallenebilirdir denir.*

Yaklaşım teorisi alanında q-analiz kavramının kullanımı, ilk defa Lupaş tarafından gerçekleştirilmiştir. Lupaş, Bernstein operatörlerinin q-genellemesini tanımlamış ve bu operatörlerin daha geniş bir fonksiyon sınıfı üzerinde uygulanabilirliğini incelemiştir. Bu tanımlama, Bernstein operatörlerinin daha genel bir biçimde ele alınmasını sağlamış ve özellikle q-analiz çerçevesinde, fonksiyonların çeşitli özelliklerinin daha etkili bir şekilde incelenmesine olanak tanımıştır (Lupaş, 1987).

Daha sonra, Ostrovska (Ostrovska, 2006), Lupaş tarafından tanımlanan bu q-Bernstein operatörlerinin düzgün yakınsama özelliklerini incelemiştir. Ostrovska'nın çalışması, q-genellemesinin, özellikle düzgün yakınsama bakımından Bernstein operatörlerinin standart formuna kıyasla sağladığı avantajları ve farklılıkları ortaya koymuştur.

1996 yılında Philips, Bernstein operatörlerinin bir genellemesini geliştirdi ve bu yeni genellemeyi, $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ olmak üzere:

$$B_\mu(h;q;\xi) = \sum_{\kappa=0}^{\mu} h\left(\frac{[\kappa]_q}{[\mu]_q}\right)\begin{bmatrix}\mu\\ \kappa\end{bmatrix}_q \xi^\kappa \prod_{s=0}^{\mu-\kappa-1}(1-q^s\xi) \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlamış ve bu operatöre q-Bernstein polinomu adını vermiştir. İlk üç test fonksiyonu için:

$$\begin{aligned} &B_\mu(\rho_0;q;\xi) = 1, \\ &B_\mu(\rho_1;q;\xi) = \xi, \\ &B_\mu(\rho_2;q;\xi) = \xi^2 + \frac{\xi(1-\xi)}{[\mu]_q} \end{aligned} \tag{3.10}$$

olarak elde edilmiştir. Operatörün düzgün yakınsaklığı aşağıdaki teorem ile incelenmiştir.

Teorem 3.11. (q_μ) *dizisi* $0 < q_\mu < 1$ *olmak üzere,* $\mu \to \infty$ *için* $q_\mu \to 1$ *şartı sağlansın. Bu durumda her* $h \in C[0,1]$ *için:*

$$B_\mu(h; q_\mu; \xi) \rightrightarrows h(\xi) \quad (\xi \in [0,1],\ \mu \to \infty).$$

dir.

1997 yılından itibaren, q-Bernstein polinomları birçok araştırmacı tarafından ele alınmış ve bu polinomlarla ilgili çok sayıda çalışma gerçekleştirilmiştir. q-Bernstein polinomlarının incelenmesinin ardından, başka birçok operatörün de q-tipli genellemeleri üzerinde çalışmalar yapılmış ve bu operatörlerin yakınsaklık özellikleri derinlemesine araştırılmıştır.

Son yıllarda, özellikle integral tipli operatörlerin q-tipli genellemeleri üzerinde yoğun çalışmalar yürütülmüştür. Örneğin, Derriennic (Derriennic, 2005), Bernstein-Durrmeyer operatörlerinin q-tipli bir genellemesini tanımlamış ve bu operatörün yakınsaklık özelliklerini detaylı bir şekilde incelemiştir. Ardından Gupta ve Heping (Gupta and Heping, 2008), farklı bir q-genellemesi üzerinde çalışmalar yapmış, bu çalışmalar q-Bernstein operatörlerinin genişleyen alanını ve bu operatörlerle ilgili elde edilen sonuçların kapsamını daha da genişletmiştir.

4. BULGULAR

Bu bölümdeki temel hedefimiz, q-Bernstein operatörünün Kantorovich türünde yeni bir genellemesini inşa ederek yaklaşım özelliklerini analiz etmektir.

4.1 q-Bernstein-Kantorovich Operatörü

h fonksiyonu, $[-1,1]$ üzerinde tanımlı q-integrallenebilir bir fonksiyon , $\forall\mu\in\mathbb{N}$ ve $q\in(0,1)$ olmak üzere,

$$K_\mu^*(h;q;\xi)=\frac{[\mu+1]}{2}\sum_{\kappa=0}^{\mu}\left(\int_{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1}^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1}h(t)d_qt\right)\begin{bmatrix}\mu\\ \kappa\end{bmatrix}q^{-\kappa}(1+\xi)_q^{\kappa}(1-\xi)_q^{\mu-\kappa} \tag{4.1}$$

q-Bernstein-Kantorovich operatörünü tanımlayalım (Karahan ve Özbay, 2024).

Lemma 4.1. $K_\mu^*(h;q;\xi)$ *operatörü için*

$$K_\mu^*(\rho_0;q;\xi)=1 \tag{4.2}$$

eşitliği doğrudur.

İspat. $K_\mu^*(h;q;\xi)$ operatöründe h fonksiyonunun yerine $\rho_0(\xi)$ yazılırsa,

$$K_\mu^*(\rho_0;q;\xi)=\frac{[\mu+1]}{2}\sum_{\kappa=0}^{\mu}\left(\int_{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1}^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1}d_qt\right)\begin{bmatrix}\mu\\ \kappa\end{bmatrix}q^{-\kappa}(1+\xi)_q^{\kappa}(1-\xi)_q^{\mu-\kappa} \tag{4.3}$$

elde edilir.

$$[\kappa+1]-[\kappa]=q^\kappa,$$
$$\sum_{j=0}^{\infty}q^j=\frac{1}{1-q},\quad q\in(0,1)$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\int_{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1}^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1}d_qt&=\int_0^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1}d_qt-\int_0^{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1}d_qt\\&=(1-q)\left(\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1\right)\sum_{j=0}^{\infty}q^j-(1-q)\left(\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1\right)\sum_{j=0}^{\infty}q^j\\&=(1-q)\frac{2([\kappa+1]-[\kappa])}{[\mu+1]}\frac{1}{1-q}\\&=\frac{2q^\kappa}{[\mu+1]}\end{aligned} \tag{4.4}$$

bulunur.

$$\sum_{\kappa=0}^{\mu} \frac{1}{2^\mu} \begin{bmatrix} \mu \\ \kappa \end{bmatrix} (1+\xi)_q^\kappa (1-\xi)_q^{\mu-\kappa} = 1 \tag{4.5}$$

olduğundan (4.4) ifadesi (4.3) denkleminde yerine yazılırsa istenen elde edilir. □

Lemma 4.2. *$K_\mu^*(h;q;\xi)$ operatörü için,*

$$K_\mu^*(\rho_1;q;\xi) = \frac{[\mu]}{[\mu+1]}\xi + \frac{2}{[\mu+1][2]} + \frac{[\mu]}{[\mu+1]} - \frac{2}{[2]} \tag{4.6}$$

eşitliği doğrudur.

İspat. $K_\mu^*(h;q;\xi)$ operatöründe, h yerine $\rho_1(\xi)$ yazılırsa,

$$K_\mu^*(\rho_1;q;\xi) = \frac{[\mu+1]}{2} \sum_{\kappa=0}^{\mu} \frac{1}{2^\mu} \left(\int_{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1}^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1} t d_q t \right) \begin{bmatrix} \mu \\ \kappa \end{bmatrix} q^{-\kappa} (1+\xi)_q^\kappa (1-\xi)_q^{\mu-\kappa} \tag{4.7}$$

elde edilir. (4.7) eşitliğinin sağ tarafındaki intagral hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \int_{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1}^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1} t d_q t &= \int_0^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1} t d_q t - \int_0^{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1} t d_q t \\ &= (1-q) \left[\left(\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]} - 1 \right)^2 - \left(\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]} - 1 \right)^2 \right] \sum_{j=0}^{\infty} q^{2j} \\ &= (1-q) \frac{[\kappa+1]-[\kappa]}{[\mu+1]} \left(\frac{[\kappa+1]+[\kappa]}{[\mu+1]} - 1 \right) \frac{4}{1-q^2} \end{aligned}$$

bulunur. Burada, $[\kappa+1] = 1 + q[\kappa]$ ve $[\kappa+1] - [\kappa] = q^\kappa$ eşitlikleri dikkate alındığında,

$$\int_{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1}^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1} t d_q t = \frac{4q^\kappa}{[2][\mu+1]^2} + \frac{4q^\kappa[\kappa]}{[\mu+1]^2} - \frac{4q^\kappa}{[\mu+1][2]} \tag{4.8}$$

elde edilir. Bu eşitlik (4.7) de yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} K_\mu^*(\rho_1;q;\xi) &= \frac{[\mu+1]}{2} \sum_{\kappa=0}^{\mu} \frac{1}{2^\mu} \begin{bmatrix} \mu \\ \kappa \end{bmatrix} \left(\frac{4q^\kappa}{[2][\mu+1]^2} + \frac{4q^\kappa[\kappa]}{[\mu+1]^2} - \frac{4q^\kappa}{[\mu+1][2]} \right) \\ &\quad \times q^{-\kappa} (1+\xi)_q^\kappa (1-\xi)_q^{\mu-\kappa} \\ &= \frac{2}{[\mu+1][2]} \sum_{\kappa=0}^{\mu} \frac{1}{2^\mu} \begin{bmatrix} \mu \\ \kappa \end{bmatrix} (1+\xi)_q^\kappa (1-\xi)_q^{\mu-\kappa} \\ &\quad + \frac{2[\mu]}{[\mu+1]} \sum_{\kappa=0}^{\mu} \frac{[\kappa]}{[\mu]} \frac{1}{2^\mu} \begin{bmatrix} \mu \\ \kappa \end{bmatrix} (1+\xi)_q^\kappa (1-\xi)_q^{\mu-\kappa} \\ &\quad - \frac{2}{[2]} \sum_{\kappa=0}^{\mu} \frac{1}{2^\mu} \begin{bmatrix} \mu \\ \kappa \end{bmatrix} (1+\xi)_q^\kappa (1-\xi)_q^{\mu-\kappa} \end{aligned} \tag{4.9}$$

elde edilir. Burada

$$\sum_{\kappa=0}^{\mu} \frac{[\kappa]}{[\mu]} \frac{1}{2^{\mu}} \begin{bmatrix} \mu \\ \kappa \end{bmatrix} (1+\xi)_q^{\kappa} (1-\xi)_q^{\mu-\kappa} = \frac{(1+x)_q}{2} \tag{4.10}$$

bulunur. Son olarak (4.5) ve (4.10) eşitlikleri (4.7) yerine yazılırsa ispat tamamlanır. □

Lemma 4.3. *$K_{\mu}^{*}(h;q;\xi)$ operatörü için,*

$$\begin{aligned} &K_{\mu}^{*}(\rho_2;q;\xi) \\ &= \frac{q^2[\mu][\mu-1]}{[\mu+1]^2}\xi^2 + \left(\frac{2[\mu]}{[\mu+1]^2} + \frac{q[2][\mu][\mu-1]}{[n+1]^2} + \frac{2(1+2q)[\mu]}{[3][\mu+1]^2} - \frac{3[2][\mu]}{[3][\mu+1]}\right)\xi \\ &+ \frac{2\mu}{[\mu+1]^2} + \frac{q[\mu][\mu-1]}{[\mu+1]^2} + \frac{(2+4q)[\mu]}{[3][\mu+1]^2} - \frac{3[2][\mu]}{[\mu+1][3]} + \frac{4}{[3][\mu+1]^2} \\ &- \frac{6}{[\mu+1][3]} + \frac{3}{[3]} \end{aligned} \tag{4.11}$$

eşitliği doğrudur.

İspat. $K_{\mu}^{*}(h;q;\xi)$ operatöründe, h yerine $\rho_2(\xi)$ fonksiyonu yazılırsa

$$K_{\mu}^{*}(\rho_2;q;\xi) = \frac{[\mu+1]}{2} \sum_{\kappa=0}^{\mu} \frac{1}{2^{\mu}} \left(\int_{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1}^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1} t^2 d_q t \right) \begin{bmatrix} \mu \\ \kappa \end{bmatrix} q^{-\kappa} (1+\xi)_q^{\kappa} (1-\xi)_q^{\mu-\kappa} \tag{4.12}$$

olur. Son eşitliğin sağ tarafındaki q-integral hesaplandığında

$$\begin{aligned} \int_{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1}^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1} t^2 d_q t &= \int_0^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1} t^2 d_q t - \int_0^{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1} t^2 d_q t \\ &= (1-q) \sum_{j=0}^{\infty} \left[\left(\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]} - 1 \right)^3 - \left(\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]} - 1 \right)^3 \right] q^{3j} \\ &= \frac{2q^{\kappa}}{[3][\mu+1]} \left[\frac{4[\kappa+1]^2 + 4[\kappa+1][\kappa] + 4[\kappa]^2}{[\mu+1]^2} - \frac{6([\kappa+1]+[\kappa])}{[\mu+1]} + 3 \right] \end{aligned}$$

elde edilir. $[\kappa+1] = 1 + q[\kappa]$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \int_{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1}^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1} t^2 d_q t = &\frac{8q^{\kappa}[\kappa]^2}{[\mu+1]^3} + \frac{2q^{\kappa}[\kappa]}{[3][\mu+1]} \left(\frac{4(1+2q)}{[\mu+1]^2} - \frac{6[2]}{[\mu+1]} \right) \\ &+ \frac{2q^{\kappa}}{[3][\mu+1]} \left(\frac{4}{[\mu+1]^2} - \frac{6}{[\mu+1]} + 3 \right) \end{aligned} \tag{4.13}$$

elde edilir. (4.13) integral hesabını (4.12) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} K_\mu^*(\rho_2;q;\xi) &= \frac{4[\mu]^2}{[\mu+1]^2}\sum_{\kappa=0}^{\mu}\frac{[\kappa]^2}{[\mu]^2}\frac{1}{2^\mu}\begin{bmatrix}\mu\\ \kappa\end{bmatrix}(1+\xi)_q^\kappa(1-\xi)_q^{\mu-\kappa} \\ &+\left(\frac{4[\mu](1+2q)}{[3][\mu+1]^2}-\frac{6[\mu][2]}{[3][\mu+1]}\right)\sum_{\kappa=0}^{\mu}\frac{[\kappa]}{[\mu]}\begin{bmatrix}\mu\\ \kappa\end{bmatrix}(1+\xi)_q^\kappa(1-\xi)_q^{\mu-\kappa} \\ &+\left(\frac{4}{[3][\mu+1]^2}-\frac{6}{[3][\mu+1]}+\frac{3}{[3]}\right)\sum_{\kappa=0}^{\mu}\begin{bmatrix}\mu\\ \kappa\end{bmatrix}(1+\xi)_q^\kappa(1-\xi)_q^{\mu-\kappa} \end{aligned} \tag{4.14}$$

elde edilir. (4.14) ifadesinin ilk toplamında $[\kappa^2]=[\kappa]+q[\kappa-1][\kappa]$ eşitliği kullanılırsa

$$\sum_{\kappa=0}^{\mu}\frac{[\kappa]^2}{[\mu]^2}\frac{1}{2^\mu}\begin{bmatrix}\mu\\ \kappa\end{bmatrix}(1+\xi)_q^\kappa(1-\xi)_q^{\mu-\kappa}=\frac{(1+\xi)_q}{2[\mu]}+\frac{q[\mu-1](1+\xi)_q^2}{4[\mu]} \tag{4.15}$$

olduğu görülür ki son olarak (4.5), (4.10) ve (4.15) eşitlikleri (4.12) da yerine yazılırsa ispat tamamlanmış olur. □

Not: q-Bernstein-Kantorovich operatörünün düzgün yakınsaklığını Korovkin tipi teorem yardımıyla gösterebilmek için, operatörün lineer ve pozitif olduğunu garanti etmemiz gerekmektedir. q-integralin lineer olduğu bilindiğinden, (4.1) operatörü de lineerdir. Ayrıca $0<q<1$ koşulu altında, (4.1) operatörünün pozitifliği, q-integralin pozitifliğine bağlıdır.

Ancak, $[a,b]$ aralığındaki q-integral, iki seri farkı içerdiğinden, $h\geq 0$ olmasına rağmen

$$\int_a^b h(t)d_qt\geq 0$$

koşulunun sağlanması gerekmez. Bu durum, oluşturulan operatörün pozitif olduğunu ifade etmemizi engellemektedir.

Lemma 4.4. *a ve b pozitif sayılar, $a<b$ ve $0<q<1$ olsun. h fonksiyonu $[0,b]$ aralığında monoton artan ise,*

$$I_q(h;a;b)=\int_a^b h(t)\,d_qt$$

olarak tanımlanan q-integrali, pozitif bir operatördür.

İspat. h, monoton artan bir fonksiyon ve $h\geq 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\int_a^b h(t)\,d_qt=\int_0^b h(t)\,d_qt-\int_0^a h(t)\,d_qt=(1-q)\sum_{j=0}^{\infty}\Big(bh(q^jb)-ah(q^ja)\Big)\,q^j.$$

Yukarıdaki eşitlikte h pozitif kabul edildiğinden $\forall\xi \in [0,b]$ alınması durumunda $h(\xi) \geq 0$ olur. Ayrıca, h monoton artan olduğundan, $b > a$ durumunda her $j = 0,1,2,\ldots$ için $h(q^j b) - h(q^j a) > 0$ olur. $0 < q < 1$ olduğundan

$$\int_a^b h(t)\, d_q t \geq 0,$$

elde edilir. □

4.2 q-Bernstein-Kantorovich Operatörünün Yaklaşım Özellikleri

Teorem 4.5. $q = (q_\mu)$ *dizisi* $0 < q_\mu < 1$ *ve*

$$\lim_{\mu\to\infty} q_\mu = 1 \quad \textit{ve} \quad \lim_{\mu\to\infty} \frac{1}{[\mu]_{q_\mu}} = 0$$

koşullarını sağlayan bir dizi olsun. h, $[-1,1]$ *üzerinde tanımlı ve sürekli, monoton artan fonksiyon olmak üzere*

$$\lim_{\mu\to\infty} \|K_\mu^*(h;q_\mu;\cdot) - h(\cdot)\|_{C[-1,1]} = 0$$

eşitliği doğrudur.

İspat. Lemma 4.4 h fonksiyonunun monoton artan olması durumunda $K_\mu^*(h;q;\xi)$ operatörünün lineer ve pozitif olduğunu ortaya koymaktadır. (4.6) ve (4.11) ifadelerinde, Teorem 4.5 koşullarını sağlayan bir (q_μ) dizisi ve

$$\frac{[\mu+1]_{q_\mu} - 1}{q_\mu} = [\mu]_{q_\mu}$$

eşitliği kullanılırsa,

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{[\mu]_{q_\mu}}{[\mu+1]_{q_\mu}} = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{\mu\to\infty} \frac{[\mu-1]_{q_\mu}[\mu]_{q_\mu}}{[\mu+1]_{q_\mu}^2} = 1$$

olduğu kolaylıkla elde edilir. O halde buradan

$$K_\mu^*(\rho_0;q_\mu;\xi) \rightrightarrows 1 \quad (\mu\to\infty)$$

$$K_\mu^*(\rho_1;q_\mu;\xi) \rightrightarrows \xi \quad (\mu\to\infty)$$

$$K_\mu^*(\rho_2;q_\mu;\xi) \rightrightarrows \xi^2 \quad (\mu\to\infty)$$

bulunur. Sonuç olarak Korovkin teoreminden ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 4.6. *Lemma 4.1, Lemma 4.2 ve Lemma 4.3 te $q = 1$ yazıldığında*

$$K_\mu^*(\rho_0;\xi) = 1$$
$$K_\mu^*(\rho_1;\xi) = \frac{\mu}{\mu+1}\xi$$
$$K_\mu^*(\rho_2;\xi) = \frac{\mu(\mu-1)}{(\mu+1)^2}\xi^2 + \frac{3\mu+1}{3(\mu+1)^2}$$

elde edilir. Bu ifadeler, klasik Bernstein-Kantorovich operatörünün momentleridir (Altomare ve Campiti, 1994).

4.3 q-BERNSTEIN-KANTOROVICH OPERATÖRÜNÜN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde, öncelikle istatistiksel yakınsaklık kavramı kısaca ele alınacak ve (4.1) ile tanımlanan q-Bernstein-Kantorovich operatörünün istatistiksel yakınsaklık özellikleri araştırılacaktır. Ardından, Marinkovic ve çalışma arkadaşlarının (Marinkovic, 2008) tanımladığı ”Riemann tipli q-integral” kavramı verilecek ve bu kavrama dayalı olarak (4.1) operatörünün, ”İkinci tip q-Bernstein-Kantorovich operatörü” olarak adlandırılan yeni bir formu tanımlanacaktır. Son olarak, bu yeni operatörün de yaklaşım hızı süreklilik modülü yardımıyla hesaplanacaktır.

4.4 İstatistiksel Yakınsaklık

$C \subseteq \mathbb{N}$ olsun. $\mu \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için $C_\mu = \{\kappa \in C : \kappa \leq \mu\}$ altkümesi tanımlansın. Şimdi bu kümenin yoğunluğunu tanımlayalım.

Tanım 4.7. *$C \subseteq \mathbb{N}$ kümesi için*

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{|C_\mu|}{\mu},$$

limiti varsa, bu limit C kümesinin yoğunluğu olarak adlandırılır ve $\upsilon(C)$ ile gösterilir. Burada $|C_\mu|$, C kümesinin μ ile sınırlandırılmış elemanlarının toplam sayısını ifade eder. Yoğunluk kavramı, C kümesinin doğal sayılar kümesi içerisindeki dağılımının bir ölçüsü olarak kabul edilir.(Niven vd., 1980)

Tanım 4.8. $\xi := (\xi_\kappa)$ *bir reel sayı dizisi olsun.* $\forall\varepsilon > 0$ *için*

$$\upsilon\{\kappa : |\xi_\kappa - \ell| \geq \varepsilon\} = 0$$

şartını sağlayacak bir ℓ *sayısı mevcutsa, bu durumda dizinin* ℓ *sayısına istatistiksel yakınsak olduğu söylenir ve*

$$st\text{-}\lim_{\kappa\to\infty} \xi_\kappa = \ell$$

şeklinde ifade edilir (Fast, 1951).

Yukarıdaki tanımdan, ℓ sayısına istatistiksel yakınsak olan bir dizinin ℓ nin ε komşuluğu dışında sonsuz sayıda elemanı olmasına rağmen indis kümesinin yoğunluğu sıfır olabilir. Dolayısıyla istatistiksel yakınsaklık kavramı klasik yakınsaklık kavramından daha genel bir durumdur. Yani klasik yakınsak olan her dizi aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir.

Gadjiev ve Orhan (Gadjiev ve Orhan, 2002), lineer pozitif operatörler için istatistiksel yaklaşımı sağlayan Korovkin tipi teoremi aşağıdaki şekilde ifade etmişlerdir.

Teorem 4.9. *(Gadjiev ve Orhan, 2002)* $A_\mu : C[a,b] \to B[a,b]$ *lineer pozitif operatörler dizisi* $\rho_i(\xi^i) = \xi^i$, $i = 0,1,2$ *için*

$$st\text{-}\lim_{\mu\to\infty} \|A_\mu(\rho_i;\cdot) - \rho_i\|_{C[a,b]} = 0$$

koşullarını sağlıyorsa $h \in C[a,b]$ *fonksiyonu için*

$$st\text{-}\lim_{\mu\to\infty} \|A_\mu(h;\cdot) - h\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliği sağlanır. Burada $B[a,b]$, $[a,b]$ *aralığındaki sınırlı fonksiyonlar uzayını ifade etmektedir.*

4.5 q-Bernstein-Kantorovich Operatörünün İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu bölümde, (4.1) ile tanımlanan operatörün istatistiksel yakınsama özellikleri incelenecektir.

Teorem 4.10. $q := (q_\mu)$ *dizisi* $0 < q_\mu < 1$ *ve*

$$st - \lim_{\mu} q_\mu = 1 \quad ve \quad st - \lim_{\mu} \frac{1}{[\mu]_{q_\mu}} = 0 \tag{4.16}$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda h *fonksiyonu* $[-1, 1]$ *aralığında sürekli ve monoton artan bir fonksiyon olmak üzere, (4.1) operatörü için*

$$st\text{-}\lim_{\mu\to\infty} \|K_\mu^*(h; q_\mu; \cdot) - h(\cdot)\|_{C[-1,1]} = 0$$

eşitliği doğrudur

İspat. $K_\mu^*(h; q; \xi)$ lineer pozitif bir operatör olduğundan, $i = 0, 1, 2$ için

$$\text{st-}\lim_{\mu} \|K_\mu^*(\rho_i; q_\mu; \cdot) - \rho_i\|_{C[-1,1]} = 0$$

eşitliğinin doğruluğunu göstermek, Teorem 4.9 dan ispat için yeterlidir. $i = 0$ için (4.2) eşitliğinden

$$st - \lim_{\mu} \|K_\mu^*(\rho_0; q_\mu; .) - \rho_0\|_{[-1,1]} = 0$$

olduğu açıktır. $i = 1$ için (4.6) dan

$$K_\mu^*(\rho_1; q; \xi) - \rho_1(\xi) = \left(\frac{[\mu]_{q_\mu}}{[\mu+1]_{q_\mu}} - 1\right)\xi + \frac{[\mu]_{q_\mu}}{[\mu+1]_{q_\mu}} + \frac{2}{[\mu+1]_{q_\mu}[2]_{q_\mu}} - \frac{2}{[2]_{q_\mu}}$$

yazılır.

$$\frac{[\mu]_{q_\mu}}{[\mu+1]_{q_\mu}} = \frac{1}{q_\mu} - \frac{1}{q_\mu[\mu+1]_{q_\mu}}$$

eşitliğini yukarıdaki denklemde yerine yazıp her iki tarafın $\xi \in [-1, 1]$ için maksimumu alınırsa

$$\begin{aligned}
&\|K_\mu^*(\rho_1; q_\mu; .) - \rho_1\|_{C[-1,1]} \leq \\
&\left|\left(\frac{1}{q_\mu} - \frac{1}{q_\mu[\mu+1]_{q_\mu}}\right) - 1\right| + \left|\frac{[\mu]_{q_\mu}}{[\mu+1]_{q_\mu}} + \frac{2}{[2]_{q_\mu}}\left(\frac{1}{[\mu+1]_{q_\mu}} - 1\right)\right| \\
&\leq \left(\frac{1}{q_\mu} - 1\right) + \frac{1}{q_\mu[\mu+1]_{q_\mu}} + \left|\left(1 - \frac{1}{[\mu+1]_{q_\mu}}\right)\left(\frac{1}{q_\mu} - \frac{2}{[2]_{q_\mu}}\right)\right| \\
&\leq \left(\frac{1}{q_\mu} - 1\right) + \frac{1}{q_\mu[\mu+1]_{q_\mu}} + \left(1 - \frac{1}{[\mu+1]_{q_\mu}}\right)\left(\frac{1}{q_\mu} - \frac{2}{[2]_{q_\mu}}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi verilen bir $\varepsilon > 0$ için aşağıdaki kümeler tanımlansın.

$$M := \left\{m_1 : \|K_{m_1}^*(\rho_1; q; .) - \rho_1)\|_{C[-1,1]} \geq \varepsilon\right\}$$

$$M_1 := \left\{ m_1 : \left(\frac{1}{q_{m_1}} - 1 \right) \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$
$$M_2 := \left\{ m_1 : \left(\frac{1}{q_{m_1}[m_1+1]_{q_{m_1}}} \right) \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$
$$M_3 := \left\{ m_1 : \left(1 - \frac{1}{[m_1+1]q_{m_1}} \right) \left(\frac{1}{q_{m_1}} - \frac{2}{[2]_{q_{m_1}}} \right) \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\}.$$

Buradan $M \subseteq M_1 \cup M_2 \cup M_3$ olduğu görülür. Böylece

$$\upsilon\{m_1 \leq \mu : \|K_\mu^*(\rho_1; q_{m_1}; .) - \rho_1\|_{C[-1,1]} \geq \varepsilon\} \leq \upsilon\{m_1 \leq \mu : \left(\frac{1}{q_{m_1}} - 1 \right) \geq \frac{\varepsilon}{3}\}$$
$$+ \upsilon\{m_1 \leq \mu : \frac{1}{q_{m_1}[m_1+1]_{q_{m_1}}} \geq \frac{\varepsilon}{3}\}$$
$$+ \upsilon\{m_1 \leq \mu : \left(1 - \frac{1}{[m_1+1]_{q_{m_1}}} \right) \left(\frac{1}{q_{m_1}} - \frac{2}{[2]_{q_{m_1}}} \right) \geq \frac{\varepsilon}{3}\}$$

yazılabilir. (4.16) koşullarından

$$st - \lim_\mu \left(\frac{1}{q_\mu} - 1 \right) = 0,$$
$$st - \lim_\mu \frac{1}{q_\mu[\mu+1]_{q_\mu}} = 0,$$
$$st - \lim_\mu \left(1 - \frac{1}{[\mu+1]_{q_\mu}} \right) \left(\frac{1}{q_\mu} - \frac{2}{[2]} \right) = 0.$$

bulunur. Yoğunluk tanımından

$$\upsilon \left\{ m_1 \leq \mu : \left(\frac{1}{q_{m_1}} - 1 \right) \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\} = 0$$
$$\upsilon\{m_1 \leq \mu : \frac{1}{q_{m_1}[m_1+1]} \geq \frac{\varepsilon}{3}\} = 0$$
$$\upsilon\{m_1 \leq \mu : \left(1 - \frac{1}{[m_1+1]} \right) \left(\frac{1}{q_{m_1}} - \frac{2}{[2]} \right) \geq \frac{\varepsilon}{3}\} = 0$$

dır. Böylece

$$st - \lim_\mu \|K_\mu(\rho_1; q_\mu; .) - \rho_1\|_{C[-1,1]} = 0$$

olduğu görülür.

$i=2$ için (4.11) den

$$
\begin{aligned}
&K_\mu^*(\rho_2;q_\mu;\xi)-\rho_2(\xi)\\
&=\left(\frac{q_\mu^2[\mu]_{q_\mu}[\mu-1]_{q_\mu}}{[\mu+1]_{q_\mu}^2}-1\right)\xi^2+\left(\frac{2[\mu]_{q_\mu}}{[\mu+1]_{q_\mu}^2}+\frac{q_\mu[2]_{q_\mu}[\mu]_{q_\mu}[\mu-1]_{q_\mu}}{[\mu+1]_{q_\mu}^2}+\frac{2(1+2q_\mu)[\mu]_{q_\mu}}{[3][\mu+1]_{q_\mu}^2}\right.\\
&\left.-\frac{3[2]_{q_\mu}[\mu]_{q_\mu}}{[3]_{q_\mu}[\mu+1]_{q_\mu}}\right)\xi+\frac{2[\mu]_{q_\mu}}{[\mu+1]_{q_\mu}^2}+\frac{q_\mu[\mu]_{q_\mu}[\mu-1]_{q_\mu}}{[\mu+1]_{q_\mu}^2}+\frac{(2+4q_\mu)[\mu]_{q_\mu}}{[3]_{q_\mu}[\mu+1]_{q_\mu}^2}\\
&-\frac{3[2][\mu]_{q_\mu}}{[\mu+1]_{q_\mu}[3]_{q_\mu}}+\frac{4}{[3]_{q_\mu}[\mu+1]_{q_\mu}^2}-\frac{6}{[\mu+1]_{q_\mu}[3]_{q_\mu}}+\frac{3}{[3]_{q_\mu}}
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

yazılabilir. Şimdi q-analiz yardımıyla

$$
\begin{aligned}
q_\mu^2\frac{[\mu]_{q_\mu}[\mu-1]_{q_\mu}}{[\mu+1]_{q_\mu}^2}&=\frac{1}{q_\mu}\left(1-\frac{(1+[2]_{q_\mu})}{[\mu+1]_{q_\mu}}+\frac{[2]_{q_\mu}}{[\mu+1]_{q_\mu}^2}\right)\\
\frac{[\mu]_{q_\mu}}{[\mu+1]_{q_\mu}}&=\frac{1}{q_\mu}-\frac{1}{q_\mu[\mu+1]_{q_\mu}}
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

eşitlikleri (4.17) ifadesinde yerine yazılıp $\xi\in[-1,1]$ için maksimum alalım. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\|K_\mu^*(\rho_2;q_\mu;\xi)-\rho_2(\xi)\|_{C[-1,1]}\le&\left|\left(\frac{1}{q_\mu}\left(1-\frac{1+[2]_{q_\mu}}{[\mu+1]_{q_\mu}}+\frac{[2]_{q_\mu}}{[\mu+1]_{q_\mu}^2}\right)-1\right)\right.\\
&+\left(\frac{2[\mu]_{q_\mu}}{[\mu+1]_{q_\mu}^2}+\frac{[2]_{q_\mu}}{q_\mu^2}\left(1-\frac{1+[2]_{q_\mu}}{[\mu+1]_{q_\mu}}+\frac{[2]_{q_\mu}}{[\mu+1]_{q_\mu}^2}\right)\right.\\
&\left.+\frac{2(1+2q_\mu)[\mu]_{q_\mu}}{[3]_{q_\mu}[\mu+1]_{q_\mu}^2}-\frac{3[2]_{q_\mu}}{[3]_{q_\mu}}\left(\frac{1}{q_\mu}-\frac{1}{q_\mu[\mu+1]_{q_\mu}}\right)\right)\\
&+\frac{2[\mu]_{q_\mu}}{[\mu+1]_{q_\mu}^2}+\frac{1}{q_\mu^2}\left(1-\frac{1+[2]_{q_\mu}}{[\mu+1]_{q_\mu}}+\frac{[2]_{q_\mu}}{[\mu+1]_{q_\mu}^2}\right)\\
&+\frac{(2+4q_\mu)[\mu]_{q_\mu}}{[3]_{q_\mu}[\mu+1]_{q_\mu}^2}-\frac{3[2]_{q_\mu}}{[3]_{q_\mu}}\left(\frac{1}{q_\mu}-\frac{1}{q_\mu[\mu+1]_{q_\mu}}\right)\\
&\left.+\frac{4}{[3]_{q_\mu}[\mu+1]_{q_\mu}^2}-\frac{6}{[\mu+1]_{q_\mu}[3]_{q_\mu}}+\frac{3}{[3]_{q_\mu}}\right|\\
\le&\left(\frac{1}{q_\mu}-1\right)+\frac{1}{[\mu+1]_{q_\mu}^2}\left(\frac{2}{q_\mu^2}-\frac{4}{[3]_{q_\mu}}+2\right)\\
&+\frac{1}{[\mu+1]_{q_\mu}}\left(\frac{4+4[3]_{q_\mu}-6[2]_{q_\mu}}{q_\mu[3]_{q_\mu}}-\frac{(1+[2]_{q_\mu})}{q_\mu^2}-\frac{6}{[3]_{q_\mu}}\right)\\
&+\frac{[2]_{q_\mu}+1}{q_\mu^2}-\frac{6[2]_{q_\mu}}{q_\mu[3]_{q_\mu}}+\frac{3}{[3]_{q_\mu}}
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} a_\mu &= \left(\frac{1}{q_\mu} - 1\right) \\ b_\mu &= \frac{1}{[\mu+1]_{q_\mu}^2}\left(\frac{2}{q_\mu^2} - \frac{4}{[3]_{q_\mu}} + 2\right) \\ c_\mu &= \frac{1}{[\mu+1]_{q_\mu}}\left(\frac{4+4[3]_{q_\mu} - 6[2]_{q_\mu}}{q_\mu[3]_{q_\mu}} - \frac{(1+[2]_{q_\mu})}{q_\mu^2} - \frac{6}{[3]_{q_\mu}}\right) \\ d_\mu &= \frac{[2]_{q_\mu}+1}{q_\mu^2} - \frac{6[2]_{q_\mu}}{q_\mu[3]_{q_\mu}} + \frac{3}{[3]_{q_\mu}} \end{aligned} \tag{4.20}$$

şeklinde adlandırılırsa (4.16) şartlarından

$$st - \lim_\mu a_\mu = st - \lim_\mu b_\mu = st - \lim_\mu c_\mu = st - \lim_\mu d_\mu = 0 \tag{4.21}$$

kolaylıkla elde edilir. Tekrardan $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} U &:= \left\{\kappa : \|K_\mu^*(\rho_2; q_\kappa; \cdot) - \rho_2\|_{C[-1,1]} \geq \epsilon\right\} \\ U_1 &:= \left\{\kappa : a_\kappa \geq \frac{\varepsilon}{4}\right\} \\ U_2 &:= \left\{\kappa : b_\kappa \geq \frac{\varepsilon}{4}\right\} \\ U_3 &:= \left\{\kappa : c_\kappa \geq \frac{\varepsilon}{4}\right\} \\ U_4 &:= \left\{\kappa : d_\kappa \geq \frac{\varepsilon}{4}\right\} \end{aligned}$$

kümeleri tanımlansın. O halde (4.19) dan $U \subseteq U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4$ olduğu açıktır. Buna göre

$$\begin{aligned} &\upsilon\{\kappa \leq \mu : \|K_\kappa^*(\rho_2; q_\kappa; \cdot) - \rho_2\|_{C[-1,1]} \geq \varepsilon\} \\ &\leq \upsilon\{\kappa \leq \mu : a_\kappa \geq \frac{\varepsilon}{4}\} + \upsilon\{\kappa \leq \mu : b_\kappa \geq \frac{\varepsilon}{4}\} + \upsilon\{\kappa \leq \mu : c_\kappa \geq \frac{\varepsilon}{4}\} \\ &+ \upsilon\{\kappa \leq \mu : d_\kappa \geq \frac{\varepsilon}{4}\} \end{aligned} \tag{4.22}$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizlik incelendiğinde, sağ tarafın sıfıra eşit olduğu gözlemlenmektedir. Dolayısıyla

$$st - \lim_\mu \|K_\mu^*(\rho_2; q_\mu; .) - \rho_2\|_{C[-1,1]} = 0$$

bulunur. Bu durumda, Teorem 4.9 ın koşulları sağlanır ve ispat tamamlanır. □

Korovkin tipi teoremlerin, lineer pozitif operatörler üzerinde geçerlilik gösterdiği bilinmektedir. Daha önceki bölümde de ifade edildiği üzere, $K_\mu^*(h; q; \xi)$ operatörünün pozitifliğini sağlamak amacıyla, h fonksiyonunu $[-1, 1]$ aralığında monoton artan olacak şekilde seçmiştik. Bu seçimle birlikte, operatörün hem klasik hem de istatistiksel anlamda h fonksiyonuna düzgün bir yakınsama gösterdiği, Korovkin tipi teoremler aracılığıyla ortaya konmuştur. Yaklaşım teorisinde, operatörlerin yalnızca düzgün yakınsaklığı değil, aynı zamanda bu yakınsamanın hızının belirlenmesi de büyük bir öneme sahiptir. Bu hız, genellikle süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfına ait fonksiyonlar kullanılarak analiz edilmektedir. $K_{\mu}^{*}(h;q;\xi)$ operatörünün q-integral içerdiğini hatırlatalım; bu nedenle yaklaşım hızını değerlendirirken, q-integralle ilgili bazı eşitsizliklere ihtiyaç duyulacaktır.

5. TARTIŞMA

Klasik analizde integral eşitsizlikleri uzun yıllardır detaylı bir şekilde incelenmiş ve önemli gelişmeler kaydedilmiştir. Bu tür çalışmalar, teorik matematikle birlikte matematik ve fizik gibi çeşitli uygulama alanlarında önemli bir yere sahiptir. Ancak, q analiz kapsamında q-integral tanımının beraberinde getirdiği bazı zorluklar nedeniyle, q-integral ile ilişkili eşitsizliklere olan ilgi nispeten yakın geçmişte ortaya çıkmış ve bu alanda yapılan araştırmalar giderek artmıştır. q-integralle ilgili bu zorluklar, esasen $[a, b]$ aralığında tanımlı q-integralin, $[0, b]$ ve $[0, a]$ aralıklarındaki iki q-integralin farkı olarak tanımlanmasından kaynaklanmaktadır. Dolayısıyla,$[a, b]$ aralığındaki h fonksiyonun q-integrali hesaplanırken sadece integral aralığındaki noktaları değil, aralık dışındaki noktaları da kapsamaktadır. Bu sebeple, klasik integral için geçerli olan bazı eşitsizlikler, $[a, b]$ aralığında tanımlı q-integral için her zaman geçerli olmayabilir.

Bu zorlukları aşmak adına Gauchman (Gauchman, 2004) ve Marinkovic ve arkadaşları (Marinkovic, 2008) iki farklı q-integral tanımı sunmuştur. Bu tanımlardan ilki, $[a, b]$ aralığındaki q-integralin sonlu toplamlara sınırlanmasıyla elde edilen ”kısıtlanmış q-integral”, ikincisi ise aynı aralıktaki q-integralin tek bir seri şeklinde ifade edilmesiyle tanımlanan ”Riemann tipi q-integral”dir. Şimdi bu iki kavram üzerinde duralım.

5.1 Kısıtlanmış ve Riemann Tipi q-İntegralin Temel Kavramları ve Özellikleri

Tanım 5.1. *a, b ve q reel sayıları için $0 < a < b$ ve $q \in (0, 1)$ olsun. Klasik q-integral tanımında, $a = bq^\mu$ yazılarak $G_q(h; a, b)$ kıstlanmış q-integrali şu şekilde ifade edilir:*

$$\begin{aligned} G_q(h; a, b) &= \int_a^b h(\xi)\, d_q^G \xi = \int_{bq^\mu}^b h(\xi)\, d_q\xi \\ &= (1-q)b \sum_{j=0}^{\mu-1} h(q^j b) q^j. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Bu formülasyon, b, q ve μ parametrelerine bağlı olarak tanımlanır ve bu parametreler üzerinden integralin alınmasını sağlar.

Öncelikle, (5.1) ile tanımlanan integralin bazı temel özelliklerinin belirtilmesi gerekmektedir. Bu integralin, belirli koşullar sağlandığında kendine özgü nitelikler taşıdığı görülmektedir.

1. $[a,b]$ aralığında $h(\xi) \geq g(\xi)$ sağlanıyorsa, o halde

$$\int_a^b h(\xi)\, d_q^G\xi \geq \int_a^b g(\xi)\, d_q^G\xi$$

şeklinde ifade edilir.

2. $a < \tau < b$ koşulunu sağlamak üzere

$$\int_a^b h(\xi)\, d_q^G\xi = \int_a^\tau h(\xi)\, d_q^G\xi + \int_\tau^b h(\xi)\, d_q^G\xi$$

özelliği geçerlidir.

Eğer $h(\xi)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Riemann anlamında integrallenebiliyorsa,

$$\lim_{q\to 1} \int_a^b h(\xi)\, d_q^G\xi = \int_a^b h(\xi)\, d\xi$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 5.2. *(Marinkovic, 2008) a, b ve q reel sayılar olup, $0 < a < b$ ve $q \in (0,1)$ koşullarının sağlandığını varsayalım. Riemann tipi q-integral*

$$R_q(h;a,b) = \int_a^b h(\xi)\, d_q^R\xi = (1-q)(b-a)\sum_{j=0}^{\infty} h\Big(a+(b-a)q^j\Big)q^j \tag{5.2}$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanım, klasik q-integral tanımından farklıdır; burada tanım tek bir seri ile ifade edilmekte olup yalnızca integral aralığındaki noktaları içermektedir.

Eğer (5.2) ile verilen seri yakınsak ise, h fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında "qR-integrallenebilir" olduğu söylenir.

Şimdi hedefimiz, daha önce tanımladığımız $K_\mu^*(h;q;\xi)$ operatöründe, klasik q-integrale alternatif olarak Riemann tipi q-integral kullanılmasıyla operatörün yeni bir tanımını oluşturmaktır. Bu yaklaşım sayesinde, yeni tanımlayacağımız operatörün yakınsama hızını belirleme imkanına sahip olacağız. Öncelikle, Riemann tipi q-integralinden yararlanarak aşağıdaki lemmaları verelim.

Lemma 5.3. *$R_q(h; a, b)$ lineer ve pozitif bir operatördür.*

İspat. (5.2) ifadesinden

$$\begin{aligned}
&R_q\left((\alpha h+\beta g)(\xi); a, b\right) = \int_a^b (\alpha h+\beta g)(\xi)\, d_q^R \xi \\
&= (1-q)(b-a)\sum_{j=0}^{\infty}\left[(\alpha h+\beta g)\left(a+(b-a)q^j\right)\right] q^j \\
&= (1-q)(b-a)\sum_{j=0}^{\infty}\left[\alpha h\left(a+(b-a)q^j\right)+\beta g\left(a+(b-a)q^j\right)\right] q^j \\
&= \alpha(1-q)(b-a)\sum_{j=0}^{\infty} h\left(a+(b-a)q^j\right) q^j \\
&\quad + \beta(1-q)(b-a)\sum_{j=0}^{\infty} g\left(a+(b-a)q^j\right) q^j \\
&= \alpha R_q\left(h(\xi); a, b\right) + \beta R_q\left(g(\xi); a, b\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $R_q(h; a, b)$ operatörünün lineer olduğu sonucuna varılmaktadır. Eğer $h \geq 0$ ise, (5.2) ten $R_q(h; a, b)$ operatörünün pozitif olduğu da açıktır.

Bu durumda, $[a, b]$ aralığındaki tüm ξ değerleri için,

$$h(\xi) \geq g(\xi) \Rightarrow R_q(h; a, b) \geq R_q(g; a, b)$$

ifadesi yazılabilir. □

Gauchmann (Gauchman, 2004), kısıtlanmış q-integral tanımını geliştirerek, hem klasik hem de güncel olan bazı eşitsizliklerin q-genellemelerini elde etmiştir.

Lemma 5.4. *(q-Hölder Eşitsizliği) a ve b pozitif reel sayılar, $a < b$ ve $0 < q < 1$ olsun. $\alpha > 1$ ve $\beta > 1$ reel sayıları için $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = 1$ koşulu sağlansın. Bu durumda, $[a, b]$ aralığında tanımlı h ve g fonksiyonları için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:*

$$R_q(|hg|; a; b) \leq \left(R_q(|h|^{\alpha}; a; b)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(R_q(|g|^{\beta}; a; b)\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

İspat. (5.2) ifadesinden

$$\begin{aligned}
R_q(|hg|; a; b) &= \int_a^b |h(\xi) g(\xi)|\, d_q^R \xi \\
&= (1-q)(b-a)\sum_{j=0}^{\infty}\left| h\left(a+(b-a)q^j\right) g\left(a+(b-a)q^j\right)\right| q^j \\
&= (1-q)(b-a)\sum_{j=0}^{\infty}\left|\left(h\left(a+(b-a)q^j\right) q^{j/\alpha}\right)\right. \\
&\quad \left.\times\left(g\left(a+(b-a)q^j\right) q^{/\beta}\right)\right|.
\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki toplam ifadesine Hölder eşitsizliği uyguladığında,

$$\begin{aligned}
R_q(|hg|;a;b) &\leq (1-q)(b-a)\left(\sum_{j=0}^{\infty}|h(a+(b-a)q^j)|^{\alpha}q^j\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&\quad\times\left(\sum_{j=0}^{\infty}|g(a+(b-a)q^j)|^{\beta}q^j\right)^{\frac{1}{\beta}} \\
&= \left((1-q)(b-a)\sum_{j=0}^{\infty}|h(a+(b-a)q^j)|^{\alpha}q^j\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&\quad\times\left((1-q)(b-a)\sum_{j=0}^{\infty}|g(a+(b-a)q^j)|^{\beta}q^j\right)^{\frac{1}{\beta}} \\
&= \left(\int_a^b |h(\xi)|^{\alpha}\,d_q^R\xi\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\int_a^b |g(\xi)|^{\beta}\,d_q^R\xi\right)^{\frac{1}{\beta}} \\
&= R_q(|h|^{\alpha};a;b)^{\frac{1}{\alpha}}R_q(|g|^{\beta};a;b)^{\frac{1}{\beta}}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

5.2 İkinci Tip q-Bernstein-Kantorovich Operatörlerinin İstatistiksel Yaklaşım Hızı

Bu çalışmada, klasik q-integral yerine Riemann-tipi q-integral kullanılarak oluşturulmuş olan ”ikinci tip q-Bernstein-Kantorovich operatörü” $\tilde{K}_{\mu}(h;q;\xi)$ şeklinde gösterilmiştir (Çilo vd., 2012). Bu operatörde, her $\mu \in \mathbb{N}$ ve $q \in (0,1)$ için $h : [-1,1] \to \mathbb{R}$ aralığında qR-integrali alınabilen bir fonksiyon olarak tanımlanmıştır:

$$\tilde{K}_{\mu}(h;q;\xi) = \frac{[\mu+1]}{2}\sum_{\kappa=0}^{\mu}\left(\int_{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1}^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1} h(t)\,d_q^R t\right)\begin{bmatrix}\mu\\ \kappa\end{bmatrix} q^{-\kappa}(1-\xi)_q^{\kappa}(1+\xi)_q^{\mu-\kappa}. \quad (5.3)$$

Bu bölümde, (5.3) ile tanımlanan ikinci tip q-Bernstein-Kantorovich operatörünün istatistiksel yaklaşım hızını süreklilik modülünü kullanarak inceleyeceğiz. Bunun için öncelikle Korovkin teoreminin şartlarının sağlandığını göstermek için $\tilde{K}_{\mu}(\rho_i;q;\xi), i = 0,1,2$ momentlerini hesaplayalım. Bu momentler hesaplanırken

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1}^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1} d_q^R t = \frac{2q^\kappa}{[\mu+1]},\\
&\int_{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1}^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1} t\, d_q^R t = \frac{4q^\kappa[\kappa]}{[\mu+1]^2} - \frac{2q^\kappa}{[\mu+1]} + \frac{4q^{2\kappa}}{[\mu+1]^2[2]},\\
&\int_{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1}^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1} t^2\, d_q^R t = \frac{8q^\kappa[\kappa]^2}{[\mu+1]^3} - \frac{8q^\kappa[\kappa]}{[\mu+1]^2} + \frac{2q^\kappa}{[\mu+1]} + \frac{16[\kappa]q^{2\kappa}}{[\mu+1]^3[2]}\\
&- \frac{8q^{2\kappa}}{[\mu+1]^2[2]} + \frac{8q^{3\kappa}}{[\mu+1]^3[3]}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

eşitliklerinden yararlanacağız. İlk olarak $i = 0$ için (5.3) operatöründen

$$\tilde{K}_\mu(\rho_0; q; \xi) = \frac{[\mu+1]}{2} \sum_{\kappa=0}^{\mu} \frac{1}{2^\mu} \begin{bmatrix} \mu \\ \kappa \end{bmatrix} [1+\xi]^\kappa [1-\xi]^{\mu-\kappa} q^{-\kappa} \frac{2q^\kappa}{[\mu+1]} = 1 \tag{5.5}$$

elde edilir. $i = 1$ için,

$$\begin{aligned}
&\tilde{K}_\mu(\rho_1; q; \xi) =\\
&\quad \frac{[\mu+1]}{2} \sum_{\kappa=0}^{\mu} \frac{1}{2^\mu} \begin{bmatrix} \mu \\ \kappa \end{bmatrix} (1+\xi)^\kappa (1-\xi)^{\mu-\kappa} q^{-\kappa}\\
&\quad \times \left[\frac{4q^\kappa[\kappa]}{[\mu+1]^2} - \frac{2q^\kappa}{[\mu+1]} + \frac{4q^{2\kappa}}{[\mu+1]^2[2]} \right]\\
&= \frac{[\mu]}{[\mu+1]}(1+\xi) - 1 + \frac{2}{[\mu+1][2]} + \frac{(q-1)[\mu]}{[\mu+1][2]}(1+\xi)\\
&= \frac{[\mu]}{[\mu+1]}\left(1 + \frac{q-1}{[2]}\right)\xi + \frac{[\mu]}{[\mu+1]}\left(1 + \frac{q-1}{[2]}\right) + \frac{2}{[\mu+1][2]} - 1.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$i = 2$ için,

$$
\begin{aligned}
&\tilde{K}_\mu(\rho_2; q; \xi) = \\
&\frac{[\mu+1]}{2}\sum_{\kappa=0}^{\mu}\frac{1}{2^\mu}\begin{bmatrix}\mu\\ \kappa\end{bmatrix}(1+\xi)^\kappa(1-\xi)^{\mu-\kappa}q^{-\kappa}\left[\frac{8q^\kappa[\kappa]^2}{[\mu+1]^3}-\frac{8q^\kappa[\kappa]}{[\mu+1]^2}\right.\\
&\quad\left.+\frac{2q^\kappa}{[\mu+1]}+\frac{16[\kappa]q^{2\kappa}}{[\mu+1]^3[2]}-\frac{8q^{2\kappa}}{[\mu+1]^2[2]}+\frac{8q^{3\kappa}}{[\mu+1]^3[3]}\right]\\
&+\left[\frac{4[\mu]^2}{[\mu+1]^2}+\frac{8(q-1)[\mu]^2}{[\mu+1]^2[2]}+\frac{4(q-1)^2[\mu]^2}{[\mu+1]^2[3]}\right]\\
&=\left(\frac{4[\mu]^2}{[\mu+1]^2}+\frac{8(q-1)[\mu]^2}{[\mu+1]^2[2]}+\frac{4(q-1)^2[\mu]^2}{[\mu+1]^2[3]}\right)\sum_{\kappa=0}^{\mu}\frac{[\kappa]^2}{[\mu]^2}\frac{1}{2^\mu}\begin{bmatrix}\mu\\ \kappa\end{bmatrix}(1+\xi)_q^\kappa(1-\xi)_q^{\mu-\kappa}\\
&+\left(\frac{8[\mu]}{[\mu+1]^2[2]}-\frac{4[\mu]}{[\mu+1]}-\frac{4(q-1)[\mu]}{[\mu+1][2]}+\frac{8[\mu](q-1)}{[\mu+1]^2[3]}\right)\\
&\times\sum_{\kappa=0}^{\mu}\frac{[\kappa]}{[\mu]}\frac{1}{2^\mu}\begin{bmatrix}\mu\\ \kappa\end{bmatrix}(1+\xi)_q^\kappa(1-\xi)_q^{\mu-\kappa}\\
&+\left(\frac{4}{[\mu+1]^2[3]}-\frac{4}{[\mu+1][2]}+1\right)\sum_{\kappa=0}^{\mu}\frac{1}{2^\mu}\begin{bmatrix}\mu\\ \kappa\end{bmatrix}(1+\xi)_q^\kappa(1-\xi)_q^{\mu-\kappa}
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

elde edilip (4.5), (4.10) ve (4.15) eşitlikleri (5.7) da yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&\tilde{K}_\mu(\rho_2; q; \xi) = \\
&\left[\frac{q^2[\mu][\mu-1]}{[\mu+1]^2}+\frac{2q^2(q-1)[\mu][\mu-1]}{[\mu+1]^2[2]}+\frac{q^2(q-1)^2[\mu][\mu-1]}{[\mu+1]^2[3]}\right]\xi^2\\
&+\left[\frac{[2]q[\mu][\mu-1]}{[\mu+1]^2}+\frac{2[\mu]}{[\mu+1]^2}+\frac{4[\mu]}{[\mu+1]^2[2]}+\frac{2q(q-1)[\mu][\mu-1]}{[\mu+1]^2}\right.\\
&-\frac{2(q-1)[\mu]}{[\mu+1][2]}+\frac{4(q-1)[\mu]}{[\mu+1]^2[3]}+\frac{q(q-1)^2[\mu][\mu-1][2]}{[\mu+1]^2[3]}\\
&\left.-\frac{2[\mu]}{[\mu+1]}+\frac{2(q-1)^2[\mu]}{[\mu+1]^2[3]}\right]\xi+\frac{q[\mu][\mu-1]}{[\mu+1]^2}+\frac{2[\mu]}{[\mu+1]^2}\\
&-\frac{2[\mu]}{[\mu+1]}+\frac{4[\mu]}{[\mu+1]^2[2]}+\frac{2q(q-1)[\mu][\mu-1]}{[\mu+1]^2[2]}-\frac{4}{[\mu+1][2]}\\
&-\frac{2(q-1)[\mu]}{[\mu+1][2]}+\frac{4}{[\mu+1^2][3]}+\frac{4(q-1)[\mu]}{[\mu+1]^2[3]}+\frac{q(q-1)^2[\mu][\mu-1]}{[\mu+1]^2[3]}\\
&+\frac{2(q-1)^2[\mu]}{[\mu+1]^2[3]}+1
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

elde edilir.

Lemma 5.5.

$$
\begin{aligned}
&\tilde{K}_\mu((t-\xi)^2;q;\xi) = \\
&\left(\frac{q^2[\mu][\mu-1]}{[\mu+1]^2}\left(1+\frac{2(q-1)}{[2]}+\frac{(q-1)^2}{[3]}\right)-\frac{4[\mu]q}{[\mu+1][2]}+1\right)\xi^2 \\
&+\left(\frac{[\mu]}{[\mu+1]^2}\left([2]q[\mu-1]+2+\frac{4}{[2]}+2q(q-1)[\mu-1]\right.\right. \\
&\quad\left.\left.+\frac{4(q-1)+q(q-1)^2[\mu-1][2]+2(q-1)^2}{[3]}\right)-\frac{8[\mu]q}{[\mu+1][2]}-\frac{4}{[\mu+1][2]}+2\right)\xi \\
&+\frac{q[\mu][\mu-1]}{[\mu+1]^2}\left(1+\frac{2(q-1)}{[2]}+\frac{(q-1)^2}{[3]}\right)+\frac{2[\mu]}{[\mu+1]^2}\left(1+\frac{2}{[2]}+\frac{[2](q-1)}{[3]}\right) \\
&-\frac{4q[\mu]}{[\mu+1][2]}+\frac{4}{[\mu+1]}\left(\frac{1}{[3][\mu+1]}-\frac{1}{[2]}\right)+1.
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

Teorem 5.6. *$q := (q_\mu)$ dizisi $0 < q_\mu < 1$ ve (4.16) koşullarını sağlasın. Bu durumda, $\forall h \in C[-1,1]$ için,*

$$\|\tilde{K}_\mu(h;q_\mu;\cdot)-h(\cdot)\|_{C[-1,1]} \le 2\omega(h;\eta_\mu)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\eta_\mu = \sqrt{\left(\frac{2q_\mu}{[2]}\frac{[\mu]}{[\mu+1]}-1\right)^2+\frac{12}{[2][\mu+1]}+\frac{28}{[2][3][\mu+1]}}. \tag{5.10}$$

İspat. $h \in C[-1,1]$ olmak üzere, $\tilde{K}_\mu(h;q;\xi)$ operatörü lineer ve monoton artan olduğundan

$$|\tilde{K}_\mu(h;q;\xi)-h(\xi)| \le \tilde{K}_\mu(|h(t)-h(\xi)|;q;\xi),$$

yani,

$$|\tilde{K}_\mu(h;q;\xi)-h(\xi)| = \sum_{\kappa=0}^{\mu} r_{\mu,\kappa,q}(\xi)\left(\int_{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1}^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1}|h(t)-h(\xi)|\,d_q^R t\right),$$

elde edilir. Burada,

$$r_{\mu,\kappa,q}(\xi) = \frac{[\mu+1]}{2}\frac{1}{2^\mu}q^{-\kappa}\begin{bmatrix}\mu\\ \kappa\end{bmatrix}(1+\xi)^\kappa(1-\xi)^{\mu-\kappa}$$

dır. Riemann tipi q-integralin monotonluk özelliği ve süreklilik modülünün yedinci özelliğinden yararlanılarak;

$$\begin{aligned}|\tilde{K}_\mu(h;q;\xi)-h(\xi)| &\leq \sum_{\kappa=0}^{\mu} r_{\mu,\kappa,q}(\xi)\left(\int_{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1}^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1}\left(1+\frac{|t-\xi|}{\eta}\right)\omega(h,\eta)\,d_q^R t\right)\\ &= \omega(h,\upsilon)\left\{1+\frac{1}{\eta}\sum_{\kappa=0}^{\mu} r_{\mu,\kappa,q}(\xi)\left(\int_{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1}^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1}|t-\xi|\,d_q^R t\right)\right\}.\end{aligned}$$

bulunur. q-Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulandığında

$$\begin{aligned}|\tilde{K}_\mu(h;q;\xi)-h(\xi)| &\leq \omega(h,\eta)\left\{1+\frac{1}{\eta}\sum_{\kappa=0}^{\mu} r_{\mu,\kappa,q}(\xi)\left(\int_{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1}^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1}(t-\xi)^2 d_q^R t\right)^{\frac{1}{2}}\right.\\ &\quad\left.\times\left(\int_{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1}^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1} d_q^R t\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\\ &= \omega(h,\eta)\left\{1+\frac{1}{\eta}\sum_{\kappa=0}^{\mu}\left(r_{\mu,\kappa,q}(\xi)\int_{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1}^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1}(t-\xi)^2 d_q^R t\right)^{\frac{1}{2}}\right.\\ &\quad\left.\times\left(r_{\mu,\kappa,q}(\xi)\int_{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1}^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1} d_q^R t\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. Klasik Cauchy-Schwarz eşitsizliği toplam üzerinde tekrar uyguladığında aşağıdaki eşitsizlik bulunur:

$$\begin{aligned}|\tilde{K}_\mu(h;q;\xi)-h(\xi)| &\leq \omega(h,\eta)\left\{1+\frac{1}{\eta}\left(\sum_{\kappa=0}^{\mu} r_{\mu,\kappa,q}(\xi)\int_{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1}^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1}(t-\xi)^2 d_q^R t\right)^{\frac{1}{2}}\right.\\ &\quad\left.\times\left(\sum_{\kappa=0}^{\mu} r_{\mu,\kappa,q}(\xi)\frac{2q^\kappa}{[\mu+1]}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\\ &= \omega(h,\eta)\left\{1+\frac{1}{\eta}\sum_{\kappa=0}^{\mu}\left(r_{\mu,\kappa,q}(\xi)\int_{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1}^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1}(t-\xi)^2 d_q^R t\right)^{\frac{1}{2}}\right\}.\end{aligned}$$

Başka bir ifadeyle

$$|\tilde{K}_\mu(h;q;\xi)-h(\xi)| \leq \omega(h,\eta)\left\{1+\frac{1}{\eta}\tilde{K}_\mu((\rho_1-\xi)^2;q;\xi)^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{5.11}$$

yazılır. Şimdi Lemma 5.5 te verdiğimiz $\tilde{K}_\mu((\rho_1-\xi)^2;q;\xi)$ ikinci momentin ξ^2 li terimin katsayısını M ile gösterelim:

$$M := \frac{q^2[\mu][\mu-1]}{[\mu+1]^2}\left(1+\frac{2(q-1)}{[2]}+\frac{(q-1)^2}{[3]}\right)-\frac{4[\mu]q}{[\mu+1][2]}+1.$$

$[\mu-1]<[\mu]$ olduğu dikkate alınır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$M \leq \left(\frac{2[\mu]q}{[2][\mu+1]}-1\right)^2 \tag{5.12}$$

elde edilir. Benzer şekilde, ξ nin katsayısını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\begin{aligned} N := \frac{[\mu]}{[\mu+1]^2}&\left([2]q[\mu-1]+2+\frac{4}{[2]}+2q(q-1)[\mu-1]\right.\\ &\left.+\frac{4(q-1)+q(q-1)^2[\mu-1][2]+2(q-1)^2}{[3]}\right)\\ &-\frac{8[\mu]q}{[\mu+1][2]}-\frac{4}{[\mu+1][2]}+2. \end{aligned} \tag{5.13}$$

N ifadesinde

$$\left([2]q+2q(q-1)+\frac{q(q-1)^2[2]}{[3]}\right)[\mu-1] \leq q^2(q+1)[\mu-1] \tag{5.14}$$

ve $[\mu]<[\mu+1]$ eşitsizlikleri göz önüne alınıp denklemde kullanılırsa

$$N < \frac{12}{[2][\mu+1]} \tag{5.15}$$

elde edilmiş olur.

Son olarak sabit terimi ele alırsak;

$$\begin{aligned} P := &\frac{q[\mu][\mu-1]}{[\mu+1]^2}\left(1+\frac{2(q-1)}{[2]}+\frac{(q-1)^2}{[3]}\right)\\ &+\frac{2[\mu]}{[\mu+1]^2}\left(1+\frac{2}{[2]}+\frac{[2](q-1)}{[3]}\right)-\frac{4q[\mu]}{[\mu+1][2]}\\ &+\frac{4}{[\mu+1]}\left(\frac{1}{[3][\mu+1]}-\frac{1}{[2]}\right)+1 \end{aligned} \tag{5.16}$$

elde edilir. Son denklemde sağ tarafta gerekli değerlendirmeler yapıldığında,

$$P < \frac{28}{[2][3][\mu+1]} \tag{5.17}$$

bulunur. Elde edilen bu sonuçlar (5.11) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\|\tilde{K}_\mu(h;q;\xi)-h(\xi)\|_{C[-1,1]} \leq \omega(h,\eta_\mu)\left[1+\frac{1}{\eta}\sqrt{M+N+P}\right], \tag{5.18}$$

burada

$$\eta := \eta_\mu = \sqrt{\left(\frac{2[\mu]_{q_\mu}q_\mu}{[2]_{q_\mu}[\mu+1]_{q_\mu}}-1\right)^2+\frac{12}{[2]_{q_\mu}[\mu+1]_{q_\mu}}+\frac{28}{[2]_{q_\mu}[3]_{q_\mu}[\mu+1]_{q_\mu}}}. \tag{5.19}$$

Böyleceo teorem kanıtlanmış olur. □

6. SONUÇLAR

6.1 Sonuçlar

Bu çalışma kapsamında, q-Bernstein-Kantorovich operatörleri, klasik Bernstein-Kantorovich operatörlerinin q-integral çerçevesinde genelleştirilmesiyle tanımlanmış ve teorik özellikleri ile istatistiksel yakınsama davranışları detaylı bir şekilde analiz edilmiştir. Çalışmanın temel bulguları ve sonuçları aşağıda özetlenmiştir.

q-Bernstein-Kantorovich operatörleri, şu şekilde tanımlanmıştır:

$$K_\mu^*(h;q;\xi) = \frac{[\mu+1]}{2}\sum_{\kappa=0}^{\mu}\left(\int_{\frac{2[\kappa]}{[\mu+1]}-1}^{\frac{2[\kappa+1]}{[\mu+1]}-1} h(t)d_qt\right)\begin{bmatrix}\mu\\ \kappa\end{bmatrix} q^{-\kappa}(1+\xi)_q^{\kappa}(1-\xi)_q^{\mu-\kappa},$$

burada h, q-integrallenebilir fonksiyon ve $\xi \in [-1,1]$ dir (Karahan ve Özbay, 2024).

Bu çalışmada yukarıda tanmlanan q-Bernstein-Kantorovich operatörünün yaklaşım özellikleri, hem Korovkin tip teorem yardımıyla hemde istatistiksel yaklaşım yöntemi kullanılarak incelenmiştir. q-integral tanımından kaynaklanan farklılardan dolayı klasik Korovkin tip teoremin koşulları üzerine yeni koşullar konulması gerektiğine vurgu yapılmıştır. Tezin ilerleyen bölümlerinde yukarıda tanımlanan operatör qR-integrallenebilir (Riemann anlamında q-integrallenebilir) fonksiyonlar yardımıyla lineer ve pozitiflik özelliklerini sağlayacak şekilde ikinci tip q-Bernstein-Kantorovich operatörleri biçiminde yeniden tanımlanmıştır. İkinci tip q-Bernstein-Kantorovich operatörlerinin de yaklaşım özellikleri incelenmiş ve süreklilik modülü yardımıyla hızı hesaplanmıştır.

7. ÖNERİLER

7.1 Öneriler

Bu tez çalışmasında yeni bir q-Bernstein-Kantorovich operatörü tanımmlanmış ve operatör simetrik bir aralık üzerinde incelenmiştir. Gelecek çalışmalarda operatörün tanımlandığı fonksiyon uzayları genişletilerek yaklaşım hızı iyileştirlebilir. Bunun yanı sıra Bernstein-Kantorovich operatörü tanımlanırken farklı kesir mertebe türev ve integral tanımlarından faydalanarak yaklaşım özellikleri klasik ve istatistiksel olarak ele alınabilir.

KAYNAKLAR

Abel, U., 1998. Asymptot c approx mat on w th Kantorov ch polynom al. Approx. Theory and Its Appl., 14: 106.

Altomare, F. and Campiti, M. 1994. Korovkin-Type Approximation Theory and its Applications. De Gruyter Series Studies in Mathematics, Vol. 17, Wal- ter de Gruyter, Berlin-New York.

Andrews, G. E., Askey, R. and Roy, R. 1999. Special Functions, Cambridge University Press.

Bernstein, S. N., 1912-1913. Demonstrat on du theoreme de We erstrass fondee sur le calcul des probab l tes. Commun. Soc. Math. Kharkow, 13(2): 1-2.

Bleimann, G., Butzer, P. L. and Hahn, L., 1980. A Bernste n-type operator approx mat ng cont nuous funct ons on the sem -ax s. Indag. Math., 42: 255-262.

Bohman, H. On approximation of continuous and analytic functions. Arkif für Math., 2 (3); 43-56.

Çilo, A., Iral, A. ve İzgi, A. 2012. [-1, 1] Aralığında Bernstein Polinomlarının Yaklaşım Özellikleri ve Yaklaşım Hızı (Properties of Approximation and Rate of Approximation Bernstein Polynomials in the Range [-1, 1]). XXV. Ulusal Matematik Sempozyumu, Niğde Üniversitesi, 5-8 Eylül.

Dalmanoğlu, Ö. ve Doğru, O. 2010. On Statistical Approximation Properties of Kantorovich type q-Bernstein operators. Math. Comput. Modelling, doi:10.16/j.mcm.2010.05.005.

Dalmanoğlu, G. Ö. 2007. Approximation by Kantorovich type q-Bernstein operators. Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Applied Mathematics, Cairo, Egypt, 113-117.

Derriennic, M. M., 2005. Modified Bernstein polynomials and Jacobi polynomials in q-calculus. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Supplemento 76*, 269–290.

Durrmeyer, J. L., 1967. Une formule d’inversion de la transformee de Laplace application a la theorie des moments. These De 3e Cyele. Faculte Des Sciences de l’Universite de Paris, 4: 149-150.

Dökmen, A. B., 2009.Bernstein polinomlarının q-analogu. Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale, 65s.

Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicum Studia Mathematica*, **2**, 241–244.

Gadjiev, A. D. and Orhan, C. (2002). Some approximation theorems via statistical convergence. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **32**(1), 129–138.

Gauchman, H. (2004). Integral Inequalities in q-Calculus. *Computers and Mathematics with Applications*, 47, 281–300.

Gupta, V., and Heping, W., 2008. The rate of convergence of q-Durrmeyer operators for $0 < q < 1$. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 31(16): 1946–1955.

Ilinskii, A., and Ostrovska, S., 2002. Convergence of Generalized Bernstein Polynomials. *Journal of Approximation Theory*, 123: 100–112.

Kac, V. ve Cheung, P. 1953. Quantum Calculus. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg.

Kac, V. ve Cheung, P. 1953. Quantum Calculus. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg.

Kantorovich, L. V., 1930. Sur certains developpements suivant les polynomes de la forme de S. Bernstein I, II. C.R. Acad. Sci. URSSS, 563-568, 595-600.

Karahan, D. and Özbay, M., (2024). On the statistical approximation of q-Bernstein-Kantorovich operators on the symmetric interval. Journal of Contemporary Applied Mathematics, 14(2), 17-25.

Kivinukk, A. and Metsmagi, T., (2011). Approx mat on n var at on by the Kantorov ch operators. Proceed ngs of the Eston an Academy of Sc ences, 60(4):201-209.

Korovkin, P. P., 1953. On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. (Russian), Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.)MR 15,236.Sc. 1.2. 90:961-964.

Lupaş, A., 1987. A q-analogue of the Bernstein operator.Seminar on Numerical and Statistical Calculus, 9: 85-92.

Lupaş, A., 1987. A q-analogue of the Bernstein operator. University of Cluj-Napoca, Seminar on Numerical and Statistical Calculus, 9: 85-92.

Marinkovic, S., Rajković, P. ve Stanković, M. (2008). ”The inequalities for some types of q-integrals”. *Computers and Mathematics with Applications*, 56; 2490-2498.

Niven, I., Zuckerman, H.S. (1980). *An Introduction on the Theory of Numbers*. John Wiley & Sons, 4th ed., New York.

Niven, I., Zuckerman, H. S. ve Montgomery, H. (1991). ”An Introduction to the Theory of Numbers”. *Wiley, New York*.

Ostrovska, S. (2006). On the Lupaş q-analogue of the Bernstein operator. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 36(5), 1615-1629.

Ostrovska, S. (2003). q-Bernstein polynomials and their Iterates. Journal of Approx. The., 123, 232-255.

Ostrovska, S. (2007). The first decade of the q-Bernstein polynomials: results and perspectives. Journal of Math. Anal. and Approx. The., 2(1), 35-51.

Özarslan, M. A., Duman, O. ve Srivastava, H. M. (2008). Statistical Approximation Results for Kantorovich-type operators involving some special polynomials. Math. and Comp. Modelling, 48(3-4), 388-401.

Phillips,1997, G. M. 1997. Bernstein Polynomials based on q-integers. Ann. Numer. Math., 4; 511□518.

Phillips, G. M. 1997. Bernstein Polynomials based on q-integers. Ann. Numer. Math., 4, 511-518.

Phillips, G. M., 2003. *Interpolation and Approximation by Polynomials*. Springer, Berlin.

Radu, C. (2008). Statistical approximation properties of Kantorovich operators based on q integers. Creative Math. Inf., 17(2), 75-84.

Weierstrass, K., 1885. Über die analytische darstellbarkeit sogenannter willküricher 55 funktionen einer reellen veranderlichen. Sitzungsberichte Der Akademie zu Berlin, 2(1): 633-639, 789-805.

Videnskii, V. S., 2005. On some classes of q-parametric positive linear operators. *Operator Theory: Advances and Applications*, 158: 213–222.