**T.C.**
**Harran Üniversitesi**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

# KESİLMEMİŞ MAKSİMUM ÇARPIM TİPİNDEKİ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

**NASAN ALSATTUF**

**MATEMATİK**

**Şanlıurfa**
**2024**

**T.C.**
**Harran Üniversitesi**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

# KESİLMEMİŞ MAKSİMUM ÇARPIM TİPİNDEKİ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

**NASAN ALSATTUF**

**MATEMATİK**
**Tez Danışmanı: SEVİLAY KIRCI SERENBAY**

**Şanlıurfa**
**2024**

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa No**

# ÖZET

**Yüksek Lisans Tezi**

**KESİLMEMİŞ MAKSİMUM ÇARPIM TİPİNDEKİ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ**

**Nasan ALSATTUF**

**Harran Üniversitesi**
**Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman : Prof. Dr. Sevilay KIRCI SERENBAY**
**Yıl: 2024, sayfa: 37**

Bu çalışmanın amacı, maksimum çarpım tipi kesilmemiş doğrusal olmayan Favard-Szasz-Mirakjan operatörünü kullanarak daha geniş bir küme üzerinde yeni bir operatör elde etmektir. Bununla birlikte elde edilen operatörün hem yaklaşımı hem de yaklaşım derecesini (hata oranını) incelemektir.

**ANAHTAR KELİMELER:** Yaklaşım operatörleri, lineer pozitif operatörler, maksimum çarpım operatörleri.

# ABSTRACT

**MSc Thesis**

**APPROXIMATION PROPERTIES OF NON-TRUNCATED MAXIMUM PRODUCT TYPE OPERATORS**

**Nasan ALSATTUF**

**Harran University**
**Graduate School of Natural and Applied Sciences**
**Department of Mathematics**

**Supervisor : Prof. Dr. Sevilay KIRCI SERENBAY**
**Year: 2024, page: 37**

The aim of this study is to obtain a new operator on a broader set by using the uncut nonlinear Favard-Szasz-Mirakjan operator of the maximum product type. Additionally, it aims to examine both the approximation and the degree of approximation (error rate) of the obtained operator.

**KEYWORDS:** Approximation operators, linear positive operators, maximum product operators.

# TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın doğrultusunda beni yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, uzman görüşleri ve öneri yardımlarını esirgemeyerek beni her zamanda destekleyen değerli danışmanım Prof. Dr. Sevilay KIRCI SERENBAY hocama ve emeği geçen tüm değerli hocalarıma teşekkürü borç bilirim.

Ayrıca uzun eğitim yaşamım boyunca hep yanımda olan maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen canım annem Hatice ELMUSA'ya ve canım babam Sabri ALSATTUF'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

# SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $B_\sigma$ | Bernstein operatörü |
| $Z$ | Cisim kümesi |
| $\mathbb{N}$ | Doğal sayılar kümesi |
| $F(D)$ | Fonksiyon uzayı |
| $\Gamma$ | Gamma fonksiyonu |
| $\Phi, \Psi$ | İki vektör uzayı |
| $\bigvee$ | Maksimum işlemi |
| $N_\sigma^{(M)}$ | Maksimum çarpım tipi Szasz– Durrmeyer operatörü |
| $\Lambda_\sigma^{(M)}$ | Maksimum çarpım tipi kesilmemiş Szasz operatörü |
| $S_\sigma^M$ | Maksimum çarpım tipi Genelleştirilmiş Szasz operatörü |
| $S_\sigma^{(M)*}$ | Maksimum çarpım tipi Modifiye Szasz operatörü |
| $T_\sigma^{(M)}$ | Maksimum çarpım tipi kesilmiş Szasz operatörü |
| $\Vert, \Vert$ | Norm |
| $\mathbb{R}_0^+$ | Negatif olmayan reel sayılar kümesi |
| $\Omega$ | Operatör |
| $\Omega_\sigma$ | Operatör dizisi |
| $I$ | Reel sayıların sınırlı veya sınırsız bir alt aralığı |
| $\vartheta$,$\tau$ | Reel değerli fonksiyon |
| $\vartheta_\sigma$ | Reel değerli fonksiyon dizisi |
| $C\left[a, b\right]$ | Sürekli fonksiyonlar uzayı |
| $\omega\left(\vartheta, \delta\right)$ | Süreklilik modülü |
| $S_\sigma$ | Szasz operatörü |
| $S_\sigma^*$ | Szasz-Durrmeyer operatörü |
| $\sum$ | Toplama sembolü |

# 1. GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisi, matematiğin birçok alt bilim dalıyla ilgilenmektedir. Yaklaşımlar teorisi herhangi bir fonksiyon daha basit ve kullanışlı diğer bir fonksiyon cinsinden bir gösterimi elde etmeyi amaçlar. Bu teorinin gelişiminde 1885 yılında Weierstrass, kompakt $[a, b]$ aralığında sürekli olan her $\vartheta$ fonksiyonuna aynı aralıkta düzgün yakınsayan bir $p$ polinomunun varlığını ispatlamıştır. Matematiksel olarak $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir $\vartheta$ fonksiyonu alındığında $\forall \epsilon > 0$ için aynı aralıkta öyle bir $p$ polinomu vardır ki $\forall \xi \in [a, b]$ için $|\vartheta(\xi) - p(\xi)| < \epsilon$ (Weierstrass, 1885). Fakat Weierstrass, teoremde tanımladığı polinomun tipini belirlememiştir. İlerleyen yıllarda Sergei Natanovice Bernstein 1912 yılında kendi adıyla tanıttığı polinomlarıyla Weierstrass teoreminde bahsedilen polinomun tipini tanımlamıştır. Daha sonra bazı matematikçiler Bernstein polinomunu modife ederek bazı operatörler kurmuşlar. 1953 yılında P.P. Korovkin, kompakt bir aralıkta herhangi bir sürekli fonksiyona düzgün yakınsama problemi operatör dizileri yardımıyla incelemiştir. Bu incelemenin sonucunda operatör dizisinin $\vartheta$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için üç koşul sağlanmalıdır. Bunlar test fonksiyonları $(1, t, t^2)$ dir. Bu problemin incelenmesinde kullanılan operatör dizileri genellikle lineer ve pozitiftir.

"Bütün yaklaşım operatörleri lineer olmak zorunda mıdır? Bu sorunun cevabı hayır olarak yanıtlanmaktadır. Yaklaşım operatörü her zaman lineer olmak zorunda değildir. Çünkü lineer yapı her zaman korunamamakta ya da tek başına yeterli olamamaktadır." Bununla birlikte cebirsel işlemler toplama ve çıkarma yetersiz kalacaktır. Bu problemlerin çözümleri için cebirsel işlem olarak maksimum alma işlemi kullanılarak maksimum çarpım tipi yaklaşım operatörleri tanımlanmaktadır. Bu operatörler lineer olmayan pozitif operatörlerdir. Maksimum çarpım tipi yaklaşım operatörlerine ilişkin birçok matematikçi tarafından çeşitli çalışmalar yapılmıştır (Acar ve ark., 2020; Özalp Güller ve ark., 2022; Acar ve ark., 2023).

Bu tez beş ana bölümden oluşmaktadır. Tezin ilk bölümü giriş bölümüdür.

İkinci bölüm ise lineer pozitif operatörler ve lineer olmayan pozitif operatörlerin yaklaşımı için gerekli temel tanımlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde lineer pozitif operatörlerdeki Korovkin teoremi ve maksimum çarpım tipindeki birkaç operatörün yaklaşımından bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde ise maksimum çarpım tipi Szasz-Durrmeyer operatörünün yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Beşinci ve son bölümde sonuç ve öneriler yazılmıştır.

# 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

**Tanım 2.1** $D \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\vartheta : D \to \mathbb{R}$ dönüşümüne $D$ üzerinde reel değerli bir fonksiyon denir (Coşkun, 2002).

**Tanım 2.2** Tanım kümesi $\mathbb{N}$ olan fonksiyona dizi denir. Dizi $(a_\sigma)$ ile gösterilir (Coşkun, 2002).

**Tanım 2.3** $\Phi$, $Z$ cismi üzerinde bir vektör uzay olsun.

$\|,\| : \Phi \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu aşağıdaki 4 aksiyomu sağlıyorsa bu fonksiyona **norm** denir.

1) $\forall \xi \in \Phi$ için $\|\xi\| \geq 0$

2) $\forall \xi \in \Phi$ için $\|\xi\| = 0 \Longleftrightarrow \xi = \emptyset$

3) $\forall \xi \in \Phi$ ve $\gamma \in Z$ için $\|\gamma\xi\| = |\gamma| \, \|\xi\|$

4) $\forall \xi, \mu \in \Phi$ için $\|\xi + \mu\| \leq \|\xi\| + \|\mu\|$

(Kreyszig, 1978).

**Tanım 2.4** $D \subset \mathbb{R}$ ve $F(D)$ de $D$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyon uzayı olsun. Her $\sigma \in \mathbb{N}$ için $\vartheta_\sigma : \mathbb{N} \to F(D)$ şeklinde tanımlı fonksiyona fonksiyon dizisi denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

**Tanım 2.5** Her $\sigma \in \mathbb{N}$ için $\vartheta_\sigma : \mathbb{N} \to F(D)$ fonksiyon dizisi verilsin. $\forall \epsilon > 0$ için en az bir $\sigma_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ vardır ve her $\xi \in D, \forall \sigma \geq \sigma_0(\epsilon)$ için $|\vartheta_\sigma(\xi) - \vartheta(\xi)| < \epsilon$ oluyorsa $(\vartheta_\sigma)$ fonksiyon dizisine $D$ üzerinde $\vartheta$ fonksiyonuna düzgün yakınsak denir (Coşkun, 2002).

**Teorem 2.6** Reel sayıların bir $D$ alt kümesinde tanımlı fonksiyonların bir $(\vartheta_\sigma)$ fonksiyon dizisi verilsin. Her $\xi \in D$ ve $\forall \sigma > p$ için $|\vartheta_\sigma(\xi) - \vartheta(\xi)| < a_\sigma$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $p \in \mathbb{N}$ ve sıfıra yakınsayan bir $(a_\sigma)$ sayı dizisi varsa $(\vartheta_\sigma)$ fonksiyon dizisi $D$ üzerinde $\vartheta$ fonksiyonuna düzgün yakınsar denir (Coşkun, 2002).

**Uyarı 2.7** $\sigma \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\vartheta_\sigma : \mathbb{N} \to F(D)$ fonksiyon dizisi verilsin. Bu durumda $(\vartheta_\sigma)$ fonksiyon dizisi $D$ üzerinde $\vartheta$ fonksiyonuna düzgün yakınsaması için gerek ve yeter şart

$\lim\limits_{\sigma\to\infty} \|\vartheta_\sigma(\xi) - \vartheta(\xi)\| = 0$ olmasıdır (Coşkun, 2002).

**Tanım 2.8** $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlanmış ve aralığın tüm noktalarında sürekli olan fonksiyonlar uzayına sonlu aralıkta sürekli fonksiyonlar uzayı denir ve $C[a,b]$ ile gösterilir. Kısaca $C[a,b] = \{\vartheta; \vartheta \in F(D),\ \vartheta \text{ sürekli}\}$. Ayrıca $C[a,b]$ uzayı üzerindeki norm

$$\|\vartheta\|_{C[a,b]} = \max_{a\leq\xi\leq b} |\vartheta(\xi)|$$

şeklinde tanımlanır. Bu norma göre $\vartheta_\sigma(\xi)$ fonksiyon dizisi bir $\vartheta(\xi)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaması için gerek ve yeter şart $\forall\xi \in [a,b]$ ve $M > 0$ olmak üzere sıfıra yakınsayan bir $\epsilon_\sigma$ dizisi için $|\vartheta_\sigma(\xi) - \vartheta(\xi)| < M\epsilon_\sigma$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Düzgün yakınsama $\vartheta_\sigma(\xi) \rightrightarrows \vartheta(\xi)$ şeklinde gösterilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

**Tanım 2.9** $\Phi$ ve $\Psi$ iki fonksiyon uzayı olsun. $\Omega : \Phi \to \Psi$ dönüşümü her $\vartheta \in \Phi$ için

$\Omega(\vartheta(t);\xi) = \Omega(\vartheta;\xi) = \tau(\xi)$ olacak şekilde $\tau \in \Psi$ karşılık getirebiliyorsa bu durumda $\Omega$ dönüşümüne **operatör** denir. Buradaki $\xi$ ve $t$, $\Phi$ ve $\Psi$ uzayındaki fonksiyonların tanım kümesi $A$ ise $\xi, t \in A$ dır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

**Tanım 2.10** $\Phi$ ve $\Psi$ iki fonksiyon uzayı olsun. $\vartheta, \tau \in \Phi$ ve $\alpha, \beta \in Z$ için

$$\Omega(\alpha\vartheta + \beta\tau;\xi) = \alpha\Omega(\vartheta;\xi) + \beta\Omega(\tau;\xi)$$

eşitliği sağlanıyorsa $\Omega$ operatörüne **lineer operatör** denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

**Uyarı 2.11** $\Omega$ lineer bir operatör olsun. Bu durumda

$\Omega(0;\xi) = \Omega(\vartheta(t) - \vartheta(t);\xi)$

$\Omega(0;\xi) = \Omega(\vartheta(t);\xi) - \Omega(\vartheta(t);\xi) = 0$ dolayısıyla $\Omega(0;\xi) = 0$ dır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

**Tanım 2.12** $\Phi^+ = \{\vartheta \in \Phi, \forall\xi \in A \text{ için } \vartheta(\xi) \geq 0\}$ ve $\Psi^+ = \{\tau \in \Psi, \forall\xi \in A \text{ için } \tau(\xi) \geq 0\}$ iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer $\Omega$ lineer operatörü

$\Phi^+$ uzayındaki herhangi bir $\vartheta$ fonksiyonu pozitif bir fonksiyona dönüştürebiliyorsa o halde $\Omega$ operatörüne **lineer pozitif operatör** denir. $\Omega$ lineer pozitif operatörü için $\Omega\Phi^+ = \Psi^+$ sağlanır. Yani $\vartheta(\xi) \geq 0$ olduğunda $\Omega(\vartheta;\xi) \geq 0$ olur. Bu durumda her $\xi$ için $\vartheta(\xi) \leq \tau(\xi)$ olursa bu takdirde $\Omega(\vartheta;\xi) \leq \Omega(\tau;\xi)$ olur. Dolayısıyla $\Omega$ operatörü monoton artandır. Ayrıca lineer pozitif operatörlerin kümesi $\pi$ olsun.

$$S : \mathbb{N} \to \pi$$

fonksiyonuna **pozitif lineer operatör dizisi** denir ve

$$S(\sigma) = \Omega_\sigma$$

dizinin genel terimi olup ve $\{\Omega_\sigma\}$ şeklinde yazılır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

**Açıklama 2.13** Her $\xi \in A$ için $\vartheta(\xi) \leq \tau(\xi)$ olsun. $0 \leq \tau(\xi) - \vartheta(\xi)$ eşitsizliğinin $\Omega$ operatörü altında görüntüsü alınırsa $0 \leq \Omega((\tau - \vartheta);\xi)$ olur. $\Omega$ lineer olduğundan $0 \leq \Omega(\tau;\xi) - \Omega(\vartheta;\xi)$ olup $\Omega(\vartheta;\xi) \leq \Omega(\tau;\xi)$ gerçeklenir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

**Tanım 2.14** $\Phi$ ve $\Psi$ iki normlu uzay ve $\Omega : \Phi \to \Psi$ lineer bir operatör olsun. Her $\vartheta \in \Phi$ için $\|\Omega(\vartheta;\xi)\|_\Psi \leq C\|\vartheta\|_\Phi$ olacak şekilde bir $C \geq 0$ sayısı varsa $\Omega$ ye **sınırlı operatör** denir. Bu $C$ sabitlerinin en küçüğüne $\Omega$ operatörünün normu denir ve $\|\Omega\|$ ile gösterilir. Yani $\|\Omega\| = \inf\{C : \|\Omega(\vartheta;\xi)\|_\Psi \leq C\|\vartheta\|_\Phi\}$ dır (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

**Tanım 2.15** $\Phi$ ve $\Psi$ iki normlu uzay ve $\Omega : \Phi \to \Psi$ lineer pozitif bir operatör olsun. Her $\vartheta \in \Phi$ olmak üzere $\|\vartheta\|_\Phi \neq 0$ olsun.

$$\|\Omega\| = \sup_{\|\vartheta\|_\Phi \neq 0} \frac{\|\Omega(\vartheta;\xi)\|_\Psi}{\|\vartheta\|_\Phi} \tag{2.1}$$

olur. $\Omega$ lineer operatör olduğundan

$$\|\Omega\| = \sup_{\|\vartheta\|_\Phi = 1} \|\Omega(\vartheta;\xi)\|_\Psi \tag{2.2}$$

yazılabilir. (2.1) ve (2.2) ifadeleri her ikisi de $\Omega$ operatörü için geçerlidir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

**Önerme 2.16** $\Phi$ ve $\Psi$ iki normlu uzay ve $\Omega : \Phi \to \Psi$ lineer pozitif bir operatör olsun. Bu durumda

$$|\Omega(\vartheta;\xi)| \leq \Omega(|\vartheta|;\xi)$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer $\Phi$ =$\Psi$ $= C[a,b]$ ve $\Omega$ operatörü $\vartheta$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığının dışındaki değerlerinden bağımsız ise bu durumda

$$\|\Omega\| = \sup_{\|\vartheta\|=1} \|\Omega(\vartheta;\xi)\| \leq \|\Omega(1;\xi)\| \tag{2.3}$$

diğer taraftan

$$\|\Omega\| = \sup_{\|\vartheta\|=1} \|\Omega(\vartheta;\xi)\| \geq \|\Omega(1;\xi)\| \tag{2.4}$$

sağlanır. (2.3) ve (2.4) den

$$\|\Omega\| = \|\Omega(1;\xi)\|$$

olur. (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

**Tanım 2.17** $\vartheta \in C[a,b]$ olsun. $\vartheta$ fonksiyonunun süreklilik modülü $\omega(\vartheta,\delta)$ ile gösterilir ve

$$\omega(\vartheta,\delta) = \sup\{|\vartheta(\xi) - \vartheta(t)|\,; \xi, t \in [a,b], |\xi - t| \leq \delta\}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $\omega$ aşağıda özellikleri sağlamaktadır.

1) $\omega(\vartheta,\delta) \geq 0$ ve $\lim\limits_{\delta\to\infty} \omega(\vartheta,\delta) = 0$

2) $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(\vartheta,\delta_1) \leq \omega(\vartheta,\delta_2)$

3) $\vartheta, \tau \in C[a,b]$ için $\omega(\vartheta+\tau,\delta) \leq \omega(\vartheta,\delta) + \omega(\tau,\delta)$

4) $m \in \mathbb{N}$ ise $\omega(\vartheta, m\delta) \leq m\omega(\vartheta,\delta)$

5) $\omega(\vartheta,\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\,\omega(\vartheta,\delta)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}^+$

6) $|\vartheta(\xi) - \vartheta(t)| \leq \omega(|\xi - t|\,,\delta)$

7) $|\vartheta(\xi) - \vartheta(t)| \leq \left(\frac{|\xi-t|}{\delta} + 1\right)\omega(\vartheta,\delta)$

(Altomare ve Campiti, 1994).

1951 yılında H. Bohman toplam şeklindeki pozitif lineer operatörler dizisinin sürekli fonksiyonlara yaklaşım problemini incelemiştir. H. Bohman, pozitif lineer operatör dizisinin $[0,1]$ aralığındaki sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsak olabilmesi için 3 koşul koymuştur. Daha sonra 1953 yılında P.P. Korovkin genel bir teorem ispatlamış ve genel durumda da Bohman'ın şartlarının geçerli olduğunu göstermiştir.

**Teorem 2.18** $\Omega_\sigma$ pozitif lineer operatör dizisi olmak üzere her $\xi \in [a,b]$ için

1)
$$\lim_{\sigma\to\infty} \left\|\Omega_\sigma\left(1;\xi\right)-1\right\| = 0 \tag{2.5}$$

2)
$$\lim_{\sigma\to\infty} \left\|\Omega_\sigma\left(t;\xi\right)-\xi\right\| = 0 \tag{2.6}$$

3)
$$\lim_{\sigma\to\infty} \left\|\Omega_\sigma\left(t^2;\xi\right)-\xi^2\right\| = 0 \tag{2.7}$$

eğer $\Omega_\sigma$, $[a,b]$ aralığında (2.5), (2.6) ve (2.7) koşullarını sağlıyorsa bu durumda $C\left[a,b\right]$ uzayında olan ve tüm reel ekseninde sınırlı herhangi bir $\vartheta$ fonksiyonu için $\sigma\to\infty$ için

$$\Omega_\sigma\left(\vartheta;\xi\right)\rightrightarrows\vartheta$$

dır (Korovkin, 1953).

# 3. GEREÇ VE YÖNTEM

## 3.1. Lineer Pozitif Operatörler

Ukraynalı matematikçi Sergi Natanovic Bernstein 1912 yılında binom formülünden faydalanarak Weierstrass teoreminin ispatı daha basit bir hale getirmiştir.

**Tanım 3.1.1** $\vartheta \in C[0,1]$ ve $\xi \in [0,1]$ için

$$B_\sigma(\vartheta;\xi) = \sum_{\varrho=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{\varrho} \xi^\varrho (1-\xi)^{\sigma-\varrho} \vartheta\left(\frac{\varrho}{\sigma}\right) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan operatörlere Bernstein operatörü denir. Her bir $B_\sigma$ derecesi $\sigma$ den büyük olmayan bir polinomdur (Bernstein, 1912).

**Lemma 3.1.2** Bernstein operatörü $[0,1]$ aralığında aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$\begin{aligned}
\lim_{\sigma\to\infty} \|B_\sigma(1;\xi) - 1\| &= 0 \\
\lim_{\sigma\to\infty} \|B_\sigma(t;\xi) - \xi\| &= 0 \\
\lim_{\sigma\to\infty} \left\|B_\sigma\left(t^2;\xi\right) - \xi^2\right\| &= 0
\end{aligned}$$

Bernstein operatörü Korovkin koşullarını sağladından dolayı her $\vartheta \in C[0,1]$ ve $\xi \in [0,1]$ için

$$B_\sigma(\vartheta;\xi) \rightrightarrows \vartheta$$

dır (Lorentz, 1986).

Favard-Szász-Mirakjan operatörü, Bernstein polinomunun sonsuz aralığa $\left([0,\infty)^{\text{'}}\,\text{a}\right)$ genişletilmesidir. Bu operatör exponansiyel fonksiyonunun Maclaurin serisine açılımından faydalanarak ortaya çıkmıştır.

$$e^u = \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{u^\varrho}{\varrho!}$$

$$1 = e^{-u} \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{u^\varrho}{\varrho!}$$

$$\vartheta(\xi) = e^{-u} \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{u^\varrho}{\varrho!} \vartheta(\xi)$$

$$S_\sigma(\vartheta;\xi) = e^{-(\sigma\xi)} \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{(\sigma\xi)^\varrho}{\varrho!} \vartheta\left(\frac{\varrho}{\sigma}\right)$$

**Tanım 3.1.3** $\vartheta \in C\left[0,\infty\right)$ ve $\xi \in \left[0,\infty\right)$ ve $\sigma \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$S_\sigma\left(\vartheta;\xi\right) = e^{-(\sigma\xi)} \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{(\sigma\xi)^\varrho}{\varrho!} \vartheta\left(\frac{\varrho}{\sigma}\right) \tag{3.2}$$

eşitliği ile verilen $S_\sigma$ Szasz operatörü pozitif lineer bir operatördür. Ayrıca Korovkin teoreminin şartları sağladığından dolayı $[0,\infty)$ aralığının her kompakt $([0,A])$ bir alt aralığında $S_\sigma \rightrightarrows \vartheta$

dır **(**Szasz, 1950).

**Tanım 3.1.4** $\vartheta \in C\left[0,\infty\right)$ ve $\xi \in \left[0,\infty\right)$ ve $\sigma \in \mathbb{N}$ olmak üzere (3.2) ifadesindeki operatörden faydalanarak

$$S_\sigma^*\left(\vartheta;\xi\right) = e^{-(\sigma\xi)} \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{(\sigma\xi)^\varrho}{\varrho!} \sigma \int_0^\infty P_{\sigma,\varrho}\left(t\right) \vartheta\left(t\right) dt \tag{3.3}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliği sağlayan operatöre Szasz-Durrmeyer operatörü denir. (3.3)'de $P_{\sigma,\varrho}\left(t\right) = e^{-\sigma t}\frac{(\sigma t)^\varrho}{\varrho!}$ şekinde tanımlanır. Ayrıca Korovkin teoreminin şartları sağladığından dolayı $[0,\infty)$ aralığının her kompakt $([0,A])$ bir alt aralığında $S_\sigma^* \rightrightarrows \vartheta$ dır (Mazhar veTotik, 1985).

Aşağıdaki verilen tanımlar ve yardımcı lemmalar maksimum çarpım tipi operatörler için verilmiştir.

**Tanım 3.1.5 (Maksimum Çarpım Cebiri)** Negatif olmayan reel sayılar kümesi $\mathbb{R}_0^+$ üzerinde $\bigvee$ (maksimum) ve $\cdot$ (çarpım) işlemlerini göz önünde bulundursun. Bu halde $\left(\mathbb{R}_0^+, \bigvee, \cdot\right)$ üçlüsüne bir yarı halka yapısına sahip ve bu yapıya bir maksimum çarpım cebiri denir **(**Bede ve ark., 2016).

**Tanım 3.1.6 (Maksimum Çarpım Tipi Operatör Dizisi)** $I \subseteq \mathbb{R}$ sınırlı veya sınırsız bir aralık ve

$$CB_+ = \left\{\vartheta : I \to \mathbb{R}_0^+; \vartheta,\ I \text{ üzerinde sürekli ve sınırlı}\right\}$$

olsun. $\sigma \in \mathbb{N}, \vartheta \in CB_+\left(I\right), Z_\sigma\left(\xi,\xi_i\right) \in CB_+\left(I\right)$ ve $\xi_i \in I$ olmak üzere

$$\Omega_\sigma : CB_+\left(I\right) \to CB_+\left(I\right)$$

maksimum çarpım tipi operatör dizisi denir.

$\Omega_\sigma(\vartheta;\xi) = \bigvee_{i=0}^{\sigma} Z_\sigma(\xi,\xi_i)\cdot\vartheta(\xi_i) \rightarrow$ Kesilmiş maksimum çarpım tipindeki operatör dizisi

$\Omega_\sigma(\vartheta;\xi) = \bigvee_{i=0}^{\infty} Z_\sigma(\xi,\xi_i)\cdot\vartheta(\xi_i) \rightarrow$ Kesilmemiş maksimum çarpım tipindeki operatör dizisi

şeklinde tanımlanır. Bu operatörler lineer olmayan pozitif operatörlerdir. Ayrıca $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}_0^+$, $\vartheta,\tau\in I\rightarrow\mathbb{R}_0^+$ için

$$\Omega_\sigma\left(\alpha\vartheta\bigvee\beta\tau;\xi\right) = \alpha\Omega_\sigma(\vartheta;\xi)\bigvee\beta\Omega_\sigma(\tau;\xi)$$

ve $\forall\lambda\geq 0$ için

$$\Omega_\sigma(\lambda\vartheta;\xi) = \lambda\Omega_\sigma(\vartheta;\xi)$$

pozitif homojenlik özelliği sağlanır **(**Bede ve ark., 2016).

Maksimum çarpım tipinde operatörlerin yaklaşım oranını bulma konusundaki aşağıda verilmiş olan lemmalar yol gösterici olacaktır.

**Lemma 3.1.7** $I\subseteq\mathbb{R}$ sınırlı veya sınırsız bir aralık ve $\vartheta,\tau\in CB_+(I)$ olsun.

$$\Omega_\sigma : CB_+(I)\rightarrow CB_+(I)$$

maksimum çarpım tipi operatör dizisi için

1) $\vartheta\leq\tau$ ise $\forall\sigma\in\mathbb{N}$ için $\Omega_\sigma(\vartheta;\xi)\leq\Omega_\sigma(\tau;\xi)$ **(monotonluk)**

2) $\Omega_\sigma(\vartheta+\tau;\xi)\leq\Omega_\sigma(\vartheta;\xi)+\Omega_\sigma(\tau;\xi)$ **(alt lineerlik)**

özellikleri sağlansın. Bu durumda $\forall\vartheta,\tau\in CB_+(I)$ ve $\xi\in I$ için

$$|\Omega_\sigma(\vartheta;\xi)-\Omega_\sigma(\tau;\xi)|\leq\Omega_\sigma(|\vartheta-\tau|;\xi)$$

dir **(**Bede ve ark., 2016).

**Lemma 3.1.8** $\Omega_\sigma : CB_+(I)\rightarrow CB_+(I)$ alt lineerlik, pozitif homojenlik ve monotonluk koşullarını sağlayan bir operatör dizisi olsun. O halde $\forall\vartheta\in CB_+(I)$ ve $\xi\in I$ için

$$|\vartheta(\xi)-\Omega_\sigma(\vartheta;\xi)|\leq\left[\frac{1}{\delta}\Omega_\sigma(\varphi_\sigma;\xi)+\Omega_\sigma(e_0;\xi)\right]\omega(\vartheta;\delta)+\vartheta(\xi)\,|\Omega_\sigma(e_0;\xi)-1|$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\delta>0$, $\forall t\in I$, $\xi\in I$ için $e_0(t)=1$, $\varphi_\sigma(t)=|\xi-t|$ ve

$$\omega(\vartheta;\delta)=\sup\{|\vartheta(\xi)-\vartheta(t)|\,;\xi,t\in I,|\xi-t|\leq\delta\}$$

şeklinde tanımlanan süreklilik modülüdür (Bede ve ark., 2016).

**Sonuç 3.1.9** Lemma 3.1.8'de verilen şartlara ek olarak $\forall\sigma \in \mathbb{N}$ ve $\xi \in I$ için $\Omega_\sigma(e_0) = e_0$ olsun. Bu durumda

$$|\vartheta(\xi) - \Omega_\sigma(\vartheta;\xi)| \leq \left[1 + \frac{1}{\delta}\Omega_\sigma(\varphi_\sigma;\xi)\right]\omega(\vartheta;\delta)$$

olur (Bede ve ark., 2016).

**Tanım 3.1.10 (Gamma Fonksiyonu)** $\Gamma(\xi)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu aşağıdaki genelleştirilmiş integral yardımıyla tanımlanır.

$$\begin{aligned} \Gamma(\xi) &= \int_0^\infty t^{\xi-1}e^{-t}dt, \quad 0 < \xi < \infty, \text{ ve } t > 0 \\ \sigma &\in \mathbb{N} \text{ için } \Gamma(\sigma) = (\sigma-1)!, \text{ ayrıca } \Gamma(\sigma+1) = \sigma\Gamma(\sigma) \end{aligned}$$

dır (Artin, 2006).

## 3.2. Maksimum Çarpım Tipi Operatörler

Lineer pozitif operatörleri kendi çekirdek fonksiyonuna bölerek Shepard (rasyonel) tipinde maksimum çarpım operatörleri elde edilir. Bu operatörler lineer olmayan pozitif operatörlerdir.

**Tanım 3.2.1** $\vartheta : [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ sınırlı bir fonksiyon ve $\forall\xi \in [0,\infty)$ için

$$\Lambda_\sigma^{(M)}(\vartheta;\xi) = \frac{\bigvee_{\varrho=0}^{\infty} \frac{(\sigma\xi)^\varrho}{\varrho!}\vartheta\left(\frac{\varrho}{\sigma}\right)}{\bigvee_{\varrho=0}^{\infty} \frac{(\sigma\xi)^\varrho}{\varrho!}}, \ \sigma \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanan operatöre kesilmemiş maksimum çarpım tipi Szasz operatörü denir (Bede ve ark., 2010).

**Tanım 3.2.2** Kesilmiş maksimum çarpım tipi Szasz operatörü

$$T_\sigma^{(M)}(\vartheta;\xi) = \frac{\bigvee_{\varrho=0}^{\sigma} \frac{(\sigma\xi)^\varrho}{\varrho!}\vartheta\left(\frac{\varrho}{\sigma}\right)}{\bigvee_{\varrho=0}^{\sigma} \frac{(\sigma\xi)^\varrho}{\varrho!}}, \ \sigma \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\xi \in [0,1]$ ve $\vartheta : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ tanımlı bir fonksiyondur (Bede ve ark., 2010).

**Lemma 3.2.3** $S_{\sigma,\varrho}(\xi) = \frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}$ için $\varsigma = \{0, 1, ...\}$ olmak üzere

$$\bigvee_{\varrho=0}^{\infty} S_{\sigma,\varrho}(\xi) = S_{\sigma,\varsigma}(\xi) \Leftrightarrow \xi \in \left[\frac{\varsigma}{\sigma}, \frac{\varsigma+1}{\sigma}\right]$$

dir (Bede ve ark., 2010).

**Tanım 3.2.4** $\varrho, \varsigma \in \{0, 1, ...\}$ ve $\xi \in \left[\frac{\varsigma}{\sigma}, \frac{\varsigma+1}{\sigma}\right]$ olsun. $S_{\sigma,\varrho}(\xi) = \frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}$ için $M_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) = \frac{S_{\sigma,\varrho}(\xi)\left|\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right|}{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)}$, $m_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) = \frac{S_{\sigma,\varrho}(\xi)}{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)}$,

1) $\varrho \geq \varsigma + 1$ ise

$$M_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) = \frac{S_{\sigma,\varrho}(\xi)\left(\frac{\varrho}{\sigma} - \xi\right)}{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)}$$

2) $\varrho \leq \varsigma - 1$ ise

$$M_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) = \frac{S_{\sigma,\varrho}(\xi)\left(\xi - \frac{\varrho}{\sigma}\right)}{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)}$$

olur (Bede ve ark., 2010).

**Lemma 3.2.5** $\varrho, \varsigma \in \{0, 1, ...\}$ ve $\xi \in \left[\frac{\varsigma}{\sigma}, \frac{\varsigma+1}{\sigma}\right]$ olsun

$$m_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) \leq 1.$$

Burada $\varrho \geq \varsigma$ ve $\varrho \leq \varsigma$ için yukarıdaki eşitsizlik sağlanır. Dolayısıyla her $\varrho \in \{0, 1, ...\}$ için

$$m_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) \leq 1$$

dir (Bede ve ark., 2010).

Aşağıdaki teoremde maksimum çarpım tipi kesilmemiş Favard-Szasz-Mirakjan operatörünün yaklaşım hızı süreklilik modülü kullanarak hesaplanmıştır.

**Teorem 3.2.6** $\vartheta : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığı üzerinde sınırlı ve sürekli bir fonksiyon olsun.

$$\left|\Lambda_{\sigma}^{(M)}(\vartheta; \xi) - \vartheta(\xi)\right| \leq 8\omega\left(\vartheta, \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\sigma}}\right), \sigma \in \mathbb{N} \text{ ve } \xi \in [0, \infty)$$

dir (Bede ve ark., 2010).

Maksimum çarpım tipi operatörleri için Bede ve arkadaşları tarafından 2006 yılında çalışmaya başlanmıştır. Maksimum çarpım tipi Favard–Szász–Mirakjan operatörü Gal'ın makalesinde 2008 yılında maksimum çarpım tipi Favard–Szász–Mirakjan operatörünün yakınsaklık derecesi problemi verilmiştir (Gal, 2008).

Maksimum çarpım tipi Favard–Szász–Mirakjan operatörünün noktasal yakınsaklığı için Bede ve Gal 2010 yılında aşağıdaki üst sınırları bulmuşlar.

1) $\vartheta : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ tanımlı ve $[0,1]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman

$$\left|T_\sigma^{(M)}(\vartheta;\xi) - \vartheta(\xi)\right| \leq 6\omega\left(\vartheta, \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right), \sigma \in \mathbb{N} \text{ ve } \xi \in [0,1]$$

2) $\vartheta : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ tanımlı ve $[0,1]$ aralığı üzerinde azalmayan konkav bir fonksiyon olsun. O zaman

$$\left|T_\sigma^{(M)}(\vartheta;\xi) - \vartheta(\xi)\right| \leq \omega\left(\vartheta, \frac{1}{\sigma}\right), \sigma \in \mathbb{N} \text{ ve } \xi \in [0,1].$$

Elde edilen sonuca göre $\vartheta$ fonksiyonu sürekli fonksiyonlar sınıfından seçildiğinde yakınsaklık hızında herhangi bir iyileştirilme olamayacağı çeşitli çalışmalar gösterilmiştir (Yani $\omega\left(\vartheta, \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)$ süreklilik modülü $\frac{1}{\sqrt{\sigma}}{}'$i geçmiyor). Ancak belirli bir $\vartheta$ fonksiyon sınıfları için örneğin; sınırlı ve azalmayan konkav (içbükey) fonksiyonlar ele alındığında daha iyi yaklaşım derecesi $\omega(\vartheta; 1/\sigma)$ elde edilir (Bede ve Gal, 2010).

**Tanım 3.2.7** $\vartheta : [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ sürekli bir fonksiyon olsun. $\xi \in [0,\infty)$, $(a_\sigma)$ ve $(b_\sigma)$ dizileri; $\lim_{\sigma\to\infty}\sqrt{\frac{a_\sigma}{b_\sigma}} = 0$ olacak şekilde pozitif reel sayıların artan ve sınırsız birer dizisi olmak üzere

$$S_\sigma^M(\vartheta;\xi) = \frac{\bigvee_{\varrho=0}^{\infty} C_{\sigma,\varrho}(\xi)\,\vartheta\left(\frac{\varrho b_\sigma}{a_\sigma}\right)}{\bigvee_{\varrho=0}^{\infty} C_{\sigma,\varrho}(\xi)}, \sigma \in \mathbb{N}$$

biçiminde tanımlanan operatöre kesilmemiş maksimum çarpım tipi Genelleştirilmiş Szasz operatörü denir. Burada $C_{\sigma,\varrho}(\xi) = \frac{(a_\sigma\xi)^\varrho}{b_\sigma^\varrho \varrho!}$ dır (Güngör, 2016).

**Lemma 3.2.8** $\varsigma = \{0,1,...\}$ için $C_{\sigma,\varrho}(\xi) = \frac{(a_\sigma\xi)^\varrho}{b_\sigma^\varrho \varrho!}$ olmak üzere

$$\bigvee_{\varrho=0}^{\infty} C_{\sigma,\varrho}(\xi) = C_{\sigma,\varsigma}(\xi) \Leftrightarrow \xi \in \left[\frac{\varsigma b_\sigma}{a_\sigma}, \frac{(\varsigma+1)\,b_\sigma}{a_\sigma}\right]$$

dır (Güngör, 2016).

**Tanım 3.2.9** $\varrho, \varsigma \in \{0,1,...\}$ ve $\xi \in \left[\frac{\varsigma b_\sigma}{a_\sigma}, \frac{(\varsigma+1)b_\sigma}{a_\sigma}\right]$ için

$$M_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) = \frac{C_{\sigma,\varrho}(\xi)\left|\frac{\varrho b_\sigma}{a_\sigma} - \xi\right|}{C_{\sigma,\varsigma}(\xi)}$$

olup

1) $\varrho \geq \varsigma + 1$ ise

$$M_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) = \frac{C_{\sigma,\varrho}(\xi)\left(\frac{\varrho b_\sigma}{a_\sigma} - \xi\right)}{C_{\sigma,\varsigma}(\xi)}$$

2) $\varrho \leq \varsigma + 1$ ise

$$M_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) = \frac{C_{\sigma,\varrho}(\xi)\left(\xi - \frac{\varrho b_\sigma}{a_\sigma}\right)}{C_{\sigma,\varsigma}(\xi)}$$

dır (Güngör, 2016).

**Lemma 3.2.10** $\varrho, \varsigma \in \{0, 1, ...\}$ ve $\xi \in \left[\frac{\varsigma b_\sigma}{a_\sigma}, \frac{(\varsigma+1)b_\sigma}{a_\sigma}\right]$ için

$$m_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) \leq 1.$$

Burada $\varrho \geq \varsigma$ ve $\varrho \leq \varsigma$ için yukarıdaki eşitsizlik sağlanır. Dolayısıyla her $\varrho \in \{0, 1, ...\}$ için

$$m_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) \leq 1$$

dir (Güngör, 2016).

**Teorem 3.2.11** $\vartheta : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ sürekli bir fonksiyon olsun. $\xi \in [0, \infty)$, $(a_\sigma)$ ve $(b_\sigma)$ dizileri; $\lim\limits_{\sigma\to\infty} \sqrt{\frac{a_\sigma}{b_\sigma}} = 0$ olacak şekilde pozitif reel sayıların artan ve sınırsız birer dizisi olmak üzere

$$\left|S_\sigma^{(M)}(\vartheta;\xi) - \vartheta(\xi)\right| \leq 8\omega\left(\vartheta, \frac{\sqrt{b_\sigma \xi}}{\sqrt{a_\sigma}}\right), \quad \sigma \in \mathbb{N} \text{ ve } \xi \in [0, \infty)$$

dir (Güngör, 2016).

**Tanım 3.2.12** $\vartheta : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ sürekli ve bir fonksiyon $0 \leq \xi < \infty, r > 0$ ve $\lim\limits_{\sigma\to\infty} \frac{1}{\sigma+r} = 0$ olacak şekilde pozitif reel sayıların azalan ve sınırsız bir dizisi olmak üzere

$$S_\sigma^{(M)*}(\vartheta;\xi) = \frac{\bigvee\limits_{\varrho=0}^{\infty} S_{\sigma,\varrho}(\xi)\,\vartheta\left(\frac{\varrho}{\sigma+r}\right)}{\bigvee\limits_{\varrho=0}^{\infty} S_{\sigma,\varrho}(\xi)}, \quad \sigma \in \mathbb{N}$$

biçiminde tanımlanan operatöre kesilmemiş maksimum çarpım Modifiye Szasz operatörü denir. Burada $S_{\sigma,\varrho}(\xi) = \frac{(\sigma\xi)^\varrho}{\varrho!}$ dır (Baruğ ve Kırcı Serenbay, 2021).

**Lemma 3.2.13** $S_{\sigma,\varrho}(\xi) = \frac{(\sigma\xi)^\varrho}{\varrho!}$, için $\varsigma = \{0, 1, ...\}$ olmak üzere

$$\bigvee_{\varrho=0}^{\infty} S_{\sigma,\varrho}(\xi) = S_{\sigma,\varsigma}(\xi) \Leftrightarrow \xi \in \left[\frac{\varsigma}{\sigma+r}, \frac{\varsigma+1}{\sigma+r}\right]$$

dır **(**Baruğ ve Kırcı Serenbay, 2021).

**Tanım 3.2.14** $\varrho, \varsigma \in \{0,1,...\}$ ve $\xi \in \left[\frac{\varsigma}{\sigma+r}, \frac{\varsigma+1}{\sigma+r}\right]$ için

$$M_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) = \frac{S_{\sigma,\varrho}(\xi)\left|\frac{\varrho}{\sigma+r} - \xi\right|}{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)} \quad \text{olup}$$

1) $\varrho \geq \varsigma + 1$ ise

$$M_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) = \frac{S_{\sigma,\varrho}(\xi)\left(\frac{\varrho}{\sigma+r} - \xi\right)}{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)}$$

2) $\varrho \leq \varsigma - 1$ ise

$$M_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) = \frac{S_{\sigma,\varrho}(\xi)\left(\xi - \frac{\varrho}{\sigma+r}\right)}{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)}$$

dır **(**Baruğ ve Kırcı Serenbay, 2021).

**Lemma 3.2.15** Her $\varrho, \varsigma = \{0,1,...\}$ ve $\xi \in \left[\frac{\varsigma}{\sigma+r}, \frac{\varsigma+1}{\sigma+r}\right]$ için

$$m_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) \leq 1.$$

Burada $\varrho \geq \varsigma$ ve $\varrho \leq \varsigma$ için yukarıdaki eşitsizlik sağlanır. Dolayısıyla her $\varrho \in \{0,1,...\}$ için

$$m_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) \leq 1$$

dır **(**Baruğ ve Kırcı Serenbay, 2021).

**Teorem 3.2.16** $\vartheta : [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ sınırlı ve sürekli bir fonksiyon ve $S_\sigma^{(M)*}(\vartheta,\xi)$ maksimum çarpım tipi Modifiye Favard-Szasz-Mirakjan operatörleri olmak üzere

$$\left|S_\sigma^{(M)*}(\vartheta;\xi) - \vartheta(\xi)\right| \leq 8\omega\left(\vartheta, \sqrt{\frac{\xi}{\sigma+r}}\right), \forall\sigma \in \mathbb{N} \text{ ve } \xi \in [0,\infty).$$

Burada $\omega = \sup\{|\vartheta(\xi) - \vartheta(t)|; \xi, t \in [0,\infty), |\xi - t| \leq \delta\}$ ve $\lim\limits_{\sigma\to\infty} \frac{1}{\sigma+r} = 0$ **(**Baruğ ve Kırcı Serenbay, 2021).

# 4. BULGULAR

Bu bölümde maksimum çarpım tipi Szasz-Durrmeyer operatörü tanımlanmıştır. Bununla birlikte bu operatörün yaklaşımı ve yaklaşım hızı süreklilik modülü yardımıyla incelenmiştir. Maksimum çarpım tipindeki kesilmemiş Favard–Szász–Mirakjan operatörü

$$\Lambda_{\sigma}^{(M)}(\vartheta;\xi)=\frac{\bigvee\limits_{\varrho=0}^{\infty}\frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\vartheta\left(\frac{\varrho}{\sigma}\right)}{\bigvee\limits_{\varrho=0}^{\infty}\frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}},\quad \sigma\in\mathbb{N} \tag{4.1}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\xi\in[0,\infty)$ ve $\vartheta:[0,\infty)\to\mathbb{R}_{+}$ sınırlı bir fonksiyondur **(**Bede ve ark., 2010).

Yukarıda tanımlanan (4.1) ifadesindeki operatörü kullanarak

$$N_{\sigma}^{(M)}(\vartheta;\xi)=\frac{\bigvee\limits_{\varrho=0}^{\infty}\frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\sigma\int\limits_{0}^{\infty}P_{\sigma,\varrho}(t)\,\vartheta(t)\,dt}{\bigvee\limits_{\varrho=0}^{\infty}\frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\sigma\int\limits_{0}^{\infty}P_{\sigma,\varrho}(t)\,dt},\quad \sigma\in\mathbb{N} \tag{4.2}$$

eşitliği elde edilmiştir. Bu eşitliği sağlayan operatöre maksimum çarpım tipi Szasz–Durrmeyer operatörü denir. Burada $\xi\in[0,\infty)$ ve $\vartheta:[0,\infty)\to\mathbb{R}_{+}$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığı üzerinde integrallenebilir bir fonksiyondur. Ayrıca (4.2) ifadesinde $P_{\sigma,\varrho}(t)=e^{-\sigma t}\frac{(\sigma t)^{\varrho}}{\varrho!}$ dır **(**Alsattuf ve Kırcı Serenbay, 2024).

Bu bölümde (4.2) ’da tanımlanan operatörün yaklaşımı ve yaklaşım derecesi incelenmiştir. Yaklaşım teoremi için gerekli lemmalar ve tanımlar aşağıda verilmiştir.

## 4.1. Maksimum Çarpım Tipindeki Szász–Durrmeyer Operatörü

**Tanım 4.1.1** $\forall\xi\in[0,\infty)$ için $\vartheta:[0,\infty)\to\mathbb{R}_{+}$ tanımlı integrallenebilir bir fonksiyon olsun.

$$N_{\sigma}^{(M)}(\vartheta;\xi)=\frac{\bigvee\limits_{\varrho=0}^{\infty}\frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\sigma\int\limits_{0}^{\infty}P_{\sigma,\varrho}(t)\,\vartheta\left(\frac{\varrho}{\sigma}\right)dt}{\bigvee\limits_{\varrho=0}^{\infty}\frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\sigma\int\limits_{0}^{\infty}P_{\sigma,\varrho}(t)\,dt},\quad \sigma\in\mathbb{N} \tag{4.3}$$

bu eşitliği sağlayan operatöre kesilmemiş maksimum çarpım tipi Szasz-Durrmeyer operatörüframetitle denir. (4.3) eşitliğinde $P_{\sigma,\varrho}(t)=e^{-\sigma t}\frac{(\sigma t)^{\varrho}}{\varrho!}$. Her $\sigma\in\mathbb{N}$ için

$$N_{\sigma}^{(M)}(\vartheta(0);\xi)-\vartheta(0)=0$$

gerçekten;

$$\begin{aligned}
N_{\sigma}^{(M)}(\vartheta(0);\xi) &= \frac{\bigvee_{\varrho=0}^{\infty}\frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\sigma\int_{0}^{\infty}P_{\sigma,\varrho}(t)\,\vartheta(0)\,dt}{\bigvee_{\varrho=0}^{\infty}\frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\sigma\int_{0}^{\infty}P_{\sigma,\varrho}(t)\,dt}, \quad \sigma\in\mathbb{N} \\
&= \frac{\bigvee_{\varrho=0}^{\infty}\frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\sigma\int_{0}^{\infty}P_{\sigma,\varrho}(t)\,dt}{\bigvee_{\varrho=0}^{\infty}\frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\sigma\int_{0}^{\infty}P_{\sigma,\varrho}(t)\,dt}\vartheta(0) \\
&= \vartheta(0)
\end{aligned}$$

dır **(**Alsattuf ve Kırcı Serenbay, 2024).

**Lemma 4.1.2** $S_{\sigma,\varrho}(\xi)=\frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\sigma\int_{0}^{\infty}\frac{(\sigma t)^{\varrho}}{\varrho!}e^{-\sigma t}dt$ olsun.

$$\bigvee_{\varrho=0}^{\infty}S_{\sigma,\varrho}(\xi)=S_{\sigma,\varsigma}(\xi)\ \text{ ise } \xi\in\left[\frac{\varsigma}{\sigma},\frac{\varsigma+1}{\sigma}\right],\quad \varsigma=0,1,...$$

**İspat.**

Öncelikle $\sigma\in\mathbb{N}$ ve $\varrho\geq 0$ için

$$0\leq S_{\sigma,\varrho+1}(\xi)\leq S_{\sigma,\varrho}(\xi)\Longleftrightarrow \xi\in\left[0,\frac{\varrho+1}{\sigma}\right]$$

olduğunu gösterilirse ispat tamamlanır.

$$
\begin{aligned}
0 &\leq S_{\sigma,\varrho+1}(\xi) \leq S_{\sigma,\varrho}(\xi) \\
&\leq \frac{(\sigma\xi)^{\varrho+1}}{(\varrho+1)!}\sigma\int_0^\infty \frac{(\sigma t)^{\varrho+1}}{(\varrho+1)!}e^{-\sigma t}dt \leq \frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\sigma\int_0^\infty \frac{(\sigma t)^{\varrho}}{\varrho!}e^{-\sigma t}dt \\
&\leq \frac{\sigma\xi}{\varrho+1}\int_0^\infty \frac{\sigma^{\varrho+1}}{(\varrho+1)!}t^{\varrho+1}e^{-\sigma t}dt \leq \int_0^\infty \frac{\sigma^{\varrho}}{\varrho!}t^{\varrho}e^{-\sigma t}dt \\
&\leq \frac{\sigma\xi}{\varrho+1}\frac{\sigma^{\varrho+1}}{(\varrho+1)!}\int_0^\infty t^{\varrho+1}e^{-\sigma t}dt \leq \frac{\sigma^{\varrho}}{\varrho!}\int_0^\infty t^{\varrho}e^{-\sigma t}dt \\
&\leq \frac{\sigma^2\xi}{(\varrho+1)^2}\int_0^\infty t^{\varrho+1}e^{-\sigma t}dt \leq \int_0^\infty t^{\varrho}e^{-\sigma t}dt \\
(\sigma t &= u) \text{ dönüşümü alınırsa } dt = \frac{du}{\sigma} \\
&\leq \frac{\sigma^2\xi}{(\varrho+1)^2}\int_0^\infty \left(\frac{u}{\sigma}\right)^{\varrho+1}e^{-u}\frac{du}{\sigma} \leq \int_0^\infty \left(\frac{u}{\sigma}\right)^{\varrho}e^{-u}\frac{du}{\sigma} \\
&\leq \frac{\sigma^2\xi}{(\varrho+1)^2}\frac{1}{\sigma^{\varrho+2}}\underbrace{\int_0^\infty u^{\varrho+1}e^{-u}du}_{\Gamma(\varrho+2)} \leq \frac{1}{\sigma^{\varrho+1}}\underbrace{\int_0^\infty u^{\varrho}e^{-u}du}_{\Gamma(\varrho+1)} \\
&\leq \frac{\sigma^2\xi}{(\varrho+1)^2}\frac{1}{\sigma^{\varrho+2}}\Gamma(\varrho+2) \leq \frac{1}{\sigma^{\varrho+1}}\Gamma(\varrho+1) \\
&\leq \frac{\sigma^2\xi}{(\varrho+1)^2}\frac{(\varrho+1)!}{\sigma^{\varrho+2}} \leq \frac{\varrho!}{\sigma^{\varrho+1}} \\
0 &\leq \frac{\xi}{\varrho+1} \leq \frac{1}{\sigma} \Longrightarrow \xi \in \left[0, \frac{\varrho+1}{\sigma}\right] \\
\varrho &= 0, 1, \ldots \text{ için değer alınırsa} \\
\varrho &= 0 \Longrightarrow 0 \leq S_{\sigma,1}(\xi) \leq S_{\sigma,0}(\xi) \longmapsto \xi \in \left[0, \frac{1}{\sigma}\right] \\
\varrho &= 1 \Longrightarrow 0 \leq S_{\sigma,2}(\xi) \leq S_{\sigma,1}(\xi) \longmapsto \xi \in \left[0, \frac{2}{\sigma}\right] \\
&\vdots \\
\varrho &= \varrho \Longrightarrow 0 \leq S_{\sigma,\varrho+1}(\xi) \leq S_{\sigma,\varrho}(\xi) \longmapsto \xi \in \left[0, \frac{\varrho+1}{\sigma}\right]
\end{aligned}
$$

O halde $0 \leq S_{\sigma,\varrho+1}(\xi) \leq S_{\sigma,\varrho}(\xi)$ var iken $\xi \in \left[0, \frac{\varrho+1}{\sigma}\right]$.

Tersine

$\varrho = 0 \longrightarrow \xi \in \left[0, \frac{1}{\sigma}\right]$ için $S_{\sigma,1}(\xi) \leq S_{\sigma,0}(\xi)$ ?

$$\begin{aligned}
\xi &\leq \frac{1}{\sigma} \\
\sigma\xi &\leq 1 \\
\sigma\xi\Gamma(2) &\leq \Gamma(2) \\
\sigma\xi\Gamma(2) &\leq \Gamma(1) \quad \text{çünkü } \Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) \\
\sigma\xi\int_0^\infty u^1 e^{-u} du &\leq \int_0^\infty u^0 e^{-u} du \quad u = \sigma t \text{ alınırsa} \\
\sigma\xi\int_0^\infty (\sigma t) e^{-\sigma t}\sigma dt &\leq \int_0^\infty e^{-\sigma t}\sigma dt \Longrightarrow \underbrace{\frac{\sigma\xi}{1!}\sigma\int_0^\infty \frac{(\sigma t)}{1!} e^{-\sigma t} dt}_{S_{\sigma,1}(\xi)} \leq \underbrace{\sigma\int_0^\infty e^{-\sigma t} dt}_{S_{\sigma,0}(\xi)}
\end{aligned}$$

$\varrho = 1 \longrightarrow \xi \in \left[\frac{1}{\sigma}, \frac{2}{\sigma}\right]$ için $S_{\sigma,2}(\xi) \leq S_{\sigma,1}(\xi)$ ?

$$\begin{aligned}
\xi &\leq \frac{2}{\sigma} \\
\sigma\xi &\leq 2 \\
\frac{\sigma\xi}{2}\Gamma(3) &\leq \Gamma(3) \\
\frac{\sigma\xi}{2}\Gamma(3) &\leq 2\Gamma(2) \\
\frac{\sigma\xi}{2}\int_0^\infty u^2 e^{-u} du &\leq 2\int_0^\infty u^1 e^{-u} du \\
\frac{\sigma\xi}{2}\sigma\int_0^\infty (\sigma t)^2 e^{-\sigma t} dt &\leq 2\sigma\int_0^\infty (\sigma t)^1 e^{-\sigma t} dt \\
\underbrace{\frac{(\sigma\xi)^2}{2}\sigma\int_0^\infty \frac{(\sigma t)^2}{2} e^{-\sigma t} dt}_{S_{\sigma,2}(\xi)} &\leq \underbrace{\frac{\sigma\xi}{1}\sigma\int_0^\infty \frac{(\sigma t)^1}{1} e^{-\sigma t} dt}_{S_{\sigma,1}(\xi)}
\end{aligned}$$

$\varrho = \varrho \longrightarrow \xi \in \left[\frac{\varrho}{\sigma}, \frac{\varrho+1}{\sigma}\right]$ için $S_{\sigma,\varrho+1}(\xi) \leq S_{\sigma,\varrho}(\xi)$ ?

$$\begin{aligned}
\xi &\leq \frac{\varrho+1}{\sigma} \\
\frac{\sigma\xi}{\varrho+1} &\leq 1 \\
\frac{(\sigma\xi)^{\varrho+1}}{(\varrho+1)!} &\leq \frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!} \\
\frac{(\sigma\xi)^{\varrho+1}}{(\varrho+1)!}\Gamma(\varrho+2) &\leq (\varrho+1)\Gamma(\varrho+1)\frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!} \\
\frac{(\sigma\xi)^{\varrho+1}}{(\varrho+1)!}\int_0^\infty u^{\varrho+1}e^{-u}du &\leq \frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}(\varrho+1)\int_0^\infty u^{\varrho}e^{-u}du \\
u &= \sigma t \text{ dönüşümü alınırsa} \\
\frac{(\sigma\xi)^{\varrho+1}}{(\varrho+1)!}\int_0^\infty (\sigma t)^{\varrho+1}e^{-\sigma t}\sigma dt &\leq \frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}(\varrho+1)\int_0^\infty (\sigma t)^{\varrho}e^{-\sigma t}\sigma dt \\
\frac{(\sigma\xi)^{\varrho+1}}{(\varrho+1)!}\sigma\int_0^\infty \frac{(\sigma t)^{\varrho+1}}{\varrho!}e^{-\sigma t}dt &\leq \frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}(\varrho+1)\sigma\int_0^\infty \frac{(\sigma t)^{\varrho}}{\varrho!}e^{-\sigma t}dt \\
\underbrace{\frac{(\sigma\xi)^{\varrho+1}}{(\varrho+1)!}\sigma\int_0^\infty \frac{(\sigma t)^{\varrho+1}}{(\varrho+1)!}e^{-\sigma t}dt}_{S_{\sigma,\varrho+1}(\xi)} &\leq \underbrace{\frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\sigma\int_0^\infty \frac{(\sigma t)^{\varrho}}{\varrho!}e^{-\sigma t}dt}_{S_{\sigma,\varrho}(\xi)}
\end{aligned}$$

$\forall\varrho = 0, 1, ...$ değerleri için $\xi \in \left[\frac{\varsigma}{\sigma}, \frac{\varsigma+1}{\sigma}\right]$ ise $S_{\sigma,\varrho+1}(\xi) \leq S_{\sigma,\varrho}(\xi)$ sağlanır **(**Alsattuf ve Kırcı Serenbay, 2024).

**Lemma 4.1.3** $\varrho, \varsigma \in \{0, 1, ...\}$ ve $\xi \in \left[\frac{\varsigma}{\sigma}, \frac{\varsigma+1}{\sigma}\right]$ olsun.

$$m_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) \leq 1.$$

Burada $m_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) = \frac{S_{\sigma,\varrho}(\xi)}{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)}$ ve $S_{\sigma,\varrho}(\xi) = \frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\sigma\int_0^\infty \frac{(\sigma t)^{\varrho}}{\varrho!}e^{-\sigma t}dt$ dır.

**İspat.**

Burada iki durum söz konusudur.

1) $\varrho \geq \varsigma$

2) $\varrho \leq \varsigma$

1) $\varrho \geq \varsigma$ olsun.

$$\begin{aligned}
\frac{m_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi)}{m_{\varrho+1,\sigma,\varsigma}(\xi)} &= \frac{\frac{S_{\sigma,\varrho}(\xi)}{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)}}{\frac{S_{\sigma,\varrho+1}(\xi)}{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)}} = \frac{S_{\sigma,\varrho}(\xi)}{S_{\sigma,\varrho+1}(\xi)} = \frac{\frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\sigma\int\limits_0^\infty \frac{(\sigma t)^{\varrho}}{\varrho!}e^{-\sigma t}dt}{\frac{(\sigma\xi)^{\varrho+1}}{(\varrho+1)!}\sigma\int\limits_0^\infty \frac{(\sigma t)^{\varrho+1}}{(\varrho+1)!}e^{-\sigma t}dt} \\
&= \frac{(\varrho+1)}{\sigma\xi}\frac{\int\limits_0^\infty \frac{(\sigma t)^{\varrho}}{\varrho!}e^{-\sigma t}dt}{\int\limits_0^\infty \frac{(\sigma t)^{\varrho+1}}{(\varrho+1)!}e^{-\sigma t}dt} = \frac{(\varrho+1)^2}{\sigma\xi}\frac{\int\limits_0^\infty (\sigma t)^{\varrho}e^{-\sigma t}dt}{\int\limits_0^\infty (\sigma t)^{\varrho+1}e^{-\sigma t}dt} \\
(u &= \sigma t) \text{ dönüşümü alınırsa} \\
&= \frac{(\varrho+1)^2}{\sigma}\frac{1}{\xi}\frac{\overbrace{\int\limits_0^\infty (u)^{\varrho}e^{-u}\frac{du}{\sigma}}^{\Gamma(\varrho+1)}}{\underbrace{\int\limits_0^\infty (u)^{\varrho+1}e^{-u}\frac{du}{\sigma}}_{\Gamma(\varrho+2)}}
\end{aligned}$$

$\tau(\xi) = \frac{1}{\xi}$ olsun o zaman $\tau$ fonksiyonu $\left[\frac{\varsigma}{\sigma}, \frac{\varsigma+1}{\sigma}\right]$ aralığı üzerinde azalan bir fonksiyondur. Çünkü $\tau'(\xi) = -\frac{1}{\xi^2} \leq 0$ olup $\tau\left(\frac{\varsigma+1}{\sigma}\right) \leq \tau(\xi)$ dır.

$$\begin{aligned}
\frac{m_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi)}{m_{\varrho+1,\sigma,\varsigma}(\xi)} &\geq \frac{(\varrho+1)^2}{\sigma}\frac{\sigma}{\varsigma+1}\frac{\Gamma(\varrho+1)}{\Gamma(\varrho+2)} = \frac{(\varrho+1)^2}{\sigma}\frac{\sigma}{\varsigma+1}\frac{\varrho!}{(\varrho+1)!} \\
&= \frac{\varrho+1}{\varsigma+1} \\
\text{yukarıda verilen } \varrho &\geq \varsigma \text{ koşulu kullanılırsa} \\
&\geq 1
\end{aligned}$$

olup

$$m_{\varsigma,\sigma,\varsigma}(\xi) \geq m_{\varsigma+1,\sigma,\varsigma}(\xi) \geq \cdots \tag{4.4}$$

elde edilir.

2) $\varrho \leq \varsigma$ olsun.

$$\begin{aligned}
\frac{m_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi)}{m_{\varrho-1,\sigma,\varsigma}(\xi)} &= \frac{\frac{S_{\sigma,\varrho}(\xi)}{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)}}{\frac{S_{\sigma,\varrho-1}(\xi)}{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)}} = \frac{S_{\sigma,\varrho}(\xi)}{S_{\sigma,\varrho-1}(\xi)} = \frac{\frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\sigma\int\limits_0^{\infty}\frac{(\sigma t)^{\varrho}}{\varrho!}e^{-\sigma t}dt}{\frac{(\sigma\xi)^{\varrho-1}}{(\varrho-1)!}\sigma\int\limits_0^{\infty}\frac{(\sigma t)^{\varrho-1}}{(\varrho-1)!}e^{-\sigma t}dt} \\
&= \frac{\sigma\xi}{\varrho}\frac{\frac{1}{\varrho!}}{\frac{1}{(\varrho-1)!}}\frac{\int\limits_0^{\infty}(\sigma t)^{\varrho}e^{-\sigma t}dt}{\int\limits_0^{\infty}(\sigma t)^{\varrho-1}e^{-\sigma t}dt} = \frac{\sigma}{\varrho^2}\xi\frac{\int\limits_0^{\infty}(\sigma t)^{\varrho}e^{-\sigma t}dt}{\int\limits_0^{\infty}(\sigma t)^{\varrho-1}e^{-\sigma t}dt} \\
(u &= \sigma t) \text{ dönüşümü yapılırsa} \\
&= \frac{\sigma}{\varrho^2}\xi\frac{\overbrace{\int_0^{\infty}u^{\varrho}e^{-u}du}^{\Gamma(\varrho+1)}}{\underbrace{\int_0^{\infty}u^{\varrho-1}e^{-u}du}_{\Gamma(\varrho)}}
\end{aligned}$$

$h(\xi)=\xi$ fonksiyonu $\left[\frac{\varsigma}{\sigma},\frac{\varsigma+1}{\sigma}\right]$ aralığı üzerinde artan bir fonksiyon çünkü $h'(\xi)=1>0$ olup $h\left(\frac{\varsigma}{\sigma}\right)\leq h(\xi)$ dır.

$$\begin{aligned}
\frac{m_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi)}{m_{\varrho-1,\sigma,\varsigma}(\xi)} &\geq \frac{\sigma}{\varrho^2}\frac{\varsigma}{\sigma}\frac{\Gamma(\varrho+1)}{\Gamma(\varrho)} = \frac{\varsigma}{\varrho^2}\frac{\varrho!}{(\varrho-1)!} \\
&= \frac{\varsigma}{\varrho}\geq 1
\end{aligned}$$

olup

$$m_{\varsigma,\sigma,\varsigma}(\xi)\geq m_{\varsigma-1,\sigma,\varsigma}(\xi)\geq\cdots\geq m_{0,\sigma,\varsigma} \tag{4.5}$$

elde edilir. Özel olrak $\varrho=\varsigma$ seçilirse

$$m_{\varsigma,\sigma,\varsigma}(\xi)=\frac{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)}{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)}=1 \tag{4.6}$$

olup (4.4), (4.5) ve (4.6)' ten $\forall\varrho,\varsigma\in\{01,...\}$ için $m_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi)\leq 1$ dir (Alsattuf ve Kırcı Serenbay, 2024).

**Tanım 4.1.4** $\varrho,\varsigma\in\{0,1,...\}$ ve $\xi\in\left[\frac{\varsigma}{\sigma},\frac{\varsigma+1}{\sigma}\right]$ olsun.

$$M_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi)=\frac{S_{\sigma,\varrho}(\xi)\left|\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right|}{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)}.$$

Burada $S_{\sigma,\varrho}(\xi)=\frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\sigma\int\limits_0^{\infty}\frac{(\sigma t)^{\varrho}}{\varrho!}e^{-\sigma t}dt$ dır. $M_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi)$ 'nin iki durumu incelenecektir.

1) Eğer $\varrho \geq \varsigma + 1$ ise

$$M_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) = \frac{S_{\sigma,\varrho}(\xi)\left(\frac{\varrho}{\sigma} - \xi\right)}{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)}$$

2) Eğer $\varrho \leq \varsigma - 1$ ise

$$M_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) = \frac{S_{\sigma,\varrho}(\xi)\left(\xi - \frac{\varrho}{\sigma}\right)}{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)}$$

dır (Alsattuf ve Kırcı Serenbay, 2024).

**Lemma 4.1.5** $\xi \in \left[\frac{\varsigma}{\sigma}, \frac{\varsigma+1}{\sigma}\right]$ olsun. Bu durumda

1) Eğer $\varrho \in \{\varsigma + 1, \varsigma + 2, ...\}$ ve $\varrho - \sqrt{\varrho + 1} \geq \varsigma$ ise

$$M_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) \geq M_{\varrho+1,\sigma,\varsigma}(\xi).$$

2) Eğer $\varrho \in \{1, 2, ..., \varsigma - 1\}$ ve $\varrho + \sqrt{\varrho} \leq \varsigma$ ise

$$M_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) \geq M_{\varrho-1,\sigma,\varsigma}(\xi).$$

**İspat.**

1)

$$\begin{aligned}
\frac{M_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi)}{M_{\varrho+1,\sigma,\varsigma}(\xi)} &= \frac{S_{\sigma,\varrho}(\xi)\left(\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right)}{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)}\frac{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)}{S_{\sigma,\varrho+1}(\xi)\left(\frac{\varrho+1}{\sigma}-\xi\right)} \\
&= \frac{\frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\sigma\int\limits_0^\infty \frac{(\sigma t)^{\varrho}}{\varrho!}e^{-\sigma t}dt\left(\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right)}{\frac{(\sigma\xi)^{\varrho+1}}{(\varrho+1)!}\sigma\int\limits_0^\infty \frac{(\sigma t)^{\varrho+1}}{(\varrho+1)!}e^{-\sigma t}dt\left(\frac{\varrho+1}{\sigma}-\xi\right)} \\
&= \frac{(\varrho+1)\,\sigma\int\limits_0^\infty \frac{(\sigma t)^{\varrho}}{\varrho!}e^{-\sigma t}dt\left(\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right)}{\sigma\xi\sigma\int\limits_0^\infty \frac{(\sigma t)^{\varrho+1}}{(\varrho+1)!}e^{-\sigma t}dt\left(\frac{\varrho+1}{\sigma}-\xi\right)} \\
&= \frac{(\varrho+1)^2\,\sigma\int\limits_0^\infty (\sigma t)^{\varrho}e^{-\sigma t}dt\left(\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right)}{\sigma\xi\sigma\int\limits_0^\infty (\sigma t)^{\varrho+1}e^{-\sigma t}dt\left(\frac{\varrho+1}{\sigma}-\xi\right)}, \quad u=\sigma t \text{ döüşümü yapılırsa} \\
&= \frac{(\varrho+1)^2\int\limits_0^\infty u^{\varrho}e^{-u}du\left(\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right)}{\sigma\xi\int\limits_0^\infty u^{\varrho+1}e^{-u}du\left(\frac{\varrho+1}{\sigma}-\xi\right)} = \frac{(\varrho+1)^2}{\sigma\xi}\frac{\overbrace{\int\limits_0^\infty u^{\varrho}e^{-u}du}^{\Gamma(\varrho+1)}}{\underbrace{\int\limits_0^\infty u^{\varrho+1}e^{-u}du}_{\Gamma(\varrho+2)}}\frac{\left(\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right)}{\left(\frac{\varrho+1}{\sigma}-\xi\right)} \\
&= \frac{(\varrho+1)^2}{\sigma}\frac{1}{\xi}\frac{\varrho!}{(\varrho+1)!}\frac{\left(\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right)}{\left(\frac{\varrho+1}{\sigma}-\xi\right)} = \frac{(\varrho+1)}{\sigma}\frac{1}{\xi}\frac{\left(\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right)}{\left(\frac{\varrho+1}{\sigma}-\xi\right)}
\end{aligned}$$

$\tau(\xi)=\frac{1}{\xi}\frac{\left(\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right)}{\left(\frac{\varrho+1}{\sigma}-\xi\right)}$ olsun. $\tau$ fonksiyonunun ifadesinde $0\leq\frac{\left(\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right)}{\left(\frac{\varrho+1}{\sigma}-\xi\right)}\leq 1$ çünkü $\varrho\in\{\varsigma+1,\varsigma+2,...\}$ ve $\xi\in\left[\frac{\varsigma}{\sigma},\frac{\varsigma+1}{\sigma}\right]$. Bunun için $\tau$ fonksiyonunun monotonluk durumu için sadece $\frac{1}{\xi}$ 'i incelemek yeterlidir.

$\left(\frac{1}{\xi}\right)'=-\frac{1}{\xi^2}\leq 0$ olduğundan $\tau$ fonksiyonu $\left[\frac{\varsigma}{\sigma},\frac{\varsigma+1}{\sigma}\right]$ aralığı üzerinde artmayan bir fonksiyondur. Yani $\tau\left(\frac{\varsigma+1}{\sigma}\right)\leq\tau(\xi)$ olur.

$$\frac{M_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi)}{M_{\varrho+1,\sigma,\varsigma}(\xi)}\geq\frac{(\varrho+1)}{\sigma}\frac{\sigma}{\varsigma+1}\frac{\left(\frac{\varrho}{\sigma}-\frac{\varsigma+1}{\sigma}\right)}{\left(\frac{\varrho+1}{\sigma}-\frac{\varsigma+1}{\sigma}\right)}=\frac{(\varrho+1)(\varrho-\varsigma-1)}{(\varsigma+1)(\varrho-\varsigma)}$$

(Lemma 4.1.5)'nin 1) ifadesinde verilen koşulu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\varrho-\sqrt{\varrho+1} &\geq \varsigma \\
\varrho-\varsigma &\geq \sqrt{\varrho+1} \\
\varrho^2-2\varrho\varsigma+\varsigma^2 &\geq \varrho+1 \\
\varrho^2-\varrho\varsigma-\varrho\varsigma-\varrho+\varrho-\varsigma+\varsigma &\geq \varrho+1-\varsigma^2 \\
\varrho^2-\varrho\varsigma-\varrho+\varrho-\varsigma-1 &\geq \varrho+\varrho\varsigma-\varsigma^2-\varsigma \\
(\varrho+1)(\varrho-\varsigma-1) &\geq (\varsigma+1)(\varrho-\varsigma) \\
\frac{(\varrho+1)(\varrho-\varsigma-1)}{(\varsigma+1)(\varrho-\varsigma)} &\geq 1 \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
\frac{M_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi)}{M_{\varrho+1,\sigma,\varsigma}(\xi)} &\geq \frac{(\varrho+1)(\varrho-\varsigma-1)}{(\varsigma+1)(\varrho-\varsigma)} \geq 1 \\
M_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) &\geq M_{\varrho+1,\sigma,\varsigma}(\xi).
\end{aligned}$$

**İspat.**

2)

$$\begin{aligned}
\frac{M_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi)}{M_{\varrho-1,\sigma,\varsigma}(\xi)} &= \frac{S_{\sigma,\varrho}(\xi)\left(\xi-\frac{\varrho}{\sigma}\right)}{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)}\frac{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)}{S_{\sigma,\varrho-1}(\xi)\left(\xi-\frac{\varrho-1}{\sigma}\right)} \\
&= \frac{\frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\sigma\int\limits_0^{\infty}\frac{(\sigma t)^{\varrho}}{\varrho!}e^{-\sigma t}dt\left(\xi-\frac{\varrho}{\sigma}\right)}{\frac{(\sigma\xi)^{\varrho 1}}{(\varrho-1)!}\sigma\int\limits_0^{\infty}\frac{(\sigma t)^{\varrho-1}}{(\varrho-1)!}e^{-\sigma t}dt\left(\xi-\frac{\varrho-1}{\sigma}\right)} \\
&= \frac{\sigma\xi\int\limits_0^{\infty}\frac{(\sigma t)^{\varrho}}{\varrho!}e^{-\sigma t}dt\left(\xi-\frac{\varrho}{\sigma}\right)}{\varrho\int\limits_0^{\infty}\frac{(\sigma t)^{\varrho-1}}{(\varrho-1)!}e^{-\sigma t}dt\left(\xi-\frac{\varrho-1}{\sigma}\right)} = \frac{\sigma\xi\int\limits_0^{\infty}(\sigma t)^{\varrho}e^{-\sigma t}dt\left(\xi-\frac{\varrho}{\sigma}\right)}{\varrho^2\int\limits_0^{\infty}(\sigma t)^{\varrho-1}e^{-\sigma t}dt\left(\xi-\frac{\varrho-1}{\sigma}\right)} \\
(u &= \sigma t \text{ dönüşümü yapılırsa}) \\
&= \frac{\sigma\xi\overbrace{\int_0^{\infty}u^{\varrho}e^{-u}du}^{\Gamma(\varrho+1)}\left(\xi-\frac{\varrho}{\sigma}\right)}{\varrho^2\underbrace{\int_0^{\infty}u^{\varrho-1}e^{-u}du}_{\Gamma(\varrho)}\left(\xi-\frac{\varrho-1}{\sigma}\right)} = \frac{\sigma}{\varrho^2}\frac{\varrho!}{(\varrho-1)!}\frac{\xi\left(\xi-\frac{\varrho}{\sigma}\right)}{\left(\xi-\frac{\varrho-1}{\sigma}\right)}
\end{aligned}$$

$h(\xi) = \frac{\xi\left(\xi-\frac{\varrho}{\sigma}\right)}{\left(\xi-\frac{\varrho-1}{\sigma}\right)}$ olsun. $h$ fonksiyonu $\left[\frac{\varsigma}{\sigma},\frac{\varsigma+1}{\sigma}\right]$ aralığı üzerinde azalmayan bir fonksiyondur. Çünkü $h'(\xi) = \frac{\left(\xi-\frac{\varrho}{\sigma}\right)}{\left(\xi-\frac{\varrho-1}{\sigma}\right)} + \xi\left[\frac{\xi-\frac{\varrho-1}{\sigma}+\frac{\varrho}{\sigma}-\xi}{\left(\xi-\frac{\varrho-1}{\sigma}\right)^2}\right] = \frac{\left(\xi-\frac{\varrho}{\sigma}\right)}{\left(\xi-\frac{\varrho-1}{\sigma}\right)} + \frac{\xi}{\sigma\left(\xi-\frac{\varrho-1}{\sigma}\right)^2} \geq 0,$

$\xi \in \left[\frac{\varsigma}{\sigma}, \frac{\varsigma+1}{\sigma}\right]$. Bunun için $h\left(\frac{\varsigma}{\sigma}\right) \leq h\left(\xi\right)$

$$\frac{M_{\varrho,\sigma,\varsigma}\left(\xi\right)}{M_{\varrho-1,\sigma,\varsigma}\left(\xi\right)} \geq \frac{\sigma}{\varrho}\frac{\frac{\varsigma}{\sigma}\left(\frac{\varsigma}{\sigma}-\frac{\varrho}{\sigma}\right)}{\left(\frac{\varsigma}{\sigma}-\frac{\varrho-1}{\sigma}\right)} = \frac{\varsigma}{\varrho}\frac{\left(\varsigma-\varrho\right)}{\left(\varsigma-\varrho+1\right)}$$

(Lemma 4.1.5)'nin 2) ifadesinde verilen koşulu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \varrho+\sqrt{\varrho} &\leq \varsigma \\ \sqrt{\varrho} &\leq \varsigma-\varrho \\ \varrho &\leq \varsigma^2-2\varrho\varsigma+\varrho^2 \\ \varrho\varsigma-\varrho^2+\varrho &\leq \varsigma^2-\varrho\varsigma \\ \varrho\left(\varsigma-\varrho+1\right) &\leq \varsigma\left(\varsigma-\varrho\right) \\ 1 &\leq \frac{\varsigma\left(\varsigma-\varrho\right)}{\varrho\left(\varsigma-\varrho+1\right)} \end{aligned} \tag{4.8}$$

olup

$$\begin{aligned} \frac{M_{\varrho,\sigma,\varsigma}\left(\xi\right)}{M_{\varrho-1,\sigma,\varsigma}\left(\xi\right)} &\geq \frac{\varsigma}{\varrho}\frac{\left(\varsigma-\varrho\right)}{\left(\varsigma-\varrho+1\right)} \geq 1 \\ M_{\varrho,\sigma,\varsigma}\left(\xi\right) &\geq M_{\varrho-1,\sigma,\varsigma}\left(\xi\right) \end{aligned}$$

gerçeklenir **(**Alsattuf ve Kırcı Serenbay, 2024).

# 5. TARTIŞMA

## 5.1. Maksimum-Çarpım Tipindeki Szasz-Durrmeyer Operatörünün Yaklaşım Hızı (Derecesi)

**Not** Yaklaşımlar teorisinde kullanılan operatörler acaba hangi hızla sürekli fonksiyona yaklaşır? Sorusu akla gelebilir. Yaklaşım derecesi (hızı) hesaplamak için birkaç yöntem vardır. Bu tezde (4.3) ifadesindeki tanımlanan operatörün süreklilik modülü kullanılarak yaklaşım derecesi aşağıdaki teoremde hesaplanmıştır.

**Teorem 5.1.1** $\vartheta : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $\vartheta$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığı üzerinde integrallenebilir ve sürekli bir fonksiyon olsun.

$$\left|N_\sigma^{(M)}(\vartheta;\xi) - \vartheta(\xi)\right| \leq R\omega(\vartheta;\delta), \quad \xi \in [0,\infty)$$

burada $R$ sabit sayı ve $\omega(\vartheta;\delta) = \sup\{|\vartheta(\xi) - \vartheta(t)|; \xi, t \in [0,\infty), |\xi - t| \leq \delta\}$ dır. Yukarıdaki eşitsizlikte $R$ sabiti ve $\delta$ değeri hesaplanacaktır.

**İspat.**

Maksimum çarpım tipi operatörü için (Lemma 3.1.8) gereğince $\vartheta$ fonksiyonu sürekli olduğundan ve $\xi, t \in [0,\infty)$, $\delta > 0$, $e_0(t) = 1$, ve $\Theta_\xi(t) = |t-\xi|$ için $N_\sigma^{(M)}(e_0(t);\xi) = 1$, $\sigma \in \mathbb{N}$ alınsın.

$$\begin{aligned}
N_\sigma^{(M)}(\vartheta;\xi) - \vartheta(\xi) &= N_\sigma^{(M)}(\vartheta;\xi) - \vartheta(\xi) N_\sigma^{(M)}(e_0(t);\xi) \\
&\quad + \vartheta(\xi)\left[N_\sigma^{(M)}(e_0(t);\xi) - 1\right] \\
&\leq \left|N_\sigma^{(M)}(\vartheta;\xi) - \vartheta(\xi) N_\sigma^{(M)}(e_0(t);\xi)\right| \\
&\quad + \left|\vartheta(\xi)\left[N_\sigma^{(M)}(e_0(t);\xi) - 1\right]\right| \\
&\leq \left|N_\sigma^{(M)}(\vartheta(t);\xi) - N_\sigma^{(M)}(\vartheta(\xi);\xi)\right| \\
&\quad + |\vartheta(\xi)|\left|\left[N_\sigma^{(M)}(e_0(t);\xi) - 1\right]\right|
\end{aligned}$$

$\left|N_\sigma^{(M)}(\vartheta;\xi) - N_\sigma^{(M)}(\tau;\xi)\right| \leq N_\sigma^{(M)}(|\vartheta - \tau|;\xi)$ bu eşitsizlik yukarıdaki son satırdaki eşitsizlik için uygulanırsa

$$\left|N_\sigma^{(M)}(\vartheta;\xi) - \vartheta(\xi)\right| \leq N_\sigma^{(M)}(|\vartheta(t) - \vartheta(\xi)|;\xi) + |\vartheta(\xi)|\left|N_\sigma^{(M)}(e_0(t);\xi) - 1\right|$$

$N_{\sigma}^{(M)}\left(e_0\left(t\right);\xi\right) = 1$ ve $\left|\vartheta\left(t\right)-\vartheta\left(\xi\right)\right| \leq \omega\left(\vartheta;\left|\xi-t\right|\right) \leq \left[\frac{1}{\delta}\left|\xi-t\right|+1\right]\omega\left(\vartheta;\delta\right)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
& \leq N_{\sigma}^{(M)}\left(\left[\frac{1}{\delta}\left|\xi-t\right|+1\right]\omega\left(\vartheta;\delta\right);\xi\right) \\
& \leq \left[\frac{1}{\delta}N_{\sigma}^{(M)}\left(\left|\xi-t\right|;\xi\right)+N_{\sigma}^{(M)}\left(e_0\left(t\right);\xi\right)\right]\omega\left(\vartheta;\delta\right) \\
\text{eşitsizlikte } \Theta_{\xi}\left(t\right) & = \left|t-\xi\right| \text{ ve } N_{\sigma}^{(M)}\left(e_0\left(t\right);\xi\right)=1 \text{ yazılırsa} \\
& \leq \left[\frac{1}{\delta}N_{\sigma}^{(M)}\left(\Theta_{\xi}\left(t\right),\xi\right)+1\right]\omega\left(\vartheta;\delta\right). \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

$\Theta_{\xi}\left(t\right) = \left|t-\xi\right|$ ifadesi masksimum çarpım tipi Szasz-Durrmeyer operatöründe yazılırsa

$$\begin{aligned}
E_{\sigma}\left(\xi\right) &= N_{\sigma}^{(M)}\left(\Theta_{\xi}\left(t\right);\xi\right) = \frac{\bigvee\limits_{\varrho=0}^{\infty}\frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\sigma\int\limits_{0}^{\infty}\frac{(\sigma t)^{\varrho}}{\varrho!}e^{-\sigma t}\left|\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right|dt}{\bigvee\limits_{\varrho=0}^{\infty}\frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\sigma\int\limits_{0}^{\infty}\frac{(\sigma t)^{\varrho}}{\varrho!}e^{-\sigma t}dt} \\
&= \frac{\bigvee\limits_{\varrho=0}^{\infty}\frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\sigma\int\limits_{0}^{\infty}\frac{(\sigma t)^{\varrho}}{\varrho!}e^{-\sigma t}dt\left|\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right|}{\bigvee\limits_{\varrho=0}^{\infty}\frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\sigma\int\limits_{0}^{\infty}\frac{(\sigma t)^{\varrho}}{\varrho!}e^{-\sigma t}dt}
\end{aligned}$$

ifade edilir. Yukarıdaki eşitlikte her $\xi \in \left[\frac{\varsigma}{\sigma},\frac{\varsigma+1}{\sigma}\right]$ ve $\varsigma \in \{0,1,...\}$ için

$$E_{\sigma}\left(\xi\right) = \max_{\varrho=0,1,...}\left\{M_{\varrho,\sigma,\varsigma}\left(\xi\right)\right\}$$

$$M_{\varrho,\sigma,\varsigma}\left(\xi\right) = \frac{S_{\sigma,\varrho}\left(\xi\right)\left|\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right|}{S_{\sigma,\varsigma}\left(\xi\right)},\ S_{\sigma,\varrho}\left(\xi\right) = \frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\sigma\int\limits_{0}^{\infty}\frac{(\sigma t)^{\varrho}}{\varrho!}e^{-\sigma t}dt$$

aşağısaki bütün işlemler $\varsigma \in \{1,2,...\}$ içindir. Çünkü özel olarak $\varsigma = 0$ için ayrı bir şekilde hesaplanacaktır.

$$\varsigma = 0 \Longrightarrow \xi \in \left[0,\frac{1}{\sigma}\right]$$

$$\begin{aligned}
M_{\varrho,\sigma,0}(\xi) &= \frac{S_{\sigma,\varrho}(\xi)\left|\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right|}{S_{\sigma,0}(\xi)} = \frac{\frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\sigma\int\limits_0^\infty \frac{(\sigma t)^{\varrho}}{\varrho!}e^{-\sigma t}dt\left|\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right|}{\frac{(\sigma\xi)^{0}}{0!}\sigma\int\limits_0^\infty \frac{(\sigma t)^{0}}{0!}e^{-\sigma t}dt} \\
&= \frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\frac{\int\limits_0^\infty \frac{(\sigma t)^{\varrho}}{\varrho!}e^{-\sigma t}dt\left|\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right|}{\int\limits_0^\infty e^{-\sigma t}dt},\ u=\sigma t \text{ dönüşümü yapılırsa} \\
&= \frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\frac{\frac{1}{\sigma}\int\limits_0^\infty \frac{u^{\varrho}}{\varrho!}e^{-u}du\left|\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right|}{\frac{1}{\sigma}\int\limits_0^\infty e^{-u}du} = \frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\frac{1}{\varrho!}\frac{\overbrace{\int\limits_0^\infty u^{\varrho}e^{-u}du}^{\Gamma(\varrho+1)}\left|\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right|}{\underbrace{\int\limits_0^\infty e^{-u}du}_{\Gamma(1)}} \\
&= \frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\frac{1}{\varrho!}\frac{\varrho!\left|\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right|}{1} = \frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\left|\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right|
\end{aligned}$$

1) $\varrho=0$ için

$$M_{0,\sigma,0}(\xi)=\xi=\sqrt{\xi}\sqrt{\xi}\leq\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\sigma}}.$$

2) $\varrho\geq 1$ için $\frac{\varrho}{\sigma}\geq\frac{1}{\sigma}$

$$\begin{aligned}
M_{\varrho,\sigma,0}(\xi) &= \frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\left|\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right| \leq \frac{\sigma^{\varrho}\xi^{\varrho}}{\varrho!}\frac{\varrho}{\sigma}\leq\sigma^{\varrho-1}\xi^{\varrho} \\
&= \sigma^{\varrho-1}\xi^{\varrho-1}\xi\leq\frac{\sigma^{\varrho-1}}{\sigma^{\varrho-1}}\xi \\
&= \xi=\sqrt{\xi}\sqrt{\xi}\leq\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\sigma}}
\end{aligned}$$

$\varsigma=0$ ve $\varrho\in\{0,1,2,...\}$ için

$$M_{\varrho,\sigma,0}(\xi)\leq\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\sigma}}.$$

Şimdi $\varsigma\in\{1,2,...\}$ ve $\varrho\in\{0,1,2,...\}$ için $M$'nin bir üst sınırı aranacaktır. Bunu gösterebilmek için aşağıdaki durumları incelenmelidir.

1) $\varrho=\varsigma$

2) $\varrho\geq\varsigma+1$

3) $\varrho\leq\varsigma-1$

1) Eğer $\varrho = \varsigma$ ise

$$\begin{aligned} M_{\varsigma,\sigma,\varsigma}(\xi) &= \frac{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)\left|\frac{\varsigma}{\sigma}-\xi\right|}{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)} = \left|\frac{\varsigma}{\sigma}-\xi\right| \\ &\leq \left|\frac{\varsigma}{\sigma}-\frac{\varsigma+1}{\sigma}\right| = \frac{1}{\sigma}, \quad \xi \in \left[\frac{\varsigma}{\sigma}, \frac{\varsigma+1}{\sigma}\right] \end{aligned}$$

$\varsigma \in \{1, 2, ...\}$ yani $\varsigma \geq 1$ için $\xi \geq \frac{1}{\sigma}$ ve buradan $\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \leq \sqrt{\xi}$ sonucuna varır.

$$M_{\varsigma,\sigma,\varsigma}(\xi) \leq \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \leq \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\sigma}}.$$

2) a) Kabul edelim ki $\varrho - \sqrt{\varrho+1} < \varsigma$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} M_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) &= \frac{S_{\sigma,\varrho}(\xi)\left|\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right|}{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)} = \frac{S_{\sigma,\varrho}(\xi)\left(\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right)}{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)} \\ &= m_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi)\left(\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right) \leq \left(\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right) \\ &\leq \frac{\varrho}{\sigma}-\frac{\varsigma}{\sigma} \leq \frac{\varrho}{\sigma}-\frac{\varrho-\sqrt{\varrho+1}}{\sigma} \\ &= \frac{\sqrt{\varrho+1}}{\sigma} \end{aligned}$$

$\varrho$'nın bir üst sınırı bulunmalıdır. $\varrho \leq 2\varsigma$ olamaz çünkü $\varrho \geq \varsigma + 1$ ve $\min \varsigma = 1$ olduğundan $\varrho \geq 2\varsigma$ olup $\varrho \leq 3\varsigma$ olmalıdır. Çelişki yöntemi ile gösterilecek. $\varrho > 3\varsigma$ kabul edelim ve $\tau(\xi) = \xi - \sqrt{\xi+1}$, $\xi \in [0, \infty)$ için $\tau$ fonksiyonu bu aralıkta artandır. Dolayısıyla verilen koşuldan

$$\begin{aligned} \varrho - \sqrt{\varrho+1} &\geq 3\varsigma - \sqrt{3\varsigma+1} \\ &\geq 3\varsigma - \sqrt{3\varsigma+\varsigma} \\ &\geq \varsigma \end{aligned}$$

bulunur. Bu da verilen kabul ile çelişir çünkü $\varrho - \sqrt{\varrho+1} < \varsigma$ kabul edilmiştir. Dolayısıyla $\varrho \leq 3\varsigma$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} M_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) &\leq \frac{\sqrt{\varrho+1}}{\sigma} \leq \frac{\sqrt{3\varsigma+1}}{\sigma} \leq \frac{2\sqrt{\varsigma}}{\sigma} \\ &\leq \frac{2\sqrt{\xi}}{\sqrt{\sigma}} \end{aligned}$$

2) b) Kabul edelim ki $\varrho - \sqrt{\varrho+1} \geq \varsigma$ olsun. Ve $\tau(\xi) = \xi - \sqrt{\xi+1}$, $\xi \in [0, \infty)$ için $\tau$ fonksiyonu bu aralıkta artan olup $\overline{\varrho} = \{1, 2, ...\}$ için maksimum değeri vardır.

Öyle ki $\overline{\varrho}-\sqrt{\overline{\varrho}+1}<\varsigma$ olur. Bunun için $\varrho_1=\overline{\varrho}+1$ alınırsa $\varrho_1-\sqrt{\varrho_1+1}\geq\varsigma$ olur, buradan

$$\begin{aligned}
M_{\varrho_1,\sigma,\varsigma}(\xi) &= M_{\overline{\varrho}+1,\sigma,\varsigma}(\xi)=m_{\overline{\varrho}+1,\sigma,\varsigma}(\xi)\left(\frac{\overline{\varrho}+1}{\sigma}-\xi\right)\leq\left(\frac{\overline{\varrho}+1}{\sigma}-\xi\right)\\
&\leq \left(\frac{\overline{\varrho}+1}{\sigma}-\frac{\varsigma}{\sigma}\right)\\
&\leq \frac{\overline{\varrho}+1}{\sigma}-\frac{\overline{\varrho}-\sqrt{\overline{\varrho}+1}}{\sigma}=\frac{\sqrt{\overline{\varrho}+1}+1}{\sigma}
\end{aligned}$$

2) a) şıkkından $\varrho\leq 3\varsigma$, benzer şekilde $\overline{\varrho}\leq 3\varsigma$ ifadesi kolayca elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
M_{\varrho_1,\sigma,\varsigma}(\xi) &= M_{\overline{\varrho}+1,\sigma,\varsigma}(\xi)\leq\frac{\sqrt{3\varsigma+1}+1}{\sigma}\\
&\leq \frac{\sqrt{3\varsigma+\varsigma}+\sqrt{\varsigma}}{\sigma}\\
&\leq \frac{3\sqrt{\varsigma}}{\sigma}=\frac{3\sqrt{\varsigma}}{\sqrt{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\leq\frac{3\sqrt{\xi}}{\sqrt{\sigma}}
\end{aligned}$$

ayrıca $\varrho_1\geq\varsigma+1$ olduğundan ve $\tau$ fonksiyonu artan olduğu için (Lemma 4.1.5 ) gereğince

$$M_{\overline{\varrho}+1,\sigma,\varsigma}(\xi)\geq M_{\overline{\varrho}+2,\sigma,\varsigma}(\xi)\geq\cdots$$

$\forall\varrho\in\{\overline{\varrho}+1,\overline{\varrho}+2,...\}$ için

$$M_{\varrho_1,\sigma,\varsigma}(\xi)=M_{\overline{\varrho}+1,\sigma,\varsigma}(\xi)\leq\frac{3\sqrt{\xi}}{\sqrt{\sigma}}.$$

3) a) Kabul edelim ki $\varrho+\sqrt{\varrho}>\varsigma$ olsun.

$$\begin{aligned}
M_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi) &= \frac{S_{\sigma,\varrho}(\xi)\left|\frac{\varrho}{\sigma}-\xi\right|}{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)}=\frac{S_{\sigma,\varrho}(\xi)\left(\xi-\frac{\varrho}{\sigma}\right)}{S_{\sigma,\varsigma}(\xi)}\\
&= m_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi)\left(\xi-\frac{\varrho}{\sigma}\right)\leq\left(\xi-\frac{\varrho}{\sigma}\right)\\
&\leq \frac{\varsigma+1}{\sigma}-\frac{\varrho}{\sigma}\\
&\leq \frac{\varrho+\sqrt{\varrho}+1}{\sigma}-\frac{\varrho}{\sigma}\\
&\leq \frac{\sqrt{\varrho}+1}{\sigma}\leq\frac{\sqrt{\varsigma-1}+1}{\sigma}\\
&\leq \frac{\sqrt{\varsigma}+1}{\sigma}\leq\frac{\sqrt{\varsigma}+\sqrt{\varsigma}}{\sigma}=\frac{2\sqrt{\varsigma}}{\sigma}\\
&= \frac{2\sqrt{\varsigma}}{\sqrt{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\leq\frac{2\sqrt{\xi}}{\sqrt{\sigma}}
\end{aligned}$$

3) b) Kabul edelim ki $\varrho+\sqrt{\varrho}\leq\varsigma$ olsun. $\widetilde{\varrho}\in\{0,1,2,...\}$ için $\widetilde{\varrho}+\sqrt{\widetilde{\varrho}}>\varsigma$ alınırsa minimum değer vardır. $\varrho_2=\widetilde{\varrho}-1$ için $\varrho_2+\sqrt{\varrho_2}\leq\varsigma$ olur.

$$\begin{aligned} M_{\varrho_2,\sigma,\varsigma}(\xi) &= M_{\widetilde{\varrho}-1,\sigma,\varsigma}(\xi)=m_{\widetilde{\varrho}-1,\sigma,\varsigma}(\xi)\left(\xi-\frac{\widetilde{\varrho}-1}{\sigma}\right)\\ &\leq \left(\xi-\frac{\widetilde{\varrho}-1}{\sigma}\right)\\ &\leq \frac{\varsigma+1}{\sigma}-\frac{\widetilde{\varrho}-1}{\sigma}\\ &\leq \frac{\widetilde{\varrho}+\sqrt{\widetilde{\varrho}}+1}{\sigma}-\frac{\widetilde{\varrho}-1}{\sigma}\leq\frac{\sqrt{\widetilde{\varrho}}+2}{\sigma}\end{aligned}$$

$\widetilde{\varrho}-1{=}\varrho_2\leq\varrho_2+\sqrt{\varrho_2}\leq\varsigma$ ve $\widetilde{\varrho}\leq\varsigma+1$ olduğundan $\sqrt{\widetilde{\varrho}}\leq\sqrt{\varsigma+1}$ olup

$$\begin{aligned} M_{\varrho_2,\sigma,\varsigma}(\xi) &= M_{\widetilde{\varrho}-1,\sigma,\varsigma}(\xi)\leq\frac{\sqrt{\varsigma+1}+2}{\sigma}\\ &\leq \frac{\sqrt{\varsigma+1}+2\sqrt{\varsigma}}{\sigma}\\ &\leq \frac{\sqrt{\varsigma+\varsigma}+2\sqrt{\varsigma}}{\sigma}\leq\frac{4\sqrt{\varsigma}}{\sigma}\\ &= \frac{4\sqrt{\varsigma}}{\sqrt{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\leq\frac{4\sqrt{\xi}}{\sqrt{\sigma}}\end{aligned}$$

(Lemma 4.1.5 ) gereğince $\widetilde{\varrho}\leq\varsigma-1$

$$M_{\widetilde{\varrho}-1,\sigma,\varsigma}(\xi)\geq M_{\widetilde{\varrho}-2,\sigma,\varsigma}(\xi)\geq\cdots\geq M_{0,\sigma,\varsigma}$$

$\forall\widetilde{\varrho}\in\{0,1,...,\varsigma-1\}$ için

$$M_{\varrho_2,\sigma,\varsigma}(\xi)=M_{\widetilde{\varrho}-1,\sigma,\varsigma}(\xi)\leq\frac{4\sqrt{\xi}}{\sqrt{\sigma}}.$$

Sonuç olarak incelediği tüm durumlarda

$$E_\sigma(\xi)=N_\sigma^{(M)}(\Theta_\xi(t);\xi)=\max_{\varrho=0,1,...}\{M_{\varrho,\sigma,\varsigma}(\xi)\}\leq\frac{4\sqrt{\xi}}{\sqrt{\sigma}}$$

olup (5.1) ifadesinde yazılırsa ve $\delta=\frac{4\sqrt{\xi}}{\sqrt{\sigma}}$ seçilirse bu durumda $R$ sabiti bulunmuş olur.

$$\begin{aligned} \left|N_\sigma^{(M)}(\vartheta;\xi)-\vartheta(\xi)\right| &\leq \left[\frac{1}{\delta}N_\sigma^{(M)}(\Theta_\xi(t);\xi)+1\right]\omega(\vartheta;\delta)\\ &\leq \left[\frac{1}{\frac{4\sqrt{\xi}}{\sqrt{\sigma}}}\frac{4\sqrt{\xi}}{\sqrt{\sigma}}+1\right]\omega\left(\vartheta;\frac{4\sqrt{\xi}}{\sqrt{\sigma}}\right)\\ &\leq \left[\frac{\sqrt{\sigma}}{4\sqrt{\xi}}\frac{4\sqrt{\xi}}{\sqrt{\sigma}}+1\right]4\omega\left(\vartheta;\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\sigma}}\right)\\ &\leq 8\omega\left(\vartheta;\frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{\sigma}}\right)\end{aligned}$$

böylece ispat tamamlanır (Alsattuf ve Kırcı Serenbay, 2024).

# 6. SONUÇLAR

Bu tezde $[0,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlanan maksimum çarpım tipi Szasz operatöründen faydalanarak aynı aralık üzerinde maksimum çarpım tipi Szasz-Durrmeyer operatörü elde edilmiş ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$N_{\sigma}^{(M)}(\vartheta,\xi)=\frac{\bigvee\limits_{\varrho=0}^{\infty}\frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\sigma\int\limits_{0}^{\infty}P_{\sigma,\varrho}(t)\,\vartheta\left(\frac{\varrho}{\sigma}\right)dt}{\bigvee\limits_{\varrho=0}^{\infty}\frac{(\sigma\xi)^{\varrho}}{\varrho!}\sigma\int\limits_{0}^{\infty}P_{\sigma,\varrho}(t)\,dt},\sigma\in\mathbb{N}$$

Burada $\xi\in[0,\infty)$ ve $\vartheta:[0,\infty)\to\mathbb{R}_{+}$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığı üzerinde integrallenebilir bir fonksiyondur. Ayrıca yukarıdaki ifadede $P_{\sigma,\varrho}(t)=e^{-\sigma t}\frac{(\sigma t)^{\varrho}}{\varrho!}$ olarak tanımlanır **(**Alsattuf ve Kırcı Serenbay, 2024).

Dördüncü bölümde elde edilen bu yeni operatörün bütün özellikleri incelemiştir. Bununla birlikte süreklilik modülünü kullanarak maksimum çarpım tipi Szasz-Durrmeyer operatörünün sınırlı ve sürekli fonksiyonuna olan yaklaşım hızı incelenmiştir.

# 7. ÖNERİLER

Maksimum çarpım tipi Szasz-Durrmeyer operatörünün sınırlı ve sürekli fonksiyonlara yaklaşım derecesi bu tezde hesaplanmıştır. İleri çalışmalarda farklı bir fonksiyon sınıfı ele alındığında yaklaşım derecesi iyileştirilebilirdir.

## KAYNAKLAR


ACAR, E., KARAHAN, D. and KIRCI SERENBAY, S. 2020. Approximation for the Bernstein operator of max-product kind in symmetric range. Khayyam Journal of Mathematics, 6(2), 257-273.

ACAR, E., GÜLER, Ö. Ö. and KIRCI SERENBAY, S. 2023. Approximation by nonlinear Bernstein-Chlodowsky operators of Kantorovich type. Filomat, 37(14), 4621-4627.

ALSATTUF, N. ve KIRCI SERENBAY, S., 2024. Maksimum çarpım tipinde Szasz-Durrmeyer operatörü. 3. Bilsel Uluslararası Efes Bilimsel Araştırmalar ve İnovasyon Kongresi. Tam metin kitap ASTANA Yayınları. ISBN : 978-625-6501-69-0, 27 Mart, İzmir, 6s.

ALTOMARE, F., and CAMPITI, M., 1994. Korovkin-Type Approximation Theory and Its Applications. Walter de gruyter publ., Berlin, Germany.

ARTIN, E., (2006). ”The Gamma function”, in Rosen, Michael (ed.).Exposition by Emil Artin: a selection; History of Mathematics 30. Providence, RI: American Mathematical Society.

BARUĞ, F. and KIRCI SERENBAY, S., 2021. Approximation of modified Favard Szasz-Mirakyan operators of maximum-product type.

BEDE, B., COROIANU, L. and GAL, S. G., 2010. Approximation and shape preserving properties of the nonlinear Favard-Szàsz-Mirakjan operators of max-product kind. Filomat 24(3), 55–72..Berlin.

BEDE, B. and GAL, S. G., 2010. Approximation by nonlinear Bernstein and Favard-Szász-Mirakjan operators of max-product kind. J. Concr. Appl. Math. 8(2), 193–207.

BEDE, B., COROIANU, L. and GAL, S. G., 2016. Approximation by max-product type operators. Springer, Berlin, no 2,1-139s.

BERNSTEİN, S. N. 1912-1913. D´emostration du th´eor‘eme de Weierstrass fond´ee sur le calcul de probabilit´es, Comm. Soc. Math.. Kharkow (2), 13, 1–2.

COŞKUN, E., 2002 Analiz I, Alp Yayınevi. ISBN : 9789756674062, 1-200.

GAL, S. G. 2008. Shape preserving approximation by complex polynomials in the unit disk. Inst. Math. Acad. Sin.(NS), 3, 323-337.

GÜNGÖR, Ş. Y., and ISPIR, N., 2016. Quantitative Estimates for Generalized Szász Operators of Max-Product Kind. Results in Mathematics, 70(3-4), 447-456.

HACISALİHOĞLU, H. ve HACIYEV, A., 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. Ankara, 1-94.

KOROVKIN, P. P., 1953. Convergence of linear positive operators in the spaces of continuous functions(Russian), Doklady Akad. Nauk. :SSSR(N.S.), 90,961-964.

KREYSZIG, E., 1978. Introductory Functional Analysis with Applications. John wiley and sons, : Canada.

LORENTZ, G. G. 1986. Bernstein Polynomials, 2nd. Ed. Chelsea Publ. Comp. New York, N. Y.

MAZHAR, S. M., TOTIK, V., 1985. Approximation by modi…ed Szász operators. Acta. Sei. Math., 257-269.

ÖZALP GÜLLER, Ö., ACAR, E. and KIRCI SERENBAY, S. 2022. Nonlinear Bivariate Bernstein–Chlodowsky Operators of Maximum Product Type Journal of Mathematics.

SZASZ, O.,1950. Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval. Journal of Research of the National Bureau of Standards, 45,239-245.

WEIERSTRASS, K. Über, 1885. Die analytische darstellbarkeit sogenonnter willkrlicher Functionan einer reellen vernderlichen. Sitzung sberichte der Kriglich Previschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 633-639/ 789-805.