T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ q-SZASZ MİRAKYAN KANTOROVİCH OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ VE YAKLAŞIM HIZI

Betül ÖZTEL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2023

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ q-SZASZ MİRAKYAN KANTOROVİCH OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ VE YAKLAŞIM HIZI

Betül ÖZTEL

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Aydın İZGİ
Yıl: 2023, sayfa: 40

Bu çalışmada fonksiyonel analizdeki yaklaşım teorisi konusu üzerinde yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir.Yaklaşım teorisinde kullanılan bazı operatörler tanıtılmış olup $S_{\mu,\varsigma}$ operatörünün kapalı bir aralıkta yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızı incelenmiştir.Lipschitz şartını sağlayan fonksiyonları kullanarak $S_{\mu,\varsigma}$ operatörünün yaklaşım hızı inlenmiş olup $S_{\mu,\varsigma}$ operatörünün seçilen sürekli fonksiyonlara yakınsaklığının ne derece sağlıklı olduğunu göstermek için Mapple programı ile grafik çizilmiş ayrıca Matlab ile de fonksiyona olan yaklaşımın hata payları tablolar şeklinde ifade edilmiştir. $q-$ analiz ile ilgili temel kavramlar hatırlatılacak olup genelleştirilmiş $q-$Szasz-Mirakyan-Kantorovich Operatörü oluşturularak klasik ve istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Yaklaşımlar teorisi, lineer pozitif operatörler, lipschitz koşulu, q-analiz, yaklaşım hızı

ABSTRACT

PhD Thesis

APPROXIMATION PROPERTIES AND RATE OF APPROXIMATION OF GENERALIZED q-SZASZ MIRAKYAN KANTOROVICH OPERATORS

Betül ÖZTEL

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Aydın İZGİ

Year: 2023, page: 40

In this study, one of the studies conducted on the subject of approximation theory in functional analysis it has been mentioned.Some operators used in approximation theory have been introduced, and the operator $S_{\mu,\varsigma}$ is the approach characteristics and approach speed in a closed December were studied.Functions that provide the Lipschitz condition by using the approximation velocity of the operator $S_{\mu,\varsigma}$, the approximation velocity of the operator $S_{\mu,\varsigma}$ is reduced to a continuous function the approach is shown by drawing a graph with the Mapple program.basic concepts related to q- analysis it will be recalled that by creating a generalized q−Szasz-Mirakyan-Kantorovich Operator, the classical and

KEYWORDS: Approach theory, linear positive operators, q-analysis, lipschitz function, rate of approximarion

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımız boyunca desteklerini esirgemeyen, engin bilgileriyle her daim yanımda olan, arkamda her zaman varlığını hissettiren danışman hocam Prof. Dr. Aydın İZGİ'ye sonsuz teşekkür ederim.Bu süreçte kapısı bizlere her daim açık olan Prof. Dr. Haydar ALICI' ya ve aklıma takılan bir problemde rahatlıkla soru sorabildiğim her seferinde sabırla cevap veren Dr. Öğr. Üyesi Harun ÇİÇEK hocalarıma da teşekkür ederim.

Yüksek Lisansa başladığım günden beri şehir dışında olmalarına rağmen her zaman baş ucumdaymış gibi üzerimde ellerini hisettiren sevgili ailme, başta anne ve babam Emine ÖZTEL ve İrfan ÖZTEL olmak üzere ablalalarım Mukadder ÖZTEL ve Meral ÖZTEL'e kardeşim Sonay ÖZTEL'e çok teşekkür ederim.

Son olarak bir gün okuması dileğiyle varlığına her gün şükrettiğim canım kızım Eylül MİRA'ya çok teşekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$B_\mu(\hbar;\kappa)$	$\hbar$ fonksiyonunun Bernstein polinomu
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonların uzayı
$f_\mu \rightrightarrows \hbar$	(f_μ) fonksiyon dizisinin $\hbar$ fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$\|\hbar\|_{C[a,b]}$	$\hbar$ fonksiyonun $C[a,b]$ uzayındaki (supremum) normu
$I_q(\hbar;a,b)$	$\hbar(\kappa)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki $q-$integrali
$Lip_m(\alpha)$	$\vert\hbar(t)-\hbar(\kappa)\vert \leq M\vert t-\kappa\vert^\alpha$ şartını sağlayan fonksiyonların sınıfı
τ	$\tau:\Omega\to\Psi$ pozitif lineer operatör
$\tau(\hbar;\kappa)$	$\tau\hbar$ fonksiyonunun κ noktasında aldığı değer
$S_{\mu,\varsigma}$	Genelleştirilmiş Szasz-Mirakyan-Kantorovich operatörü
$S_{\mu,\varsigma,q}(\hbar;q;\kappa)$	Genelleştirilmiş q-Szasz Mirakyan Kantorovich operatörü
$\omega(\hbar;\delta)$	$\hbar$ fonksiyonunun süreklilik modülü

1. GİRİŞ

Pozitif lineer operatörler ile yaklaşım konusu matematiğin çeşitli kollarıyla etkileşim halindedir. Ünlü matematikçi Weierstrass (Weierstrass, 1885) kompakt bölgedeki süreklilik şartını sağlayan tüm fonksiyonlara tekrar aynı bölge üzerindeki bir polinomla yaklaştığını kanıtlamıştır. 20.yy başlarında Segej N. Bernstein (Bernstein, 1912-1913), Weierstrass yaklaşım teoriminin ispatında kullandığı yöntemde Bernstein polinomları olarak adlandırılan yeni polinomlar tanımlamıştır. Ancak Bernstein polinomlarının Weierstrass yaklaşım teoeminin ispatına basit bir alternatif yol olması dışında bir öneminin olduğu bu yüzyılın yarısına kadar fark edilememiştir. P. Faget ve P. Bézier Fransız firması olan Citroën ve Renault firmalarında araç gövdeleri için geometrik modelleme yaparken Bernstein operatörelerinden faydalanmışlardır. Daha sonra, Bernstein polinomlarının önemi artmış ve bir çok matematikçi tarafından üzerinde çalışılmaya başlanmıştır. Bu çalışmaların ardından pozitif lineer operatörlerle yaklaşım teorisi alanı ortaya çıkmıştır. Yaklaşımlar teorisi adı verien bu teorinin asıl amacı; eldeki fonksiyonlardan daha kullanışlı, daha kolay işlem yapılabilen fonksiyonlar dizisinin norm altındaki görüntüsünü bulmaktır.

1952 ve 1953 yıllarında Bohman (Bohman, 1952) ve Korovkin (Korovkin, 1953), ayrı bir şekilde sürekli fonksiyonlara düzgün(uniform) yakınsayan pozitif lineer operatörlerin mevcut olduğunu gösteren önemli ve benzer teoremi ispatlamışlardır.Burada, sonlu bir aralıkta düzgün yakınsamanın gerçeklenmesi için üç şartın sağlatılmasının yeterli olacağı gösterilmiştir. Bunun sayesinde daha sonra bir çok matematikçi farklı pozitif lineer operatörler tanımlayarak yaklaşım özelliklerini incelemiştir.Bu operatörlere Meyer-König ve Zeller operatörü, Szasz operatörü,Szasz-Mirakyan operatörü,Szasz-Mirakyan-Kantorovich operatörü, Bleimann-Butzer-Hahn operatörü gibi örnekler verebiliriz.

Bernstein operatörleri ile oluşturulan yeni operatörler göz önüne alınarak farklı genellemeleri oluşturulmuştur.. Örneğin, 1930 senesinde Kantorovich, otuz yedi yıl sonra Durrmeyer, bundan on dört yıl sonra da Derriennic analizin bilinen temel teoremlerini kullanarak Bernstein operatörlerinin integral tipli genellemelerini tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Temel olarak Durrmeyer (1967) ve Kantorovich tipli genellemeler şeklinde ifade edilen integral tipli bu genellemeler, integrallenebilir fonksiyonlar uzayındaki yakınsaklığın incelenebilmesinden ortaya çıkmıştır.

Bernstein operatörlerinin diğer bir modifiyesi de kuantum teorisine dayanır.Kuantum analiz teorisinin taşları ilk kez 18. yüzyılda Euler tarafından oluşturulmaya başlamış ve 19. yüzyılda bu alanda önemli sonuçların elde edildiği çeşitli çalışmalar yapılmıştır.20. yüzyılın ikinci yarısında $q-$analizin matematik ve fizik alanlarındaki çeşitli uygulamaları ortaya çıkmış ve bundan sonra bu teoriye olan ilgi hızla artmıştır.Son yıllarda matematik alanında, klasik analizden bilinen bir çok tanım ve teoremin yanı sıra bilinen bazı integral eşitsizliklerinin de $q-$genelleşmeleri üzerinde çalışmaktadır.

Yaklaşımlar teorisinde, klasik yakınsaklık kavramı ile ilgili çalışmalar sürerken, son yıllarda istatistiksel yakınsama ifadesi, üzerinde çalışmaların çok yapıldığı ve bir çok teze konu olduğu görülmektedir. 1950 yıllında çalışılmaya başlanan istatistiksel yakınsaklık kavramını Gadijev ile Orhan pozitif lineer operatör dizileri üzerinde Korovkin tipli yaklaşım teoremini oluşturmak için kullanmışlardır. Elde edilen teoeremle beraber var olan çok fazla sayıda operatörün istatistiksel yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızları incelenmiştir.

Tezimizde, yaklaşımlar teorisinde baz alınan bazı operatörler tanıtılmış olup $S_{\mu,\varsigma}$ operatörünün kapalı bir aralıkta yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızı incelenmiştir.Lipschitz şartı sağlayan fonksiyonları kullanarak $S_{\mu,\varsigma}$ operatörünün yaklaşım hızı inlenmiş olup $S_{\mu,\varsigma}$ operatörünün seçilen sürekli fonksiyonlara yakınsaklığının ne derece sağlıklı olduğunu göstermek için Mapple programı ile grafik çizilmiş ayrıca Matlab ile de fonksiyona olan yaklaşımın hata payları tablolar şeklinde ifade edilmiştir. $q-$ analiz ile ilgili temel kavramlar hatırlatılacak olup genelleştirilmiş $q-$Szasz-Mirakyan-Kantorovich Operatörü oluşturularak klasik ve istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Weierstrass (Weierstrass, 1885) ın sürekli fonksiyonlara polinomlar ile birlikte yakınsamanın sağlanableceğini ispatlamasıyla yaklaşım teorisi konusuna ağırlık verilmeye başlanmıştır.Diğer matematikçiler için Weierstrass'ın yapmış olduğu bu teoremin ispatı fazla işlemli olması ve kullanışlı olmaması, yeni ispat yöntemleri bulunması gerektiğini düşündürtmüştür. 1912 senesine gelindiğinde S.N. Bernstein kendi adını verdiği

$$B_\mu(\hbar;\kappa)=\sum_{\zeta=0}^{\mu}\binom{\mu}{\zeta}\kappa^\zeta(1-\kappa)^{\mu-\zeta}\hbar\left(\frac{\zeta}{\mu}\right),\quad \mu\in\mu,\quad 0\le\kappa\le1,$$

polinomlar dizisi ile sürekli bir $\hbar$ fonksiyonuna yaklaşmanın daha basit bir ispatını vermiştir (Bernstein (1912-1913)). Pozitif lineer operatörleri Bernstein temel alınarak çok sayıda ayrı operatör oluşturulmuş ve bu operatörlerin değişik genelleştirilmeleri oluşmuştur.

Son zamanlarda yapılan çalışmalara bakıldığında da bu operatörlerün çalışmalardaki önemi gözükmektedir. Bernstein operatörlerinin kurulmasının ardından Kantorovich (Kantorovich, 1930), $[0,1]$ aralığı üzerinde integrallenebilir $\hbar$ fonksiyonları için

$$k_\mu(\hbar;\kappa)=(\mu+1)\sum_{\zeta=0}^{\mu}\binom{\mu}{\zeta}\kappa^\zeta(1-\kappa)^{\mu-\zeta}\int_{\frac{\zeta}{\mu+1}}^{\frac{\zeta+1}{\mu+1}}\hbar(t)dt,$$

biçiminde tanımlı k_μ operatörlerini tanımlamıştır. k_μ operatörlerine Kantorovich operatörleri denilmektedir.

$[0,\infty)$ yarı ekseninde Bernstein polinomlarından yararlanarak ağırlıklı uzayda $\hbar$ sürekli fonksiyonları için

$$S_\mu(\hbar;\kappa)=e^{-\mu\kappa}\sum_{\zeta=0}^{\infty}\frac{(\mu\kappa)^\zeta}{\zeta!}\hbar\left(\frac{\zeta}{\mu}\right),$$

S_μ Szasz (Szasz, 1950) operatörünü tanımlamıştır.Bu operatör integrallenebilir $\hbar$ sonksiyonları için

$$S_\mu^*(\hbar;\kappa)=\mu e^{\mu\kappa}\sum_{\zeta=0}^{\infty}\frac{(\mu\kappa)^\zeta}{\zeta!}\int_{\zeta}^{\zeta+1}\hbar(t)dt \tag{2.1}$$

S^*_μ operatörü tanımlanmıştır.

Yukarıda bahsedilen pozitif lineer operatörler kurulduktan sonra bu operatörlerin $\hbar$ sürekli fonkisyonuna yaklaşımı problemi incelenmiştir. Bu yaklaşımın düzgün olması için gerekli kriterler ispatlanmaya çalışılmıştır. Popoviciu (Popoviciu, 1951),Korovkin ve Bohman birbirlerinden habersiz şekilde bu teoremi ispatlamıştır. Ancak bu üç matematikçiden P.P.Korovkin problemin çözümüne daha büyük katkılar sunmuş ve pozitif lineer operatörler ile yaklaşım teorisinde çalışmaları daha da ileri bir seviyeye ulaşmasını sağlamıştır.Korovkin ispatında kompakt bölgede tanımlı ve sürekli $\hbar$ fonksiyonuna pozitif lineer operatörler dizisi ile düzgün yaklaşmak için test foksiyonları adı verilen $1, t$ ve t^2 fonsiyonlarının operatör altında sırasıyla 1, κ ve κ^2 fonksiyonlarına düzgün yakınsamasının yeterli olduğunu göstermiştir.

Yaklaşımlar teorisinde yakın zamanda yapılan çalışmalarda $q-$ calculus(quantum calculus) pozitif lineer operatörler üzerine uygulanışı ve bu $q-$ analiz ile kurulan yeni operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenmiştir ve bu yaklaşım teoresine katkıda bulunmuştur. q-analizde kurulan operatörü L.Lupaş (Lupaş, 1987) tarafından tanıtılmıştır. Ayrıca 96'da Philips Bernstein polinomların yaklaşım özelliklerinin q-analizde hesaplamıştır (Dökmen, 2009). Bu çalışmalardan sonra $q-$analizin yaklaşım teorisine uygulanması birçok kişi tarafından yapılmıştır. Bunlara örnek olarak H.Oruç ve N.Tuncer'in 2002'de çalıştığı $q-$Bernstein polinomlarının yakınsaklığı incelenmiş ve bu operatör genelleştirilmiştir. Daha sonra V.S.Videnski 2005'de bazı parametrik $q-$sayıları üzeine pozitif lineer operatörler tanıtmıştır. Ali Aral ve Viaj Gupta $q-$türev ve $q-$Szasz-Mirakyan operatörlerini $0 < q < 1$,$0 \leq \kappa < \frac{b_\mu}{(1-q)[]_q}$,$\hbar \in C(\mathbb{R}_0)$ ve (b_μ) pozitif tam sayısı için $\lim_{\mu\to\infty} b_\mu = \infty$ kabulüyle aşağıdaki şekilde tanıtmıştır. Yeni operatörün uygulmaları üzerine incelemeler yapılmıştır.

$$A_\mu(\hbar, q; \kappa) =: A^q_\mu(\hbar; \kappa) = E_q\left(-[\mu]_q \frac{\kappa}{b_\mu}\right) \sum_{\zeta=0}^{\infty} \hbar\left(\frac{[\zeta]_q b_\mu}{[\mu]_q}\right) \frac{([\mu]_q \kappa)^\zeta}{[\zeta]_q! b_\mu^\zeta}$$

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Tezin 3.bölümünde ise ilerideki bölümlerde yapılan işlem ve ispatarda işimize yarayacak olan bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

3.1. Tanımlar ve Korovkin Teoremi

Tanım 3.1 *$\Omega \subset \mathbb{R}$, $\hbar : \Omega \to \mathbb{R}$ ve $\alpha \in \Omega$ seçildiğinde $\forall\varepsilon > 0$ için $|\kappa - \alpha| < \delta$ iken $\mid \hbar(\kappa) - \hbar(\alpha) \mid < \varepsilon$ sağlanacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sabiti var ise $\hbar$ fonksiyonuna α noktasında süreklidir denir (Mustafa BALCI, 1999).*

Tanım 3.2 *$\Omega \subset \mathbb{R}$, $\hbar : \Omega \to \mathbb{R}$ ve $\kappa_1, \kappa_2 \in \Omega$ olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için $\mid \kappa_1 - \kappa_2 \mid < \delta$ iken $\mid \hbar(\kappa_1) - \hbar(\kappa_2) \mid < \varepsilon$ sağlanacak şekilde sadece ε'na bağlı ($\delta = \delta(\varepsilon)$) sabiti var ise Ω kümesinde $\hbar$ fonksiyonu düzgün süreklidir (Musayev ve ark., 2007).*

Tanım 3.3 *$\Omega \subset \mathbb{R}$, $\hbar : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonu seçilsin. Eğer $\forall\kappa \in \Omega$ için*

$$\mid \hbar(\kappa) \mid \leqslant M$$

için $M \in \mathbb{R}$ sabiti var ise $\hbar$ fonksiyonu Ω kümesinde sınırlıdır denir (Alp, Musayev, Ekincioğlu ve Mustafayev,2007).

Tanım 3.4 *$\forall\kappa \in [a, b]$, $\forall\varepsilon > 0$ için n_0 gibi bir sayı bulunabilir olsun. $\forall\mu > n_0$ olduğunda*

$$\mid \hbar_\mu(\kappa) - \hbar(\kappa) \mid < \varepsilon$$

olacak şekilde n_0 varsa $(\hbar_\mu)$ dizisi $\hbar$ uzayına düzgün yaklaşmaktadır denir. $\hbar_\mu \rightrightarrows \hbar$ ile ifade edilir.

Tanım 3.5 *Ω ve Ψ uzayları reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeler olsunlar Ω kümesinin elemanlarını Ψ kümesinin elemanlarına götüren τ dönüşümüne operatör denir.*

$$\tau : \Omega \to \Psi$$

şeklinde ifade edilir. Bu $\tau\hbar$ fonksiyonunun κ noktasındaki görüntüsü $\tau(\hbar;\kappa)$ şeklindedir.

Tanım 3.6 *Ω ve Ψ reel değerli fonksiyonlardan kümeler olsun. $\tau : \Omega \to \Psi$ tanımlı τ dönüşümü $\forall\hbar, \mathfrak{g} \in \Omega$ ve $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için;*

$$\tau(\alpha\hbar + \beta\mathfrak{g}) = \alpha\tau(\hbar) + \beta\tau(\mathfrak{g})$$

ifadesi sağlandığında τ lineer operatördür (Korovkin, 1960).

Tanım 3.7 *Ω^+, Ω'den ve Ψ^+, Ψ'den seçilen pozitif değerli fonksiyonların kümesini gösteriyorsa ;*

$$\Omega^+ = \{\hbar \in \Omega : \hbar(\kappa) \geq 0\}$$

$$\Psi^+ = \{\mathfrak{g} \in \Psi : \mathfrak{g}(\kappa) \geq 0\}$$

olur. Ω üzerinde tanımlı τ dönüşümü Ω^+ kümesinden alınan her bir $\hbar(\kappa)$ 'i, Ψ^+ uzayından alınan bir $\mathfrak{g}(\kappa)$'ye götürüyorsa; yani, Ω uzayındaki fonksiyonların tanım kümesindeki her t için

$$\hbar(t) \geq 0 \quad iken \quad \tau(\hbar;\kappa) \geq 0$$

sağlanıyor ise τ dönüşümü pozitif operatördür (Hacıyev ve ark., 1995).

Hem lineerlik hem de pozitiflik şartları aynı anda sağlanıyorsa bu operatöre pozitif lineer operatör denir.

Tanım 3.8 *$\tau : \Omega \to \Psi$ operatörü verilsin. Eğer; $\forall\hbar \in \Omega$ için*

$$\|\tau(\hbar;\kappa)\|_y \leq C\|\hbar\|_\kappa$$

iken $C \geq 0$ sabiti varsa τ operatörüne sınırlı operatör denir.

Tanım 3.9 *Kapalı ve sınırlı olan bir $[a,b]$ aralığında tanımlanmış olan , aynı aralıkta gerçel değerli, sürekli fonksiyonlardan meydana gelen kümeye $C[a,b]$ fonksiyon kümesi denir.Bu küme üzerindeki norm,*

$$\hbar \in C[a,b]$$

için,

$$\|\hbar\|_{C[a,b]} = \max_{0\leq\kappa\leq b} |\hbar(\kappa)|$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca bu norma maksimum normu denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 3.10 $\forall\kappa \in [a,b]$ *için*

$$\lim_{\mu\to\infty} \|\hbar_\mu - \hbar\|_{C[a,b]} = \lim_{\mu\to\infty} \max_{\kappa\in[a,b]} |\hbar_\mu(\kappa) - \hbar(\kappa)| = 0$$

koşulu sağlanıyorsa $(\hbar_\mu)$ *fonksiyon dizileri maksimum normunda* $\hbar$ *fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir ve*

$$\hbar_\mu \rightrightarrows \hbar$$

ile ifade edilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 3.11 $(\hbar_\mu)$ *fonksiyon dizisi*

$$\lim_{\mu\to\infty} \hbar_\mu(\kappa) = 0$$

şartını sağlıyorsa, bu durumda $(\hbar_\mu(\kappa))$*'e sonsuz küçülen dizi denir (Balcı,2012).*

Tanım 3.12 (α_μ) *ve* (β_μ)*, her* $\mu \in \mu^+$ *için* $\alpha_\mu \leq \beta_\mu$ *ve* $\mu \to \infty$ *için* $\alpha_\mu \to 0$ *ve* $\beta_\mu \to 0$ *koşullarını şaertlarını yerine getiren fonksiyon dizilerini seçelim. Öyleyse,* (α_μ) *dizisinin sıfıra yakınsama hızı* (β_μ) *dizisininkinden daha hızlıdır denir.*

Tanım 3.13 $0 \leq \alpha \leq 1$ *iken;*

$$\mid \hbar(t) - \hbar(\kappa) \mid\leq M \mid t - \kappa \mid^\alpha$$

koşulunu yerine getiren fonksiyonların sınıfına Lipschitz sınıfından fonksiyonlar denir. M *ile gösterilen sabite ise Lipschitz sabiti denir ve aşağıdaki gibi gösterilir;*

$$\hbar \in Lip_m(\alpha)$$

Teorem 3.14 (Weierstrass) $[a,b]$ *kapalı aralığından reel sayılar kümesine tanımlı olan sürekli bir* $\hbar$ *fonksiyonu olsun. Öyle bir* P_μ *polinomu vardır ki* $\forall\mu > n_0$ *için*

$$\mid P_\mu(\kappa) - P(\kappa) \mid< \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mu$ *vardır.*

Teorem 3.15 (P.P.Korovkin) *$\hbar$, $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli fonsiyon uzayı ve gerçel sayılar kümesinde*

$$|\hbar(\kappa)| \leq M_f \tag{3.1}$$

koşulunu gerçekleyen bir fonksiyon olarak seçilsin. Şayet $\tau_\mu(\hbar;\kappa)$ pozitif lineer operatör dizisi verilen aralık üzerinde;

i) $\tau_\mu(1;\kappa) \rightrightarrows 1$

ii) $\tau_\mu(t;\kappa) \rightrightarrows \kappa$

iii) $\tau_\mu(t^2;\kappa) \rightrightarrows \kappa^2$

şartları gerçekleniyorsa, τ_μ operatör dizisi $[a,b]$ üzerinde

$$\tau_\mu(\hbar;\kappa) \rightrightarrows \hbar(\kappa)$$

dir. Başka bir biçimde ifade edilecek olunursa;

$$\|\tau_\mu(\hbar) - \hbar\|_{c[a,b]} \to 0(\mu \to \infty)$$

ya da buna eş değer olan

$$\lim_{(\mu\to\infty)} \max_{a\leq\kappa\leq b} \mid \tau_\mu(\hbar;\kappa) - \hbar(\kappa) \mid= 0.$$

İspat. Farz edelim ki $\hbar$, [a,b] aralığındaki Sürekli fonksiyon uzayının bir elemanı olsun. Tanım gereği her sıfırdan büyük ε sayısına karşılık öyle bir δ elde eldilsin ki, $|t-\kappa| < \delta$ olduğunda $|\hbar(t)-\hbar(\kappa)| < \varepsilon$ sağlanır. $|t-\kappa| > \delta$ olduguğunda ise üçgen eşitsizliğinden

$$|\hbar(t) - \hbar(\kappa)| < |\hbar(t)| - |\hbar(\kappa)| \leqslant 2M_f \tag{3.2}$$

yazılabilir. Öte yandan $|t-\kappa| \geqslant \delta$ için $\frac{|t-\kappa|}{\delta} \geqslant 1$ olacağından

$$\frac{(t-\kappa)^2}{(\delta)^2} \geqslant 1 \tag{3.3}$$

sağlanır.

$$|\hbar(t) - \hbar(\kappa)| < |\hbar(t)| - |\hbar(\kappa)| \leqslant 2M_f \leqslant 2M_f \frac{(t-\kappa)^2}{(\delta)^2}$$

yazılabilir. O halde,

- $|t-\kappa| < \delta$ için $|\hbar(t) - \hbar(\kappa)| < \varepsilon$

- $|t-\kappa| \geqslant \delta$ için $|\hbar(t)-\hbar(\kappa)| < 2M_f \frac{(t-\kappa)^2}{(\delta)^2}$

dır.Bundan dolayı $\forall t \in R$ ve $\forall \kappa \in [a,b]$ için

$$|\hbar(t)-\hbar(\kappa)| < 2M_f \frac{(t-\kappa)^2}{(\delta)^2} + \varepsilon \tag{3.4}$$

dır. Şimdi yukarıda üç şartı sağlayan (τ_μ) lineer operatörünün

$$\lim_{\mu\to\infty} \|\tau_\mu(\hbar) - \tau(\hbar)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğini sağladığının gösterilmesi gerekmektedir.

Lineerlikten

$$\begin{aligned}|\tau_\mu(\hbar(t);\kappa)-\hbar(\kappa)| &= |\tau_\mu(\hbar(t);\kappa)-\hbar(\kappa)+\tau_\mu(\hbar(\kappa);\kappa)-\tau_\mu(\hbar(\kappa);\kappa)|\\ &= |\tau_\mu(\hbar(t);\kappa)-\tau_\mu(\hbar(\kappa);\kappa)+\tau_\mu(\hbar(\kappa);\kappa)-\hbar(\kappa)|\\ &= |\tau_\mu(\hbar(t)-\hbar(\kappa);\kappa)+(\hbar(\kappa)\tau_\mu(1;\kappa)-1)|\end{aligned}$$

dir. Bu denklemde üçgen eşitsizliğinden faydalanarak

$$|\tau_\mu(\hbar(t);\kappa)-\hbar(\kappa)| \leq |\tau_\mu(\hbar(t)-\hbar(\kappa);\kappa)| + |\hbar(\kappa)||\tau_\mu(1;\kappa)-1| \tag{3.5}$$

oluşur. Her $a \in R$ için $a \leq |a|$ olduğundan

$$|\tau_\mu(\hbar(t);\kappa)-\hbar(\kappa)| \leq \tau_\mu(|(\hbar(t);\kappa)-\hbar(\kappa)|;\kappa)$$

yazabilir. (3.1) göz önüne alınarak (3.5) eşitsizliği

$$|\tau_\mu(\hbar(t);\kappa)-\hbar(\kappa)| \leq \tau_\mu(|(\hbar(t);\kappa)-\hbar(\kappa)|;\kappa) + M_f|(\tau_\mu(1;\kappa)-1)|$$

şekline dönüşecektir. (τ_μ) monoton artan olduğundan

$$|\tau_\mu(\hbar(t);\kappa)-\hbar(\kappa)| \leq \tau_\mu\left(\varepsilon + 2\frac{M_f}{(\delta)^2}(t-\kappa)^2;\kappa\right) + M_f|\tau_\mu(1;\kappa)-1| \tag{3.6}$$

yazılır. Diğer yandan τ_μ operatörünün pozitif lineer olduğu göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned}\tau_\mu\left(\varepsilon + 2\frac{M_f}{(\delta)^2}(t-\kappa)^2;\kappa\right) &= \tau_\mu(\varepsilon;\kappa) + \tau_\mu\left(2\frac{M_f}{(\delta)^2}(t-\kappa)^2;\kappa\right)\\ &= \varepsilon\tau_\mu(1;\kappa) + 2\frac{M_f}{(\delta)^2}\tau_\mu(t^2-2\kappa t+\kappa^2;\kappa)\\ &- 2\kappa\tau_\mu(t;\kappa) + \kappa^2 L_\mu(1;\kappa)\\ &= \varepsilon\tau_\mu(1;\kappa) + 2\frac{M_f}{(\delta)^2}\tau_\mu(t^2;\kappa) - \kappa^2 + 2\kappa^2 - 2\kappa\tau_\mu(t;\kappa)\\ &+ \kappa^2 + \tau_\mu(t^2;\kappa) - \kappa^2\\ &= \varepsilon\tau_\mu(1;\kappa) + 2\frac{M_f}{(\delta)^2}(\tau_\mu(t^2;\kappa)-\kappa^2) + 2\kappa(\kappa-\tau_\mu(t;\kappa))\\ &+ \kappa^2(\tau_\mu(1;\kappa)-1)\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu son ifade (3.6) da yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}|\tau_\mu(\hbar(t);\kappa)-\hbar(\kappa)| \leq \varepsilon\tau_\mu(1;\kappa)+2\frac{M_f}{(\delta)^2}[(\tau_\mu(t^2;\kappa)-\kappa^2)+2\kappa(\kappa-\tau_\mu(t;\kappa)\\ +\kappa^2(\tau_\mu(1;\kappa)-1)]+M_f|\tau_\mu(1;\kappa)-1|\end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.1.) kullanılırsa, $\forall\varepsilon' > 0$ için

$$|\tau_\mu(\hbar(t);\kappa)-\hbar(\kappa)| \leq \varepsilon'$$

olur. Sonuç olarak

$$\lim_{(\mu\to\infty)} \|\tau_\mu(\hbar)-\hbar\|_{C[a,b]} = 0$$

dır. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

3.2. Szasz-Mirakyan-Kantorovich Operatörleri

$S_{\mu,\varsigma} : C[0,A] \to C[0,A]$ olmak üzere,

$$S_{\mu,\varsigma}(\hbar;\kappa) = \mu(\varsigma+1)e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=0}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^\zeta}{\zeta!}\int_{\frac{\zeta+\varsigma}{\mu(\varsigma+1)}}^{\frac{\zeta+\varsigma+1}{\mu(\varsigma+1)}}\hbar(t)dt \tag{3.8}$$

Şeklinde tanımlı olan pozitif lineer operatörlere Genelleştirilmiş Szasz-Mirakyan-Kantorovich operatörleri denir. Burada $\varsigma = 0$ değeri için (2.1) operatörü ile tanımlı Szasz Kantorovich operatörünü vermektedir.

Öncelikle $S_{\mu,\varsigma}$ operatörünün lineer ve pozitif operatör olduğu gösterilmiştir. Lineerlik özelliği; $\forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\forall\hbar,\mathfrak{g}$ fonksiyonu için

$$S_{\mu,\varsigma}(\alpha\hbar+\beta\mathfrak{g};\kappa) = \alpha S_{\mu,\varsigma}(\hbar;\kappa)+\beta S_{\mu,\varsigma}(\mathfrak{g};\kappa)$$

eşitliği sağlandığından $S_{\mu,\varsigma}$ lineer operatördür. Şimdi pozitif olduğunu gösterelim.

$\forall\kappa \in [0,A]$ için

$$e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^\zeta}{\zeta!} \geqslant 0$$

ve eğer $\hbar \geq 0$ ise

$$\int_{\frac{\zeta+\varsigma}{\mu(\varsigma+1)}}^{\frac{\zeta+\varsigma+1}{\mu(\varsigma+1)}}\hbar(t)dt \geqslant 0$$

olacağından $S_{\mu,\varsigma}$ operatörü pozitiftir.

Lemma 3.16 $S_{\mu,\varsigma}(\hbar;\kappa)$ *operatörü için*

$i)$ $S_{\mu,\varsigma}(1;\kappa)=1$

$ii)$ $S_{\mu,\varsigma}(t;\kappa)=\kappa+\dfrac{2\varsigma+1}{2\mu(\varsigma+1)}$

$iii)$ $S_{\mu,\varsigma}(t^2;\kappa)=\kappa^2+\kappa\dfrac{2\varsigma+2}{\mu(\varsigma+1)}+\dfrac{3\varsigma^2+3\varsigma+1}{3[\mu(\varsigma+1)]^2}$

dir.

İspat.

$$
\begin{aligned}
i)S_{\mu,\varsigma}(1;\kappa) &= \mu(\varsigma+1)e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=0}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta}}{\zeta!}\int\limits_{\frac{\zeta+\varsigma}{\mu(\varsigma+1)}}^{\frac{\zeta+\varsigma+1}{\mu(\varsigma+1)}}dt\\
&= \mu(\varsigma+1)e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}e^{\mu(\varsigma+1)\kappa}\frac{1}{\mu(\varsigma+1)}=1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ii)S_{\mu,\varsigma}(t;\kappa) &= \mu(\varsigma+1)e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=0}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta}}{\zeta!}\int\limits_{\frac{\zeta+\varsigma}{\mu(\varsigma+1)}}^{\frac{\zeta+\varsigma+1}{\mu(\varsigma+1)}}tdt\\
&= \mu(\varsigma+1)e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=0}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta}}{\zeta!}\left[\frac{t^2}{2}\Big|_{\frac{\zeta+\varsigma}{\mu(\varsigma+1)}}^{\frac{\zeta+\varsigma+1}{\mu(\varsigma+1)}}\right]\\
&= \mu(\varsigma+1)e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=0}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta}}{\zeta!}\left[\frac{\zeta}{\mu(\varsigma+1)}+\frac{2\varsigma+1}{2\mu(\varsigma+1)}\right]\\
&= \mu(\varsigma+1)e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=1}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta}}{\zeta!}\left[\frac{\zeta}{\mu(\varsigma+1)}\right]\\
&+ \mu(\varsigma+1)e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=0}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta}}{\zeta!}\left[\frac{2\varsigma+1}{2\mu(\varsigma+1)}\right]\\
&= \kappa\mu(\varsigma+1)e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=1}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta-1}}{(\zeta-1)!}+\frac{2\varsigma+1}{2\mu(\varsigma+1)}\\
&= \kappa\mu(\varsigma+1)e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=1}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta-1}}{(\zeta-1)!}+\frac{2\varsigma+1}{2\mu(\varsigma+1)}\\
&= \kappa\mu(\varsigma+1)e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=0}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta}}{(\zeta)!}+\frac{2\varsigma+1}{2\mu(\varsigma+1)}\\
&= \kappa+\frac{2\varsigma+1}{2\mu(\varsigma+1)}
\end{aligned}
$$

$$iii)S_{\mu,\varsigma}(t^2;\kappa) = \mu(\varsigma+1)e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=0}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta}}{\zeta!}\int\limits_{\frac{\zeta+\varsigma}{\mu(\varsigma+1)}}^{\frac{\zeta+\varsigma+1}{\mu(\varsigma+1)}} t^2 dt$$

$$= \mu(\varsigma+1)e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=0}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta}}{\zeta!}\left[\frac{t^3}{3}\Big|_{\frac{\zeta+\varsigma}{\mu(\varsigma+1)}}^{\frac{\zeta+\varsigma+1}{\mu(\varsigma+1)}}\right]$$

$$= \mu(\varsigma+1)e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=0}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta}}{\zeta!}\left(\frac{1}{3[\mu(\varsigma+1)]^3}\right)(3k^2+3\varsigma^2$$

$$+6kr+3k+3\varsigma+1)$$

$$= e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=0}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta}}{\zeta!}\left(\frac{\zeta^2}{[\mu(\varsigma+1)]^2}+\frac{\zeta(2\varsigma+1)}{[\mu(\varsigma+1)]^2}\right.$$

$$\left.+\frac{3\varsigma^2+3\varsigma+1}{3[\mu(\varsigma+1)]^2}\right)$$

$$= e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=0}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta}}{\zeta!}\left(\frac{\zeta^2}{[\mu(\varsigma+1)]^2}\right)$$

$$+e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=0}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta}}{\zeta!}\left(\frac{\zeta(2\varsigma+1)}{[\mu(\varsigma+1)]^2}\right)$$

$$+e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=0}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta}}{\zeta!}\left(\frac{3\varsigma^2+3\varsigma+1}{3[\mu(\varsigma+1)]^2}\right)$$

$$= e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=1}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta-1}}{(\zeta-1)!}\left(\frac{\zeta}{\mu(\varsigma+1)}\right)$$

$$+\kappa\frac{2\varsigma+1}{\mu(\varsigma+1)}e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=1}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta-1}}{(\zeta-1)!}+\frac{3\varsigma^2+3\varsigma+1}{3[\mu(\varsigma+1)]^2}$$

$\left[\frac{\zeta}{\mu(\varsigma+1)}=\frac{\zeta-1}{\mu(\varsigma+1)}+\frac{1}{\mu(\varsigma+1)}\right]$ şeklinde parçalanırsa

$$= \kappa e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=1}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta-1}}{(\zeta-1)!}\left(\frac{\zeta-1}{\mu(\varsigma+1)}\right)$$

$$+\kappa e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\frac{1}{\mu(\varsigma+1)}\sum_{\zeta=1}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta-1}}{(\zeta-1)!}$$

$$+\kappa\frac{2\varsigma+1}{\mu(\varsigma+1)}e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=1}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta-1}}{(\zeta-1)!}+\frac{3\varsigma^2+3\varsigma+1}{3[\mu(\varsigma+1)]^2}$$

$$= \kappa^2 e^{\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=2}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta-2}}{(\zeta-2)!}+\kappa e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\frac{1}{\mu(\varsigma+1)}\sum_{\zeta=1}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta-1}}{(\zeta-1)!}$$

$$+\kappa\frac{2\varsigma+1}{\mu(\varsigma+1)}e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=1}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta-1}}{(\zeta-1)!}+\frac{3\varsigma^2+3\varsigma+1}{3[\mu(\varsigma+1)]^2}$$

$$= \kappa^2 e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=0}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta}}{(\zeta!}+\kappa e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\frac{1}{\mu(\varsigma+1)}\sum_{\zeta=0}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta}}{\zeta!}$$

$$
\begin{aligned}
&+\kappa\frac{2\varsigma+1}{\mu(\varsigma+1)}e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=0}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta}}{\zeta!}+\frac{3\varsigma^2+3\varsigma+1}{3[\mu(\varsigma+1)]^2}\\
&=\kappa^2+\kappa\frac{2\varsigma+2}{\mu(\varsigma+1)}+\frac{3\varsigma^2+3\varsigma+1}{3[\mu(\varsigma+1)]^2}
\end{aligned}
$$

□

Teorem 3.17 *$\hbar$, $[0,A]$ aralığında sürekli olan fonksiyon ise, bu araık üzereinde*

$$\lim_{\mu\to\infty}\|S_{\mu,\varsigma}(\hbar;\kappa)-\hbar\|_{C[0,A]}=0$$

dır.

İspat. Lemma3.16 kullanarak $S_{\mu,\varsigma}$ pozitif lineer operatörünün $\mu\to\infty$ iken $C[0,A]$ uzayında $\|\hbar\|_{C[0,A]}$ normuna göre $\hbar$ fonksiyonuna yakınsamasınnın düzgün olduğunu göstermek için Korovkin teoreminin şartlarını sağladını göstermek yeterlidir.

$$\lim_{\mu\to\infty}\|S_{\mu,\varsigma}1-1\|_{C[0,A]}=\lim_{\mu\to\infty}\max_{0\le\kappa\le A}|S_{\mu,\varsigma}(1;\kappa)-1|=0$$

olduğundan,

$$S_{\mu,\varsigma}(1;\kappa)\rightrightarrows 1$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{\mu\to\infty}\|S_{\mu,\varsigma}t-\kappa\|_{C[0,A]}&=\lim_{\mu\to\infty}\max_{0\le\kappa\le A}|S_{\mu,\varsigma}(t;\kappa)-\kappa|_{C[0,A]}\\
&=\lim_{\mu\to\infty}\max_{0\le\kappa\le A}\left|\kappa+\frac{2\varsigma+1}{2\mu(\varsigma+1)}-\kappa\right|\\
&=\lim_{\mu\to\infty}\max_{0\le\kappa\le A}\left|\frac{2\varsigma+1}{2\mu(\varsigma+1)}\right|=0
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$S_{\mu,\varsigma}(t;\kappa)\rightrightarrows\kappa$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{\mu\to\infty}\|S_{\mu,\varsigma}t^2-\kappa^2\|_{C[0,A]}&=\lim_{\mu\to\infty}\max_{0\le\kappa\le A}|S_{\mu,\varsigma}(t^2;\kappa)-\kappa^2|_{C[0,A]}\\
&=\lim_{\mu\to\infty}\max_{0\le\kappa\le A}\left|\kappa^2+\kappa\frac{2\varsigma+2}{\mu(\varsigma+1)}+\frac{3\varsigma^2+3\varsigma+1}{[\mu(\varsigma+1)]^3}-\kappa^2\right|\\
&=\lim_{\mu\to\infty}\max_{0\le\kappa\le A}\left|\kappa\frac{2\varsigma+2}{\mu(\varsigma+1)}+\frac{3\varsigma^2+3\varsigma+1}{[\mu(\varsigma+1)]^3}\right|\\
&=\lim_{\mu\to\infty}\max_{0\le\kappa\le A}\left|A\frac{2\varsigma+2}{\mu(\varsigma+1)}+\frac{3\varsigma^2+3\varsigma+1}{[\mu(\varsigma+1)]^3}\right|=0
\end{aligned}
$$

olduğundan,

$$S_{\mu,\varsigma}(t^2;\kappa^2)\rightrightarrows\kappa^2$$

O halde ,$S_{\mu,\varsigma}$ pozitif lineer operatörünün $\mu \to \infty$ iken $C[0,A]$ uzayında $\|\hbar\|_{C[0,A]}$ normuna göre $\hbar$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. .yani

$$S_{\mu,\varsigma}(\hbar;\kappa) \rightrightarrows \hbar(\kappa)$$

olur. $\square$

3.3. Szasz-Mirakyan-Kantorovich Operatörlerinin Yaklaşım Hızı

Polinom dizilerinin yaklaşım özelliklerinin incelenmesinin ardından bu yaklaşımın doğruluk payının ne kadar olduğu veya farklı bir ifadeyle yaklaşımın ne hızda olduğunun hesaplanması da önemli bir konu haine gelmiştir. Yaklaşım hızını karşılaştırabilmek için terimleri pozitif değer alan ve sıfıra yakınsayan $\{\alpha_\mu\}$ ve $\{\beta_\mu\}$ dizilerini ele alalım.Her n için $0 \leq \{\alpha_\mu\} \leq \{\beta_\mu\}$ ise o halde $\{\alpha_\mu\}$ sıfıra $\{\beta_\mu\}$ den daha hızlı yaklaşır denir. Bundan dolayı $\hbar$ fonksiyonuna yakınsayan τ_μ pozitif lineer operatörünün yakınama hızını

$$|\tau_\mu(\hbar;\kappa) - \hbar(\kappa)| \leq c\alpha_\mu$$

olacak biçimde $\{\alpha_\mu\}$'ler ile birlikte düşünebiliriz. Amacımız $\mu \to \infty$ alındığında $\{\alpha_\mu\} \to 0$ sağlayan $\{\alpha_\mu\}$'lerin var olduğunu gösterebilmektir. Böylece operatör ile $\{\alpha_\mu\}$ in sıfıra yaklaşım hızını karşılaştırabiliriz. Operatörlerin yakınsaklık hızını hesaplarken kullanacağımız tanımlardan biri olan süreklilik modülü aşağıda verilmiştir.

3.3.1. Süreklilik modülü

Tanım 3.18 *$\hbar \in C[0,A]$ olsun. $\hbar$ fonksiyonun süreklilik modülü,*

$$\omega(\hbar;\delta) = \sup_{\substack{|t-\kappa|\leq\delta \\ (t,\kappa)\in C[0,A]}} |\hbar(\kappa) - \hbar(t)|$$

şeklinde tanımlanır. Süreklilik modülünün özellikleri aşağıda gösterilmiştir (Altomare,Campiti,1994).

1) $\omega(\hbar;\delta) \geq 0$

2) $\delta_1 < \delta_2 \Rightarrow \omega(\hbar;\delta_1) \leqslant \omega(\hbar;\delta_2)$

3) $\omega(\hbar + \mathfrak{g}; \delta) \leqslant \omega(\hbar; \delta) + \omega(\mathfrak{g}; \delta)$

4) $m \in \mu$ ***için*** $\omega(\hbar; m\delta) = m\omega(\hbar; \delta)$

5) $\lambda \in \varsigma^+$ ***için*** $\omega(\hbar; \lambda\delta) \leqslant (1 + \lambda)\omega(\hbar; \delta)$

6) $|\hbar(t) - \hbar(\kappa)| \leqslant \omega(\hbar; |t - \kappa|)$

7) $|\hbar(t) - \hbar(\kappa)| \leqslant \left(1 + \frac{|t-\kappa|}{\delta}\right) \omega(\hbar; \delta)$

Teorem 3.19 $\hbar \in C[0, A]$ *ise*

$$|S_{\mu,\varsigma}(\hbar; \kappa) - \hbar(\kappa)| \leq C\omega\left(\hbar; \frac{1}{\sqrt{\mu}}\right) \tag{3.9}$$

dır. Burada

$$C = (1 + \sqrt{A + 1})$$

dır.

İspat.

$$\begin{aligned}
|S_{\mu,\varsigma}(\hbar; \kappa) - \hbar(\kappa)| &= |S_{\mu,\varsigma}(\hbar(t); \kappa) - \hbar(\kappa) S_{\mu,\varsigma}(1; \kappa)| \\
&= |S_{\mu,\varsigma}(\hbar(t); \kappa) - S_{\mu,\varsigma}(\hbar(\kappa); \kappa)| \\
&= |S_{\mu,\varsigma}(\hbar(t) - \hbar(\kappa)); \kappa)| \\
&\leq S_{\mu,\varsigma}(|\hbar(t) - \hbar(\kappa)|; \kappa) \\
&\leq S_{\mu,\varsigma}(\omega(\hbar; |t - \kappa|; \kappa)) = S_{\mu,\varsigma}\left(\omega\left(\hbar; \frac{|t-\kappa|}{\delta}\delta\right); \kappa\right) \\
&\leq S_{\mu,\varsigma}\left(\left(1 + \frac{|t-\kappa|}{\delta}\right)\omega(\hbar; \delta); \kappa\right) \\
&\leq \omega(\hbar; \delta) S_{\mu,\varsigma}\left(\left(1 + \frac{|t-\kappa|}{\delta}\right); \kappa\right) \\
&\leq \omega(\hbar; \delta)\left[S_{\mu,\varsigma}(1; \kappa) + \frac{1}{\delta} S_{\mu,\varsigma}(|t - \kappa|; \kappa)\right] \\
&\leq \omega\left(1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{S_{\mu,\varsigma}(t-\kappa)^2}; \kappa\right) \\
&\leq \omega\left(1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{\kappa}{\mu(\varsigma+1)} + \frac{3\varsigma^2 + 3\varsigma + 1}{3[\mu(\varsigma+1)]^2}}\right) \\
&\leq \omega\left(1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{A}{\mu(\varsigma+1)} + \frac{3\varsigma^2 + 6r + 3}{3[\mu(\varsigma+1)]^2}}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \omega\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{A}{\mu(\varsigma+1)}+\frac{3(\varsigma+1)^2}{3[\mu(\varsigma+1)]^2}}\right)\\
&= \omega\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{A}{\mu(\varsigma+1)}+\frac{1}{\mu^2(\varsigma+1)}}\right)\\
&\leq \omega\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{A}{\mu(\varsigma+1)}+\frac{1}{\mu(\varsigma+1)}}\right)\\
&\leq \omega\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{A}{\mu}+\frac{1}{\mu}}\right)\\
&= \omega\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{A+1}{\mu}}\right)\\
\left(\delta=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right) \quad \text{alınırsa;} &\leq (1+\sqrt{A+1})\omega\left(\hbar;\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)\\
&\leq C\omega\left(\hbar;\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)
\end{aligned}
$$

□

Teorem 3.20 $\hbar \in Lip_\alpha[0,A]$ *ise,*

$$
|S_{\mu,\varsigma}(\hbar;\kappa)-\hbar(\kappa)| \leq C\left(\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{\delta}{2}} \tag{3.10}
$$

dir.

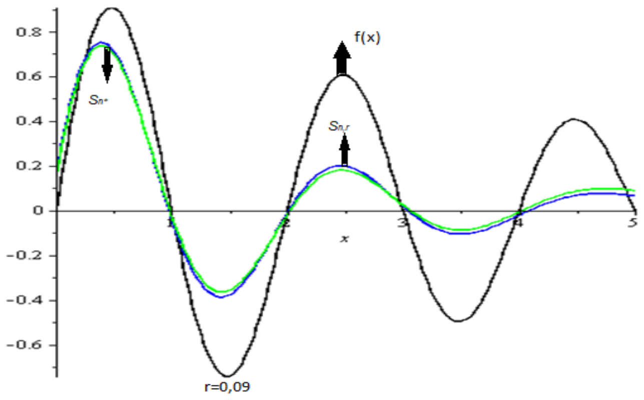
İspat. $\hbar$ fonsiyonu lipschitz sınıfından ise,

$$
\begin{aligned}
|S_{\mu,\varsigma}(\hbar;\kappa)-\hbar(\kappa)| &= |S_{\mu,\varsigma}(\hbar(t);\kappa)-\hbar(\kappa)S_{\mu,\varsigma}(1;\kappa)|\\
&= |S_{\mu,\varsigma}(\hbar(t);\kappa)-S_{\mu,\varsigma}(\hbar(\kappa);\kappa)|\\
&= |S_{\mu,\varsigma}(\hbar(t)-\hbar(\kappa));\kappa)|\\
&\leq S_{\mu,\varsigma}(|\hbar(t)-\hbar(\kappa)|;\kappa)\\
&\leq MS_{\mu,\varsigma}(|t-\kappa|^\alpha;\kappa)\\
&\leq MS_{\mu,\varsigma}((t-\kappa)^2;\kappa)^{\frac{\alpha}{2}}\\
&\leq M\left(\frac{\kappa}{\mu(\varsigma+1)}+\frac{3\varsigma^2+3\varsigma+1}{3[\mu(\varsigma+1)]^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\\
&\leq M\left(\frac{\kappa}{\mu(\varsigma+1)}+\frac{3\varsigma^2+6r+3}{3[\mu(\varsigma+1)]^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\\
&= M\left(\frac{\kappa}{\mu(\varsigma+1)}+\frac{3(\varsigma+1)^2}{3[\mu(\varsigma+1)]^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}
$$

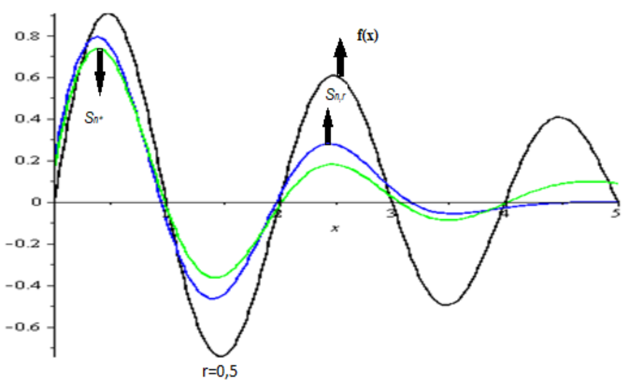
$$
\begin{aligned}
&\leq M\left(\frac{\kappa}{\mu(\varsigma+1)}+\frac{1}{\mu^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\leq M\left(\frac{A}{\mu}+\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\leq \left(\frac{A+1}{\mu}\right)^{\frac{\alpha}{2}}=(A+1)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \\
&=C\left(\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}
$$

□

Örnek 3.21 *Aşağıda $\hbar(\kappa)=\sin(\pi\kappa)e^{\frac{-\kappa}{5}}$ fonksiyonuna $S_{\mu,\varsigma}$ Genelleştirşilmiş Szasz-Mirakyan-Kantorovich operatörü ve Szasz-Kantorocivh operatör ile yaklaşımı Maple programında grafikler çizdirilerek gösterilmiştir. Şekil de siyah renkli grafik $\hbar$ fonksiyonunu, yeşil renkli grafik Szasz-Kantorocivh operatörünü , mavi renkli grafik Genelleştirlmiş Szasz-Mirakyan-Kantorovich operatörünü göstermektedir. Burada sırasıyla $\varsigma=0,09$ ve $\varsigma=0,5$ değerlerimi almıştır. Ayrıca Çizelge 3.1. 'de $\varsigma=0,09$ için μ ve κ'nın farklı değerlerindeki hata payları verilmiştir. Aymı şekilde Çizelge 3.2. 'de $\varsigma=0,5$ için μ ve κ'nın farklı değerlerindeki hata payları verilmiştir.*



Şekil 3.1. $\varsigma = 0,09$ değeri için Genelleştirilmiş Szasz-Mirakyan-Kantorovich operatörü ile Szasz-Kantorovich operatörlerinin $\hbar(\kappa)$ fonksiyonunu düzgün yaklaşımı



Şekil 3.2. $\varsigma = 0,5$ değeri için Genelleşirilmiş Szasz-Mirakyan-Kantorovich operatörü ile Szasz-Kantorovich operatörlerinin $\hbar(\kappa)$ fonksiyonunu düzgün yaklaşımı

Çizelge 3.1. Farklı μ ve κ noktaları için $S_{\mu}(\hbar;\kappa)$ operatörünün $\varsigma = 0.09$ değerindeki nümerik hata payları .

μ/κ	0.5	1.5	2.5	3.5
10	0.942650	0.945607	0.955795	0.955707
25	0.931655	0.931275	0.936127	0.939739
50	0.927803	0.925653	0.927886	0.930659
75	0.926506	0.923690	0.924943	0.926766
100	0.925851	0.922693	0.923434	0.924736
150	0.925200	0.921686	0.921901	0.922662
200	0.924875	0.921186	0.921130	0.921625

Çizelge 3.2. Farklı μ ve κ noktaları için $S_{\mu}(\hbar;\kappa)$ operatörünün $\varsigma = 0.5$ değerindeki nümerik hata payları.

μ/κ	0.4	1.4	2.4
10	0.603943	0.712567	0.756982
25	0.543419	0.662235	0.696790
50	0.521911	0.644368	0.670903
75	0.513635	0.637575	0.660772
100	0.510849	0.635302	0.657367
150	0.507122	0.632264	0.652808
200	0.505262	0.630766	0.650555

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde q-analiz ve Genelleştirilmiş q-Szasz Mirakyan Kantarorovich operatörü tanımlanış ve bazı yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Tanımlanan Genelleştirilmiş q-Szasz Mirakyan Kantarorovich operatörünün süreklilik modülünün özelliklerinden faydalanarak yakınsaklık hızı bulunmuştur.

4.1. q-Szasz-Mirakyan-Kantorovich Pozitif Lineer Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

4.1.1. Quantum analiz (q-analiz)

Tanım 4.1 *q-lar pozitif gerçel sayılar olamak üzere, $\zeta \geq 0$ olan bir ζ sayısının q-genelleşmesi*

$$[\zeta] = \begin{cases} \dfrac{1-q^{\zeta}}{1-q} & , \ q \neq 1 \\ \zeta & , \ q = 1 \end{cases}$$

q-binom katsayısı

$$\begin{bmatrix} \mu \\ \zeta \end{bmatrix} = \frac{[\mu]!}{[\zeta]![\mu-\zeta]!} \qquad (\mu \geq \zeta \geq 0)$$

ve q-faktöriyeli

$$[\zeta]! = \begin{cases} [\zeta][\zeta-1]...[1] & ,\zeta = 1, 2, ... \\ 1 & ,\zeta = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.(Andrews 1999).

Tanım 4.2 *Rastgele alınan bir $\hbar(\kappa)$'in $q-$diferansiyeli*

$$D_q\hbar\hbar(\kappa) = \hbar(q\kappa) - \hbar(\kappa)$$

ile tanımlıdır. Özel olarak $d_q\kappa = (q-1)\kappa$ dir.

Tanım 4.3 *$\hbar$ fonksiyonunun q türevi*

$$D_q\hbar(\kappa) = \frac{D_q\hbar(\kappa)}{d_q\kappa}$$

ile tanımlanır.

Tanım 4.4 $D_q\hbar(\kappa) = \hbar(\kappa)$ *olacak biçimde bir* $\hbar(\kappa)$ *fonksiyonuna* $\hbar(\kappa)$ *fonksiyonunun* $q-$*anti türevi denir ve*

$$\hbar(\kappa) = \int \hbar(\kappa) d_q\kappa$$

ile gösterilir.

Tanım 4.5 $0 < q < 1$ *ve Pozitif değerli* $a < b$ *seçilsin.* $\hbar(\kappa)(\kappa)$*'in* $[0, b]$ *aralık üzerindeki* $q-$*integrali*

$$I_q(\hbar; 0, b) = \int_0^b \hbar(\kappa) d_q\kappa = (1-q)b \sum_{\zeta=0}^{\infty} \hbar(q^j b) q^j \tag{4.1}$$

ile tanımlanır.

Eğer $\hbar(\kappa)$ fonksiyonu, $[0, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ise

$$\lim_{q \to 1^-} \int_0^b \hbar(\kappa) d_q\kappa = \int_0^b \hbar(\kappa) d\kappa$$

dir.

Tanım 4.6 $\hbar(\kappa)$ *fonksiyonunun* $[a, b]$ *aralığındaki* $q-$*integrali*

$$I_q(\hbar; a, b) = \int_a^b \hbar(\kappa) d_q\kappa = \int_0^b \hbar(\kappa) d_q\kappa - \int_0^a \hbar(\kappa) d_q\kappa = (1-q)b \sum_{j=0}^{\infty} (bf(q^j b) - af(q^j a)) q^j \tag{4.2}$$

ile tanımlanır (Kac ve Cheung 1953).

Eğer (4.1) ve (4.2) ile verilen seriler yakınsaksa, o halde, $\hbar$ fonksiyonu sırasıyla $[0, b]$ ve $[a, b]$ aralıklarında $q-$integrallenebilirdir denir.

Lemma 4.7 $0 < a < b$*,* $(0, 1) \in q$ *olsun.* $\hbar$ *fonksiyonunun* $[0, b]$ *aralığında tanımlanmış sürekli artan fonksiyon olduğuna göre*

$$I_q(\hbar; a; b) = \int_a^b \hbar(\kappa) d_q\kappa$$

ile gösterilen $q-$*integral pozitif operatördür.*

İspat. $\hbar$ sürekli artan bir fonksiyon olarak verilsin.Farz edelim ki $\hbar \geqslant 0$ verilsin. Bu takdirde

$$\int_a^b \hbar(\kappa)d_q\kappa = \int_0^b \hbar(\kappa)d_q\kappa - \int_0^a \hbar(\kappa)d_q\kappa = (1-q)b\sum_{j=0}^{\infty}(b\hbar(q^jb) - a\hbar(q^ja))q^j$$

ifadesinde $\hbar$ fonksiyonu pozitif olduğundan $\forall\kappa \in [0,b]$ için $\hbar \geqslant 0$ dır. $\hbar$ fonksiyonu monoton artan olduğundan $b > a$ var olması $\forall\ j = 0,1,2...$ için $\hbar(q^jb) - \hbar(q^ja) > 0$ olmasını gerektirir. Dolaısıyla parantez içerisindeki ifade pozitiftir ve $0 < q < 1$ olduğundan $\int_a^b \hbar(\kappa)d_q\kappa \geqslant 0$ dır ve bu da ispatı tamamlar. □

4.1.2. Operatörün oluşturulması

Bu bölümde amacımız (3.2) ile verilen operatörün q-Szazs-Mirakyan-Kantorovich tipli bir genellemesini oluşturarak yaklaşım özelliklerini incelemektir. (5.1) denleminde kullanılan eksponansiyel fonksiyon e^κ in q-analoğu aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$e_q(\kappa) = \sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\kappa^\mu}{[\mu]!}, \qquad |\kappa| < \frac{1}{1-q}$$

$$E_q(\kappa) = \sum_{\mu=0}^{\infty} q^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}}\frac{\kappa^\mu}{[\mu]!}, \qquad \kappa \in \varsigma$$

Yukarıdaki iki denklemden aşağıdaki eşitlik kolaylıkla elde edilir.

$$e_q(\kappa)E_q(-\kappa) = 1$$

dir.

Genelleştirlmiş Szasz-Mirakyan-Kantarovich operatörünün q-Szasz-Mirakyan-Kantorovich genelleşmesini $\hbar \in [0,A]$ aralık üzerinde q integralinin hesaplanabildiği bir fonksiyon olarak seçilirse, her $\mu,\varsigma \in \mu$ ve $q \in (0,1)$ için

$$S_{\mu,\zeta}(q;\kappa) = e_q(-[\mu(\varsigma+1)]\kappa)q^{\frac{\zeta(\zeta-1)}{2}}\frac{[\mu(\varsigma+1)]\kappa]^\zeta}{[\zeta]!}, \mu = 1,2,3...$$

$$S_{\mu,\varsigma,q}(\hbar;q;\kappa) = [\mu(\varsigma+1)]\sum_{\zeta=0}^{\infty} q^{\zeta+\varsigma}S_{\mu,\zeta}(q;\kappa)\int_{\frac{[\zeta+\varsigma]}{[\mu(\varsigma+1)]q^{\zeta+\varsigma-1}}}^{\frac{[\zeta+\varsigma+1]}{[\mu(\varsigma+1)]q^{\zeta+\varsigma}}} \hbar(t)d_qt \qquad (4.3)$$

ile tanımlayalım. Bu operatörün yaklaşım özelliklerini incelemden önce aşağıdaki lemmaları verelim.

Lemma 4.8 (4.3) *ile tanımlanan operatörde* $\displaystyle\int_{\frac{[\zeta+\varsigma]}{[\mu(\varsigma+1)]q^{\zeta+\varsigma-1}}}^{\frac{[\zeta+\varsigma+1]}{[\mu(\varsigma+1)]q^{\zeta+\varsigma}}} \hbar(t)d_qt$ *ifadesi sırasıyla aşağıdaki eşitlikleri sağlar.*

i) $$\int_{\frac{[\zeta+\varsigma]}{[\mu(\varsigma+1)]q^{\zeta+\varsigma-1}}}^{\frac{[\zeta+\varsigma+1]}{[\mu(\varsigma+1)]q^{\zeta+\varsigma}}} 1d_qt = \frac{1}{q^{\zeta+\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]}$$

ii) $$\int_{\frac{[\zeta+\varsigma]}{[\mu(\varsigma+1)]q^{\zeta+\varsigma-1}}}^{\frac{[\zeta+\varsigma+1]}{[\mu(\varsigma+1)]q^{\zeta+\varsigma}}} td_qt = \frac{[2][\zeta+\varsigma]+q^{\zeta+\varsigma}}{[2]q^{2k+2\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]^2}$$

iii) $$\int_{\frac{[\zeta+\varsigma]}{[\mu(\varsigma+1)]q^{\zeta+\varsigma-1}}}^{\frac{[\zeta+\varsigma+1]}{[\mu(\varsigma+1)]q^{\zeta+\varsigma}}} t^2d_qt = \frac{[3][\zeta+\varsigma]^2+q^{\zeta+\varsigma}[\zeta+\varsigma](1+[2])+q^{2k+2\varsigma}}{[3]q^{3k+3\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]^3}$$

İspat.

$$\begin{aligned}
i) \int_{\frac{[\zeta+\varsigma]}{[\mu(\varsigma+1)]q^{\zeta+\varsigma-1}}}^{\frac{[\zeta+\varsigma+1]}{[\mu(\varsigma+1)]q^{\zeta+\varsigma}}} 1d_qt &= (1-q)\frac{[\zeta+\varsigma+1]}{q^{\zeta+\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]}\sum_{j=0}^{\infty}q^{2j} \\
&\quad -(1-q)\frac{[\zeta+\varsigma]}{q^{\zeta+\varsigma-1}[\mu(\varsigma+1)]}\sum_{j=0}^{\infty}q^{2j} \\
&= (1-q)\left(\frac{[\zeta+\varsigma+1]-[\zeta+\varsigma]q}{q^{\zeta+\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]}\right)\sum_{j=0}^{\infty}q^{j} \\
&= \left(\frac{[\zeta+\varsigma+1]-[\zeta+\varsigma]q}{q^{\zeta+\varsigma}[\mu(\mu+1)]}\right) \\
&= \left(\frac{[\zeta+\varsigma]q+1-[\zeta+\varsigma]q}{q^{\zeta+\varsigma}[\mu(\mu+1)]}\right) \\
&= \frac{1}{q^{\zeta+\varsigma}[\mu(\mu+1)]}
\end{aligned}$$

$$ii) \int_{\frac{[\zeta+\varsigma]}{[\mu(\varsigma+1)]q^{\zeta+\varsigma-1}}}^{\frac{[\zeta+\varsigma+1]}{[\mu(\varsigma+1)]q^{\zeta+\varsigma}}} t d_q t = (1-q)\frac{[\zeta+\varsigma+1]}{q^{\zeta+\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{2j}[\zeta+\varsigma+1]}{q^{\zeta+\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]}$$
$$-(1-q)\frac{[\zeta+\varsigma]}{q^{\zeta+\varsigma-1}[\mu(\varsigma+1)]}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{2j}[\zeta+\varsigma]}{q^{\zeta+\varsigma-1}[\mu(\varsigma+1)]}$$
$$=(1-q)\left(\frac{[\zeta+\varsigma+1]^2-[\zeta+\varsigma]^2q^2}{q^{2k+2\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]^2}\right)\sum_{j=0}^{\infty}q^{2j}$$
$$=\frac{1}{1+q}\left(\frac{([\zeta+\varsigma+1]+[\zeta+\varsigma]q)([\zeta+\varsigma+1]-[\zeta+\varsigma]q)}{q^{2k+2\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]^2}\right)$$
$$=\frac{1}{1+q}\left(\frac{([\zeta+\varsigma]+[\zeta+\varsigma]q+q^{\zeta+\varsigma}}{q^{2k+2\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]^2}\right)$$
$$+\frac{1}{[2]}\left(\frac{(q+1)[\zeta+\varsigma]+q^{\zeta+\varsigma}}{q^{2k+2\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]^2}\right)$$
$$=\frac{1}{[2]}\left(\frac{[2][\zeta+\varsigma]+q^{\zeta+\varsigma}}{q^{2k+2\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]^2}\right)$$

$$iii) \int_{\frac{[\zeta+\varsigma]}{[\mu(\varsigma+1)]q^{\zeta+\varsigma-1}}}^{\frac{[\zeta+\varsigma+1]}{[\mu(\varsigma+1)]q^{\zeta+\varsigma}}} t d_q t = (1-q)\frac{[\zeta+\varsigma+1]}{q^{\zeta+\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{3j}[\zeta+\varsigma+1]^2}{q^{2k+2\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]^2}$$
$$-(1-q)\frac{[\zeta+\varsigma]}{q^{\zeta+\varsigma-1}[\mu(\varsigma+1)]}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{3j}[\zeta+\varsigma]^2}{q^{2k+2\varsigma-2}[\mu(\varsigma+1)]^2}$$
$$=(1-q)\left(\frac{[\zeta+\varsigma+1]^3-[\zeta+\varsigma]^3q^3}{q^{3k+3\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]^3}\right)\sum_{j=0}^{\infty}q^{3j}$$
$$=\left(\frac{1}{1+q+q^2}\right)\frac{1}{q^{3k+3\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]^3}\left((1+q+q^2)[\zeta+\varsigma]^2\right.$$
$$\left.+[\zeta+\varsigma]q^{\zeta+\varsigma}(2+q)+q^{2k+2\varsigma}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{[3]}\right)\left(\frac{[3][\zeta+\varsigma]^2+[\zeta+\varsigma]q^{\zeta+\varsigma}(1+[2])+q^{2k+2\varsigma}}{q^{3k+3\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]^3}\right)$$

□

Lemma 4.9 $S_{\mu,\varsigma,q}(\hbar;q;\kappa)$ *operatörü için*

i) $S_{\mu,\varsigma,q}(1;q;\kappa)=1$

ii) $S_{\mu,\varsigma,q}(t;q;\kappa)=\dfrac{\kappa}{q^{\varsigma+1}}+\dfrac{[\varsigma+1]+[\varsigma]}{[2][\mu(\varsigma+1)]q^{\varsigma}}$

iii) $S_{\mu,\varsigma,q}(t^2;q;\kappa) = \dfrac{\kappa^2}{q^{2\varsigma+3}} + \kappa\left(\dfrac{[3]([\varsigma+1]+[\varsigma]q)+[1+[2]]q^{\varsigma+1}}{[3[\mu(\varsigma+1)]q^{2\varsigma+2}}\right)$
$+\dfrac{q^{2\varsigma}+q^{\varsigma}[\varsigma](1+[2])+[3][\varsigma]^2}{[3][\mu(\varsigma+1)]^2q^{2\varsigma}}$

dir.

İspat.

$$i)S_{\mu,\varsigma,q}(1;q;\kappa) = [\mu(\varsigma+1)]\sum_{\zeta=0}^{\infty} q^{\zeta+\varsigma}S_{\mu,\zeta}(q;\kappa)\int\limits_{\frac{[\zeta+\varsigma]}{[\mu(\varsigma+1)]q^{\zeta+\varsigma-1}}}^{\frac{[\zeta+\varsigma+1]}{[\mu(\varsigma+1)]q^{\zeta+\varsigma}}} d_qt$$
$$= [\mu(\varsigma+1)]\sum_{\zeta=0}^{\infty} q^{\zeta+\varsigma}S_{\mu,\zeta}(q;\kappa)\left(\frac{1}{q^{\zeta+\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]}\right)$$
$$= 1$$

$$ii)S_{\mu,\varsigma,q}(t;q;\kappa) = [\mu(\varsigma+1)]\sum_{\zeta=0}^{\infty} q^{\zeta+\varsigma}S_{\mu,\zeta}(q;\kappa)\int\limits_{\frac{[\zeta+\varsigma]}{[\mu(\varsigma+1)]q^{\zeta+\varsigma-1}}}^{\frac{[\zeta+\varsigma+1]}{[\mu(\varsigma+1)]q^{\zeta+\varsigma}}} td_qt$$
$$= [\mu(\varsigma+1)]\sum_{\zeta=0}^{\infty} q^{\zeta+\varsigma}S_{\mu,\zeta}(q;\kappa)\left(\frac{[2][\zeta+\varsigma]+q^{\zeta+\varsigma}}{[2]q^{2k+2\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]^2}\right)$$
$$= \sum_{\zeta=0}^{\infty} S_{\mu,\zeta}(q;\kappa)\frac{[\zeta+\varsigma]}{q^{\zeta+\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]} + \sum_{\zeta=0}^{\infty} S_{\mu,\zeta}(q;\kappa)\frac{1}{[2][\mu(\varsigma+1)]}$$
$$= e_q(-[\mu(\varsigma+1)]\kappa)\sum_{\zeta=0}^{\infty} q^{\frac{\zeta(\zeta-1)}{2}}\frac{[\mu(\varsigma+1)]\kappa]^{\zeta}}{[\zeta]!}\left(\frac{[\zeta+\varsigma]}{q^{\zeta+\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]}\right)$$
$$+\frac{1}{[2][\mu(\varsigma+1)]}$$
$$= e_q(-[\mu(\varsigma+1)]\kappa)\sum_{\zeta=0}^{\infty} q^{\frac{\zeta(\zeta-1)}{2}}\frac{[\mu(\varsigma+1)]\kappa]^{\zeta}}{[\zeta]!}\left(\frac{[\zeta]}{q^{\zeta+\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]}\right)$$
$$+\frac{[\varsigma]}{q^{\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]}+\frac{1}{[2][\mu(\varsigma+1)]}$$
$$= e_q(-[\mu(\varsigma+1)]\kappa)\sum_{\zeta=1}^{\infty} q^{\zeta(\zeta-1)}\frac{[\mu(\varsigma+1)]]^{\zeta-1}\kappa^{\zeta}}{[\zeta-1]!q^{\zeta+\varsigma}}$$
$$+\frac{[\varsigma]}{q^{\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]}+\frac{1}{[2][\mu(\varsigma+1)]}$$
$$= e_q(-[\mu(\varsigma+1)]\kappa)\sum_{\zeta=0}^{\infty} q^{\frac{\zeta(\zeta-1)}{2}}q^{\zeta}\frac{[\mu(\varsigma+1)]]^{\zeta}\kappa^{\zeta+1}}{[\zeta]!q^{\zeta+\varsigma+1}}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{[\varsigma]}{q^{\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]}+\frac{1}{[2][\mu(\varsigma+1)]}\\
&=\frac{\kappa}{q^{\varsigma+1}}+\frac{[\varsigma+1]+[\varsigma]}{[2][\mu(\varsigma+1)]q^{\varsigma}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
iii)S_{\mu,\varsigma,q}(t^2;q;\kappa)&=[\mu(\varsigma+1)]\sum_{\zeta=0}^{\infty}q^{\zeta+\varsigma}S_{\mu,\zeta}(q;\kappa)\int\limits_{\frac{[\zeta+\varsigma]}{[\mu(\varsigma+1)]q^{\zeta+\varsigma-1}}}^{\frac{[\zeta+\varsigma+1]}{[\mu(\varsigma+1)]q^{\zeta+\varsigma}}}t^2d_qt\\
&=[\mu(\varsigma+1)]\sum_{\zeta=0}^{\infty}q^{\zeta+\varsigma}S_{\mu,\zeta}(q;\kappa)\left(\frac{[3][\zeta+\varsigma]^2+q^{\zeta+\varsigma}[\zeta+\varsigma](1+[2])+q^{2k+2\varsigma}}{[3]q^{3k+3\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]^3}\right)\\
&=\sum_{\zeta=0}^{\infty}S_{\mu,\zeta}(q;\kappa)\frac{[\zeta+\varsigma]^2}{q^{2k+2\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]^2}+\sum_{\zeta=0}^{\infty}S_{\mu,\zeta}(q;\kappa)\frac{[\zeta+\varsigma](1+[2])}{[3]q^{\zeta+\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]^2}\\
&+\sum_{\zeta=0}^{\infty}S_{\mu,\zeta}(q;\kappa)\frac{1}{[3][\mu(\varsigma+1)]^2}\\
&=\sum_{\zeta=0}^{\infty}S_{\mu,\zeta}(q;\kappa)\frac{[\zeta]^2}{q^{2k+2\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]^2}+\frac{2[\varsigma]}{[\mu(\varsigma+1)]}\sum_{\zeta=0}^{\infty}S_{\mu,\zeta}(q;\kappa)\frac{[\zeta]}{q^{\zeta+2\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]}\\
&+\frac{[\varsigma]^2}{q^{2\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]^2}+\left(\frac{1+[2]}{[3][\mu(\varsigma+1)]}\right)\sum_{\zeta=0}^{\infty}S_{\mu,\zeta}(q;\kappa)\frac{[\zeta]}{q^{\zeta+\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]}\\
&+\frac{[\varsigma](1+[2])}{[3]q^{\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]^2}+\frac{1}{[3][\mu(\varsigma+1)]^2}\\
&=e_q(-[\mu(\varsigma+1)]\kappa)\sum_{\zeta=1}^{\infty}q^{\frac{\zeta(\zeta-1)}{2}}\frac{[\mu(\varsigma+1)]]^{\zeta-1}\kappa^{\zeta}}{[\zeta-1]!}\left(\frac{[\zeta-1]+q^{\zeta-1}}{q^{2k+2\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]}\right)\\
&+e_q(-[\mu(\varsigma+1)]\kappa)\left(\frac{2[\varsigma]}{[\mu(\varsigma+1)]}\right)\sum_{\zeta=1}^{\infty}q^{\frac{\zeta(\zeta-1)}{2}}\frac{[\mu(\varsigma+1)]]^{\zeta-1}\kappa^{\zeta}}{[\zeta-1]!q^{\zeta+2\varsigma}}\\
&+\frac{[\varsigma]^2}{q^{2\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]^2}\\
&+e_q(-[\mu(\varsigma+1)]\kappa)\left(\frac{1+[2]}{[3][\mu(\varsigma+1)]}\right)\sum_{\zeta=1}^{\infty}q^{\frac{\zeta(\zeta-1)}{2}}\frac{[\mu(\varsigma+1)]]^{\zeta-1}\kappa^{\zeta}}{[\zeta-1]!q^{\zeta+\varsigma}}\\
&+\frac{[\varsigma](1+[2])}{[3]q^{\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]^2}+\frac{1}{[3][\mu(\varsigma+1)]^2}\\
&=e_q(-[\mu(\varsigma+1)]\kappa)\sum_{\zeta=2}^{\infty}q^{\frac{\zeta(\zeta-1)}{2}}\frac{[\mu(\varsigma+1)]]^{\zeta-2}\kappa^{\zeta}}{[\zeta-2]!q^{2k+2\varsigma}}\\
&+e_q(-[\mu(\varsigma+1)]\kappa)\sum_{\zeta=1}^{\infty}q^{\frac{\zeta(\zeta-1)}{2}}\frac{[\mu(\varsigma+1)]]^{\zeta-1}\kappa^{\zeta}}{[\zeta-1]!}\left(\frac{q^{\zeta-1}}{q^{2k+2\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]}\right)\\
&+e_q(-[\mu(\varsigma+1)]\kappa)\left(\frac{2[\varsigma]}{[\mu(\varsigma+1)]}\right)\sum_{\zeta=0}^{\infty}q^{\frac{\zeta(\zeta-1)}{2}}q^{\zeta}\frac{[\mu(\varsigma+1)]]^{\zeta}\kappa^{\zeta+1}}{[\zeta]!q^{\zeta+1+2\varsigma}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{[\varsigma]^2}{q^{2\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]^2}\\
&+e_q(-[\mu(\varsigma+1)]\kappa)\left(\frac{1+[2]}{[3][\mu(\varsigma+1)]}\right)\sum_{\zeta=0}^{\infty}q^{\frac{\zeta(\zeta-1)}{2}}q^{\zeta}\frac{[\mu(\varsigma+1)]]^{\zeta}\kappa^{\zeta+1}}{[\zeta]!q^{\zeta+\varsigma+1}}\\
&+\frac{[\varsigma](1+[2])}{[3]q^{\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]^2}+\frac{1}{[3][\mu(\varsigma+1)]^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=e_q(-[\mu(\varsigma+1)]\kappa)\sum_{\zeta=0}^{\infty}q^{\frac{\zeta(\zeta-1)}{2}}q^{2k+1}\frac{[\mu(\varsigma+1)]]^{\zeta}\kappa^{\zeta+2}}{[\zeta-2]!q^{2k+2\varsigma+4}}\\
&+e_q(-[\mu(\varsigma+1)]\kappa)\sum_{\zeta=0}^{\infty}q^{\frac{\zeta(\zeta-1)}{2}}q^{\zeta}\frac{[\mu(\varsigma+1)]]^{\zeta}\kappa^{\zeta+1}}{[\zeta]!q^{\zeta+2\varsigma+2}[\mu(\varsigma+1)]}\\
&+\frac{2[\varsigma]\kappa}{[\mu(\varsigma+1)]q^{2\varsigma+1}}+\frac{(1+[2])\kappa}{[3]q^{\varsigma+1}[\mu(\varsigma+1)]}+\frac{[\varsigma]^2}{q^{2\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]^2}\\
&+\frac{[\varsigma](1+[2])}{[3]q^{\varsigma}[\mu(\varsigma+1)]^2}+\frac{1}{[3][\mu(\varsigma+1)]^2}\\
&=\frac{\kappa^2}{q^{2\varsigma+3}}+\kappa\left(\frac{[3]([\varsigma+1]+[\varsigma]q)+[1+[2]]q^{\varsigma+1}}{[3][\mu(\varsigma+1)]q^{2\varsigma+2}}\right)+\frac{q^{2\varsigma}+q^{\varsigma}[\varsigma](1+[2])+[3][\varsigma]^2}{[3][\mu(\varsigma+1)]^2q^{2\varsigma}}
\end{aligned}
$$

□

4.1.3. Genelleştirilmiş q-Szasz-Mirakyan-Kantorovich operatörünün yaklaşım özellikleri

Bu bölümde $S_{\mu,\varsigma,q}(\hbar;q;\kappa)$ operratörünün düzgün yakınsaklığını inceleyeceğiz.

Teorem 4.10 *$q=(q_\mu)$ dizisi $0<q_\mu<1$ olmak üzere*

$$\lim_{\mu\to\infty}q_\mu=1\quad ve\quad \lim_{\mu\to\infty}\frac{1}{[\mu]}=0 \tag{4.4}$$

şartları sağlansın.Bu taktirde, $[0,A]$ aralığında $\hbar$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere, bu aralık üzerinde

$$\lim_{\mu\to\infty}\|S_{\mu,\varsigma,q_\mu}(\hbar;q_\mu;\kappa)-\hbar\|_{C[0,A]}=0 \tag{4.5}$$

dir.

İspat. S_{μ,ς,q_μ} pozitif lineer operatörünün $\mu\to\infty$ iken $C[0,A]$ uzayında $\|\hbar\|_{C[0,A]}$ normuna göre $\hbar$ fonksiyonuna düzgün yakınsama için tanımlanmış operatörün yukarıda verilen (3.15) şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir.

$$i)\|S_{\mu,\varsigma,q_\mu} - 1\|_{C[0,A]} = 0$$

$$S_{\mu,\varsigma,q_\mu}(1;\kappa) \rightrightarrows 1$$

$$\begin{aligned} ii)\|S_{\mu,\varsigma,q_\mu}t - \kappa\|_{C[0,A]} &= \max_{0\leqslant\kappa\leqslant A}\Big|\frac{\kappa}{q_\mu^{\varsigma+1}} + \frac{[\varsigma+1]+[\varsigma]}{[2][\mu(\varsigma+1)]q_\mu^r} - \kappa\Big| \\ &= \Big|\kappa\Big(\frac{1}{q_\mu^{\varsigma+1}} - 1\Big) + \frac{[\varsigma+1]+[\varsigma]}{[2][\mu(\varsigma+1)]q_\mu^r}\Big| \\ &< \Big|\kappa\left(\frac{1}{q_\mu^{\varsigma+1}} - 1\right) + \frac{[\varsigma+1]}{[\mu]q_\mu^r}\Big| \end{aligned}$$

$$\|S_{\mu,\varsigma,q_\mu}t - \kappa\|_{C[0,A]} \leq A\left(\frac{1}{q_\mu^{\varsigma+1}} - 1)\right) + \frac{[\varsigma+1]}{[\mu]q_\mu^r}$$

$$\lim_{\mu\to\infty}\|S_{\mu,\varsigma,q_\mu}t - \kappa\|_{C[0,A]} = \lim_{\mu\to\infty} A\left(\frac{1}{q_\mu^{\varsigma+1}} - 1)\right) + \frac{[\varsigma+1]}{[\mu]q_\mu^r} = 0$$

$$S_{\mu,\varsigma,q_\mu}(t;\kappa) \rightrightarrows \kappa$$

$$\begin{aligned} iii)\|S_{\mu,\varsigma,q_\mu}t^2 - \kappa^2\|_{C[0,A]} &= \max_{0\leqslant\kappa\leqslant A}\Big|\frac{\kappa^2}{q_\mu^{2\varsigma+3}} + \kappa\left(\frac{[3]([\varsigma+1]+[\varsigma]q_\mu)+[1+[2]]q_\mu^{\varsigma+1}}{[3][\mu(\varsigma+1)]q_\mu^{2\varsigma+2}}\right) \\ &\quad + \frac{q_\mu^{2\varsigma} + q_\mu^{\varsigma}[\varsigma](1+[2]) + [3][\varsigma]^2}{[3][\mu(\varsigma+1)]^2 q_\mu^{2\varsigma}} - \kappa^2\Big| \\ &< \Big|\kappa^2\frac{1}{q_\mu^{2\varsigma+3}-1} + \kappa\left(\frac{2[\varsigma+1]+1}{[\mu(\varsigma+1)]q_\mu^{2\varsigma+2}}\right) + \frac{[\varsigma+1]}{[\mu(\varsigma+1)]q_\mu^{2\varsigma}}\Big| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|S_{\mu,\varsigma,q_\mu}t^2 - \kappa^2\|_{C[0,A]} &\leq A^2\frac{1}{q_\mu^{2\varsigma+3}-1} + A\left(\frac{2[\varsigma+1]+1}{[\mu(\varsigma+1)]q_\mu^{2\varsigma+2}}\right) + \frac{[\varsigma+1]}{[\mu(\varsigma+1)]q_\mu^{2\varsigma}} \\ &\leq A^2\frac{1}{q_\mu^{2\varsigma+3}-1} + A\left(\frac{2[\varsigma+1]+1}{[\mu]q_\mu^{2\varsigma+2}}\right) + \frac{[\varsigma+1]}{[\mu]q_\mu^{2\varsigma}} \end{aligned}$$

$$\lim_{\mu\to\infty}\|S_{\mu,\varsigma,q_\mu}t^2 - \kappa^2\|_{C[0,A]} = \lim_{\mu\to\infty} A^2\frac{1}{q_\mu^{2\varsigma+3}-1} + A\left(\frac{2[\varsigma+1]+1}{[\mu]q_\mu^{2\varsigma+2}}\right) + \frac{[\varsigma+1]}{[\mu]q_\mu^{2\varsigma}} = 0$$

$$S_{\mu,\varsigma,q_\mu}(t^2;\kappa) \rightrightarrows \kappa^2$$

dir. O halde, S_{μ,ς,q_μ} pozitif lineer operatörünün $\mu \to \infty$ iken $C[0,A]$ uzayında $\|\hbar\|_{C[0,A]}$ normuna göre $\hbar$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. □

4.2. Genelleştirilmiş q-Szasz-Mirakyan-Kantorovich Operatörünün Yaklaşım Hızı

Lemma 4.11 $S_{\mu,\varsigma,q}$ *operatörünün bazımerkezi momentleri aşağıda gösterilmiştir.*

a) $S_{\mu,\varsigma,q}\left((t-\kappa)^0\right)=1$

b) $S_{\mu,\varsigma,q}\left((t-\kappa)^1\right)=\kappa\left(\frac{1}{q^{\varsigma+1}}-1\right)+\frac{[\varsigma+1]+[\varsigma]}{[2][\mu(\varsigma+1)]q^{\varsigma}}$

c) $S_{\mu,\varsigma,q}\left((t-\kappa)^2\right)=\kappa^2\left(\frac{1-2q^{\varsigma+2}+q^{2\varsigma+3}}{q^{2\varsigma+3}}\right)$
$+\kappa\left(\frac{[2][3][\varsigma+1]([2]-q^{\varsigma+1})}{[2][3][\mu(\varsigma+1)]q^{2\varsigma+2}}+\frac{1+[2]}{[3][\mu(\varsigma+1)]q^{\varsigma+1}}-\frac{2}{[2][\mu(\varsigma+1)]}\right)$
$+\frac{q^{2\varsigma}+q^{\varsigma}[\varsigma](1+[2])+[3][\varsigma]}{q^{2\varsigma}[3][\mu(\varsigma+1)]^2}$

Teorem 4.12 $q=(q_\mu)$ *dizisi* $0<q_\mu<1$ *alınırsa,* $\forall\hbar\in C[0,A]$ *için* S_{μ,ς,q_μ} *operatörünün süreklililik modülü ile yaklaşım hızı,*

$$|S_{\mu,\varsigma,q_\mu}(\hbar;q_\mu;\kappa)-\hbar(\kappa)|\leq 2\omega\left(\hbar;\frac{1}{\sqrt{\upsilon_{\mu,\varsigma,q_\mu}}}\right) \tag{4.6}$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned}
|S_{\mu,\varsigma,q_\mu}(\hbar;q_\mu;\kappa)-\hbar(\kappa)| &= |S_{\mu,\varsigma,q_\mu}(\hbar(t);q_\mu;\kappa)-\hbar(\kappa)S_{\mu,\varsigma,q_\mu}(1;q_\mu;\kappa)|\\
&= |S_{\mu,\varsigma,q_\mu}(\hbar(t);q_\mu;\kappa)-S_{\mu,\varsigma,q_\mu}(\hbar(\kappa);q_\mu;\kappa)|\\
&= |S_{\mu,\varsigma,q_\mu}(\hbar(t)-\hbar(\kappa));q_\mu;\kappa)|\\
&\leq S_{\mu,\varsigma,q_\mu}(|\hbar(t)-\hbar(\kappa)|;q_\mu;\kappa)\\
&\leq S_{\mu,\varsigma,q_\mu}(\omega(\hbar;|t-\kappa|;q_\mu;\kappa))=S_{\mu,\varsigma,q_\mu}\left(\omega\left(\hbar;\frac{|t-\kappa|}{\delta}\delta\right);q_\mu;\kappa\right)\\
&\leq S_{\mu,\varsigma,q_\mu}\left(\left(1+\frac{|t-\kappa|}{\delta}\right)\omega(\hbar;\delta);q_\mu;\kappa\right)\\
&\leq \omega(\hbar;\delta)S_{\mu,\varsigma,q_\mu}\left(\left(1+\frac{|t-\kappa|}{\delta}\right);q_\mu;\kappa\right)\\
&\leq \omega(\hbar;\delta)\left[S_{\mu,\varsigma,q_\mu}(1;q_\mu;\kappa)+\frac{1}{\delta}+S_{\mu,\varsigma,q_\mu}(|t-\kappa|;q_\mu;\kappa)\right]\\
&\leq \omega\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{S_{\mu,\varsigma,q_\mu}(t-\kappa)^2};q_\mu;\kappa\right)\\
&\leq \omega\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\kappa^2\left(\frac{1}{q^{2\varsigma+3}}\right)+\kappa\left(\frac{3[\varsigma+1]}{[\mu(\varsigma+1)]q^{2\varsigma+2}}\right)+\frac{[\varsigma+1]^2}{[\mu(\varsigma+1)]q^{2\varsigma}}}\right)
\end{aligned}$$

$$\leq \omega\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\kappa^2\left(\frac{1}{q^{2\varsigma+3}}\right)+\kappa\left(\frac{3[\varsigma+1]}{[\mu]q^{2\varsigma+2}}\right)+\frac{[\varsigma+1]^2}{[\mu]q^{2\varsigma}}}\right)$$
$$\leq \omega\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{A^2\left(\frac{1}{q^{2\varsigma+3}}\right)+A\left(\frac{3[\varsigma+1]}{[\mu]q^{2\varsigma+2}}\right)+\frac{[\varsigma+1]^2}{[\mu]q^{2\varsigma}}}\right)$$
$$\upsilon_{\mu,\varsigma,q_\mu}=\delta=\frac{1}{\sqrt{A^2\left(\frac{1}{q^{2\varsigma+3}}\right)+A\left(\frac{3[\varsigma+1]}{[\mu]q^{2\varsigma+2}}\right)+\frac{[\varsigma+1]^2}{[\mu]q^{2\varsigma}}}}\quad \text{alınırsa}$$
$$\leq 2\omega(\hbar;\frac{1}{\sqrt{\upsilon_{\mu,\varsigma,q_\mu}}})$$

□

4.3. Genelleştirilmiş q-Szasz-Mirakyan-Kantorovich Operatörünün İstatisitksel Yakınsaklığı

Bu bölümde istatistiksel yakınsaklık tanımlanıp (4.3) ile tanımlanan operatörün istatistiksel yakınsaklığı incelenecektir.

4.3.1. İstatistiksel yakınsaklık

Doğal sayılar kümesinin kapsadığı bir K kümesi alınsın.

$$K_\mu=\{\zeta\leq\mu:\zeta\in K\}$$

olsun. İlk olarak yoğunluk kavramının tanımını verelim.

Tanım 4.13 *Bir $K\subset N$ alt kümesi için*

$$\lim_{\mu}\frac{1}{\mu}|K_\mu|$$

limiti hesaplanabliyor ise, bu limitin sonucuna seçtiğimiz kümenin(K) yoğunluğu denir. $\delta(K)$ şeklinde ifade edilir (Niven vd. 1991). Ayrıca K kümesinin eleman sayısı $|K|$'dır.

Tanım 4.14 $\kappa:(\kappa_k)$ *gerçel terimli dizi olarak alınsın. Eğer pozitif ε sayısı için,*

$$\delta\{\zeta:|\kappa_k-L|\geq\varepsilon\}=0$$

olmak şartı ile bir L sabiti bulunabiliyorsa, κ dizisi L sabitine istatistiksel olarak yakınsıyor denir.

$$st - \lim_{\mu} \kappa_k = L$$

şeklinde ifade edilir (Fast 1951).

Pozitif lineer operatörlerin istatistiksel yaklaşımınıgösteren korovkin tipli teoremi aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 4.15 *(orhan ve Gadjiev 2022) A_μ pozitif lineer operatörler dizisi $[a, b]$ aralığındaki sürekli fonksiyon sınırlı fonksiyon uzayına tanımlı olsun. $e_v(t) = t^v$, $v = 0, 1, 2$ için*

$$st - \lim_{\mu} \|A_\mu(e_v; .) - e_v\|_{C[a,b]} = 0$$

koşullarını yerine getirse, $\hbar \in C[a, b]$ için

$$st - \lim_{\mu} \|A_\mu(\hbar; .) - \hbar(.)\|_{C[a,b]} = 0$$

sağlanır.

4.3.2. Genelleştirlmiş q-Szasz-Mirakyan-Kantorovich operatörünün istatistiksel yakınsaklığı

Teorem 4.16 *$q = (q_\mu)$ dizi ve $0 < q_\mu < 1$ olmak üzere*

$$st - \lim_{\mu} q_\mu = 1, st - \lim_{\mu} \frac{1}{[\mu]} = 0 \quad (4.7)$$

şartları sağlansın.O halde $\hbar$, $[0, A]$ aralığında sürekli ve monoton artan bir fonsiyon olmak üzere ,(4.3) ile tanımlı operatörü için

$$st - \lim_{\mu} \|S_{\mu,\varsigma,q_\mu}\hbar(.) - \hbar(.)\|_{C[0,A]} = 0 \quad (4.8)$$

sağlanır.

İspat.

$$i) st - \lim_{\mu} \|S_{\mu,\varsigma,q_\mu}(e_0) - e_0\|_{C[0,A]} = 0$$

olduğu açıktır.

$$ii)\|S_{\mu,\varsigma,q_\mu}(e_1)-e_1\|_{C[0,A]}\leq A\left(\frac{1}{q_\mu^{\varsigma+1}}-1)\right)+\frac{[\varsigma+1]}{[\mu]q_\mu^r} \tag{4.9}$$

şimdi de $\varepsilon>0$ için aşağıdaki kümeleri tanımlayalım.

$$T:=\{\zeta:\|S_{\zeta,\varsigma,q_\mu}(e_1)-e_1\|_{C[0,A]}\geq\varepsilon\}$$

$$T_1:=\Big\{\zeta:\left(A\frac{1}{q_k^{\varsigma+1}}-1\geq\frac{\varepsilon}{2}\right)\Big\}$$

$$T_2:=\Big\{\zeta:\left(\frac{[\varsigma+1]}{q_k^r}\frac{1}{[\zeta]}\geq\frac{\varepsilon}{2}\right)\Big\}$$

(4.9) eşitsizliğinden $T\subseteq T_1\cup T_2$ olduğu açıktır. Bu durumda

$$\begin{aligned}\delta\{\zeta\leq\mu:\|S_{\zeta,\varsigma,q_\mu}(e_1)-e_1\|_{C[0,A]}\geq\varepsilon\}&\leq\delta\{\zeta\leq\mu:A\frac{1}{q_k^{\varsigma+1}}-1\geq\frac{\varepsilon}{2}\}\\&+\delta\{\zeta\leqslant\mu:\frac{[\varsigma+1]}{q_k^r}\frac{1}{[\zeta]}\geq\frac{\varepsilon}{2}\}\end{aligned}$$

yazabiliriz. (4.7) koşullarından

$$st-\lim_\mu A\left(\frac{1}{q_\mu^{\varsigma+1}}-1\right)=0$$

$$st-\lim_\mu\left(\frac{[\varsigma+1]}{q_\mu^r}\frac{1}{[\mu]}\right)=0$$

olduğu görülür. Böylece yoğunluk tanımından

$$\delta\{\zeta\leq\mu:A\frac{1}{q_k^{\varsigma+1}}-1\geq\frac{\varepsilon}{2}\}=0$$

ve

$$\delta\Big\{\zeta\leq\mu:\lim_k\frac{[\varsigma+1]}{q_k^r}\frac{1}{[\zeta]}\geq\frac{\varepsilon}{2}\Big\}=0$$

dir ve bu da bize

$$st-\lim_\mu\|S_{\mu,\varsigma,q_\mu}(e_2)-e_2\|_{C[0,A]}=0$$

olduğunu verir.

$$iii)\|S_{\mu,\varsigma,q_\mu}(e_2)-e_2\|_{C[0,A]}\leq A^2\frac{1}{q_\mu^{2\varsigma+3}-1}+A\left(\frac{2[\varsigma+1]+1}{[\mu]q_\mu^{2\varsigma+2}}\right)+\frac{[\varsigma+1]}{[\mu]q_\mu^{2\varsigma}} \tag{4.10}$$

elde ederiz. Burada eğer,

$$\varphi_\mu = A^2\left(\frac{1}{q_\mu^{2\varsigma+3}} - 1\right)$$
$$\eta_\mu = A\left(\frac{2[\varsigma+1]+1}{q_\mu^{2\varsigma+2}}\right)\frac{1}{[\mu]}$$
$$\varsigma_\mu = \left(\frac{[\varsigma+1]}{q_\mu^{2\varsigma}}\right)\frac{1}{[\mu]^2}$$

seçilirse, (4.7) koşullarından

$$st-\lim_\mu \varphi_\mu = st-\lim_\mu \varsigma_\mu = st-\lim_\mu \eta_\mu = 0$$

olduğu kolaylıkla görülür.

$$U := \{\zeta : \|S_{\zeta,\varsigma,q_\mu}(e_2) - e_2\|_{C[0,A]} \geq \varepsilon\}$$
$$U_1 := \{\zeta : \varphi_k \geq \frac{\varepsilon}{3}\}$$
$$U_2 := \{\zeta : \eta_k \geq \frac{\varepsilon}{3}\}$$
$$U_3 := \{\zeta : \varsigma_k \geq \frac{\varepsilon}{3}\}$$

kümelerini tanımlayalım. (4.10) eşitsizliğinden $U \subseteq U_1 \cup U_2 \cup U_3$ olduğu açıktır. Dolayısıyla buradan

$$\delta\{\zeta \leq \mu : \|S_{\zeta,\varsigma,q_\mu}(e_2) - e_2\|_{C[0,A]} \geq \varepsilon\} \leq \delta\{\zeta \leq \mu : \varphi_k \geq \frac{\varepsilon}{3}\} + \delta\{\zeta \leqslant \mu : \eta_k \geq \frac{\varepsilon}{3}\}$$
$$+ \delta\{\zeta \leqslant \mu : \varsigma_k \geq \frac{\varepsilon}{3}\}$$

yazabiliriz.(4.7) koşullarından

$$st-\lim_\mu \varphi_\mu = 0$$
$$st-\lim_\mu \eta_\mu = 0$$
$$st-\lim_\mu \varsigma_\mu = 0$$

olduğu görülür. Böylece yoğunluk tanımından

$$\delta\{\zeta \leq \mu : \varphi_k\} = 0$$
$$\delta\{\zeta \leq \mu : \eta_k\} = 0$$
$$\delta\{\zeta \leq \mu : \varsigma_k\} = 0$$

dir ve bu da bize

$$st-\lim_\mu \|S_{\mu,\varsigma,q_\mu}(e_2) - e_2\|_{C[0,A]} = 0$$

olduğunu verir. □

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

İlk olarak $S_{\mu,\varsigma} : C[0,A] \to C[0,A]$ olmak üzere,

$$S_{\mu,\varsigma}(\hbar;\kappa) = \mu(\varsigma+1)e^{-\mu(\varsigma+1)\kappa}\sum_{\zeta=0}^{\infty}\frac{[\mu(\varsigma+1)\kappa]^{\zeta}}{\zeta!}\int_{\frac{\zeta+\varsigma}{\mu(\varsigma+1)}}^{\frac{\zeta+\varsigma+1}{\mu(\varsigma+1)}}\hbar(t)dt$$

Genelleştirilmiş Szasz-Mirakyan-Kantorovich operatörleri tanımlanmıştır. $S_{\mu,\varsigma}$ Genelleştirilmiş Szasz-Mirakyan-Kantorovich operatörünün yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Öncelikle tanımlanan Genelleştirilmiş Szasz-Mirakyan-Kantorovich operatörünün lineer ve pozitif operatör olduğu ifade ve ispat edilmiştir. Daha sonra verilen Korovkin teoreminin şartlarının sağlandığı kontrol edilmiştir. Sürekli fonksiyonlar uzayına ait keyfi bir $\hbar$ fonksiyonuna $S_{\mu,\varsigma}$ Genelleştirilmiş Szasz-Mirakyan-Kantorovich operatörü ile yaklaşımın düzgün olacağı ispatlanmış ve her $\hbar \in C[0,A]$ için

$$\lim_{\mu\to\infty}\|S_{\mu,\varsigma}\hbar - h\|_{C[0,A]} = 0$$

sağlanacağı yani

$$S_{\mu,\varsigma}(\hbar;\kappa) \rightrightarrows \hbar(\kappa)$$

sonucu elde edilmişitir.

Daha sonra süreklilik modülü ve özellikleri tanımlanmış ve tanımlanan bu süreklilik modülünün özellikleri kullanılarak yaklaşımın hızı hesaplanmıştır.

Lipschitz koşulları tanımlanmış ve Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlara $S_{\mu,\varsigma}$ Genelleştirilmiş Szasz-Mirakyan-Kantorovich operatörü ile yakınsama durumları hesaplanmış ve bu yakınsamanın da düzgün olduğu gösterilmiştir.

Tezin 3.bölümünde ise verilen operatörün q-Szazs-Mirakyan-Kantorovich tipli bir genellemesini oluşturarak yaklaşım özelliklerini incelemektir. Genelleştirlmiş Szasz-Mirakyan-Kantarovich operatörünün q-Szasz-Mirakyan-Kantorovich genelleşmesini $\hbar \in [0, A]$ aralık üzerinde q-integrallenin hesaplanabildiği bir fonksiyon olarak alınsın. $\forall \mu, \varsigma \in N$ ve $q \in (0,1)$ için

$$S_{\mu,\varsigma,q}(\hbar; q; \kappa) = [\mu(\varsigma+1)] \sum_{\zeta=0}^{\infty} q^{\zeta+\varsigma} S_{\mu,\zeta}(q;\kappa) \int\limits_{\frac{[\zeta+\varsigma]}{[\mu(\varsigma+1)]q^{\zeta+\varsigma-1}}}^{\frac{[\zeta+\varsigma+1]}{[\mu(\varsigma+1)]q^{\zeta+\varsigma}}} \hbar(t) d_q t \qquad (5.1)$$

operatörü tanımlanmıştır. Burada da $S_{\mu,\varsigma,q}$ genelleştirilmiş q-Szasz-Mirakyan-Kantorovich operatörünün yaklaşım özellikleri incelenmiştir.Lineer ve pozitif operatör oldupu gösterildikten sonra verilen Korovkin teoreminin şartlarının sağlandığı kontrol edilmiştir.Sürekli fonksiyonlar uzayına ait keyfi bir $\hbar$ fonksiyonuna $S_{\mu,\varsigma,q}$ Genelleştirilmiş q-Szasz-Mirakyan-Kantorovich operatörü ile yaklaşımın düzgün olacağı ispatlanmış ve her $\mu \to \infty$ iken $C[0, A]$ uzayında $\|\hbar\|_{C[0,A]}$ normuna göre $\hbar$ fonksiyonuna düzgün yaklaşmanın mümkün olduğu sonucuna ulaşılmıştır.Süreklilik modülünün özellikleri ve Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar kullanılarak yaklaşımın hızı hesaplanmıştır. Daha sobra istatisitksel..... Tezin son bölümünde ise Maple programı kullanılarak nümerik örnekler verilmiştir. İki farklı sürekli fonksiyon için $S_{\mu,\varsigma}$ Genelleştirilmiş Szasz-Mirakyan-Kantorovich operatörünün belirli μ ve ς değerlerindeki grafikleri çizdirilmiştir.

5.2. Öneriler

pozitif lineer operatörler ile yaklaşım alanında yukarıdaki bölümlerde gördüğümüz gibi bir çok operatör üretilmiş ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Günümüzde hala bu çalışmalar devam ederken matematiğe ve diğer disiplinlere destek olmaya ve farklı çalışılabilecek alanlarının oluşmasına yardımcı olmaktadır. Bu baz alınarak bundan sonraki çalışmalar için bu tezde ele alınan genelleştirilmiş Szasz-Mirakyan-Kantarovich operatörü için tanım kümesi değiştirilerek sürekli yüzeylerde geometrik açıdan yaklaşımı ve hızı hesaplanabilir. Mühendislik ve tıp gibi birçok alandaki uygulama yöntemleri araştırılıp somut çalışmalar elde edilibilir.

Tezde ele alınan Szasz-Mirakyan-Kantarovich operatörü ağırlıklı uzaylarda ele alınıp yaklaşım özellikleri incelenebilir.

Tanımlamış olduğumuz Genelleştirlmiş q-Szasz-Mirakyan-Kantarovich operatörü için son yıllarda çeşitli dallarda karşımıza çıkan ve özgün çalışılacak alan imkanı yaratan (p, q)-analog operatörleri ifade edilip burada yaklaşım özellikleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

ABEL, U., 1998. Asymptotic approximation with Kantorovich polynomial. Approx. Theory and Its Appl., 14: 106.

ACAR, T. and KAJLA, A., 2018. Degree of approximation for bivariate generalized Bernstein type operators. Results in Math., 73(79):1-20

ACAR, T., ARAL, A. and Mohiudine, S. A., 2016. On Kantorovich modification of (p, q)-Baskakov operators. J Inequal Appl 98.

ACU, A. M. and Muraru, C. V. 2015. Approximation properties of bivariate extension of q-Bernstein–Schurer–Kantorovich operators. Result Math 67(3): 265–279.

AÇIKGÖZ, M., and ARACI, S., 2010. New generating function of Bernstein type polynomial for two variables. ICNAAM, Numerical Analysis and Applied Mathematics, International Conference. 1281: 1141-1143.

AGRANTINI, O., 2011. An approximation process of Kantorovich type. Mathematical Notes Miskolc, 2(1):3–10.

AGRAVAL, P. N., FINTA, Z. and KUMAR, A. S., 2015. Bivariate q-Bernstein–Schurer–Kantorovich operators. Result Math., 67(3): 365–380.

AKSOP, C., 2009. On a modification of operators. International Mathematic Forum, 45(4): 2211-2215.

ALTOMARE, F. and CAMPITI, M., 1994. Korovkin-type approximation theory and its applications. De Gruyter Series Studies in Mathematics, Vol. 17, Walter De Gruyter Berlin- New York, 627s.

BADEA, C., BADEA, I. and GONSKA, H. H., 1986. A test function theorem and approximation by pseudopolynomials. Bull. Aust. Math. Soc., 34:53-64.

BALCI, M., 2012. Reel analiz, Balcı Yayınları, Ankara, 144s.

BARBOSU, D., 2004. Kantrovich-Stancu type operators. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 5(3): 53-54.

BASKAKOV, V. A., 1957. An example of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions. Dokl. Akad. Nauk, 113: 249-251.

BAYRAKTAR, M., 2006. Fonksiyonel analiz, Gazi Kitapevi, Ankara, 320s.

BERNSTEIN, S. N., 1912-1913. Demonstration du theoreme de Weierstrass fondee sur le calcul des probabilites. Commun. Soc. Math. Kharkow, 13(2): 1-2.

BLEIMANN, G., BUTZER, P. L. and HAHN, L., 1980. A Bernstein-type operator approximating continuous functions on the semi-axis. Indag. Math., 42: 255-262.

BOHMAN, H., 1952. On approximation of continuous and analytic functions. Ark. Mat., 2: 43-56.

BOHMAN, H., 1952. On approximation of continuous and analytic functions. Ark. Mat., 2: 43-56.

BOGEL, K., 1962-1963. Über die mehrdimansionale differentation. Jber. Deutsch. Math. Verein, 65: 45-71.

BUTZER, P., 1953. On two-dimensional Bernstein polynomials. Canadian Journal of Mathematics, 5: 107-113.

BÜYÜKYAZICI, İ., 1999. İki değişkenli fonksiyonların Bernstein polinomları. A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Ankara.

BÜYÜKYAZICI, İ. and İBİKLİ, E., 2004. The approximation properties of generalized Bernstein polynomials of two variables. Appl. Math. Comput., 156(2): 367-380.

CAO, J. D., 1997. A generalization of the Bernstein polynomials. J. Math. Anal. Apply, 209(1): 140-146.

CHLODOVSKY, I., 1937. Sur le developpment des functions definies dans un interval infini en series de polynomes de M. S. Bernstein. Compositio Math., 4: 380-393.

COTTIN, C., 1990. Mixed $K-$-functionals: a measure of smoothness for blending-type approximation. Math. Z., 204:69-83.

ÇİÇEK, H. and İZGİ, A., 2020. The q-Chlodowsky and q-Szasz-Durrmeyer Hybrid Operators on Weighted Spaces. Journal of Mathematics, 2020, 1-9.

ÇİÇEK, H., ZAİNALABDİN, S. J. and İZGİ, A., 2022. A new generalization of Szasz-Kantorovich operators on weighted space. Turkish Journal of Science, 7(2), 85-106.

ÇİÇEK, H.,ASLAN, R. and İZGİ, A., 2020. Approximation by univariate, bivariate and GBS operators of Chlodowsky-Kantorovich operators. New Trends in Mathematical Sciences, 8(2), 44-54.

ÇİÇEK, H., İZGİ, A. and Nadeem, R., 2023. A New Sequence of Bernstein-Durrmeyer Operators and Their L_p-Approximation Behaviour. Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 11(4), 198-212.

DEO, N., NOOR, M. A. and SIDDIQUU, M. A., 2008. On approximation by a class of new Bernstein type operators. Applied Math. and Comp., 201:604-612.

DOĞRU, O. and DUMAN, O., 2006. Statistical approximation of Meyer-König and Zeller operators based on q-integers. Publ. Math. Debrecen, 68: 1-2, 199-214.

DOĞRU, O., DUMAN, O. and ORHAN, C., 2003. Statistical approximation by generalized Meyer-König and Zeller type operators. Stud. Sci. Math. Hun., 40: 359-371.

DÖKMEN, A. B., 2009. Bernstein polinomlarının q-analogu. Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale, 65s.

DUCHON, M., 2011. A generalized Bernstein approximation theorem. Mathematical Publications, 49: 99-109.

DURRMEYER, J. L., 1967. Une formule d'inversion de la transformee de Laplace application a la theorie des moments. These De 3e Cyele. Faculte Des Sciences de l'Universite de Paris, 4: 149-150.

FAVARD, J., Sur les multiplicateurs d'interpolation. J. Math. Pures Aplll. 23(9):219-247.

FINTA, Z., 1999. On approximation by modified Kantorovich polynomials. Mathematica Balcanica (New Ser.) 13(3-4):205-211.

GADJIEV, A. D. and ORHAN, C., 2002. Some approximation theorems via statistical convergence. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 32: 129-138.

HACISALİHOĞLU, H. and HACIYEV, A., 1995. Lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklığı, A.Ü.F.F Döner Sermaye İşletme Yayınları, Ankara, 94s.

HERZOG, F. and HILL, J. D., 1946. The Bernstein polynomials for discontinuous functions. Amer. J. Math., 68: 109-124.

HILDEBRANT, T. H. and SCHOENBERG, I. J., 1933. On linear functional operations and the moment problem. Ann. of Math., 34(2): 317-328.

İZGİ, A., 2009. Order of approximation of functions of two variables by new type

gamma operators. General Mathematics, 17(1), 23-32.
İZGİ, A., 2012. Approximation by composition of Szasz-Mirakyan and Durrmeyer-Chlodowsky operators. Eurasian Math. J., 3:63–71.
İZGİ, A., 2013. Approximation by a class of new type Bernstein polynomials of one and two variables. Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 9(1), p.55.
İZGİ, A. and BÜYÜKYAZICI, İ., 2006. On a generalization of Bernstein-Chlodovsky polynomials for two variables. Int. Math. Forum 1, 1001–1015.
İZGİ, A., BÜYÜKYAZICI, İ. and İBİKLİ, E., 2009. Rate of convergence by Chlodowsky–Taylor polynomials. Applied Mathematics and Computation, 213(2): 426-431.
KAC, M., 1938. Une remarque sur les polynomes de M. S. Bernstein. Studia Math., 7: 49-51.
KAHVECİBAŞI, İ., 2014. $[-1,1]$ aralığında Bernstein-Kantorovich operatörlerinin yaklaşım özellikleri. Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Şanlıurfa.
KANTOROVICH, L. V., 1930. Sur certains developpements suivant les polynomes de la forme de S. Bernstein I, II. C.R. Acad. Sci. URSSS, 563-568, 595-600.
KARAHAN, D. and İZGİ, A., 2018. On approximation properties of generalised (p,q)-Bernstein operators. Eur. J. of Pure and App. Math., 11(2): 457-467.
KARAHAN, D. and İZGİ, A., 2018. On approximation properties of generalized q-Bernstein operators. Numerical Functional Analysis and Optimization, 39(9): 990-998.
KIVINUKK, A. and METSMAGI, T., 2011. Approximation in variation by the Kantorovich operators. Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, 60(4):201-209.
KOROVKIN, P. P., 1953. On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. (Russian), Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.)MR 15,236.Sc. 1.2. 90:961-964.
LORENTZ, G. G., 1953. Bernstein polynomials. University of Toronto Press, Toronto.
LUPAS, A., 1987. A q-analogue of the Bernstein operator. University of Cluj-Napoca, Seminar on Numerical and Statistical Calculus, 9: 85-92.
MEYER-KONIG, W. and ZELLER, K., 1960. Bernsteinsche otenzreihen. Studia Math., 19:89-94.
MIRAKYAN, G. M., 1941. Approximation of continuos functions with the aid of poynomials. Dokl. Acad. Nauk SSSR, 31:201-205.
MISHRA, V. N. and PANDEY, S., 2016. On Chlodowsky variant of (p,q) Kantorovich–Stancu–Schurer operators. Int. J. Anal. Appl. 11(1): 28–39.
MUSAYEV, B., ALP, M., MUSTAFAYEV, N. and EKİNCİOĞLU, İ., 2007. Teori ve çözümlü problemlerle analiz 1. Seçkin Yayıncılık, Ankara, 593s.
NEAMMANEE, K., 2001. Approximation of Lipschitz functions on B_n by Bernstein polynomials. Science Asia, 27: 63-66.
ÖZARSLAN, M. A. and DUMAN, O. A., 2009. New approach in obtaining a better estimation in approximation by positive linear operators. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1., 58: 17-22.
PAPANICOLAU, C. G., 1975. Some Bernstein type operators. Amer. Math. Month, 82:674-677.
PEETRE, J., 1963. A theory of interpolation of normed spaces lecture notes. Brazilia.
PINKUS, A., 2000. Weierstrass and approximation theory. J. Approx, Theory, 107: 1-66.

PINKUS, A., 2005. Weierstrass and approximation theory. Surveys in Approximation Theory, 1: 1-37.
POP, O. T., 2007. Approximation of B-differentiable functions by BGS operators. Anal. Unıv. Oredea Fasc. Mat., 14:53-60.
POPOVICIU, T., 1951. On the proof of Weierstrass theorem using interpolation polynomials. Lucraile Sesiunii Gen.ġt. Acad. Romane, 2: 2-12.
PYCH-TABERSKA, P., 1997. Rate of pointwise convergence of Bernstein polynomials for some absolutely continuous functions. J. Math. Anal. Appl., 2: 212, 9-19.
SHEVCHUK, I. A., 1992. Approximation by polynomials and traces of functions continuous on a segment. Naukova Dymka, Kiev, 324s.
STANCU, D. D., 1968. Approximation of function by a new class of polynomial operators. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 13(8): 1173–1194.
STANCU, D. D., 1963. A method for obtaining polynomials of Bernstein type of two variables. The American Mathematical Monthly, 70(3), 260-264.
SZASZ, O., Generalization of Bernstein's polynomials to the infinite interval. J. Res. Nat.Bureau of St., 45:239-245.
VORONOVSKAJA, E., 1932. Determination de la forme asymplotique d'approximation des fonctions par les polynomes de M. Bernstein. C. R. Acad. Sci. URSS, 4: 79- 85.

VOLKOV, V. I., 1957. On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variable. Math. Sb. N.S. 43(85):504 (in Russian).
WEIERSTRASS, K., 1885. Über die analytische darstellbarkeit sogenannter willküricher 55 funktionen einer reellen veranderlichen. Sitzungsberichte Der Akademie zu Berlin, 2(1): 633-639, 789-805.