T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SZÁSZ-KANTOROVICH OPERATÖRLERİNİN BİR GENELLEŞTİRMESİ

Shaymaa ZAINALABDIN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2021

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SZÁSZ-KANTOROVICH OPERATÖRLERİNİN BİR GENELLEŞTİRMESİ

Shaymaa ZAINALABDIN

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Aydın İZGİ
Yıl: 2021, sayfa:47

Bu tez beş bölümden yapılmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.İkinci bölümde, temel kavramlar ayrılmıştır. Üçüncü bölümde, daha önce yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde de, $Z_b\left(j;s\right)$ operatörünün Korovkin teoremi kullalanarak yaklaşım özellikleri incelenmiştir. $Z_b\left(j;s\right)$ operatörünün sürekli j fonksiyonuna düzgün yakınsadığı gösterilmiştir. $Z_b\left(j;s\right)$ operatörü için Voronowskaja teoremi benzeri bir teorem de ispatlanmıştır. $Z_b\left(j;s\right)$ operatörünün merkezi momentleri bulunmuştur. Ağırlıklı uzaydaki süreklilik modeli yardımıyla $Z_b\left(j;s\right)$ operatörünün yaklaşım oranı incelenmiştir. Lipschitz koşulunu gerçekleyen fonksiyonlar kullanılarak $Z_b\left(j;s\right)$ operatörü için bir teorem ispat edilmiştir. Beşinci bölümde de, sonuçlar verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Lineer pozitif operatör - Szasz-Kantorovich operatörler - Ağırlılıklı uzay - Süreklilik modülü -Lipschitz sınıfı

ABSTRACT

MSc Thesis

A GENERALİZATİON OF SZÁSZ-KANTOROVICH OPERATORS

Shaymaa ZAINALABDIN

Harran niversity
Gradate School of Natral and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Aydın İZGİ
Year: 2021, page:47

This thesis consist of five chapters. The (1^{st}) chapter is devoted to some important introduction. The $\left(2^{nd}\right)$ chapters, basic ideas are given. The $\left(3^{rd}\right)$ chapter presents previous studies. In $\left(4^{th}\right)$ chapter some important properties of approximation of the $Z_b\left(j;s\right)$ operator are tested using the Korovkin theorem. And we have shown that the $Z_b\left(j;s\right)$ operator convergent smoothly to the continuous j function. A theorem of the Voronowskaja theorem type has also been proved for the $Z_b\left(j;s\right)$ operator. The central moments of the $Z_b\left(j;s\right)$ operator are found. The approximation speed of the $Z_b\left(j;s\right)$ operator is examined with the help of the continuum model in weighted space. A theorem is proved for the $Z_b\left(j;s\right)$ operator using functions satisfying the Lipschitz condition. In the fifth chaptar, the results are given.

KEYWORDS: Linear positive operatosr - Szasz-Kantorovich operators -Weighted space -Continuity module - Lipschitz class

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimimin her aşamasında bana güvenen, fikirleriyle beni yönlendiren, çalışmalarımda ve hayatımda ilgi ve desteğini esirgemeyen çok kıymetli danışman hocam Sayın **Prof. Dr. Aydın İZGİ** 'ye en içten saygı ve minnetlerimi sunarım.

Lisansüstü eğitimim boyunca destek olan ve bilgilerini benimle paylaşan değerli hocalarım Sayın **Prof. Dr. Sevilay KIRCI SERENBAY**'a, Sayın **Arş. Gör. Dr. Harun ÇİÇEK**'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca her zaman yanımda olan ve bana daima güvenen, maddi ve manevi her desteklerini esirgemeyen eşim **Raid** ve çocuklarım **Resul**, **Yunus** ve **Yusuf**'a sonsuz teşekkurlerimi sunarım.

Son olarak hayat kaynaklarım ve kıymetlilerim babam **Cemil**, annem **Meysun** ve ablam **Esma**'ya da sonsuz teşkkurlerimi sunmayı borç bilirim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
α	Alfa
$B_b\left(j;s\right)$	Berntein Operatör
β	Beta
δ	Delta
η	eta
λ	Lambda
$Lip_M\left(\alpha\right)$	Lipschitz sınıfından fonksiyonlar
$L_b\left(f;s\right) \rightrightarrows f$	L_b operatörünün j fonksiyonuna düzgün yakınması. ü
$S_b\left(j;s\right)$	Szasz Operatörü
$W_u^j\left(s\right)$	Szasz- Kantorovich Operatörleri
$Z_b\left(j;s\right)$	Szasz- Kantorovich Operatörleri Bir Genelleştirmesi (Tanımlamış Olduğumuz Operatör)
$\omega\left(j;s\right)$	φ fonksiyonunun süreklilik modülü
φ	Varphi
ξ	xi

1. GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisinin temeli 1885 yılında K.Weierstrass tarafından ispatlanan bir teoreme dayanır. Bu teoreme “$[c, e]$ kapalı aralığında tanımlanan her sürekli fonksiyona düzgün yakınsayan bir polinomların dizisi karşılık gelir”. Weierstrass’ın bu teoremi çok karmaşık olduğundan bir çok matematikçi bu ispatı daha basit ve anlaşılır kılmak için uğraşmıştır. Bu teoremin en basit ve etkili ispatını 1912 yılılnda S.N.Bernstein vermiştir. günümüzde kendi adı ile anılan Bernstein polinomlarını tanımlamış ve $[0, 1]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlara bu polinomlarla düzgün yakınsaklığını göstermiştir. Bu operatör dizileri lineer ve pozitif sınıfına ait olduğundan, bu konu matematikçiler tarafından çok önemli bir araştırma alanı olmuştur ve bu tipten çalışmalar günümüzde de popilaritesini korumaktadır. 1950’li yıllara gelindiğinde ise lineer pozitif operatörler ile fonksiyona yaklaşımlar teorisi P.P.Korovkin’in ispatladığı teoremle ivme kazanmıştır. Kolay ve ugulanabilir kriterleri içeren ve lineer pozitif operatörlerle sürekli fonksiyona düzgün yaklaşımın şartlarını veren bu teoreme göre A_b operatör dizisinin sürekli fonksiyona düzgün yakınsaması için yakınsaklığın $\{1, t, t^2\}$ fonksiyonlar için sağlanması yeterlidir, denilmiştir. Bu teorem matematikçiler tarafından bir çok açıdan genişleştirilmiştir. Bu genişletmelerden bir teorisi de sürekli fonksiyonlar üzerindeki yakınsamanın integrallenebilen fonksiyonlar uzayına taşınmasına imkan veren bir genelleşmedir. Bu yöntem Bernstein-Kantorovich operatörünün tanımlanması ile mümkün olmuştur. Bizim bu tezde inceleyeceğimiz Szasz-Kantorovich operatörleri ise sürekli fonksiyonlar uzayı yerine integrallenebilen fonksiyonlar uzayı üzerinde çalışmaya imkan verdiği gibi aynı zaman da aralıklar üzerinde çalışma imkanı elde edebileceğimiz bir genelleştirmedir. İlk olarak bu operatörlerin momentleri hesaplanarak ve uygun süreklilik modelleri ile yakınsaklık hızları verilecektir. Ayrıca integrallenebilen fonksiyonlar için düzgün yakınsaklığın şartları araştırılacaktır.

1.1. Temel Kavramlar

Bu bülümde pozitif lineer operatörlerin tanımı yapalacak ve sağladığı özelikleri ve kullanacağımız bazı tanımlu bölümde çalışmamız sırasında, lineer pozitif operatörlerin tanve teoremler verilecektir.

Tanım 1.1 *Boş olmayan $S \subset \mathbb{R}$ kümesi, $j : S \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\alpha \in S$ olmak üzere. $\forall \xi > 0$ ve $\forall s \in X$ için $|s - \alpha| < \eta \Rightarrow |j(s) - j(\alpha)| < \xi$ olacak şekilde ξ sayısına bağlı bir $\eta = \eta(\xi) > 0$ sayısı varsa, j fonksisyonu a noktasında süreklidir söylenir (Balcı,1999).*

Tanım 1.2 *$S \subset \mathbb{R}$, $j : S \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall \xi > 0$ sayısı $|s_1 - s_2| < \eta \Rightarrow |j(s_1) - j(s_2)| < \xi$ olacak şekilde $\forall s_{1,} s_2 \in S$ noktaları için yanlızca ξ na bağılı bir $\eta = \eta(\xi) > 0$ sayısı varrsa, j fonksiyonu S kümesi üzerinde düzgün süreklidir söylenir (Balcı, 1999).*

Tanım 1.3 *$S \subset \mathbb{R}$, $j : S \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Eğer $\forall s \in S$ için $|j(s)| \leq G$, $G > 0$ olacak şekilde $G \in \mathbb{R}$ sayısı varsa, j fonksiyonu S üzerinde sınırlıdır denir. (Musayev, Alp, Mustafayev ve Ekincioğlu, 2007).*

Tanım 1.4 *$left(c, e \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık ve j de (c, e) den $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun. $i, s \in (c, e)$ olmak üzere $\lim\limits_{i \to s} \frac{j(i) - j(s)}{i - s} = A(s)$ sonlu limiti varsa, bu $A(s)$ sayısına j fonksiyonunun s noktasındaki türevi denir ve $j'(s)$ (veya $Dj(s)$ yada $\frac{dj(s)}{ds}$ ile gösterilir. Bu durumda, j fonksiyonu s noktasında türevlenebilirdir (veya türevlidir) denir.(Musayev, Alp, Mustafayev ve Ekincioğlu,2007).*

Tanım 1.5 *j fonksiyonu c noktasında içeren bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir diyelim.*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{j^k(c)}{k!} (s - c)^k$$

serisine c noktasında j fonksiyonu tarafından türetilen Taylor serisi denir.

Tanım 1.6 ***(**Lipschitz sınıfı fonksiyonlar) $0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere,*

$$|j(i) - j(s)| \leq G|i - s|^{\alpha}$$

şartını sağlayan fonksyonlar sınıfına Lipschitz sınıfı fonksiyonlar, G'ye de Lipschitz sabiti adı verilir ve $j \in LipG(\alpha)$ ile gösterilir.

Tanım 1.7 *K boş olmayan bir küme ve D kompleks cismi veya reel sayılar olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa K ye D üzerinde lineer uzay veya vektör uzayı ve elemanlarına vektör veya nokta denir. Yani,* *i.) Her $s, h \in L$ için $s + h \in K$dir (kapalılık özelliği).*

ii.) Her $s, h \in L$ için $s + h = h + s$ dir (değişme özelliği).

iii.) Her $s, h, z \in K$ için $s + (h + z) = (s + h) + z$ dir (birleşme özelliği).

iv.) Her $s \in K$ için $s + 0 = s$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in K$ vardır.

v.) Her $s \in K$ için $s + (-s) = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-s \in K$ vardır (ters eleman varlığı).

vi.) Her $c.s \in K$ dir (skalerle çarpmaya göre kapalılık).

vii.) Her $s \in L$ için $1.s = s$ dir (Burada 1, D 'nin birim elemanıdır).

viii.) $c.(s + h) = cs + ch$ dir.

ix.) $(c + e).s = cs + es$ dir.

x.) $(c.e).s = c.(e.s)$ dir.(Bayraktar, 2006).

Tanım 1.8 *N, D cismi ile bir lineer uzay olsun. $\|\| : N \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun s deki değerini $\|\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyınu için*

N1) $\|s\| = 0 \iff x = 0$

N2) $\|cs\| = |c| \, \|s\| \; (c \in D)$

N3) $\|s + h\| \leq \|s\| + \|h\|$ *(üçgen eşitsizliği)*

şartları sağlıyorsa $\|\|$ fonksiyonuna N de norm denir. Normlu uzaylar genellikle $(N, \|\|)$ ile gösterilir. (Bayraktar, 2006).

Tanım 1.9 *Bilindiği gibi fonksiyonu fonksiyona dönüştüren bağıntılara "operatör" denir.*

Tanım 1.10 *(Operatörün lineerliği) S ve H fonksiyon uzayları olmak üzere;*

$K : S \to H$ şeklindeki K operatörünün göz önüne alalım.

Eğer her $j_1, j_2 \in S$ ve c_1 , $c_2 \in IR$ için

$$K(c_1 j_1 + c_2 j_2) = c_1 K(j_1) + c_2 K(j_2)$$

koşulu sağlanıyorsa ise K operatörüne lineer operatör denir. (*Gadžiev 1976*) .

Tanım 1.11 *Eğer bir K operatörü pozitif değerli fonksiyonu yine pozitif değerli bir fonksiyona dönüştürüyor ise yani $j \geqslant 0$ oluyorsa K operatörüne pozitif operatör denir. Hem lineerlik hem de pozitiflik şartlarını sağlayan operatörlere lineer pozitif operatörler denir.*

Tanım 1.12 *K lineer operatörü S uzayında H dönüşüm yapıyorsa, K operatörünün normu; $\|K\| = \|K\|_{S\to H} = \sup\limits_{\|j\|_x=1} \|K(j)\|_H$ şeklinde tanımlanır.*

Tanım 1.13 $l = \{K : C[c,e] \to C[c,e] : K \text{ liner pozitif operatör}\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ *olsun $K : \mathbb{N} \to l$ şeklinde tanımlı K fonksiyonuna lineer pozitif operatör dizisi adı verilir ve (K_n) ile gösterilir.$K(\mathbb{N}) = (T_1, T_2, T_3, ...)$ şeklindedir.*

S ve H normlu uzaylar ve $F(K) \subset S$ olmak üzere K, $F(K)$ den uzayına lineer bir operatör olsun. Eğer her $s \in F(K)$ ($F(K)$, K operatörünün tanım bölgesi) için

$$\|K(s)\| \leq a \|s\|$$

olacak şekilde bir a sayısı vasrsa, K operatörne "sınırlı operatör" denir. Bir K "operatörünün normu"

$$\|K\| = \sup_{\substack{s\in F(K)\\ s\neq 0}} \frac{\|K(s)\|}{\|s\|}$$

veya

$$\|K\| = \sup_{\substack{s\in F(K)\\ \|s\|=1}} \|K(s)\|$$

şeklinde tanımlanır (Kreyszig 1978)

Tanım 1.14 ${}_b\left((i-s)^r ; s\right)$, $\{r = 0, 1, 2, ...\}$ *ifadesine (K_b) operatör dizisinin r-yinci merkezi momenti denir.*

Tanım 1.15 $(S, \|.\|)$ *normlu uzay içinde bir dizi* (s_b) *ve* $s_0 \in S$ *olsun. Eğer*

$$\lim_{b\to\infty} \|s_b - s_0\| = 0$$

ise (s_b) *dizisi* (s_0) *noktasına yakınsıyor denir ve*

$s_b \to s_0$ $(b \to \infty)$ *veya* $\lim_{b\to\infty} s_b = s_0$ *olarak ifade edilir.*

lineer pozitif operatör özellikleri

Lemma 1.16 *Lineer pozitif operatörler monoton azalmıyandır. Yani;*

$$j \leq q \Rightarrow K(j) \leq K(q)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Kabul edelim ki $j \leq q$ olsun. Bu durumda $q - j \geq 0$ olacağından ve K operatörü pozitif olduğundan;

$$K(q-j) \geq 0 \qquad (2.1)$$

yazabiliriz. Diğer taraftan L operatörü lineer olduğundan

$$K(q-j) = K(q) - K(j)$$

olup bunun (2.1) de kullanmasıyla ispat tamamlanır. □

Lemma 1.17 K *bir lineer pozitif operatör ise o taktirde*

$$|K(j)| \leq K(|j|)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Her hangi bir j fonksiyonu için

$$-|j| \leq j \leq |j| \qquad (2.2)$$

dir. K operatörü lineer olduğundan dolayı monoton artandır. O halde (2.2) 'den;

$$K(-|j|) \leq K(j) \leq K(|j|)$$

yazabiliriz. K lineer olduğundan;

$$K(-|j|) = -K(|j|)$$

dir. Bu son eşitliğin, (2.3)'de kullanılmasıyla

$$-K(|j|) \leq K(j) \leq K(|j|)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. □

Teorem 1.18 *Bir (j_b) fonksiyonlar dizisinin j fonksiyonuna $A[c,e]$ normunda düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart, $\forall s \in [c,e]$ için*

$$\lim_{b\to\infty} \|j_b - j\|_{A[c,e]} = \lim_{b\to\infty} \max_{s\in[c,e]} |j_b - j(s)| = 0$$

olmasıdır. Düzgün yakınsama $j_b \rightrightarrows j$ şeklinde sembolize edilir.

Tanım 1.19 $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{N}$ *fonksiyonunu alalım,Pozitif her ε sayısı ve $\forall x_1,\ x_2 \in X$ için $|x_1 - x_2| < \delta$ alınırsa $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde yalnızca ε 'na bağlı $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı mevcut ise f fonksiyonu X üzerinde düzgün süreklidir denir.*

Teorem 1.20 ***(Ortalama Değer Teoremi)*** $j : [c,e] \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu $[c,e]$ üzerinde sürekli ve (c,e)'üzerinde türevlenebilir olsun. Bu durumda,*

$$\frac{j(e) - j(c)}{(e-c)} = j'(\lambda)$$

olacak şekilde $\exists\lambda \in [c,e]$ noktası vardır.

Teorem 1.21 ***(Minkowski Eşitsizliği)***
$p > 1$için $a_1,\ a_2,\ \ldots a_n > 0$ ve $b_1,\ b_2,\ \ldots b_n > 0$ olsun. Bu taktirde

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

sağlar.

Teorem 1.22 ***(Hölder Eşitsizliği)*** *$p > 0$ ve$q > 0$ reel sayıları*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

şartını sağlasın. $a_1,\ a_2,\ ...\ a_n > 0$ *ve* $b_1,\ b_2,\ ...\ b_n > 0$ *olsun. Bu taktirde*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

sağlar. Hususi olarak Hölder eşitsizliğinde $p = q = 2$ *seçildiğinde Cauchy-Schwarz Eşitsizliği elde edilir.*

1.1.1. Düzgün yakınsaklak

Tanım 1.23 $[a,b]$ *kapalı ve sonlu aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonlar uzayını* $C[a,b]$ *ile gösterelim.* $C[a,b]$ *,*

i) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ *ve*

ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ *olmak üzere* $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

işlemleri ile bir lineer uzaydır. Bu lineer uzay üzerinde bir norm, $\|f\|_{C[a,b]} = \sup\limits_{a\leq x\leq b}|f(x)|$ *biçiminde tanımlanır.*

Teorem 1.24 *Bir* (j_b) *fonksiyonlar dizisinin* j *fonksiyonuna* $A[c,e]$ *normunda düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart,* $\forall s \in [c,e]$ *için*

$$\lim_{b\to\infty}\|j_b - j\|_{A[c,e]} = \lim_{b\to\infty}\max_{s\in[c,e]}|j_b - j(s)| = 0$$

olmasıdır. Düzgün yakınsama $j_b \rightrightarrows j$ *şeklinde sembolize edilir.*

1.1.1.1. Lineer pozitif operatörler dizisinin yakınsaklık koşulları

Yaklaşım teorisinin amacı, keyfi bir fonksiyonun daha kolay, daha kullanışlı olan başka fonksiyonlar cinsinden bir temsilini elde etmektir. Böyle bir gösterim fonksiyon hakkında bilgi elde etmenin daha basit bir yolunu verir.

1885 yılında Weierstrass $[c,e]$ aralığında sürekli her j fonksiyonuna bir polinomla yaklaşılabileceğini ifade etmiştir.

Teorem 1.25 ***(Weierstrass Yaklaşım Teoremi)*** j *fonksiyonu* $[c,e]$ *aralığı üzerinde sürekli fonksiyon uzayında olmak üzere her* $\xi > 0$ *için* $|j(s) - P_n(s)| < \xi$ *olacak şekilde*

b. dereceden bir $P_b(s)$ polinom dizisi vardır. Başka bir ifade ile $[c,e]$ aralığında sürekli her j fonksiyonu için $j(s)'$e $[c,e]$ aralığında düzgün yakınsayan bir $(P_b(s))$ polinomlar dizisi vardır. Bu teoremin birçok ispatı bulunmaktadır. Bu ispatlardan birini de 1912 yılında S.N.Bernstein (Bernstein, 1912) yaparak, lineer pozitif operatörler ile yaklaşım teorisinde önemli rol oynayan Bernstein Polinomları' nı tanımlamıştır. 1952 yılında H. Bohmann, toplam şeklinde lineer pozitif operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli $j(s)$ fonksiyonuna yaklaşması problemini incelemiştir.

H.Bohmann (Bohmann, 1952) göstermiştir ki $s \in [0,1]$, $0 \leq \alpha_{b,l} \leq 1$ ve $l < r$ için $\alpha_{b,l} < \alpha_{b,r}$ olduğunda

$$K_b(j\,;s) = \sum_{l=0}^{b} j(\alpha_{b,l})\, P_{b,l}(s)\,,\ P_{b,l}(s) \geq 0$$

lineer pozitif operatörler dizisinin, $b \to \infty$ için $[0,1]$ aralığında sürekli j fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter koşul üç tanedir. Bunlar:

$$\begin{aligned} \lim_{b\to\infty} \left\| K_b(1;s) - 1 \right\|_{A[0,1]} &= 0 \\ \lim_{b\to\infty} \left\| K_b(i;s) - s \right\|_{A[0,1]} &= 0 \\ \lim_{b\to\infty} \left\| K_b\left(i^2;s\right) - s^2 \right\|_{A[0,1]} &= 0 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Aşikardır ki Bohmann' ın araştırdığı operatörlerin değeri, j fonksiyonunun $[0,1]$ aralığının haricindeki değerlerinden bağımsızdır.

1953 yılında Korovkin, H. Bohmann' ın teoremini daha genel bir halde vermiştir.

Teorem 1.26 *$\{K_b\}$ lineer pozitif operatörler dizisi olsun. $\alpha_b(s)$, $\beta_b(s)$ ve $\gamma_b(s)$, $[c,e]$ de düzgün olarak sıfıra yakınsayan diziler olmak üzere*

$\forall s \in [c,e]$ için

$$K_b(1;s) = 1 + \alpha_b(s) \qquad (2.2.1)$$

$$K_b(i;s) = s + \beta_b(s) \qquad (2.2.2)$$

$$K_b\left(i^2;s\right) = i^2 + \gamma_b(s) \qquad (2.2.3)$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $K_b(j;s)$, $[c,e]$ aralığı üzerinde $j(s)$ e düzgün olarak yakınsar. Burada j, $[c,e]$ de sürekli, a da sağdan, b de soldan sürekli ve $\mathbb{R}$ de sınırlı bir fonksiyondur.

İspat. *j fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğundan tüm s ler için*

$$|j(s)| \leq G \qquad (2.2.4)$$

olacak şekilde G pozitif sayısı vardır. $j \in [c,e]$ olduğu için $\forall \xi > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\eta > 0$ sayısı vardır ki $i \in \mathbb{R}$ ve $s \in [c,e]$ için $|i-s| < \eta$ olduğunda

$$|j(i) - j(s)| < \xi \qquad (2.2.5)$$

sağlanır.

$i, s \in [c,e]$ olduğunda (2.2.5) eşitsizliği j fonksiyonunun $[c,e]$ aralığında düzgün sürekli olmasından dolayı gerçeklenir. $s \in [c,e]$, $i \notin [c,e]$ olduğunda ise (2.2.5) eşitsizliği j fonksiyonu c noktasında soldan ve e noktasında sağdan sürekli bir fonksiyon olduğu için gerçeklenir. (2.2.4) ve (2.2.5) eşitsizliklerinden dolayı her $i \in \mathbb{R}$ ve $s \in [c,e]$ için

$$|j(i) - j(s)| < \xi + \frac{G}{\eta^2}(i-s)^2 \qquad (2.2.6)$$

eşitsizliği gerçeklenir. Çünkü $|i-s| < \eta$ olduğunda $|j(i) - j(s)| < \xi$ ayrıca $\frac{G}{\eta^2}(i-s)^2$ sağlanır.

$|i-s| \geq \eta$ olduğunda ise $\frac{(i-s)^2}{\eta^2} \geq 1$ olacağından $\frac{2G}{\eta^2}(i-s)^2 \geq 2G$ sağlanır. Bu durumda $\xi > 0$ için (11) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}|j(i)-j(s)| &\leq |j(i)|+|j(s)| \\ &\leq 2G \\ &\leq \frac{2G}{\eta^2}(i-s)^2 + \xi \end{aligned} \qquad (2.2.7)$$

eşitsizliği gerçeklenir. Lineer pozitif operatörlerin özelliklerinden

$$\begin{aligned}\|K_b(j;s)-j(s)\|_{A[c,e]} &= \|K_b(j(i)-j(s);s)+j(s)K_b(1;s)-j(s)\|_{A[c,e]} \\ &\leq \|K_b(j(i)-j(s);s)\|_{A[c,e]}+\|j\|_{A[c,e]}\|K_b(1;s)-1\|_{A[c,e]} \\ &\leq \|K_b(|j(i)-j(s)|;s)\|_{A[c,e]}+\|j\|_{A[c,e]}\|K_b(1;s)-1\|_{A[c,e]}\end{aligned}$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu eşitsizlikteki ikinci terim (2.2.1) den dolayı sıfira yakınsar. Yani,

$$\|j\|_{A[c,e]}\|K_b(1;s)-1\|_{A[c,e]} \leq \xi_b(b \to \infty \; iken \; \xi_b \to 0)$$

eşitsizliğini sağlayan ξ_b dizisi vardır. O halde

$$\|K_b(j(i)-j(s);s)\|_{A[c,e]} \leq \|K_b|j(i)-j(s)|;s\|_{A[c,e]}+\xi \qquad (2.2.8)$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi birinci terimi hesaplayalım. (2.2.7)*eşitsizliğinden ve lineer pozitif operatörün özelliklerinden dolayı*

$$\begin{aligned}
&\left\|K_b\left(\left|j\left(i\right)-j\left(s\right)\right|;s\right)\right\|_{A[c,e]}\\
\leq\;& K_b\left(\xi+\frac{2G}{\eta^2}\left(i-s\right)^2;s\right)\\
=\;& \xi K_b\left(1;s\right)+\frac{2G}{\eta^2}K_b\left(\left(i-s\right)^2;s\right)\\
=\;& \xi\left[K_b\left(1,s\right)-1\right]+\xi+\frac{2G}{\eta^2}\left\{\left[K_b\left(i^2;s\right)-s^2\right]-2s\left[K_b\left(i;s\right)-s\right]+s^2\left[K_b\left(1;s\right)-1\right]\right\}\\
=\;& \xi+\left(\xi+\frac{2G}{\eta^2}s^2\right)\left[K_b\left(1;s\right)-1\right]+\frac{2G}{\eta^2}\left[K_b\left(i^2;s\right)-s^2\right]-\frac{2G}{\eta^2}s\left[K_b\left(i;s\right)-s\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. $s\in[c,e]$ *olduğundan*

$$\left(\xi+\frac{2G}{\eta^2}s^2\right)\leq\varepsilon+\frac{2G}{\eta^2}e^2,\left(\frac{4G}{\eta^2}s\leq\frac{4G}{\eta^2}e\right)$$

dir. O halde

$$A_1=\frac{2G}{\eta^2}e^2,A_2=2eA_1,A_3=\varepsilon+A_1e^2$$

eşitliklerini kabul edersek

$$\begin{aligned}
&\left\|K_b\left(\left|j\left(i\right)-j\left(s\right)\right|;s\right)\right\|\\
\leq\;& \xi+A_1\left\|K_n\left(i^2;s\right)-s^2\right\|+A_2\left\|K_b\left(i;s\right)-s\right\|+A_3\left\|K_b\left(1;s\right)-1\right\|
\end{aligned}$$

yazılabilir ve burada $\xi>0$ *istenildiği kadar küçük seçilebilen bir sayıdır. (2.2.1),(2.2.2) ve (2.2.3) eşitsizliklerinden yaralanarak*

$$\left\|K_b\left(j;s\right)-j\left(s\right)\right\|\to0,\left(b\to\infty\right)$$

olduğu görülür. (Korovkin, 1953).

□

Tanım 1.27 $K:X\to Y$ *lineer operatör olsun. Eğer* $\forall j\in S$ *için* $\left\|K\left(j\right)\right\|_H\leq c\left\|k\left(j\right)\right\|_S$ *eşitsizliğini gerçekleyen bir* $a>0$ *sayısı varsa,* K *operatörüne sınırlı operatör denir. Bu* a *sabitlerinin en küçüğüne* K *operatörünün normu denir ve* $\left\|K\right\|_{S\to H}$ *ya da* $\left\|K\right\|$ *biçiminde gösterilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).*

Teorem 1.28 ***(Baskakov,1961)*** $j\in A\left[c,e\right]$ *ve tüm reel eksende* $\left|j\left(s\right)\right|\leq G_j\left(1+s^2\right)$ *olsun* $\left(K_b\right)$ *lineer pozitif operatör dizisi olmak üzere* $\forall s\in[c,e]$ *ve* $b\to\infty$ *için*

$K_b(1;s) \rightrightarrows 1$

$K_b(i;s) \rightrightarrows s$

$K_b(i^2;s) \rightrightarrows s^2$

koşullarının sağlanması için gerek ve yeter şart $[c,e]$ *'da ve* $b \to \infty$ *iken*

$K_b(j;s) \rightrightarrows j(s)$ *olmasıdır.*

Teorem 1.29 *(Minkowski eşitsizliği)* $p > 1$ *için* $c_1, c_2, ..., c_b > 0$ *ve* $e_1, e_2, ...e_b > 0$ *0lsun. Bu takdirde;*

$$\left(\sum_{f=1}^{b}(c_f + e_f)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{f=1}^{b} c_f^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{f=1}^{b} e_f^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

sağlar.

Teorem 1.30 ***(Hölder eşitsizliği)*** $1 < p < \infty$ *ve* g *,* p *'nin eşleniği olsun.* $c_1, c_2, ...c_b$ *ve* $e_1, e_2, ...e_b$ *sayıları*

$$\sum_{l=1}^{b}|c_l e_l| \leq \left(\sum_{l=1}^{b}|c_l|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{l=1}^{b}|e_l|^g\right)^{\frac{1}{g}}$$

eşitsizliğini sağlar.

Teorem 1.31 ***(Hölder eşitsizliği)*** $1 < p < \infty$ *ve* g *,* p *'nin eşleniği olsun. Bir* $[c,e]$ *aralığında tanımlı* j *,* q *sürekli fonksiyonları*

$$\int_c^e |j(s)\, q(s)|\, ds \leq \left(\int_c^e |j(s)|^p\, ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_c^e |q(s)|^g\, ds\right)^{\frac{1}{g}}$$

eşitsizliğini sağlar.

$p = g = 2$ *halinde Hölder eşitsizliği Cauchy-Schwartz-Bunyakovsky eşitsizliği adını alır.*

Süreklilik Modülü

Tanım 1.32 $j \in A[c,e]$ *olsun.* j *fonksiyonunun süreklilik modülü* $\omega(j,\eta)$ *şeklinde gösterime sahip olup*

$$\omega(j,\eta) = \sup_{s,i\in[c,e],|s-i|<\eta} |j(s) - j(i)|$$

şeklinde tanımlıdır. Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar.

1.1.2. Süreklilik modülünün özellikleri

a) $\omega(j,\eta) \geq 0$

b) $\eta_1 \leq \eta_2 \Rightarrow \omega(j,\eta_1) \leq \omega(j,\eta_2)$

c) $\omega(j+m,\eta) \leq \omega(j,\eta) + \omega(m,\eta)$

d) $\omega(j,g\eta) = g.\omega(j,\eta)$

e) $\lambda \in R^+$ için $\omega(j,\lambda\eta) \leq (\lambda+1).\omega(j,\eta)$

f) $w(f,|i-s|) \geq |f(i) - f(s)|$

g) $|j(i) - j(s)| \leq \left(\frac{|i-s|}{\eta} + 1\right).\omega(j,\eta)$. (Altomare ve Campiti,1994).

1.1.3. Ağırlıklı uzaylar

Sınırsız aralıkta tanımlanan lineer pozitif operatörlerin Korovkin teoreminin koşullarını sağladığı halde düzgün yakınsaklığın sağlanmadığı görülmüştür. 1976'da A. D. Gadjiev ağırlıklı uzayı tanımlayarak bu problemi çözmüştür.

Tanım 1.33 *Tüm reel eksende tanımlı ve* $|j(s)| \leq G_j\rho(s)$ *koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayına* $E_\rho(\mathbb{R})$ *fonksiyon uzayı denir. Yani*

$$E_\rho(\mathbb{R}) = \{j : |j(s)| \leq G_j\rho(s)\}$$

dir. Burada G_j, j *fonksiyonuna bağlı sabit bir değerdir.* $E_\rho(\mathbb{R})$ *uzayındaki sürekli fonksiyonların uzayına* $A_\rho(\mathbb{R})$ *fonksiyon uzayı denir. Yani* $A_\rho(\mathbb{R}) = \{j : j \in E_\rho(\mathbb{R})$ *ve j sürekli*$\}$ *dir.* $A_\rho(\mathbb{R}), E_\rho(\mathbb{R})$ *uzaylarına ağırlıklı uzaylar denir.*

$C_\rho(\mathbb{R}) \subset B_\rho(\mathbb{R})$ *olduğu açıktır ve bu uzaylardaki norm* $\|j\|_\rho = \sup_{s\in\mathbb{R}} \frac{|j(s)|}{\rho(s)}$ *şeklinde tanımlanır.*

Burada $\rho(s)$ *monoton artan, sürekli,* $\rho(s) \geq 1$ *ve* $\lim\limits_{s\to\infty} \rho(s) = \infty$ *şartını gerçekleyen bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyona "ağırlık fonksiyonu" adı verilir. (Gadjiev,1974).*

Lemma 1.34 $\forall b \in \mathbb{N}$ *ve* C_b *lineer pozitif operatörleri için*

$C_b : A_\rho[0,\infty) \to E_\rho[0,\infty)$ *olması için gerek ve yeter şart*

$\|C_b(\rho; s)\|_n \leq G_\rho$ *olmasıdır.*

Burada $\rho(s) = 1 + s^2$ *ve* $G\rho$ *bir pozitif sabittir. (Gadjiev,1974).*

Teorem 1.35 $\forall b \in N$ *için* $C_b : A_\rho[0,\infty) \to E_\rho[0,\infty)$ *lineer pozitif operatörleri verilsin. Eğer* $\rho(s) = 1 + s^2$ *olmak üzere* (C_b) *lineer pozitif operatör dizisi için*

$\lim\limits_{b\to\infty} \|C_b(i^v; s) - s^v\|_\rho = 0 \; v = 0, 1, 2$

şartı sağlanırsa bu durumda herhangi bir $j \in A^0_\rho[0,\infty)$ *için* $\lim\limits_{b\to\infty} \|C_b(j\,; s) - j(s)\|_\rho = 0$ *olur. (Gadjiev,1974).*

Tanım 1.36 $j \in A^0_\rho[0,\infty)$ *olsun. Herhangi bir* $\eta > 0$ *için*

$$\Omega(j\,;\eta) = \sup_{|y|\leq\eta, s\in[0,e_b)} \frac{|j(s+y) - j(s)|}{(1+y^2)(1+s^2)}$$

şeklinde tanımlı $\Omega(j\,;\eta)$ *ifadesine* j *fonksiyonunun* $j \in A^0_\rho[0,\infty)$ *uzayında ağırlılık süreklilik modülü denir. (İspir,2001).*

1.1.4. Ağırlıklı uzayda süreklilik modülünün özellikleri

$j \in A^0_\rho[0,\infty)$ için ağırlıklı süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) $\Omega\left(j\ ;\eta\right) \geq 0$

ii) $\eta_1 \leq \eta_2$ ise $\Omega\left(j\ ;\eta_1\right) \leq \Omega\left(j\ ;\eta_2\right)$

iii) $\lim\limits_{\eta\to 0^+} \Omega\left(j\ ;\eta\right) = 0$

iv) $g \in \mathbb{N}$ için $\Omega\left(j\ ;g\eta\right) \leq 2g\left(1+\eta^2\right)\Omega\left(j\ ;\eta\right)$

v) Herhangi $\lambda > 0$ için $\Omega\left(j\ ;\lambda\eta\right) \leq 2\left(1+\lambda\right)\left(1+\lambda^2\right)\Omega\left(j\ ;\eta\right)$

vi) $\left|j\left(i\right)-j\left(s\right)\right| \leq \left(1+s^2\right)\left(1+\left(i-s\right)^2\right)\Omega\left(j\ ;\left|i-s\right|\right)$

vii) $\left|j\left(i\right)-j\left(s\right)\right| \leq 2\left(1+\eta^2\right)\left(1+s^2\right)\left(1+\frac{\left|i-s\right|}{\eta}\right)\left(1+\left(i-s\right)^2\right)\Omega\left(j\ ;\eta\right)$**.**(İspir,2001).

1.1.5. Lipschitz sınıfından fonksiyonlar

Lineer pozitif operatorlerin bir j fonksiyonuna yaklaşım hızını bulurken fonksiyonun Lipschitz sınıfından olmas durumlarınıda inceleyeceğiz. O yuzden ilk olarak bir fonksiyonun Lipschitz sınıfından olmasının ne demek olduğunu verelim;$\forall i, s \in I$ için $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$\left|j\left(i\right)-j\left(s\right)\right| \leq M\left|i-s\right|^{\alpha}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar kümesine Lipschitz sınıfı fonksiyonlar denir. Burada M ye Lipschitz sabiti denir ve bu koşulun sağlanmas halinde $f \in Lip_M\left(\alpha\right)$ yazılır. Bir fonksiyon Lipschitz sınıfından ise sureklidir ancak bunun tersi doğru değildir. Dolayısıyla $Lip_M\left(\alpha\right) \subset C(I)$ yazılabilr. Tezde;

$$\left|j\left(i\right)-j\left(s\right)\right| \leq M\left|i-s\right|^{\alpha}$$

şeklinde tanımlanan Lipschitz sınıfı fonksiyonlar kullanılacaktır. Ayrıca $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$f \in Lip_M\left(\alpha\right) \Leftrightarrow \omega_f(\delta) \leq M.\delta^{\alpha}$$

olduğu bilinmektedir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Yaklaşımlar teorisi esasında fonksiyonel analizle ilgili bir konu olmakla birlikte bu teorinin amacı nitelikleri az bilinen bir fonkdiyona özelliklerini iyi bildiğimiz başka fonksiyonlarla yaklaşarak daha basit ve kolay şekilde hesaplanabilmesine yardımcı olur. 19.yüzyıldan bügüne kadar çok riyaziyeci(matematikçi), çalışılması sıkıntılı olan fonksiyonlara, vasıfları daha çok malum yani çalışması daha basit olan, misalen polinomlar gibi, daha kolay yapıda olan fonksiyonlarla yaklaşabilir miyiz ve bu yaklaşımı daha iyi nasıl sağlarız sorularına yanıt aramışlardır. Bununla alakalı olarak 1800'lerden şu ana dek birçok matematikçi, fonksyonlar teorisi içinde de geniş uygulama alanına sahib olan bu teori üzerinde araştırmarlar yapmıştır. İlk olarak Rus matematikçiler P.L. Chebyhev, sürekli bir j fonksiyonunun b dereceli (b yeterince büyük) bir P_b $(s) = \sum_{l=0}^{b} c_l s^l$ polinomu temsil edilebilir mi problem üzerinde çalışmalar yapmıştır.

Bu düşünceden hareket ile 1885 yılında Alman riayaziyeci Karl Theodor Wilhelm Weierstrass tarafından ispatlanan bir teoreme dayanır. Bu teoreme "$[c, e]$ kapalı aralığında tanımlanan her sürekli fonksiyona düzgün yakınsayan bir polinomların dizisi karışlık gelir.(Pinkus, 2000).

Weierstrass'ın bu teoremi çok karmaşık olduğundan bir çok matematikçi bu ispatı daha basit ve anlaşılır kılmak için uğraşmıştır. Bu teoremin en basit ve etkili ispatını 1912 yılında S.N. Bernstein vermiştir. Günümüzde kendi adı ile anılan Bernstein polinomlarını tanımlamış ve $[0, 1]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli foksiyonlara bu polinomlarla düzgün yakınsaklığın sağlandığını göstermiştir.(Bernstein, 1912).

$$B_b\left(j\left(i\right);s\right) =: B_b\left(j;s\right) = \sum_{l=0}^{b} j\left(\frac{l}{b}\right)\binom{b}{l} s^l \left(1-s\right)^{b-l}$$

Bu operatör dizileri lineer ve pozitif sınıfına ait olduğundan, bu konu matematikçiler tarafından çok önemli bir araştırma alanı olmuştur ve bu tipten çalışmalar günümüzde de popilaritesini korumaktadır.

1930 yılında L.V.Kantorovich K_1 de olan j fonksiyonlar için

$$L_m(j,s)=(m+1)\sum_{l=0}^{b}P_{m,l}(s)\int_{\frac{l}{b+1}}^{\frac{l+1}{b+1}}j(u)\,du$$

operatörü incelemiştir.

Daha sonra Durrmeyer K_p olan j fonksiyonları için

$$F_b(j,s)=\int_0^1 j(u)\,L_b(s,u)\,du$$

operatörleri incelemiştir.

Burada

$$L_b(s,u)=(b+1)\sum_{l=1}^{b}P_{b,l}(s)\,P_{b,l}(u)$$

ve buradan

$$P_{b,l}(s)=\binom{b}{l}s^l(1-s)^{b-l}$$

dır.

1935 yılında T.Popoviciu tarafından, j fonksiyonunun sürekli modülü hesaplanmıştır.

1950'li yıllarda gelindiğinde ise lineer pozitif operatörler ile fonksiyona yaklaşımlar teoresi P.P Korovkin'in ispatladığı teoremle ivme kazanmıştır.O tarihten sonra hızlı bir şekilde devam etmektedir.Eğri ve yüzeylerden düzgün olmayanlardan, düzg olanları elde etmek için (Bernstein polinomları $[0,1]$ aralığında iken) Szasz operatörleri ile pozitif yarı eksende yaklaşım yapılmaktadır. Bu tezde Szasz operatörlerinin bir genelliştirmesi olarak 1985 yılında tanımlanan klasik Szasz_Kantorovich operatörleri çalışacaktır. Szasz operatörleri

$$S_b(j;s)=\bar{e}^{bs}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(bs)^l}{l!}j\left(\frac{l}{b}\right);\quad 0\le s<\infty \tag{1.1}$$

şeklinde olup $c,e\in\mathbb{N}$ ve $0\le c\le e$ olmak üzere

$$N_b\left(j\,;s\right)=\overset{-bs}{e}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(bs\right)^{l}}{l!}j\left(\frac{l}{b}\frac{\left(b+c\right)}{\left(b+e\right)}\right);\;0\leq s<\infty \qquad (1.2)$$

operatörü Naıruz OUSMAN yüksek lisans tezi olarak çalışılmıştır.

Klasik Szasz_Kantorovich operatörleri $S_{b,f}\left(s\right)=e^{-bs}\frac{\left(bs\right)^{f}}{f!}$ olmak üzere

$$W_u^j\left(s\right)=ue^{-us}\sum_{v=0}^{\infty}\left[\int_{\frac{v}{u}}^{\frac{v+1}{u}}j\left(x\right)dx\right]\frac{\left(us\right)^{v}}{v!}\;;\;\;u>0 \qquad (1.3)$$

şekıindedir. Bizde tezde klasik Szasz_Kantorovich operatörünün bir genelleştirmesi olan

$$Z_b\left(j\,;s\right)=\frac{b\left(b+e\right)}{\left(b+c\right)}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{\left(bs\right)^{f}}{f!}\int_{\frac{f}{b}\frac{\left(b+c\right)}{\left(b+e\right)}}^{\frac{\left(f+1\right)}{b}\frac{\left(b+c\right)}{\left(b+e\right)}}j\left(i\right)di\;;0\leq s<\infty \qquad (1.4)$$

operatürü çalışacağız. Burada $c,e\in\mathbb{R}$ ve $0\leq c\leq e$ dır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

Kütüphane de bulduğumuz kitap, dergi ve internet ortamında bulduğumuz çalışmalar. Ayrıca literatür taramasında çalışmamızla ilgili makalelerden istifade edilmiştir.

3.2. Yöntem

Çalışmamızda tanımladığımız operatörün daha önceki benzer operatörler ile arasındaki farklar incelenmiş. Mapple bilgisayar yazılım programında bu operatörün sürekli bazı fonksiyonlara yaklaşım grafikleri çizilmiştir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

bu çalışmamızda Klasik Szasz-Kantorovich operatörlerin bir genelleştirmesi olarak aşağıda tanımlanmış olduğumuz $Z_b\left(j\,;s\right)$ operatörün dizilerini inceleyeceğiz. Önce operatörümüzün lineer ve pozitif olduğu gösterilmiştir. Keyfi $A>0$ için $[0,A]$ kapalı kopakt bölgesinde sürekli ve tüm reel eksende sınırlı olan fonksiyonlar için düzgün yaklaşımları incelenmiştir. $[0,\infty)$' a genişleyen aralıklar üzerinde , ağırlılık uzaylarda yaklaşımları ve yaklaşım hızları hesalanmıştır. $[0,\infty)$' da türevlenebilen ve türevi C_ρ^0 $[0,\infty)$ da olan fonksiyonlar için türevinin ağırlılık süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı hesaplanmıştır.

Tanım 4.1 **c** *ve* $e\in\mathbb{N}$ *ve* $0\leq c\leq e,\ 0\leq s\leq\infty$ *olmak üzere*

$$Z_b\left(j\,;s\right)=\frac{b(b+e)}{(b+c)}\,e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}\int_{\frac{f}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}}^{\frac{f+1}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}}f\left(t\right)dt \qquad (4.1)$$

şeklinde tanımlı lineer pozitif operatöre $Z_b\left(j\,;s\right)$ *operatörü denir.*

Burada $c=e$ *seçilirse Klasik Szasz-Kantorovich operatörünü elde ederiz. Şimdide* $Z_b\left(j\,;s\right)$ *operatörünün pozitif ve lineer olduğunu görelim.*

$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *ve* $\forall j,q\in C\left[0,A\right]$ *için,*

$$Z_b\left((\alpha j+\beta q)\ ;\ x\right)=\frac{b(b+e)}{(b+c)}\,e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}\int_{\frac{f}{b}\frac{(b+c)}{(b+c)}}^{\frac{f+1}{b}\frac{(b+c)}{(b+c)}}\left(\alpha j+\beta q\right)\left(i\right)di$$

$$=b(b+e)\frac{}{(b+c)}\,e^{-bs}\alpha\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}\int_{\frac{f}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}}^{\frac{f+1}{b}\frac{(b+c)}{(b+c)}}j\left(i\right)di+\frac{b(b+e)}{(b+c)}\,e^{-bs}\beta\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}\int_{\frac{f}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}}^{\frac{f+1}{b}\frac{(b+c)}{(b+c)}}q\left(i\right)di$$

$=\alpha\ Z_b\left(j\,;s\right)+\beta\ Z_b\left(q\,;s\right)$ *olduundan* $Z_b\left(f\,;s\right)$ *lineer bir operatördür.* $\forall s\in[0,A]$

için. Eğer $j\geq0\Rightarrow\quad Z_b\left(j\,;s\right)=\frac{b(b+e)}{(b+c)}\mathrm{e}^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}\int_{\frac{f}{b}\frac{(b+c)}{(b+c)}}^{\frac{f+1}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}}j\left(i\right)dt\geq0\Rightarrow Z_b\left(j\,;s\right)\geq0$

olduğundan $Z_b\left(j\,;s\right)$ pozitif bir operatördür.

Lemma 4.2 $\forall i\in\mathbb{N}$ *için* $\|Z_b\left(i\right)\|\leq L.\|i\|$ olacak şekilde bir $L\geq0$ bir sayı vardır.

İspat.

$$\begin{aligned}
\|Z_b(j)\| &= \left| \frac{b(b+e)}{(b+c)} e^{-bs} \sum_{f=0}^{\infty} \frac{(bs)^f}{f!} \int_{\frac{f}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}}^{\frac{f+1}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}} j(i)\,di \right| \\
&\leq \frac{b(b+e)}{(b+c\,)} e^{-bs} \sum_{f=0}^{\infty} \frac{(bs)^f}{f!} \int_{\frac{f}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}}^{\frac{f+1}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}} |j(i)|\,di \quad ; |j(i)| \leq \|j\| \, olduğundan \\
&\leq \frac{b(b+e)}{(b+c\,)} e^{-bs} \sum_{f=0}^{\infty} \frac{(bs)^f}{f!} \int_{\frac{f}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}}^{\frac{f+1}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}} \|j(i)\|\,di; \ \left(e^{-bs} \sum_{f=0}^{\infty} \frac{(bs)^f}{f!} \right) = 1 \\
&= \|f\| \frac{b(b+e)}{(b+c\,)} \int_{\frac{f}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}}^{\frac{f+1}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}} 1di \ ; \left(\frac{b(b+e)}{(b+c\,)} \int_{\frac{f}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}}^{\frac{f+1}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}} 1di \right) \geq 0
\end{aligned}$$

$= L\,.\,\|j\|$ $(K = 1)$ olduğundan

$Z_b(j)$ sınırlıdır.

□

Lemma 4.3 *(4.1)'de tanımlanmış olduğumuz operatör,* $\forall s \in [0, A]$ *için aşağıdaki eşitlikleri sağlar*.

$$\mathbf{1}.\ \mathbf{Z}_b(1\,;s) = 1$$

$$\mathbf{2}.\ \mathbf{Z}_b(i\,;s) = s + \frac{(c-e)}{(b+e)}x + \frac{1}{2}\frac{(b+c)}{b(b+e)}$$

$$\mathbf{3}.\ \mathbf{Z}_b\left(i^2\,;s\right) = s^2 + \frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2}s^2 + 2\frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2}s + \frac{1}{3}\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{4}.\ \mathbf{Z}_b\left(i^3\,;s\right) &= s^3 + \frac{(3bc^2+3b^2c+c^3-3be^2-3b^2e-e^3)}{(e+b)^3}s^3 \\
&\quad + \frac{9}{2}\frac{(b+c)^3}{b(b+e)^3}s^2 + \frac{7}{2}\frac{(b+c)^3}{b^2(b+e)^3}s + \frac{1}{4}\frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{5}.\ \mathbf{Z}_b\left(i^4\,;s\right) &= s^4 + \frac{(4bc^3+4b^3c+6b^2c^2+c^4-4be^3-4b^3e+6b^2e^2+e^4)}{(b+e)^4}s^4 \\
&\quad + 8\frac{(b+c)^4}{b(b+e)^4}s^3 + 15\frac{(b+c)^4}{b^2(b+e)^4}s^2 + 6\frac{(b+c)^4}{b^3(b+e)^4}s + \frac{1}{5}\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}
\end{aligned}$$

İspat.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{1)}\ \mathbf{Z}_b(1\,;s) &= \frac{b(b+e)}{(b+c)}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}\int\limits_{\frac{f}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}}^{\frac{f+1}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}} 1di \\
&= \frac{b(b+e)}{(b+c)}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}\left(\frac{f+1}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}-\frac{f}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}\right) \\
&= \frac{b(b+e)}{(b+c)}.\frac{(b+c)}{b(b+e)}(f+1-f) \\
&= 1 \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{2)}\ \mathbf{Z}_b(i\,;s) &= \frac{b(b+e)}{(b+c)}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}\int\limits_{\frac{f}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}}^{\frac{f+1}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}} idi \\
&= \frac{b(b+e)}{(b+c)}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}\,\frac{1}{2}\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}\left(\frac{(f+1)^2}{(b)^2}\frac{(b+c)^2}{(b+e)^2}-\frac{(f)^2}{(b)^2}\frac{(b+c)^2}{(b+e)^2}\right) \\
&= \frac{b(b+e)}{(b+c)}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}\,\frac{1}{2}\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}\left(f^2+2f+1-f^2\right) \\
&= \frac{b(b+e)}{(b+c)}\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}\frac{1}{2}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}(2f+1) \\
&= \frac{b(b+e)}{(b+c)}e^{-bs}\sum_{f=1}^{\infty}\frac{(bs)^{f-1}}{f(f-1)!}(bs)\frac{1}{2}2f+\frac{(b+c)}{b(b+e)}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}\,\frac{1}{2}1 \\
&= \frac{(b+c)}{b(b+e)}(bs)+\frac{1}{2}\frac{(b+c)}{b(b+e)} \\
&= \frac{(b+c)}{(b+e)}x+\frac{1}{2}\frac{(b+c)}{b(b+e)} \\
&= s+\frac{(c-e)}{(b+e)}x+\frac{1}{2}\frac{(b+c)}{b(b+e)} \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{3)}\ \mathbf{Z}_b\left(i^2\,;s\right) &= \frac{b(b+e)}{(b+c)}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}\int\limits_{\frac{f}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}}^{\frac{f+1}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}} i^2di \\
&= \frac{b(b+e)}{(b+c)}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}\frac{1}{3}\left(\frac{(f+1)^3}{(b)^3}\frac{(b+c)^3}{(b+e)^3}-\frac{(f)^3}{(b)^3}\frac{(b+c)^3}{(b+e)^3}\right) \\
&= \frac{b(b+e)}{(b+c)}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}\frac{1}{3}\frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3}(f^3+3f^2+3f+1-f^3) \\
&= \frac{1}{3}\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}(3f^2+3f+1) \qquad ;f^2=f(f-1)+f
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}3f^2 \\
&\quad + \frac{1}{3}3\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}f + \frac{1}{3}\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}1 \\
&= \frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}(f(f-1)+f) \\
&\quad + \frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^{f-1}}{f(f-1)!}(bs)f + \frac{1}{3}\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2} \\
&= \frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}e^{-bs}\sum_{f=2}^{\infty}\frac{(bs)^{f-2}}{f(f-1)(f-2)!}(bs)^2 f(f-1) \\
&\quad + \frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}e^{-bs}\sum_{f=1}^{\infty}\frac{(bs)^{f-1}}{f(f-1)!}(bs)f + \frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}s + \frac{1}{3}\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2} \\
&= \frac{(b+c)^2}{(b+e)^2}s^2 + \frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2}s + \frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2}s + \frac{1}{3}\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2} \\
&= \frac{(b+c)^2}{(b+e)^2}s^2 + 2\frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2}s + \frac{1}{3}\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2} \\
&= s^2 + \frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2}s^2 + 2\frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2}s + \frac{1}{3}\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

$$
\begin{aligned}
4)\quad \mathbf{Z}_b\left(i^3\,;s\right) &= \frac{b(b+e)}{(b+c)}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}\int_{\frac{f}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}}^{\frac{f+1}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}} i^3 di \\
&= \frac{b(b+e)}{(b+c)}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}\frac{1}{4}\left(\frac{(f+1)^4}{(b)^4}\frac{(b+c)^4}{(b+e)^4} - \frac{(f)^4}{(b)^4}\frac{(b+c)^4}{(b+e)^4}\right) \\
&= \frac{b(b+e)}{(b+c)}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}\frac{1}{4}\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}((f+1)^4 - f^4) \\
&= \frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}\frac{1}{4}(f^4+4f^3+6f^2+4f+1-f^4) \\
&= \frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}\frac{1}{4}4f^3 + \frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}\frac{1}{4}6f^2 \\
&\quad + \frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}\frac{1}{4}4f + \frac{1}{4}\frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}1
\end{aligned}
$$

$f^3 = f(f-1)(f-2) + 3f(f-1) + 3f - 2f$

$$
= \frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!}\left(f(f-1)(f-2) + 3f(f-1) + 3f - 2f\right)
$$

$$
\begin{aligned}
& + \frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3} e^{-bs} \sum_{f=0}^{\infty} \frac{(bs)^f}{f!} \frac{3}{2} \left(f(f-1) + f \right) \\
& + \frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3} e^{-bs} \sum_{f=1}^{\infty} \frac{(bs)^{f-1}}{f(f-1)!} (bs) f + \frac{1}{4} \frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3} \\
= {} & \frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3} e^{-bs} \sum_{f=3}^{\infty} \frac{(bs)^{f-3}}{f(f-1)(f-2)(f-3)!} (bs)^3 f(f-1)(f-2) \\
& + 3\frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3} e^{-bs} \sum_{f=2}^{\infty} \frac{(bs)^{f-2}}{f(f-1)(f-2)!} (bs)^2 f(f-1) \\
& + 3\frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3} e^{-bs} \sum_{f=1}^{\infty} \frac{(bs)^{f-1}}{f(f-1)!} (bs) f - 2\frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3} e^{-bs} \sum_{f=1}^{\infty} \frac{(bs)^{f-1}}{f(f-1)!} (bs) f \\
& + \frac{3}{2} \frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3} e^{-bs} \sum_{f=1}^{\infty} \frac{(bs)^{f-1}}{f(f-1)!} (bs) f \\
& + \frac{3}{2} \frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3} e^{-bs} \sum_{f=2}^{\infty} \frac{(bs)^{f-2}}{f(f-1)(f-2)!} (bs)^2 f(f-1) \\
& + \frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3} s + \frac{1}{4} \frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3} \\
= {} & \frac{(b+c)^3}{(b+e)^3} s^3 + \frac{9}{2} \frac{(b+c)^3}{b(b+e)^3} s^2 + \frac{7}{2} \frac{(b+c)^3}{b^2(b+e)^3} s + \frac{1}{4} \frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3} \\
= {} & s^3 + \frac{(3bc^2 + 3b^2c + c^3 - 3be^2 - 3b^2e - e^3)}{(n+b)^3} x^3 \\
& + \frac{9}{2} \frac{(b+c)^3}{b(b+e)^3} s^2 + \frac{7}{2} \frac{(b+c)^3}{b^2(b+e)^3} s + \frac{1}{4} \frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3}
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{5)}\ \mathbf{Z}_b\left(i^4 ; s\right) &= \frac{b(b+e)}{(b+c)} e^{-bs} \sum_{f=0}^{\infty} \frac{(bs)^f}{f!} \int_{\frac{f}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}}^{\frac{f+1}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}} i^4 di \\
&= \frac{b(b+e)}{(b+c)} e^{-bs} \sum_{f=0}^{\infty} \frac{(bs)^f}{f!} \frac{1}{5} \left(\frac{(f+1)^5}{(b)^5} \frac{(b+c)^5}{(b+e)^5} - \frac{(f)^5}{(b)^5} \frac{(b+c)^5}{(b+e)^5} \right) \\
&= \frac{b(b+e)}{(b+c)} e^{-bs} \sum_{f=0}^{\infty} \frac{(bs)^f}{f!} \frac{1}{5} \frac{(b+c)^5}{b^5(b+e)^5} (f^5 + 5f^4 + 5f + 10f^2 + 10f^3 + 1 - f^5)
\end{aligned}
$$

$$f^3 = f(f-1)(f-2) + 3f(f-1) + 3f - 2f$$

$$f^4 = f(f-1)(f-2)(f-3) + 6f^3 + 11f^2 + 6f$$

$$
\begin{aligned}
= {} & \frac{1}{5} \frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4} e^{-bs} \sum_{f=0}^{\infty} \frac{(bs)^f}{f!} \left(5 \left(f(f-1)(f-2)(f-3) + 6f^3 + 11f^2 + 6f \right) \right) \\
& + 10 \left(f(f-1)(f-2) + 3f(f-1) + 3f - 2f \right) + 10(f(f-1) + f) + 5f + 1
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}e^{-bs}\sum_{f=4}^{\infty}\frac{(bs)^{f-4}}{f(f-1)(f-2)(f-3)(f-4)!} \\
&\quad f(f-1)(f-2)(f-3)(bs)^4 \\
&\quad +6\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}e^{-bs}\sum_{f=3}^{\infty}\frac{(bs)^{f-3}}{f(f-1)(f-2)(f-3)!}f(f-1)(f-2)(bs)^3 \\
&\quad +18\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}e^{-bs}\sum_{f=2}^{\infty}\frac{(bs)^{f-3}}{f(f-1)(f-2)!}f(f-1)(bs)^2 \\
&\quad +18\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}e^{-bs}\sum_{f=3}^{\infty}\frac{(bs)^{f-3}}{f(f-1)!}f(bs)-12\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}e^{-bs}\sum_{f=3}^{\infty}\frac{(bs)^{f-3}}{f(f-1)!}f(bs) \\
&\quad +11\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}e^{-bs}\sum_{f=2}^{\infty}\frac{(bs)^{f-3}}{f(f-1)(f-2)!}f(f-1)(bs)^2 \\
&\quad +11\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}e^{-bs}\sum_{f=3}^{\infty}\frac{(bs)^{f-3}}{f(f-1)!}f(bs)+6\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}e^{-bs}\sum_{f=3}^{\infty}\frac{(bs)^{f-3}}{f(f-1)!}f(bs) \\
&= \frac{(b+c)^4}{(b+e)^4}s^2+6\frac{(b+c)^4}{b(b+e)^4}s^3+18\frac{(b+c)^4}{b^2(b+e)^4}s^2+18\frac{(b+c)^4}{b^3(b+e)^4}s \\
&\quad -12\frac{(b+c)^4}{b^3(b+e)^4}s+11\frac{(b+c)^4}{b^2(b+e)^4}s^2+11\frac{(b+c)^4}{b^3(b+e)^4}s+6\frac{(b+c)^4}{b^3(b+e)^4}s \\
&= \frac{(b+c)^4}{(b+e)^4}s^2+6\frac{(b+c)^4}{b(b+e)^4}s^3+29\frac{(b+c)^4}{b^2(b+e)^4}s^2+23\frac{(b+c)^4}{b^3(b+e)^4}s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{10}{5}\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}e^{-bs}\sum_{f=3}^{\infty}\frac{(bs)^{f-3}}{f(f-1)(f-2)(f-3)!}(bs)^3 f(f-1)(f-2) \\
&\quad +\frac{30}{5}\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}e^{-bs}\sum_{f=2}^{\infty}\frac{(bs)^{f-2}}{f(f-1)(f-2)!}(bs)^2 f(f-1) \\
&\quad +\frac{30}{5}\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}e^{-bs}\sum_{f=1}^{\infty}\frac{(bs)^{f-1}}{f(f-1)!}(bs)f \\
&\quad -\frac{20}{5}\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}e^{-bs}\sum_{f=1}^{\infty}\frac{(bs)^{f-1}}{f(f-1)!}(bs)f \\
&\quad +\frac{10}{5}\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}e^{-bs}\sum_{f=2}^{\infty}\frac{(bs)^{f-2}}{f(f-1)(f-2)!}(bs)^2 f(f-1) \\
&\quad +\frac{10}{5}\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}e^{-bs}\sum_{f=1}^{\infty}\frac{(bs)^{f-1}}{f(f-1)!}(bs)f \\
&\quad +\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}e^{-bs}\sum_{f=1}^{\infty}\frac{(bs)^{f-1}}{f(f-1)!}(bs)f+\frac{1}{5}\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{(bs)^f}{f!} \\
&= 2\frac{(b+c)^4}{b(b+e)^4}s^3+6\frac{(b+c)^4}{b^2(b+e)^4}s^2+6\frac{(b+c)^4}{b^3(b+e)^4}s-4\frac{(b+c)^4}{b^3(b+e)^4}s
\end{aligned}$$

$$+2\frac{(b+c)^4}{b^2(b+e)^4}s^2+2\frac{(b+c)^4}{b^3(b+e)^4}s+\frac{(b+c)^4}{b^3(b+e)^4}s+\frac{1}{5}\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}$$

$$I_2 = 2\frac{(b+c)^4}{b(b+e)^4}s^3+8\frac{(b+c)^4}{b^2(b+e)^4}s^2+5\frac{(b+c)^4}{b^3(b+e)^4}s+\frac{1}{5}\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}$$

I_1 ve I_2 den

$$= \frac{(b+c)^4}{(b+e)^4}s^4+8\frac{(b+c)^4}{b(b+e)^4}s^3+15\frac{(b+c)^4}{b^2(b+e)^4}s^2+6\frac{(b+c)^4}{b^3(b+e)^4}x+\frac{1}{5}\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}$$

$$\begin{aligned} Z_b\left(i^4\,;s\right) &= s^4+\frac{\left(4bc^3+4b^3c+6b^2c^2+c^4-4be^3-4b^3e+6b^2e^2+e^4\right)}{(n+b)^4}s^4 \\ &+8\frac{(b+c)^4}{b(b+e)^4}s^3+15\frac{(b+c)^4}{b^2(b+e)^4}s^2+6\frac{(b+c)^4}{b^3(b+e)^4}x+\frac{1}{5}\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4} \end{aligned} \tag{4.6}$$

□

Lemma 4.4 *(4.1)'de tanımladığımız $Z_b(j\,;s)$ operatörü için merkezi momentlerin bazıları şöyledi.*

$$\mathbf{1})\ Z_b\left((i-s)^0\,;s\right)=1$$

$$\mathbf{2})\ Z_b\left((i-s)\ ;\ s\right)=\frac{(c-e)}{(b+e)}s+\frac{1}{2b}\frac{(b+c)}{(b+e)}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{3})\ Z_b\left((i-s)^2\ ;\ s\right) &= \left(\frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2}-2\frac{(c-e)}{(b+e)}\right)s^2 \\ &+\left(2\frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2}-\frac{(b+c)}{b(b+e)}\right)s+\frac{1}{3}\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{4})\ Z_b\left((i-s)^3\ ;\ s\right) &= \left(\frac{(3bc^2+3b^2c+c^3-3be^2-3b^2e-e^3)}{(b+e)^3}\right. \\ &\left.-3\frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2}+3\frac{(c-e)}{(b+e)}\right)s^3 \\ &+\left(4\frac{(b+c)^3}{b(b+e)^3}-6\frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2}+\frac{3}{2}\frac{(b+c)}{b(b+e)}\right)s^2+ \\ &\left(\frac{7}{2}\frac{(b+c)^3}{b^2(b+e)^3}-\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}\right)s+\frac{1}{4}\frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{5)} Z_n\left((t-x)^4 \; ; \; x\right) &= \left(\frac{(4bc^3+4b^3c+6b^2c^2+c^4-4be^3-4b^3e+6b^2e^2+e^4)}{(b+e)^4}\right. \\
&\quad -\frac{(3bc^2+3b^2c+c^3-3be^2-3b^2e-e^3)}{(n+b)^3} \\
&\quad \left.+6\frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2} - \; 4\frac{(c-e)}{(b+e)}\right) s^4 \\
&\quad +\left(8\frac{(b+c)^4}{b(b+e)^4}-16\frac{(b+c)^3}{b(b+e)^3}+12\frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2}-2\frac{(b+c)}{b(b+e)}\right)s^3 \\
&\quad +\left(15\frac{(b+c)^4}{b^2(b+e)^4}-14\frac{(b+c)^3}{b^2(b+e)^3}+2\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}\right)s^2 \\
&\quad +\left(6\frac{(b+c)^4}{b^3(b+e)^4}-\frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3}\right)s \; +\frac{1}{5}\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}
\end{aligned}
$$

İspat. (4.2)'den

$$
Z_b\left((i-s)^0 ; s\right) = Z_b(1; s) = 1 \tag{4.7}
$$

olduğu açık.

$$
\begin{aligned}
Z_b((i-s) \; ; \; s) &= Z_b(i;s) - sZ_b(1;s) \\
&= s+\frac{(c-e)}{(b+e)}s+\frac{1}{2}\frac{(b+c)}{b(b+e)}-s.1 \\
&= \frac{(c-e)}{(b+e)}s+\frac{1}{2b}\frac{(b+c)}{(b+e)}
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_b\left((i-s)^2 \; ; \; s\right) &= Z_b\left(i^2-2si+s^2 \, ; s\right) \\
&= Z_b\left(i^2;s\right)-2sZ_b(i;s)+s^2Z_b(1;s) \\
&= s^2+\frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2}s^2+2\frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2}s \\
&\quad +\frac{1}{3}\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}-2s\left(s+\frac{(c-e)}{(b+e)}s+\frac{1}{2b}\frac{(b+c)}{(b+e)}\right)+s^2.1 \\
&= \left(2+\frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2}-2\frac{(c-e)}{(b+e)}-2\right)s^2 \\
&\quad +\left(2\frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2}-\frac{(b+c)}{b(b+e)}\right)s+\frac{1}{3}\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2} \\
&= \left(\frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2}-2\frac{(c-e)}{(b+e)}\right)s^2 \\
&\quad +\left(2\frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2}-\frac{(b+c)}{b(b+e)}\right)s+\frac{1}{3}\,\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_b\left((i-s)^3\ ;\ s\right) &= Z_b\left(i^3-3si^2+3is^2-s^3;s\right) \\
&= Z_b\left(i^3;s\right)-3s\ Z_b\left(i^2;s\right)+3s^2Z_b\left(i;s\right)-s^3Z_b\left(1;s\right) \\
&= s^3+\frac{(3bc^2+3b^2c+c^3-3be^2-3b^2e-e^3)}{(b+e)^3}s^3 \\
&\quad +\frac{9}{2}\ \frac{(b+c)^3}{b\,(b+e)^3}s^2+\frac{7}{2}\frac{(b+c)^3}{b^2\,(b+e)^3}s+\frac{1}{4}\frac{(b+c)^3}{b^3\,(b+e)^3} \\
&\quad -3s\left(s^2+\frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2}s^2+2\frac{(b+c)^2}{b\,(b+e)^2}s+\frac{1}{3}\frac{(b+c)^2}{b^2\,(b+e)^2}\right) \\
&\quad +3s^2\left(s+\frac{(c-e)}{(b+e)}s+\frac{1}{2b}\frac{(b+c)}{(b+e)}\right)-s^3 \\
&= s^3+\frac{(3bc^2+3b^2c+c^3-3be^2-3b^2e-e^3)}{(b+e)^3}s^3 \\
&\quad +\frac{9}{2}\ \frac{(b+c)^3}{b\,(b+e)^3}s^2+\frac{7}{2}\frac{(b+c)^3}{b^2\,(b+e)^3}s+\frac{1}{4}\frac{(b+c)^3}{b^3\,(b+e)^3} \\
&\quad -3s^3-3\frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2}s^3-6\frac{(b+c)^2}{b\,(b+e)^2}s^2 \\
&\quad -\frac{(b+c)^2}{b^2\,(b+e)^2}s+3s^3+3\frac{(c-e)}{(b+e)}s^3+\frac{3}{2}\frac{(b+c)}{b\,(b+e)}s^2-s^3 \\
&= \left(\frac{(3bc^2+3b^2c+c^3-3be^2-3b^2e-e^3)}{(b+e)^3}\right. \\
&\quad \left.-3\frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2}+\ 3\frac{(c-e)}{(b+e)}\right)\ s^3 \\
&\quad +\left(\frac{9}{2}\frac{(b+c)^3}{b\,(b+e)^3}-6\frac{(b+c)^2}{b\,(b+e)^2}+\frac{3}{2}\frac{(b+c)}{b\,(b+e)}\right)\ s^2 \\
&\quad +\left(\frac{7}{2}\frac{(b+c)^3}{b^2\,(b+e)^3}-\frac{(b+c)^2}{b^2\,(b+e)^2}\right)\ s+\frac{1}{4}\ \frac{(b+c)^3}{b^3\,(b+e)^3}
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_b\left((i-s)^4\ ;\ s\right) &= Z_b\left(i^4-4si^3+6s^2i^2-4s^3i+s^4\ ;s\right) \\
&= Z_b\left(i^4\ ;s\right)-4sZ_b\left(i^3\ ;s\right)+6s^2Z_b\left(i^2\ ;e\right)-4s^3Z_b\left(i\ ;s\right)+s^4Z_b\left(1\ ;s\right) \\
&= s^4+\frac{(4bc^3+4b^3c+6b^2c^2+c^4-4be^3-4b^3e+6b^2e^2+e^4)}{(n+b)^4}s^4 \\
&\quad +8\frac{(b+c)^4}{b\,(b+e)^4}s^3+15\frac{(b+c)^4}{b^2\,(b+e)^4}s^2+6\frac{(b+c)^4}{b^3\,(b+e)^4}s+\frac{1}{5}\frac{(b+c)^4}{b^4\,(b+e)^4} \\
&\quad -4s\left(s^3+\frac{(3bc^2+3b^2c+c^3-3be^2-3b^2e-e^3)}{(n+b)^3}s^3\right. \\
&\quad \left.\frac{9}{2}\ \frac{(b+c)^3}{b\,(b+e)^3}s^2+\frac{7}{2}\frac{(b+c)^3}{b^2\,(b+e)^3}s+\frac{1}{4}\frac{(b+c)^3}{b^3\,(b+e)^3}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+6s^2\left(s^2+\frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2}s^2+2\frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2}s+\frac{1}{3}\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}\right)\\
&-4s^3\left(s+\frac{(c-e)}{(b+e)}s+\frac{1}{2b}\frac{(b+c)}{(b+e)}\right)+s^4\\
=\;& s^4+\frac{(4bc^3+4b^3c+6b^2c^2+c^4-4be^3-4b^3e+6b^2e^2+e^4)}{(n+b)^4}s^4\\
&+8\frac{(b+c)^4}{b(b+e)^4}s^3+15\frac{(b+c)^4}{b^2(b+e)^4}s^2+6\frac{(b+c)^4}{b^3(b+e)^4}s+\frac{1}{5}\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}\\
&-4s^4-4\frac{(3bc^2+3b^2c+c^3-3be^2-3b^2e-e^3)}{(n+b)^3}s^4-18\frac{(b+c)^3}{b(b+e)^3}s^3\\
&-14\frac{(b+c)^3}{b^2(b+e)^3}s^2-\frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3}s+6s^4+6\frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2}s^4\\
&+12\frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2}s^3+2\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}s^2-4s^4-4\frac{(c-e)}{(b+e)}s^4-2\frac{(b+c)}{b(b+e)}s^3+s^4\\
=\;&\left(\frac{(4bc^3+4b^3c+6b^2c^2+c^4-4be^3-4b^3e+6b^2e^2+e^4)}{(b+e)^4}\right.\\
&-\frac{(3bc^2+3b^2c+c^3-3be^2-3b^2e-e^3)}{(n+b)^3}\\
&\left.+6\frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2}-\;4\frac{(c-e)}{(b+e)}\right)s^4\\
&+\left(8\frac{(b+c)^4}{b(b+e)^4}-16\frac{(b+c)^3}{b(b+e)^3}+12\frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2}-2\frac{(b+c)}{b(b+e)}\right)s^3\\
&+\left(15\frac{(b+c)^4}{b^2(b+e)^4}-14\frac{(b+c)^3}{b^2(b+e)^3}+2\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}\right)s^2\\
&+\left(6\frac{(b+c)^4}{b^3(b+e)^4}-\frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3}\right)s\;\;+\frac{1}{5}\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

□

Teorem 4.5 *$A>0$ olmak üzere $j\in C[0,A]$ olsun ve bütün reel eksende sınırlı olsun. Bu durumda*

$$\lim_{b\to\infty}\|Z_bj-j\|_{C[0,A]}=0$$

dır.

İspat. 2.2)(Korovkin teoremi)'den yaralanarak $n\to\infty$ için

i) $Z_b(1\,;s)\rightrightarrows 1$

ii) $Z_b(i\,;s)\rightrightarrows s$

iii) $Z_b\left(i^2\,;s\right) \rightrightarrows s^2$

olduğunu gösterirsek ispatı tamamlamış oluruz.

$\|Z_b\left(1\,;s\right)-1\|_{C[0,A]}=0$ olduğu açıktır. O halde $Z_b\left(1\,;s\right) \rightrightarrows 1$

(4.3) ve (4.4)'de elde ettiğimiz ifadelerini yerlerine yazarsak;

$$\begin{aligned}
\|Z_b\left(i\,;s\right)-s\|_{C[0,A]} &= \max_{0\le s\le A}\left|Z_n\left(i\,;s\right)-s\right| \\
&= \max_{0\le s\le A}\left|s+\frac{(c-e)}{(b+e)}s+\frac{1}{2b}\frac{(b+c)}{(b+e)}-s\right| \\
&= \left|\frac{(c-e)}{(b+e)}A+\frac{1}{2b}\frac{(b+c)}{(b+e)}\right| \; buradan \\
&= \left|\frac{2b\,(c-e)}{2b\,(b+e)}A+\frac{(b+c)}{2b\,(b+e)}\right|
\end{aligned}$$

$$\lim_{b\to\infty}\left|\frac{2b\,(c-e)}{2b\,(b+e)}A+\frac{(b+c)}{2b\,(b+e)}\right| \;\to\; 0 \text{ olduğundan } Z_b\left(i\,;s\right) \rightrightarrows s$$

$$\begin{aligned}
&\|Z_b\left(i^2\,;s\right)-s^2\|_{C[0,A]}=\max_{0\le s\le A}\left|Z_b\left(i^2\,;s\right)-s^2\right| \\
&=\max_{0\le s\le A}\left|s^2+\tfrac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2}s^2+2\tfrac{(b+c)^2}{b(b+e)^2}s+\tfrac{1}{3}\tfrac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}-s^2\right| \\
&=\max_{0\le s\le A}\left|\tfrac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2}s^2+2\tfrac{(b+c)^2}{b(b+e)^2}s+\tfrac{1}{3}\tfrac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}\right| \\
&\le\left|\tfrac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2}A^2+2\tfrac{(b+c)^2}{b(b+e)^2}A+\tfrac{1}{3}\tfrac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}\right| \\
&\lim_{n\to\infty}\left|\tfrac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2}A^2+\tfrac{(b+c)^2}{(b+e)^2}\left(\tfrac{2}{b}A+\tfrac{1}{3}\tfrac{1}{b^2}\right)\right|\to 0 \text{ olduğundan } Z_b\left(i^2\,;s\right) \rightrightarrows x^2
\end{aligned}$$

olur. Korovkin teoreminden dolayı $\lim\limits_{b\to\infty}\|Z_bj-j\|_{C[0,A]}=0$ yani $Z_b(j;s) \rightrightarrows j(s)$

elde edilir. □

Teorem 4.6 *$j\in C^0_\rho\left[0,\infty\right)$ olsun, bu durumda* $\lim\limits_{b\to\infty}\|Z_bj-j\|_{\rho,[0,\infty)}=0$

İspat. $\|Z_bj-j\|_{\rho,[0,\infty)}=\sup\limits_{s\in[0,\infty)}\frac{|Z_b(j\,;s)-j(s)|}{1+s^2}$ olmak üzere; Teorem 1.1.4ten yararlanarak

$$\lim_{b\to\infty}\|Z_b1-1\|_{\rho,[0,\infty)}=\lim_{b\to\infty}\sup_{s\in[0,\infty)}\frac{|Z_b\left(1\,;s\right)-1|}{1+s^2}=0$$

(4.3)' teki ifadeyi yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\|Z_b i - s\|_{\rho,[0,\infty)} &= \sup_{s\in[0,\infty)} \frac{\left|s + \frac{(c-e)}{(b+e)}s + \frac{1}{2b}\frac{(b+c)}{(b+e)} - s\right|}{1+x^2} \\
&\leq \frac{2b\,(c-e)}{2b\,(b+e)} + \frac{(b+c)}{2b\,(b+e)} \\
\lim_{b\to\infty} \|Z_b i - s\|_{\rho,[0,\infty)} &\leq \lim_{b\to\infty}\left(\frac{2b\,(c-e)}{2b\,(b+e)} + \frac{(b+c)}{2b\,(b+e)}\right) \to \infty
\end{aligned}$$

(4.4)'teki ifadeyi de kullanırsak

$$\begin{aligned}
\left\|Z_b i^2 - s^2\right\|_{\rho,[0,\infty)} &= \sup_{s\in[0,\infty)} \frac{\left|s^2 + \frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2}s^2 + 2\frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2}s + \frac{1}{3}\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2} - s^2\right|}{1+s^2} \\
&= \sup_{s\in[0,\infty)} \frac{\left|\frac{3b^2(2bc+c-2be-e)+6b(b+c)^2+(b+c)^2}{3b^2(b+e)^2}\right|}{1+s^2}
\end{aligned}$$

$0 \leq \frac{s^2}{1+s^2} \leq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{3b^2\,(2bc+c-2be-e)+6b\,(b+c)^2+(b+c)^2}{3b^2\,(b+e)^2} \\
\lim_{b\to\infty}\left\|Z_b i^2 - s^2\right\|_{\rho,[0,\infty)} &= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{3b^2\,(2bc+c-2be-e)+6b\,(b+c)^2+(b+c)^2}{3b^2\,(b+e)^2}\right) \to \infty
\end{aligned}$$

dolayısıyla Teorem 1.1.4'den

$$\lim_{b\to\infty}\|Z_b j - j\|_{\rho} = 0$$

elde edilir. □

Teorem 4.7 ***(Yaklaşım Hızı)*** $j \in C_{\rho}^{0}[0,\infty)$ *olsun. Bu takdirde aşağdaki eşitsizliği sağlar.*

$$\|Z_b j - j\|_{\rho,[0,\infty)} \leq M\Omega\left(j\,;\sqrt{\frac{1}{b}}\right)$$

burada $M = 808$ *'dır.*

İspat. Lineerlik ve monotonluk özelliğinden;

$$|Z_b\,(j\,;s) - j\,(s)| \leq Z_b\,(|j\,(i) - j\,(s)|\,;s)$$

olur.

Lemma 1.1.1 de (vii) deki özellikleri kullanarak;

$$\begin{aligned}
|j(i)-j(s)| &\leq 2\left(1+\eta_b^2\right)\left(1+s^2\right)\left(1+\frac{|i-s|}{\eta_b}\right)\left(1+(i-s)^2\right)\Omega(j\,;\eta_b) \\
|j(i)-j(s)| &\leq 2\left(1+\eta_b^2\right)\left(1+s^2\right)\Omega(j\,;\eta_b)\,.S_b(i\,;s) \\
S_b(i\,;s) &= \left(1+\frac{|i-s|}{\eta_b}\right)\left(1+(i-s)^2\right)
\end{aligned}$$

dersek; buradan;

$$S_b(i\,;s) \leq \left\{ \begin{array}{cc} 2\left(1+\eta_b^2\right) & |i-s| < \eta_b \\ 2\left(1+\eta_b^2\right)\frac{|i-s|^4}{\eta_b^4} & ;\ |i-s| \geq \eta_b \end{array} \right\}$$

ve böylece

$$S_b(i\,;s) \leq 2\left(1+\eta_b^2\right)\left[1+\frac{|i-s|^4}{\eta_b^4}\right]$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
|Z_b(j\,;s)-j(s)| &\leq Z_b(|j(i)-j(s)|\,;s) \\
&\leq 2\left(1+\eta_b^2\right)\left(1+s^2\right)\Omega(j\,;\eta_b)\,Z_b(S_b(i\,;s)\,;s) \\
&\leq 4\left(1+\eta_b^2\right)\Omega(j\,;\eta_b)\left(1+s^2\right)\left[1+\frac{1}{\eta_b^4}Z_b(i-s)^4\,;s\right]
\end{aligned}$$

$(4.3), (4.4), (4.5)$ ve(4.6)'daki ifadelerini dikkate alırsak;

$$\begin{aligned}
\leq &\left(\frac{(4na^3+4n^3a+6n^2a^2+a^4-4nb^3-4n^3b+6n^2b^2+b^4)}{(n+b)^4}\right. \\
&\left.+6\frac{(2na+a-2nb-b)}{(n+b)^2}\right)x^4 \\
&+\left(8\frac{(n+a)^4}{n(n+b)^4}+12\frac{(n+a)^2}{n(n+b)^2}\right)x^3+\left(37\frac{(n+a)^4}{n^2(n+b)^4}+2\frac{(n+a)^2}{n^2(n+b)^2}\right)x^2 \\
&+\left(28\frac{(n+a)^4}{n^3(n+b)^4}\right)x+\left(\frac{(n+a)^4}{5n^4(n+b)^4}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_n\left((t-x)^4\,;x\right) = &\left(\frac{(4bc^3+4b^3c+6b^2c^2+c^4-4be^3-4b^3e+6b^2e^2+e^4)}{(b+e)^4}\right. \\
&-\frac{(3bc^2+3b^2c+c^3-3be^2-3b^2e-e^3)}{(n+b)^3} \\
&\left.+6\frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2}-4\frac{(c-e)}{(b+e)}\right)s^4
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(8\frac{(b+c)^4}{b(b+e)^4}-16\frac{(b+c)^3}{b(b+e)^3}+12\frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2}-2\frac{(b+c)}{b(b+e)}\right)s^3\\
&+\left(15\frac{(b+c)^4}{b^2(b+e)^4}-14\frac{(b+c)^3}{b^2(b+e)^3}+2\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}\right)x^2\\
&+\left(6\frac{(b+c)^4}{b^3(b+e)^4}-\frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3}\right)s+\frac{1}{5}\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}\\
\leq\;&\left(\frac{(4bc^3+4b^3c+6b^2c^2+c^4-4be^3-4b^3e+6b^2e^2+e^4)}{(b+e)^4}\right.\\
&\left.+6\frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2}\right)s^4\\
&+\left(8\frac{(b+c)^4}{b(b+e)^4}+12\frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2}\right)s^3+\left(15\frac{(b+c)^4}{b^2(b+e)^4}+2\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}\right)s^2\\
&+\left(6\frac{(b+c)^4}{b^3(b+e)^4}\right)s+\left(\frac{1}{5}\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{Z}_b\left((i-s)^4;s\right)\leq\left(\frac{\left(4bc^3+4b^3c+6b^2c^2+c^4-4be^3-4b^3e+6b^2e^2+e^4\right)+6(b+e)^2(2bc+c-2be-e)}{(n+b)^4}\right)s^4
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{8(b+c)^4+12(b+e)^2(b+c)^2}{b(b+e)^4}\right)s^3+\left(\frac{15(b+c)^4+2(b+e)^2(b+c)^2}{b^2(b+e)^4}\right)s^2\\
&+\left(\frac{6(b+c)^4}{b^3(b+e)^4}\right)s+\left(\frac{(b+c)^4}{5b^4(b+e)^4}\right)
\end{aligned}
$$

olur. Her iki tarafın $[0,\infty)$ üzerinde supremumu alınırsa ve negitif işıemeri çıkartarak

$$
\sup_{s\in[0,\infty)} Z_b\left((i-s)^4;s\right)\leq\frac{\left(5b^4\left(4bc^3+4b^3c+6b^2c^2+c^4+6b^2e^2+e^4\right)+30b^4(b+e)^2(2bc+c)+40c^3(b+c)^4+60(b+e)^2(b+c)^2+185b^2(b+c)^4+10b^2(b+e)^2(b+c)^2+140b(b+c)^4+(b+c)^4\right)}{5b^4(b+e)^4}
$$

$c\leq e$ olduğundan c yerine e alınırsa

$$
\leq\frac{\left(5b^4\left(4be^3+4b^3e+12b^2e^2+2e^4\right)+30b^4(b+e)^2(2be+e)+40b^3(b+e)^4+60b^3(b+e)^4+185b^2(b+e)^4+10b^2(b+e)^4+140b(b+c)^4+(b+e)^4\right)}{5b^4(b+e)^4}
$$

$$
\leq\;100\frac{b^3}{(b+e)^4}\leq 100\frac{1}{b}\qquad(4.12)
$$

bulunur.

Buradan $\sup\limits_{s\in[0,\infty)}\frac{|Z_b(j\,;s)-j(s)|}{1+s^2}\leq 4\left(1+\eta_b^2\right)\Omega\left(j\,;\eta_b\right)\left[1+\frac{100}{\eta_b^4}\frac{1}{b}\right]$

elde edilir; $\eta_b=\sqrt{\frac{1}{b}}$ alınırsa, $\eta_b\to 0$ olduğundan belirli bir b den sonra $\eta_b<1$ olur. Böylece $M=808$ olmak üzere

$$\|Z_b j - j\|_{\rho,[0,\infty)} \leq M\,\Omega\left(j\,;\sqrt{\tfrac{1}{b}}\right)$$

bulunur ve ispat tamamlanır. □

Teorem 4.8 *j , $[0,\infty)$ 'da türevlenebilir ve $j' \in C_\rho^0\,[0,\infty)$ olsun. Bu taktirde*

$$\|Z_b j - j\|_{\rho,[0,\infty)} \leq L\sqrt{\frac{2}{b}}\Omega\left(j'\,;\sqrt{\frac{2}{b}}\right)$$

İspat. j , $[0,\infty)$ 'da türevlenebilir ve $j' \in C_\rho^0\,[0,\infty)$ olduğundan i ile s arasında ortalama değer teoreminden

$$j'(u) = \tfrac{j(i)-j(s)}{i-s}$$

olacak şekilde bir u vardır. Eşitliğin sol tarafına $-j'(s)+j'(s)$ eklersek

$$j(i)-j(s) = (i-s)j'(u) + (i-s)\left[j'(u) - j'(s)\right] \tag{4.13}$$

elde edilir. $|u-s| \leq |i-s|$ olduğunda $\Omega(j\,;|u-s|) \leq \Omega(j\,;|i-s|)$ olur.

Lemma 1.1.1 den;

$$\begin{aligned}
|j'(u) - j'(s)| &\leq 2\left(1+\eta_b^2\right)\left(1+s^2\right)\left(1+\frac{|u-s|}{\eta_b}\right)\left(1+(u-s)^2\right)\Omega\left(j\,';\eta_b\right) \\
&\leq 2\left(1+\eta_b^2\right)\left(1+s^2\right)\left(1+\frac{|i-s|}{\eta_b}\right)\left(1+(i-s)^2\right)\Omega\left(j\,';\eta_b\right) \\
&= 2\left(1+\eta_b^2\right)\left(1+s^2\right)\left[1+\frac{|i-s|}{\eta_b}\right. \\
&\qquad \left. +(i-s)^2 + \frac{|i-s|\,(i-s)^2}{\eta_b}\right]\Omega\left(j\,';\eta_b\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.13)'den görünen aşağıdaki çarpımı hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
& |i-s| \;\; |j'(u) - j'(s)| \\
\leq\; & 2\left(1+\eta_b^2\right)\left(1+s^2\right)\left[|i-s|\right. \\
& \left. +\frac{(i-s)^2}{\eta_b} + |i-s|\,(i-s)^2 + \frac{(i-s)^4}{\eta_b}\right]\Omega\left(j\,';\eta_b\right)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

(4.13)eşitliğine operatör uygulanırsa

$$Z_b(j\,;s) - j(s) = Z_b((i-s)\,;s)\,j'(s) + Z_b((i-s)[j'(u) - j'(s)]\,;s)$$

buradan

$$|Z_b(j\,;s) - j(s)| \leq Z_b(|i-s|\,;s)\,|j'(s)| + Z_b(|i-s|\,[j'(u) - j'(s)]\,;s)$$

$Z_b(|i-s|\,;s)\,|j'(s)| = I_1$ ve $Z_b(|i-s|\,[j'(u) - j'(s)]\,;s) = I_2$ dersek

$$|Z_b(j\,;s) - j(s)| \leq I_1 + I_2$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak

$$I_1 = Z_b(|i-s|\,;s)\,|j'(s)| \leq \sqrt{Z_b\left((i-s)^2\,;s\right)}\,|j'(s)| \leq \sqrt{A_b(b)}M_{j'}\left(1+s^2\right)$$

burada $M_{j'}, j' - ne$ bağlı bir sabit ve

$$\begin{aligned} A_b(s) &= \left(\left(\frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2} - 2\frac{(c-e)}{(b+e)}\right)s^2 \right.\\ &\quad \left. + \left(2\frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2} - \frac{(b+e)}{b(b+e)}\right)x + \frac{1}{3}\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}\right) \end{aligned}$$

dır. (4.14)' dan;

$$\begin{aligned} I_2 &= Z_b(|i-s|\ \ |f'(u) - j'(s)|\,;s) \\ &\leq 2\left(1+\eta_b^2\right)\left(1+s^2\right)\left(\sqrt{Z_b\left((i-s)^2\,;s\right)} + \frac{1}{\eta_b}Z_b\left((i-s)^2\,;s\right)\right. \\ &\quad \left. + \sqrt{Z_b\left((i-s)^2\,;s\right)}\sqrt{Z_b\left((i-s)^4\,;s\right)} + \frac{1}{\eta_b}Z_b((i-s)\,4;s)\right)\Omega(j\,';\eta_b) \end{aligned}$$

$Z_b\left((i-s)^4\,;s\right) = B_b(s)$ dersek;

$$\begin{aligned}
B_b(s) &= \left(\frac{(4bc^3+4b^3c+6b^2c^2+c^4-4be^3-4b^3e+6b^2e^2+e^4)}{(b+e)^4} \right. \\
&-\frac{(3bc^2+3b^2c+c^3-3be^2-3b^2e-e^3)}{(n+b)^3} \\
&\left. +6\frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2} - 4\frac{(c-e)}{(b+e)} \right) s^4 \\
&+\left(8\frac{(b+c)^4}{b(b+e)^4} - 16\frac{(b+c)^3}{b(b+e)^3} + 12\frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2} - 2\frac{(b+c)}{b(b+e)} \right) s^3 \\
&+\left(15\frac{(b+c)^4}{b^2(b+e)^4} - 14\frac{(b+c)^3}{b^2(b+e)^3} + 2\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2} \right) x^2 \\
&+\left(6\frac{(b+c)^4}{b^3(b+e)^4} - \frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3} \right) s + \frac{1}{5}\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}
\end{aligned}$$

$$I_1 + I_2 \leq \sqrt{A_b(s)} M_{j'}(1+s^2) + 2(1+\eta_b^2)(1+s^2)\left[\sqrt{A_b(s)} + \tfrac{1}{\eta_b}A_b(s) + \sqrt{A_b(s)}\sqrt{B_b(s)} + \tfrac{1}{\eta_b}B_b(s)\right]\Omega(j';\eta_b)$$

böylece

$$\frac{|Z_b(j;s)-j(s)|}{1+s^2} \leq \sqrt{A_b(s)}M_{j'} + 2(1+\eta_b^2)\left[\sqrt{A_b(s)} + \tfrac{1}{\eta_b}A_b(s) + \sqrt{A_b(s)}\sqrt{B_b(s)} + \tfrac{1}{\eta_b}B_b(s)\right]\Omega(j';\eta_b)$$

elde edilir.

Her iki tarafın $[0,\infty)$ üzerinde supremumu alınırsa

$$\begin{aligned}
\sup_{s\in[0,\infty)} \frac{|Z_b(j;x)-j(s)|}{1+s^2} &\leq \sup_{s\in[0,\infty)} \sqrt{A_b(s)}M_{j'} + 2\left(1+\eta_b^2\right)\left[\sqrt{A_b(s)}\right. \\
&\left. +\frac{1}{\eta_b}A_b(s) + \sqrt{A_b(s)}\sqrt{B_b(s)} + \frac{1}{\eta_b}B_b(s)\right]\Omega(j';\eta_b) \\
\sup_{s\in[0,\infty)} A_b(s) &= \sup_{s\in[0,\infty)} \left(\frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2} - 2\frac{(c-e)}{(b+e)} \right) s^2 \\
&+\left(2\frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2} - \frac{(b+c)}{b(b+e)} \right) s + \frac{1}{3}\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2} \\
&\leq \frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2} + 2\frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2} + \frac{1}{3}\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}
\end{aligned}$$

$c = e$ aılınrsa

$$\begin{aligned} &\leq \frac{6b\left(b+e\right)^2 + \left(b+e\right)^2}{3b^2\left(b+e\right)^2} \\ \sup_{s\in[0,\infty)} A_b\left(s\right) &\leq \frac{2}{b} \end{aligned}$$

daha önce elde ettiğimiz (4.12)'deki ifadeyi yerine uygularsak, $\sup\limits_{s\in[0,\infty)} B_b\left(s\right) \leq 100\frac{1}{b}$

$$\sup_{s\in[0,\infty)} \tfrac{\left|Z_b(j\,;s)-j(s)\right|}{1+s^2} \leq \left(\sqrt{\tfrac{2}{b}}M_{j\,'} + 2\left(1+\eta_b^2\right)\left[\sqrt{\tfrac{2}{b}} + \tfrac{1}{\eta_b}\tfrac{2}{b} + \sqrt{\tfrac{2}{b}}\sqrt{100\tfrac{1}{b}} + \tfrac{1}{\eta_b}100\tfrac{1}{b}\right]\Omega\left(j\,'; \eta_b\right)\right) \quad (4.1)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{b}}\left(M_{j'} + 2\left(1+\eta_b^2\right)\left[1 + \frac{1}{\eta_b}\sqrt{\frac{2}{b}} + \frac{10}{b} + \frac{1}{\eta_b}100\frac{1}{\sqrt{b}}\right]\Omega\left(j\,'; \eta_b\right)\right)$$

$\eta_b = \sqrt{\frac{2}{b}}$ seçilirse

$$\begin{aligned} \sup_{s\in[0,\infty)} \frac{\left|Z_b\left(j\,;s\right) - j\left(s\right)\right|}{1+s^2} &\leq \sqrt{\frac{2}{b}}\left(M_{j\,'} + 4\left[1+1+10+100\right]\Omega\left(j\,'; \eta_b\right)\right) \\ &\leq L\sqrt{\frac{2}{b}}\Omega\left(j\,'; \sqrt{\frac{2}{b}}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $L = M_{j\,'} + 448$ 'tür. □

Teorem 4.9 *j fonksiyonu Lipschiz koşulunu sağlıyorsa; $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere*

$$\left\|Z_b\left(j\,;s\right) - j\left(s\right)\right\|_{C[0,A]} = 0\left(\left(\frac{4}{b}\right)^{\alpha/2}\right)$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned} Z_b\left(1\,;s\right) &= \frac{b\left(b+e\right)}{\left(b+c\right)}e^{-bs}\sum_{f=0}^{\infty}\frac{\left(bs\right)^f}{f!}\int_{\frac{f}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}}^{\frac{f+1}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}} 1di \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğundan ve operatörün lineerliğinden

$$\begin{aligned} \left|Z_b\left(j\,;s\right) - j\left(s\right)\right| &= \left|Z_b\left(j\,;s\right) - j\left(s\right)Z_b\left(1\,;s\right)\right| \\ &= \left|Z_b\left(j\,;s\right) - Z_b(j\left(s\right);s)\right| \\ \left|Z_b\left(j\,;s\right) - j\left(s\right)\right| &\leq \left(Z_b\left|j\left(i\right) - j\left(s\right)\right|;s\right) \quad (4.15) \end{aligned}$$

j fonksiyonu Lipschiz koşulunu sağladığından ve

$|j(i) - j(s)| \leq M|i-s|^{\alpha}$ 'den

$$\begin{aligned}
|Z_b(j\,;s) - j(s)| &\leq \frac{b(b+e)}{(b+c)} e^{-bs} \sum_{f=0}^{\infty} \frac{(bs)^f}{f!} \int_{\frac{f}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}}^{\frac{f+1}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}} M|i-s|^{\alpha}\, di \\
&\leq M\frac{b(b+e)}{(b+c)} e^{-bs} \sum_{f=0}^{\infty} \frac{(bs)^f}{f!} \int_{\frac{f}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}}^{\frac{f+1}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}} |i-s|^{\alpha}\, di \\
&= M\frac{b(b+e)}{(b+c)} e^{-bs} \sum_{f=0}^{\infty} \frac{(bs)^f}{f!} \int_{\frac{f}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}}^{\frac{f+1}{b}\frac{(b+c)}{(b+e)}} |i-s|^{\alpha}\, di \\
&= MZ_b(|i-s|^{\alpha}\,;s)
\end{aligned}$$

Hölder eşitsizliğinden

$$Z_b(|i-s|^{\alpha}\,;s) \leq Z_b\left((i-s)^2\,;s\right)^{\alpha/2}$$

olur. O halde;

$$\mathrm{Z}_b(|i-s|^{\alpha}\,;s) \leq M\left(\left(\left(\frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2} - 2\frac{(c-e)}{(b+e)}\right)s^2 + \left(2\frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2} - \frac{(b+c)}{b(b+e)}\right)s + \frac{1}{3}\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}\right)\right)^{\alpha/2}$$

$$\begin{aligned}
&\max_{0\leq s\leq A} \frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2}s^2 + 2\frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2}s + \frac{1}{3}\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2} \\
&= \left(\frac{3b^2(2bc+c-2be-e)}{3b^2(nb+e)^2} + \frac{6b(b+c)^2}{3b^2(b+e)^2} + \frac{(b+c)^2}{3b^2(b+e)^2}\right) \\
&= \frac{3b^2(2bc+c-2be-e) + 6b(b+c)^2 + (b+c)^2}{3b^2(b+e)^2}
\end{aligned}$$

$a = b$ alarsak

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(b+e)^2(6b+1)}{3b^2(b+e)^2} \\
&\leq \frac{6(b+1)}{3b^2} \\
&\leq \frac{2(b+1)}{b^2} \\
&\leq 2\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}\right) \\
&\leq \frac{4}{b}
\end{aligned}$$

O halde;

$$|Z_b(j\ ;s)-j(s)|\leq M\left(\frac{4}{b}\right)^{\alpha/2}$$

ve böylece;

$$\|Z_b(j\ ;s)-j(s)\|_{C[0,A]}\leq M\left(\frac{4}{b}\right)^{\alpha/2}$$

bulunur ve ispat tamamlanır. □

Teorem 4.10 $j\in[0,A]$ *ve* j,j',j'' *fonksiyonları* $[0,A]$ *aralığında sınırlı ise bu, takdirde;*

$$\lim_{b\to\infty}(b+e)(Z_b(j\ ;s)-j(s))=(c+1-e)\,j'(c)+xj''(s)$$

dır.

İspat. j fonksiyonunun s noktasındaki Taylor açılımı;

$$\text{j}(i)=j(s)+\tfrac{1}{1!}j'(s)(i-s)+\tfrac{1}{2!}j''(s)(i-s)^2+\tfrac{1}{3!}j'''(s)(i-s)^3+\tfrac{1}{4!}j^4(s)(i-s)^4+...$$

$$\text{j}(i)-j(s)=\tfrac{1}{1!}j'(s)(i-s)+\tfrac{1}{2!}j''(s)(i-s)^2+(i-s)^2\mu(i-s)$$

$$\mu(i-s)=\left(\tfrac{1}{3!}j'''(s)(i-s)^3+\tfrac{1}{4!}j^4(s)(i-s)^4+...\right)$$

$$\text{Z}_b(j\ ;s)-j(s)=Z_b((i-s)\ ;s)\,j'(s)+\tfrac{1}{2}Z_b\left((i-s)^2\ ;s\right)j''(s)+Z_b\left((i-s)^2\mu(i-s)\,;s\right)$$

son elde etiğimiz eşitlikte (4.2) ve(4.3) eşitlliklerini yerine yazarsak;

$$\begin{aligned}Z_b(j\ ;s)-j(s) &= \left(\frac{(c-e)}{(b+e)}s+\frac{1}{2b}\frac{(b+c)}{(b+e)}\right)j'(s)\\ &\quad+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2}-2\frac{(c-e)}{(b+e)}\right)s^2\right.\\ &\quad+\left(2\frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2}-\frac{(b+c)}{b(b+n)}\right)s\\ &\quad\left.+\frac{1}{3}\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}\ \ j''(s)+Z_b\left((i-s)^2\mu(i-s)\,;s\right)\right)\end{aligned}$$

eşitliğin her iki tarafı $(b+e)$ çarpılırsa;

$$\begin{aligned}(b+e)(Z_b(j\ ;s)-j(s)) &= (b+e)\left(\frac{(c-e)}{(b+e)}s+\frac{1}{2b}\frac{(b+c)}{(b+e)}\right)j'(s)+\frac{1}{2}(b+e)\\ &\quad\left(\left(\frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2}-2\frac{(c-e)}{(b+e)}\right)s^2\right.\end{aligned}$$

$$+\left(2\frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2}-\frac{(b+c)}{b(b+n)}\right)s+\frac{1}{3}\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}$$
$$j''(s)+(b+e)Z_b\left((i-s)^2\mu(i-s);s\right)\qquad(4.16)\Big)$$

$\lim\limits_{i\to s}\mu(i-xi)=0$ olduğundan μ fonksiyonu sınırlıdır.

$$(b+e)Z_b\left((i-s)^2\mu(i-s);s\right)\leq\sqrt{(b+e)Z_b\left((i-s)^4;s\right)}\sqrt{(b+e)Z_b\left(\mu(i-s)^2;s\right)}$$

Daha önce elde ettiğimiz

$$\begin{aligned}Z_n\left((t-x)^4;x\right) &= \left(\frac{(4bc^3+4b^3c+6b^2c^2+c^4-4be^3-4b^3e+6b^2e^2+e^4)}{(b+e)^4}\right.\\ &-\frac{(3bc^2+3b^2c+c^3-3be^2-3b^2e-e^3)}{(n+b)^3}\\ &\left.+6\frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)^2}-4\frac{(c-e)}{(b+e)}\right)s^4\\ &+\left(8\frac{(b+c)^4}{b(b+e)^4}-16\frac{(b+c)^3}{b(b+e)^3}+12\frac{(b+c)^2}{b(b+e)^2}-2\frac{(b+c)}{b(b+e)}\right)s^3\\ &+\left(15\frac{(b+c)^4}{b^2(b+e)^4}-14\frac{(b+c)^3}{b^2(b+e)^3}+2\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)^2}\right)x^2\\ &+\left(6\frac{(b+c)^4}{b^3(b+e)^4}-\frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^3}\right)s+\frac{1}{5}\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^4}\end{aligned}$$

eşitliğinin her tarafını $(b+e)$ ile çarparsak;

$$\begin{aligned}(b+e)Z_n\left((t-x)^4;x\right) &= \left(\frac{(4bc^3+4b^3c+6b^2c^2+c^4-4be^3-4b^3e+6b^2e^2+e^4)}{(b+e)^3}\right.\\ &-\frac{(3bc^2+3b^2c+c^3-3be^2-3b^2e-e^3)}{(n+b)^2}\\ &\left.+6\frac{(2bc+c-2be-e)}{(b+e)}-4(c-e)\right)s^4\end{aligned}$$

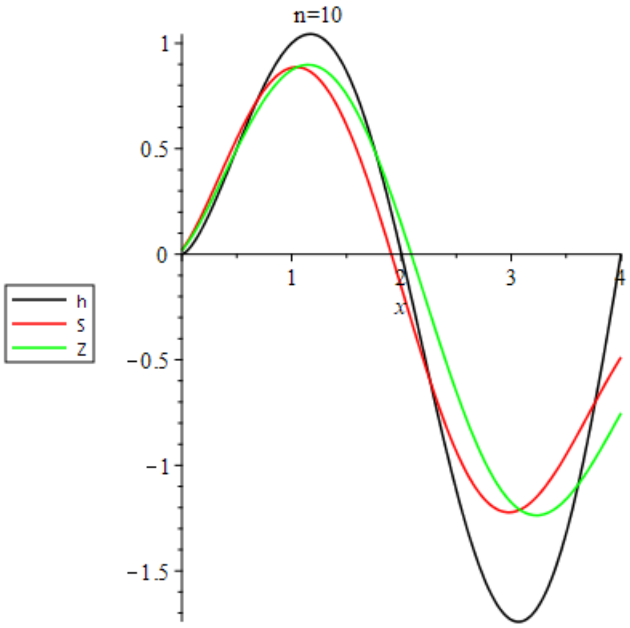
$$+\left(8\frac{(b+c)^4}{b(b+e)^3}-16\frac{(b+c)^3}{b(b+e)^2}+12\frac{(b+c)^2}{b(b+e)}-2\frac{(b+c)}{b}\right)s^3$$
$$+\left(15\frac{(b+c)^4}{b^2(b+e)^3}-14\frac{(b+c)^3}{b^2(b+e)^2}+2\frac{(b+c)^2}{b^2(b+e)}\right)x^2$$
$$+\left(6\frac{(b+c)^4}{b^3(b+e)^3}-\frac{(b+c)^3}{b^3(b+e)^2}\right)s \quad +\frac{1}{5}\frac{(b+c)^4}{b^4(b+e)^3}$$

olup $\lim\limits_{b\to\infty}(b+e)\,Z_b\left((i-s)^4;s\right)=0$ olacağı açıktır. (4.16) eşitliğinin limiti alınırsa;

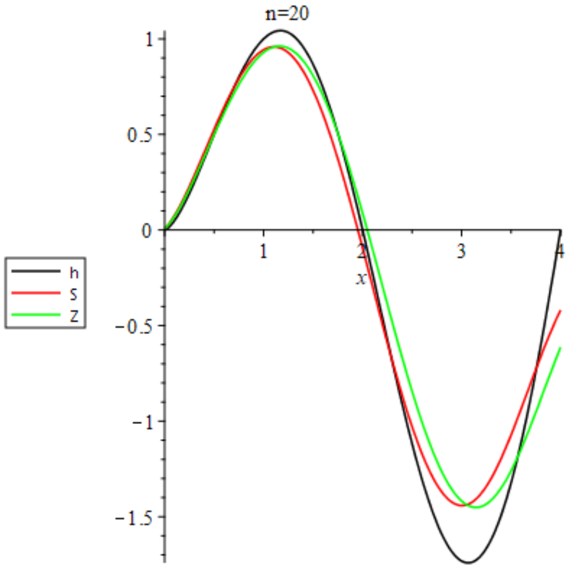
$$\lim_{b\to\infty}(b+e)\left(Z_b(j;s)-j(s)\right)=(c+1-e)\,j'(s)+sj''(s)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

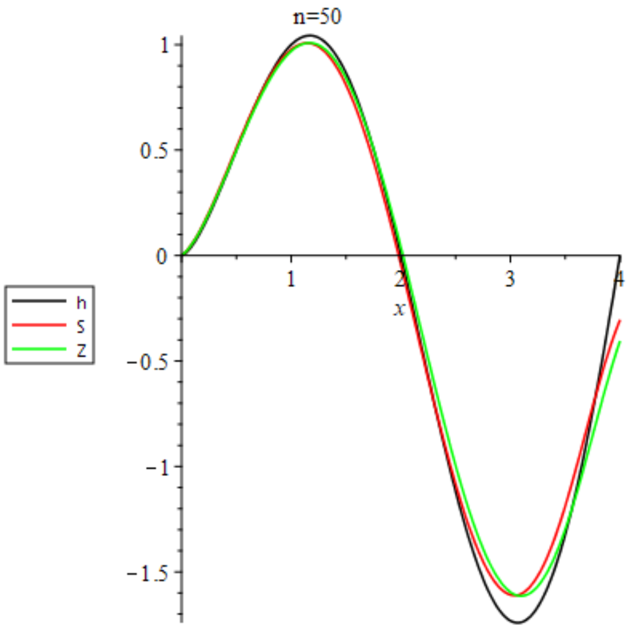
Son olarak üzerinde çalıştığımız $Z_b(j;s)$ operatörünün farklı b değerleri için $h(s)=\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\sqrt{s}$ fonksiyonuna yaklaşımını gösteren grafikleri ve yaklaşımın nümerik değerlerini tablo halinde verelim. Burada S Szasz operatörünü ve Z ise tanımlamış olduğumuz operatörü göstermektedir.



Şekil 4.1. $b=10$ için $h(s)$ fonksiyonuna yaklaşım grafiği.



Şekil 4.2. $b = 20$ için $h(s)$ fonksiyonuna yaklaşım grafiği.



Şekil 4.3. $b = 50$ için $h(s)$ fonksiyonuna yaklaşım grafiği.

$$N(s) = \left| \frac{W_u^j(h;s) - h(s)}{Z_b(h;s) - h(s)} \right|$$

$Z_b(h;s)$ ile $W_u^j(h;s)$ operatörlerinin yaklaşım oranı $N(s)$ şeklinde tanımlanmak üzere ;

Çizelge 4.1. Operatörlerin yaklaşımların nümerik karşılaştırılamları

x / n	0,1	1,5	2,5	4
10	1,02755	0,99899	1,284817	0,92587
100	1,01513	0,96156	1,25418	0,97556
300	1,01415	0,95843	1,25139	0,98571
500	1,01397	0,9578	1,25085	0,98889
700	1,01392	0,95752	1,25072	0,99059
1000	1,01403	0,95732	1,25061	0,99208

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

$(4.1)'$ de tanımlamış olduğumuz $Z_b(j\,;s)$ operatörünün lineer pozitif olduğu gösterilmiştir. Ardından $Z_b(j\,;s)$operatörün sınırlı olduğunu gösterilmiştir.Sonra Korovkin teoremi yardımıyla $Z_b(j\,;s)$operatörünün j fonksiyonuna düzgün yakınsadığı gösterilmiştir.

$Z_b(j\,;s)$ operatörünün merkezi momentleri hesalanarak ağırlılık uzadaki süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı için

$$\|Z_b j - j\|_{\rho,[0,\infty)} \leq M\Omega\left(j\,;\sqrt{\tfrac{1}{b}}\right)$$

burada $M = 808$ dir

eşitsizliği elde edilmiştir.

Lipstch sınıfınıda aşağıdaki şekilde ispatlanarak elde edilmiştir.

$$\|Z_b(j\,;s) - j(s)\|_{C[0,A]} = 0\left(\left(\tfrac{4}{b}\right)^{\alpha/2}\right)$$

Voronovskaya tip teoremi ispatlanarak aşağdaki eşitlik edle edilmiştir.

$$\lim_{b\to\infty}(b+e)\left(Z_b(j\,;s) - j(s)\right) = (c+1-e)\,j'(s) + sj''(s)$$

$Z_b(j\,;s)$ operatörünün $h(s) = \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\sqrt{s}$ fonksiyonuna yaklaşımı Mapple programı yardımıyla bazı "b" değerleri için grafik ile gösterilmiştir.

Ayırca $b = 10, 20, 50$ için yaklaşımları nümerik değerler hesaplanarak bir tablo halinde verilmiştir.

5.2. Öneriler

c ve e değerleri arasındaki fark küçüldükçe operatörümüz daha iyi sonuç verdiği görlmüştür. Burada a ve b değerlerini değiştirerek daha iyi bir yaklaşım elde edilebilir.

KAYNAKLAR

ACANTİNİ, O.,2011. Statistical convergence of a non-positive approximation process. Chaos Solitons & Fractals, 44: 977-981.

ALTOMARE, F., and CAMPITI, M., 1994.Korovkin- Type Approximation Theory And Its Applications. De Gruyter Series Studies in Mathematics, Walter De Gruyter Berlin- New York, 17: 627s.

BALCI, M., 2012. Reel Analiz, Balcı Yayınları, Ankara, 144s.

BAYRAKTAR, M., 2006. Fonksiyonel Analiz. Ankara.

BASKAKOV, V.A., 1961. On a Construction of Converging Seguences of Linear Positive Operators, Studies of Modern Problems of Constructive Theory of Functions. Moscow, 314-318.

BOHMAN, H. 1952-54. On approximation of continuous and analytic functions,Ark. Math., 2, 43-46.

BUTZER, P. L., Nessel, R. J. 1971. Fourier Analysis and Approximation, Academic Press, New York and Londan.

CHLODOVSKY I., 1937. Sur le developpement des fonctions definies dans un intervalle infini en series de polynomes de M.S. Bernstein. Compos Math, 4: 380-393.

GADJIEV, A. D., 1976.Theorems of the type of P. P. Korovkin's theorems. Math. Zametki, 20(5): 781-786 (in Russian), Math. Notes, 20(5-6): 995-998 (Engl. Trans.). 996-998.

GADJİEV, A.D., 1976.The convergence problem for a sequence of positive linear Operartors on unbounded sets and theoems analogous to that of P.P. Korovkin. Soviet Math. Dokl., 15(5) :1433-1436.

GUPTA, V., Vasishtha, V.,and GUPTA, M.A. : Rate of convergene of the Szasz-Kantorovich-Bezier operators for bounded variation function. Publ. Inst. Math. (Beogard) (N.S) 72, 137-143 (2002).

HACISALİHOĞLU, H., ve HACIYEV, A., 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletme Yayınları, Ankara, 94s.

.ISPİR, N., 2001 On modified Baskakov operators on weighted spaces. Turk. J. Math., 25: 355-365.

KANTOROVICH, L.V., 1930. Sur cestain developpemenets suivant les polynomes de la forme de S.Berntein, I, II, C.R. Acad. URSS, 563-568, 595-600.

KOROVKİN, P. P., 1953. On Convergence of Linear Positive Operators in the Space of Continuous Functions(Russian). Dokl. Akad. Nauk. SSSR(N. S.) 90:961-964.

KREYSZİG, E. 1978. Introductory Functional Analysis with Application, John Wiley and sons, Canada.

MUSAYEV, B., ALP, M., MUSTAFAYEV, N. ve EKİNCİOĞLU, İ.,2007. Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz 1. Ankara.

OUSMAN, N., 2019. Szasz Operatörlerinin Bir Genelleştirmesi. Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Şanlıurfa, 32s.

SZASZ, O., 1950. Genelalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval.J. Research Nat. Bur. Standars, 45: 239-245.

TOTİK, V. (June 1983). "Approximation by Szasz-Mirakjan-Kantorovich operators in Lp ( )". Analysis Mathematica (in Russian).9 (2): 147-167.

WALZACK, Z., 2000. On certain Moddified Szasz-Mirakjan operators for functions of two variables. Demonstratio Math ., XXXIII(1), 91-100.

WEİERSTRASS, K., 1885. Über die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willkürlicher Funktionen Einer Reelen Veränderlichen. Sitzungberichte der Akademie zu Berlin, 633-639, 789-805.