

**T.C.  
HARRAN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**GAUSS SAYISAL İNTEGRASYON YÖNTEMİ**

**Emre SANIR**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ŞANLIURFA  
2021**

# İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZET . . . . .	i
ABSTRACT . . . . .	ii
TEŞEKKÜR . . . . .	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . .	iv
ÇİZELGELER DİZİNİ . . . . .	iv
1. GİRİŞ . . . . .	1
1.1. Klasik Ortogonal Polinomlar ve Bazı Özellikleri . . . . .	3
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR . . . . .	10
3. MATERYAL ve YÖNTEM . . . . .	11
3.1. Newton-Cotes Formülleri . . . . .	11
3.1.1. İnterpolasyon Yardımıyla Sayısal İntegral Hesabı . . . . .	13
3.1.2. Bileşik Newton-Cotes Formülleri . . . . .	19
3.1.3. Romberg İntegrasyon Metodu . . . . .	23
3.2. Gauss Sayısal İntegrasyon Yöntemi . . . . .	25
3.2.1. Genel İnterpolasyon Problemi: Hermite İnterpolasyonu . . . . .	25
3.2.2. Gauss Kuadrattürü (Gauss Sayısal İntegrasyon Yöntemi) . . . . .	30
3.2.3. İntegrasyon Noktalarının ve Ağırlık Katsayılarının Nümerik Hesabı . . . . .	38
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA . . . . .	40
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER . . . . .	52
KAYNAKLAR . . . . .	53
ÖZGEÇMİŞ . . . . .	55
EKLER . . . . .	56

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

## GAUSS SAYISAL İNTEGRASYON YÖNTEMİ

Emre SANIR

Harran Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Haydar ALICI  
Yıl: 2021, sayfa: 57

Bu tezde, nümerik integrasyon tekniklerinden biri olan Gauss sayısal integrasyon yöntemi (Gauss kuadraturü) incelenecektir. Klasik ortogonal polinomlar (Jacobi, Laguerre ve Hermite) üzerine kurulan Gauss kuadraturü ve hata terimi elde edilecektir. İntegrasyon noktaları yani klasik ortogonal polinomların kökleri ve Gauss kuadraturünün ağırlık katsayıları Golub-Welsch algoritması kullanılarak hesaplanacaktır. Gerekli bilgisayar programı GNU Octave dilinde yazılıp örnek uygulamalar yapılarak yöntemin verimliliği tartışılacaktır.

**ANAHTAR KELİMELEER:** Newton-Cotes formülleri, klasik dik polinomlar, Gauss kuadraturü, nümerik integral.

# ABSTRACT

MSc Thesis

## GAUSSIAN QUADRATURE RULE OF INTEGRATION

Emre SANIR

Harran University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Haydar ALICI  
Year: 2021, page: 57

In this thesis, the Gaussian quadrature rule of integration based on the classical orthogonal (the Jacobi, Laguerre and the Hermite) polynomials and its error term will be derived. Integration points which are the roots of classical orthogonal polynomials and the weights of the Gaussian quadrature will be computed with the help of so-called Golub-Welsch algorithm. Computer programs will be implemented in GNU Octave programming language. Finally, the efficiency of the method will be discussed with the help of numerical computations.

**KEYWORDS:** Newton-Cotes formulas, classical orthogonal polynomials, Gaussian quadrature, numerical integration.

## TEŞEKKÜR

Çalıőmalarımız boyunca desteklerini esirgemeyen, engin bilgileriyle beni bilgilendiren çok kıymetli ve saygıdeğer hocam Doç. Dr. Haydar ALICI'ya teşekkür ederim.

Ayrıca, tez jürisinde bulunan ve tezin son halini almasında önemli katkıları bulunan Prof. Dr. Tanfer TANRIVERDİ ve Doç. Dr. Rezan SEVİNİK ADIGÜZEL hocalarıma da teőekkürü borç bilirim.

Son olarak bana her koşulda ve her durumda destek olan anneme de çok teşekkür ederim.



## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<b>Sayfa No</b>
Şekil 3.1. Dikdörtgen Kuralının Grafikle Gösterimi (Levy, 2010) . . . . .	11
Şekil 3.2. Orta Nokta Kuralının Grafikle Gösterimi (Levy, 2010) . . . . .	12
Şekil 3.3. Yamuk Kuralının Grafikle Gösterimi (Levy, 2010) . . . . .	16
Şekil 3.4. Bileşik Yamuk Kuralının Grafikle Gösterimi (Levy, 2010) . . . . .	20
Şekil 4.1. $N = 40$ olmak üzere $\nu = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ve bazı $z \in [0, 10] \subseteq \mathbb{R}$ için $J_\nu(z)$ fonksiyonlarının grafiği . . . . .	44
Şekil 4.2. $N = 90$ olmak üzere $a = 0.5, 2, 3.5, 5, 8$ ve bazı $z \in [-3, 3] \subseteq \mathbb{R}$ için $U(a, z)$ fonksiyonlarının grafiği . . . . .	45
Şekil 4.3. $N = 200, n = 2$ ve $m = 0, 1, 2, 3$ olmak üzere bazı $x \in (1, 2) \subseteq \mathbb{R}$ için $Q_2^m(x)$ fonksiyonlarının grafiği . . . . .	48
Şekil 4.4. $\cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)$ fonksiyonunun grafiği . . . . .	50

## ÇİZELGELER DİZİNİ

	<b>Sayfa No</b>
Çizelge 3.1. Yaygın kullanılan kapalı Newton-Cotes formülleri (Hildebrand, 1973) . . . . .	19
Çizelge 3.2. Yaygın kullanılan açık Newton-Cotes formülleri (Hildebrand, 1973) . . . . .	19
Çizelge 3.3. Bazı $f(x)$ Fonksiyonları için $\int_0^3 f(x)dx$ Değerleri . . . . .	19
Çizelge 3.4. Klasik ortogonal polinomlar için temel bilgiler (Nikiforov ve Uvarov, 1988). . . . .	36
Çizelge 3.5. Klasik ortogonal polinomlar için $A_n$ ve $B_n$ katsayıları (Alıcı, 2010). . . . .	39
Çizelge 4.1. $x \in (-\infty, \infty)$ olmak üzere bazı $f(x)$ fonksiyonları için $I(f(x))$ değerleri . . . . .	40
Çizelge 4.2. $x \in (0, \infty)$ olmak üzere bazı $f(x)$ fonksiyonları için $I(f(x))$ değerleri . . . . .	41
Çizelge 4.3. $x \in (-1, 1)$ olmak üzere bazı $f(x)$ fonksiyonları için $I(f(x))$ değerleri . . . . .	42
Çizelge 4.4. $\nu = 4$ için bazı $z \in [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ noktalarındaki $J_4(z)$ değerleri . . . . .	43
Çizelge 4.5. $a = 2$ için bazı $z \in [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ noktalarındaki $U(2, z)$ değerleri . . . . .	44
Çizelge 4.6. $n = 0$ ve $m = 0$ için bazı $x \in (1, 2)$ noktalarındaki $Q_0^0(x)$ değerleri . . . . .	46
Çizelge 4.7. $n = 0$ ve $m = 1$ için bazı $x \in (1, 2)$ noktalarındaki $Q_0^1(x)$ değerleri . . . . .	47
Çizelge 4.8. $s = 2, \dots, 10$ için $\zeta(s)$ değerleri . . . . .	49
Çizelge 4.9. $\nu = 0.5$ için bazı $x \in (2, 3]$ noktalarındaki $K_{0.5}(x)$ değerleri . . . . .	50
Çizelge 4.10. $\zeta > 2$ olmak üzere bazı $x \in (2, 3]$ noktalarındaki $Ai(x)$ değerleri . . . . .	51

## 1. GİRİŞ

Alan hesabı, eğri uzunluğu, katı cisimlerin yüzey alanı ve hacimleri, yapılan iş, eylemsizlik momenti gibi birçok matematiksel ve fiziksel olgu bir belirli integral hesabı gerektirir. Ancak ortaya çıkan bazı sebeplerden dolayı zaman zaman integral almak oldukça güçleşebilmektedir. Bu sebeplerden birincisi integrali alınacak fonksiyon sadece belli noktalarda biliniyor olabilir. İkincisi integrali alınacak fonksiyon bilinse bile, bu fonksiyonun anti türevini elementer fonksiyon cinsinden yazmak mümkün olmayabilir. Örneğin  $f(x) = e^{-x^2}$  fonksiyonunun anti türevi elementer fonksiyon cinsinden yazılamayan

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanan "hata fonksiyonu"dur (Andrews, 1998). Bir üçüncü sebep de fonksiyonun anti türevini bulmak mümkün olabilir fakat yaklaşık sonuç hesaplamak anti türevini hesaplamaktan daha kolay olabilir. Örneğin, fonksiyonun anti türevi sonsuz seri veya sonsuz çarpım şeklinde olabilir veya hesabı mevcut olmayan özel fonksiyon gerektirebilir. İşte tüm bu sebeplerden dolayı nümerik integral yöntemlerine başvurulur.

Nümerik integral, integralin sayısal değerinin nasıl bulunabileceği üzerine yapılan bir çalışmadır. Bu konunun başlangıcı antik dönemlere kadar uzanır. Bu duruma en güzel örnek antik Yunanlıların düzgün çokgenlerin içini çemberleyerek oluşturdukları yöntemlerdir. Bu çalışmalar daha sonra Archimedes'in  $\pi$  sayısının alt ve üst sınırlarını keşfetmesine olanak sağlamıştır. Asırlar boyunca, özellikle de on altıncı yüzyıldan sonra nümerik integral konusu yeni yöntemler ve bulgular sayesinde büyük bir ilerleme kaydetmiştir (Davis ve Rabinowitz, 1984).

Nümerik integrasyon, belirli integralin değerine bir sonlu toplam ile yaklaşmaktır (Şekeroğlu, 2003). Bu yöntemlerde genellikle interpolasyon polinomu yardımıyla çözüme ulaşılır. Verilen fonksiyon değerleriyle bu noktalardan geçen bir polinom elde edilerek en yakın sonuca ulaşılmaya çalışılır.

Nümerik integral yöntemleri, nümerik analizde kuşkusuz çok önemli bir konuma sahiptir. Bu yöntemlerin en popüler olanları ise Newton-Cotes formülleri ve Gauss kuadratürleridir. Newton-Cotes formülleri aralık boyu  $h$  olan eşit aralıklı noktalar üzerine



inşa edilir ve  $x_i = x_0 + ih$  olmak üzere

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n w_k f(x_k) \quad (1.2)$$

şeklindedir. Burada  $w_i$  ağırlık olarak adlandırılır ve  $f$  fonksiyonuna bağlı olmayıp sadece  $x_i$  noktalarına bağlıdır. Ağırlıklar,  $f$  fonksiyonunun Lagrange interpolasyon polinomunu kullanarak

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \int_a^b P_n(x)dx = \int_a^b \left( \sum_{k=0}^n f(x_k) \ell_k(x) \right) dx \\ &= \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b \ell_k(x)dx = \sum_{k=0}^n f(x_k) w_k \end{aligned} \quad (1.3)$$

şeklinde elde edilebilir.

Newton-Cotes formülleri kapalı ve açık olmak üzere iki grupta toplanabilir. Sayısal integrasyon yöntemlerinden, yamuk, Simpson, Simpson-3/8 ve Boole kuralları kapalı Newton-Cotes formüllerine, orta nokta ve Milne kuralı açık Newton-Cotes formüllerine örnek olarak verilebilir (Stoer ve Bulirsch, 1980).

Keyfi bir  $n$  değeri için Newton-Cotes formülleri elde edilebilir, fakat büyük  $n$  değerleri için Newton-Cotes formüllerinde hata üstel bir artış gösterir. Bu durum Runge olayı olarak bilinir ve eşit aralıklı noktaların kullanımından kaynaklanır. Bundan kaçınmanın bir yolu bileşik Newton-Cotes formüllerini kullanmaktır. Diğer bir yolu ise eşit aralıklı olmayan noktalar kullanan Clenshaw-Curtis veya Gauss kuadratürlerini kullanmaktır. Bu yöntemler daha karardır ve daha doğru sonuçlar verir (Stoer ve Bulirsch, 1980).

Gauss kuadratürü ile integral hesabı yapılırken, ağırlık katsayılarıyla birlikte integrasyon noktaları dediğimiz fonksiyon değerlerini belirten  $x$ - eksenini üzerindeki noktalar da serbest seçilir. Böylelikle iki kat serbestlik derecesine sahip olunmakta ve Newton-Cotes formüllerine nazaran aynı sayıda fonksiyon değerleri ile daha keskin sonuçlar elde edilebilmektedir (Teukolsky ve ark., 2001).

Newton-Cotes formülleri,  $f$  integrasyon aralığını içeren daha büyük bir aralıkta analitik ise yakınsar. Fakat Gauss kuadratürü herhangi sürekli bir  $f$  fonksiyonu için yakınsar.  $n + 1$  nokta kullanan Newton-Cotes formülleri derecesi  $n$  olan polinomları tam olarak integre ederken,  $n + 1$  nokta kullanan Gauss kuadratürü ise derecesi  $2n + 1$  olan polinomları tam olarak integre eder. Fakat Gauss kuadratürü Newton-Cotes formüllerinin

tek alternatifini değildir. Örneğin Clenshaw-Curtis kuadraturu Newton-Cotes formülleri gibi derecesi  $n$  olan polinomları tam olarak integre eder. Gauss kuadraturu gibi herhangi bir sürekli  $f$  fonksiyonu için yakınsar. Dolayısıyla Clenshaw-Curtis kuadraturu Gauss kuadraturu kadar güçlü ve verilen  $n$  için uygulaması daha hızlıdır fakat verimi Gauss kuadraturunun yarısıdır. Sonuç olarak her iki metot da eşit derecede değerli olmakla beraber Gauss kuadraturu daha zarif, Clenshaw-Curtis ise daha pratiktir (Trefethen, 2008).

Newton-Cotes formülleriyle Gauss kuadraturunu karşılaştıran Sermutlu, her iki yöntemde de aynı sayıda nokta kullanılmasına karşılık Gauss kuadraturunun daha keskin sonuçlar verdiğini göstermiştir (Sermutlu, 2005). Trefethen de Gauss kuadraturunun Clenshaw-Curtis yöntemine göre daha avantajlı olduğunu göstermiştir (Trefethen, 2008).

Görüldüğü üzere integral hesabında Gauss kuadraturunun diğer yöntemlere göre başarısı oldukça büyüktür. Gerçek integral değerine daha yakın sonuç veren bu yöntemdeki integrasyon noktaları ise klasik ortogonal polinomların (Jacobi, Laguerre ve Hermite) kökleridir. Aşağıdaki alt başlıkta Gauss kuadraturunda kullanılmak üzere klasik ortogonal polinomların bazı özellikleri verilmiştir.

### 1.1. Klasik Ortogonal Polinomlar ve Bazı Özellikleri

Isı iletimi, harmonik oskülatör, Coulomb potansiyeli ve daha bir çok teorik, nükleer ve matematiksel fizik problemi

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}u = 0, \quad z \in \mathbb{C} \quad (1.4)$$

biçimindeki diferansiyel denklem ile modellenir. Burada  $\sigma(z)$  ve  $\tilde{\sigma}(z)$  en çok ikinci dereceden polinomlar ve  $\tilde{\tau}(z)$  de en çok birinci dereceden polinomdur. Bu denklem  $u = \phi(z)y$  dönüşümü ve uygun  $\phi(z)$  değerinin seçimi ile

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0 \quad (1.5)$$

biçiminde hipergeometrik tip diferansiyel denkleme dönüşür (Nikiforov ve Uvarov, 1988). Burada  $\lambda$  sabit ve  $\tau(z)$  en çok birinci dereceden polinomdur. (1.5) denkleminin iki lineer bağımsız çözümlerinden biri

$$\lambda := \lambda_n = -n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma'' \quad (1.6)$$

özel değeri için  $n$ -inci derece  $P_n(x)$  polinomudur (Nikiforov ve Uvarov, 1988). Aşağıda (1.6) denklemindeki  $\lambda$  özel değerleri için (1.5) denkleminin çözümleri olan klasik ortogonal polinomlar tanımlanmış ve bu polinomların bazı özellikleri verilmiştir.

**Tanım 1.1** Her bir  $k = 0, 1, \dots$  için  $\deg(P_k(x)) = k$  olmak üzere  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  polinom dizisi

$$\int_a^b P_m(x)P_n(x)\rho(x)dx = h_n^2\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ h_n^2, & m = n \end{cases} \quad (1.7)$$

şartını sağlıyorsa  $(a, b)$  aralığında pozitif ve sürekli  $\rho(x)$  ağırlık fonksiyonu altında ortogonal polinom kümesi olarak adlandırılır. Burada  $h_n$ ,  $P_n(x)$  polinomunun normudur.

Bu durumda

$$\langle f, g \rangle_{\rho} := \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx \quad (1.8)$$

integrali  $f$  ve  $g$  polinomlarının iç çarpımını ifade eder.  $(a, b)$  aralığı ortogonalite aralığı olarak adlandırılır ve sonlu olmak zorunda değildir.

**Teorem 1.2** (Aytar, 2017)  $P_n(x)$  ortogonal polinomu derecesi  $n$  den küçük bütün polinoma diktir. Yani  $m < n$  için

$$\int_a^b x^m P_n(x)\rho(x)dx = 0 \quad (1.9)$$

eşitliği sağlanır.

**İspat.** Derecesi  $m$  olan herhangi bir  $Q_m(x)$  polinomu  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_m(x)$  ortogonal polinomlarının lineer birleşimi şeklinde

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^m c_{km} P_k(x) = c_{0m}P_0(x) + c_{1m}P_1(x) + \dots + c_{mm}P_m(x) \quad (1.10)$$

yazılabilir. Burada  $c_{km}$  kombinasyon sabitleri ortogonalite kullanılarak bulunabilir.

$$\int_a^b Q_m(x)P_j(x)\rho(x)dx = \sum_{k=0}^m c_{km} \int_a^b P_k(x)P_j(x)\rho(x)dx \quad (1.11)$$

olarak yazılabilir. Sağ taraftaki integraller ortogonalite nedeniyle  $k \neq j$  iken sıfır, sadece  $k = j$  iken

$$\int_a^b P_j^2(x)\rho(x)dx = h_j^2 \quad (1.12)$$

olur. Dolayısıyla

$$\int_a^b Q_m(x)P_j(x)\rho(x)dx = 0 + 0 + \dots + c_{jm}h_j^2 + 0 + \dots \quad (1.13)$$

yazılabilir. Buradan

$$c_{jm} = \frac{1}{h_n^2} \int_a^b Q_m(x) P_j(x) \rho(x) dx \quad (1.14)$$

ve  $j$  yerine  $k$  yazılarak

$$c_{km} = \frac{1}{h_k^2} \int_a^b Q_m(x) P_k(x) \rho(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (1.15)$$

bulunur. Şimdi  $m < n$  olmak üzere  $Q_m(x) = x^m$  olsun. O zaman (1.10) ifadesinden

$$x^m = \sum_{k=0}^m c_{km} P_k(x) \quad (1.16)$$

olur ve böylece

$$\int_a^b P_n(x) x^m \rho(x) dx = \sum_{k=0}^m c_{km} \int_a^b P_n(x) P_k(x) \rho(x) dx = 0 \quad (1.17)$$

bulunur. Yani  $m < n$  için

$$\int_a^b P_n(x) x^m \rho(x) dx = 0 \quad (1.18)$$

olur ki bu da  $P_n(x)$  ortogonal polinomunun derecesi  $n$  den küçük her polinoma ortogonal (dik) olduğunu gösterir (Aytar, 2017).  $\square$

**Teorem 1.3** (Nikişorov ve Uvarov, 1988)  $(a, b)$  aralığında  $\rho(x)$  ağırlık fonksiyonu altında ortogonal olan  $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots\}$  polinom ailesi bir tanedir.

**İspat.** (1.18) eşitliğini sağlayan  $\{\tilde{P}_0(x), \tilde{P}_1(x), \dots, \tilde{P}_n(x), \dots\}$  şeklinde başka bir polinom ailesi olsun. (1.10) eşitliğinden

$$\tilde{P}_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{kn} P_k(x) = c_{0n} P_0(x) + \dots + c_{nn} P_n(x) \quad (1.19)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $c_{kn}$  katsayıları (1.15) eşitliğinden

$$c_{kn} = \frac{1}{h_k^2} \int_a^b \tilde{P}_n(x) P_k(x) \rho(x) dx \quad (1.20)$$

şeklindedir.  $\tilde{P}_n(x)$  ortogonal polinomu derecesi  $n$  den küçük her polinoma dik olduğu için  $k < n$  için  $c_{kn} = 0$  olur ve buradan

$$\tilde{P}_n(x) = c_{nn} P_n(x) \quad (1.21)$$

olur. Yani  $\{\tilde{P}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  ortogonal polinom ailesi  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  ailesinin sabit katından başka bir aile olamaz.  $\square$

**Teorem 1.4** (Nikişorov ve Uvarov, 1988)  $P_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots$  olmak üzere  $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots\}$  ortogonal polinom ailesi

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}, \quad \beta_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}, \quad \gamma_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \quad (1.22)$$

olacak şekilde

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x) \quad (1.23)$$

şeklinde bir yineleme bağıntısı sağlar. Burada  $P_{-1}(x) = 0$  ve  $P_0(x) = 1$  dir.

**İspat.** (1.10) eşitliğinden

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{kn} P_k(x) \quad (1.24)$$

yazılabilir. Burada

$$c_{kn} = \frac{1}{h_k^2} \int_a^b P_k(x) x P_n(x) \rho(x) dx \quad (1.25)$$

şeklindedir fakat  $xP_k(x)$  derecesi  $k + 1$  olan bir polinom olduğundan  $k + 1 < n$  için  $c_{kn} = 0$  olmalı. O zaman (1.24) eşitliğinden

$$xP_n(x) = c_{n-1,n} P_{n-1}(x) + c_{n,n} P_n(x) + c_{n+1,n} P_{n+1}(x) \quad (1.26)$$

bulunur ki bu

$$c_{n-1,n} = \gamma_n, \quad c_{n,n} = \beta_n, \quad c_{n+1,n} = \alpha_n \quad (1.27)$$

olmak üzere (1.23) eşitliğindeki ilişkidir. Şimdi  $\alpha_n, \beta_n$  ve  $\gamma_n$  katsayılarını belirleyelim.

$k$  ve  $n$  nin yerleri değiştirildiğinde (1.25) eşitliğindeki integral aynı kalır ve buradan

$$h_k^2 c_{kn} = h_n^2 c_{nk} \quad (1.28)$$

bulunur.  $k = n - 1$  alınırsa

$$h_{n-1}^2 c_{n-1,n} = h_n^2 c_{n,n-1} \quad (1.29)$$

bulunur.  $c_{n-1,n} = \gamma_n$  ve  $c_{n,n-1} = \alpha_{n-1}$  olduğundan

$$\gamma_n = \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \cdot \alpha_{n-1} \quad (1.30)$$

olur. Öte yandan  $P_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots$  olduğundan (1.23) eşitliğinden

$$a_n x^{n+1} + b_n x^n + \dots = \alpha_n a_{n+1} x^{n+1} + (\alpha_n b_{n+1} + \beta_n a_n) x^n + \dots \quad (1.31)$$

bulunur. Buradan

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad (1.32)$$

$$\beta_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \quad (1.33)$$

bulunur. O zaman (1.30) eşitliğinden

$$\gamma_n = \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} \quad (1.34)$$

elde edilir (Nikiforov ve Uvarov, 1988).  $\square$

### Sonuç 1.5 Ortonormal polinom ailesi

$$\phi_n(x) = \frac{P_n(x)}{h_n}, \quad A_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{h_{n+1}}{h_n}, \quad B_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.35)$$

ve  $\phi_{-1} = 0$ ,  $\phi_0 = \frac{1}{h_0}$  olmak üzere

$$A_n \phi_{n+1}(x) + (B_n - x) \phi_n(x) + A_{n-1} \phi_{n-1}(x) = 0 \quad (1.36)$$

şeklinde bir yineleme bağıntısı sağlar.

**İspat.** (1.23) ifadesi

$$\alpha_n P_{n+1}(x) + (\beta_n - x) P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x) = 0 \quad (1.37)$$

şeklinde tekrardan yazılabilir. Burada her iki tarafın  $h_n$  ile bölünmesiyle

$$\alpha_n \frac{P_{n+1}(x)}{h_n} + (\beta_n - x) \frac{P_n(x)}{h_n} + \gamma_n \frac{P_{n-1}(x)}{h_n} = 0 \quad (1.38)$$

ifadesi elde edilir. Burada  $P_n(x) = h_n \phi_n(x)$  yazılırsa

$$\alpha_n \frac{h_{n+1}}{h_n} \phi_{n+1} + (\beta_n - x) \phi_n + \gamma_n \frac{h_{n-1}}{h_n} \phi_n = 0 \quad (1.39)$$

olur. Son olarak

$$\alpha_n \frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{h_{n+1}}{h_n} := A_n \quad (1.40)$$

$$\gamma_n \frac{h_{n-1}}{h_n} = \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{h_n^2}{h_{n-1}^2} \frac{h_{n-1}}{h_n} = \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{h_n}{h_{n-1}} := A_{n-1} \quad (1.41)$$

$$\beta_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} := B_n \quad (1.42)$$

olduğundan ispat biter.  $\square$

**Teorem 1.6** (Aytar, 2017) (Darboux-Christoffel formülü)  $\{P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots\}$  ortogonal polinom ailesi

$$\mathcal{A}_k(x, y) = \frac{\alpha_k}{h_k^2} \begin{vmatrix} P_{k+1}(x) & P_{k+1}(y) \\ P_k(x) & P_k(y) \end{vmatrix} \quad (1.43)$$

olmak üzere

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{h_k^2} P_k(x) P_k(y) = \frac{\mathcal{A}_n(x, y)}{x - y} \quad (1.44)$$

şeklinde bir sonlu toplam formülü sağlar.

**İspat.** (1.23) yineleme bağıntısından

$$\frac{1}{h_k^2} x P_k(x) = \frac{\alpha_k}{h_k^2} P_{k+1}(x) + \frac{\beta_k}{h_k^2} P_k(x) + \frac{\alpha_{k-1}}{h_k^2} P_{k-1}(x) \quad (1.45)$$

$$\frac{1}{h_k^2} y P_k(y) = \frac{\alpha_k}{h_k^2} P_{k+1}(y) + \frac{\beta_k}{h_k^2} P_k(y) + \frac{\alpha_{k-1}}{h_k^2} P_{k-1}(y) \quad (1.46)$$

yazılıp ilk denklemi  $P_k(y)$ , ikinci denklemi  $P_k(x)$  ile çarpıp taraf tarafa çıkarırsak

$$\frac{x - y}{h_k^2} P_k(x) P_k(y) = -\mathcal{A}_k(x, y) + \mathcal{A}_{k-1}(x, y) \quad (1.47)$$

ifadesi elde edilir.  $k$  üzerinden 0 dan  $n$  ye kadar toplarsak

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{h_k^2} P_k(x) P_k(y) = \frac{1}{x - y} \sum_{k=0}^n \mathcal{A}_{k-1}(x, y) - \mathcal{A}_k(x, y) = \frac{\mathcal{A}_n(x, y) - \mathcal{A}_{-1}(x, y)}{x - y} \quad (1.48)$$

bulunur. Burada  $\frac{\alpha_{-1}}{h_{-1}^2} = 0$  ve  $P_{-1}(x)P_{-1}(y) = 0$  olduğundan  $\mathcal{A}_{-1}(x, y) = 0$  olduğu açıktır. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur (Aytar, 2017).  $\square$

**Teorem 1.7** (Aytar, 2017)  $P_n(x)$  ortogonal polinomunun  $(a, b)$  aralığında  $n$  tane reel ve birbirinden farklı kökü vardır.

**İspat.**  $P_n(x)$ ,  $(a, b)$  aralığında  $k$  defa işaret değiştirsin. Açıkça  $0 \leq k \leq n$  olur. O halde  $k = n$  olduğunu göstermeliyiz.  $x_j$ ,  $P_n(x)$  polinomunun işaret değiştirdiği noktalar (kökler) olmak üzere

$$Q_k(x) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \prod_{j=1}^k (x - x_j), & k \neq 0 \end{cases} \quad (1.49)$$

polinomunu tanımlayalım. Dikkat edilirse  $Q_k(x)P_n(x)$  çarpımı  $(a, b)$  aralığında işaret değiştirmez. O halde

$$\int_a^b Q_k(x) P_n(x) \rho(x) dx \neq 0 \quad (1.50)$$

olur. Çünkü integral altındaki fonksiyon pozitifdir fakat ortogonallikten  $k < n$  için bu integral sıfırdır. O halde  $k = n$  olmak zorundadır (Aytar, 2017).  $\square$

**Teorem 1.8** (Aytar, 2017)  $P_{n+1}(x)$  polinomunun ardışık iki kökü arasında  $P_n(x)$  polinomunun bir kökü vardır.

**İspat.**  $y \rightarrow x$  durumunda (1.43) ifadesi

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{A}_n(x, y) = -\frac{1}{h_n^2} \frac{a_n}{a_{n+1}} [P_{n+1}(x)P'_n(x) - P_n(x)P'_{n+1}(x)] \quad (1.51)$$

elde edilir. Öte yandan limit durumunda (1.51) eşitliğinin sol tarafı

$$\lim_{y \rightarrow x} \sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)P_k(y)}{h_k^2} = \sum_{k=0}^n \frac{P_k^2(x)}{h_k^2} \quad (1.52)$$

bulunur. Şimdi  $j = 0, 1, \dots, n+1$  için  $x_j$  noktaları  $P_{n+1}(x)$  polinomunun kökleri olsun. (1.51) ve (1.52) eşitliklerinden

$$P_n(x_j)P'_{n+1}(x_j) = h_n^2 \frac{a_n}{a_{n+1}} \sum_{k=0}^n \frac{P_k^2(x_j)}{h_k^2} \quad (1.53)$$

bulunur. Yani eşitliğin sol tarafındaki ifadenin işareti sadece  $a_n/a_{n+1}$  teriminin işaretine bağlı olup  $x_j$  den bağımsızdır. Fakat  $P'_{n+1}(x)$  polinomu  $(x_j, x_{j+1})$  aralığında yerel maksimuma sahip olduğundan bu aralıkta işaret değiştirir. O halde sağ tarafın işareti değişmediğinden  $P_n(x)$  polinomu da  $P'_{n+1}(x)$  polinomuyla birlikte işaret değiştirmelidir. Bu ise  $P_n(x)$  polinomunun  $(x_j, x_{j+1})$  aralığında en az bir kökü olduğunu gösterir. Fakat  $(a, b)$  aralığında  $(x_j, x_{j+1})$  şeklinde  $n$  tane alt aralık olduğundan her bir alt aralık  $P_n(x)$  polinomunun en az bir kökünü içerdiğinden ve  $P_n(x)$  polinomunun tam olarak  $n$  tane kökü olduğundan her bir  $(x_j, x_{j+1})$  aralığı  $P_n(x)$  polinomunun tam olarak bir kökünü içerir (Aytar, 2017).  $\square$

**Teorem 1.9** (Alıcı, 2010)  $\phi_n(x) = \frac{P_n(x)}{h_n}$  olmak üzere herhangi ardışık iki ortonormal polinom  $n = 1, 2, \dots$  için

$$\frac{1}{C_{2n}} \sigma(x) \phi'_n(x) = \left[ B_n - x - \frac{C_n}{C_{2n} C_{2n+1}} (n\sigma'(x) + \tau(x)) \right] \phi_n(x) + A_{n-1} \phi_{n-1}(x) \quad (1.54)$$

eşitliğini sağlar. Burada başkatsayı  $C_n = \frac{\lambda_n}{n}$  şeklindedir. Yine burada  $\phi_{-1} = 0$ ,  $\phi_0 = \frac{1}{h_0}$  olup  $A_n$  ve  $B_n$  başkatsayıları (1.35) eşitlikleriyle verilmiştir.



## 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Hipergeometrik tip diferansiyel denklemin bir çözümü olan klasik ortogonal polinomlar nümerik yöntemler ile kuşkusuz yakın bir ilişki içerisindedir. Bir çok araştırmacı tarafından nümerik integral üzerinde derin çalışmalar yapılmış, yeni yöntemler geliştirilmiştir. Bunlardan bazılarını örnek verecek olursak; Evans ve Webster, salınımlı integrallerin hesabı için var olan metotları karşılaştırmış (Evans ve Webster, 1999), Cole ve arkadaşları elastodinamikleri sınır integral denklemleri olarak formüle edip bu denklemlerin bilinmeyen sınır değerleri için zaman adımlı nümerik yöntemler ile çözülebileceğini göstermiş (Cole ve ark., 1978), te Velde ve Baerends elektronik yapı hesaplamalarında periyodiklik bulunan tüm poliatomik sistemlere uygulanabilir bir nümerik integrasyon tekniği geliştirmiştir (te Velde ve Baerends, 1992). Clenshaw ve Curtis, sonlu aralıkta düzgün fonksiyonlar için yeni bir sayısal integral yöntemi önermişlerdir. Bu yöntemin özü integral altındaki fonksiyonu Chebyshev serisine açıp, terim terime integral almaktır (Clenshaw ve Curtis, 1960). Haselgrove, çok katlı integrallerin nümerik hesabı için Diophantine yaklaşımı üzerine kurulan bir sayısal integral yöntemi vermiştir (Haselgrove, 1961). Boerrigter ve arkadaşları, tek elektronlu operatörlerin matris elemanları ve beklenti değerleri için çarpım-Gauss integrasyon kuralını kullanan bir yöntem vermişlerdir (Boerrigter ve ark., 1988).

Görüldüğü üzere nümerik integrasyon fizik ve matematiğin en önemli konuları arasında yerini almakta, karşılaşılan bir çok problemin çözümünde klasik ortogonal polinomlar ile birlikte kilit bir rol üstlenmektedir. Bu tez çalışmasında inceleyeceğimiz Gauss sayısal integrasyon yöntemi (Gauss kuadrürü) klasik ortogonal polinomlar üzerine inşa edilmiştir. Sonraki bölümde mevcut sayısal integrasyon yöntemlerinden Newton-Cotes formülleri tanıtılacak, ardından Romberg integrasyon metoduna değinilecek ve son olarak da Gauss sayısal integrasyon yöntemi tüm detaylarıyla incelenecektir.

### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde mevcut sayısal integrasyon yöntemleri detaylı olarak incelenmiştir. Bir fonksiyonun anti türevinin elementer fonksiyon cinsinden yazılamayışı veya fonksiyon integrallenebilse bile ortaya çıkan hesaplama zorlukları, nümerik (sayısal) yöntemler ile integral hesabın kuşkusuz en önemli tercih sebeplerindedir. Dahası sadece bir kaç noktadaki değeri bilinen ancak kesin kuralı tam olarak bilinmeyen bir fonksiyonun integrali nümerik yöntemler ile kolayca hesaplanabilmektedir.

#### 3.1. Newton-Cotes Formülleri

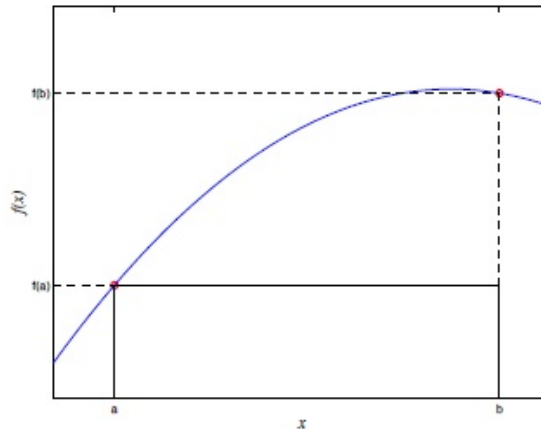
Newton-Cotes formülleri eşit aralıklı noktalar üzerine kuruludur. En bilinen sayısal integrasyon yöntemi Newton-Cotes formülleridir.

$\int_a^b f(x)dx$  integralinin değerine  $\sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$  toplamıyla yaklaştırmaya "nümerik kuadratur (kareleme)" denilmektedir. Bunun en basit örneği; bir fonksiyonun  $[a, b]$  aralığındaki uç noktalarından birisi için fonksiyonun bu noktadaki değeri ile  $[a, b]$  uzunluğunun çarpımı yaklaşık olarak  $\int_a^b f(x)dx$  değerine eşittir.  $x = a$  için bu değer

$$\int_a^b f(x)dx \approx f(a)(b - a) \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. (3.1) ifadesi "dikdörtgen kuralı" olarak adlandırılır (Levy, 2010).

Şekil 3.1.'de görüldüğü üzere dikdörtgen kuralı, fonksiyonun grafiğinin altında kalan gerçek alan değerini vermekten çok uzaktır. Bu yüzden daha keskin sonuçlar

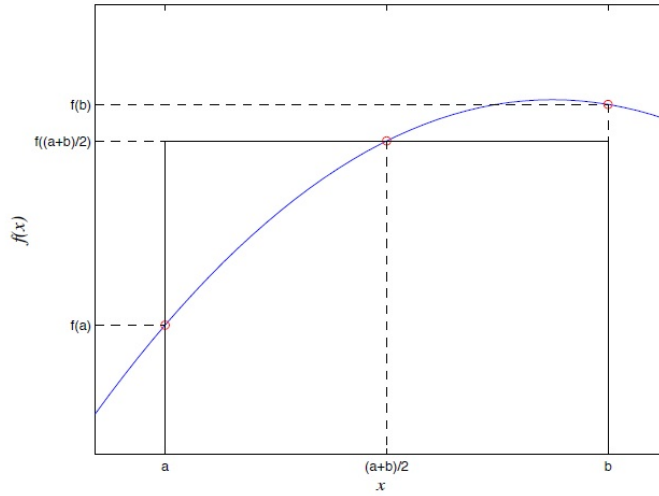


Şekil 3.1. Dikdörtgen Kuralının Grafikle Gösterimi (Levy, 2010)

içeren bağıntılara ihtiyaç vardır. Bu nedenle yine aynı şekilde  $\int_a^b f(x)dx$  integrali,  $f(x)$  fonksiyonunun uç noktasından ziyade orta noktasındaki değerinin seçimiyle

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (3.2)$$

yaklaşımı olarak ifade edilebilir. (3.2) ifadesi "orta nokta kuralı" olarak adlandırılır ve bu metod dikdörtgen metoduna göre daha keskin sonuçlar veren bir kareleme yöntemidir (Levy, 2010).



Şekil 3.2. Orta Nokta Kuralının Grafikle Gösterimi (Levy, 2010)

Orta nokta kuralının hata fonksiyonunu belirlemek için  $[a, b]$  aralığındaki bir  $f(x)$  fonksiyonunun orta noktasını

$$c = \frac{a+b}{2} \quad (3.3)$$

olarak tanımlarsak  $f(x)$  fonksiyonunun  $x = c$  noktasındaki teğet doğrusu

$$P_1(x) = f(c) + f'(c)(x - c) \quad (3.4)$$

olarak ifade edilir. Böylece

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx \quad (3.5)$$

şeklinde bir yaklaşım elde edilebilir. Burada

$$\int_a^b P_1(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (3.6)$$

olduğu açıktır. Orta nokta kuralının hata fonksiyonu

$$E(x) = \int_a^b [f(x) - P_1(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (3.7)$$

olarak yazılabilir.  $f(x)$  fonksiyonunu  $x = c$  civarındaki Taylor serisine açarak

$$f(x) = f(c + (x - c)) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{1}{2}f''(\xi_x)(x - c)^2, \quad \xi \in (a, b) \quad (3.8)$$

yazılabilir. Buradan

$$E(x) = \int_a^b [f(x) - P_1(x)]dx = \int_a^b \frac{1}{2}f''(\xi_x)(x - c)^2 dx \quad (3.9)$$

olarak ifade edilir. Burada  $[a, b]$  aralığında  $(x - c)^2$  ifadesinin işareti değişmez. Dolayısıyla integraller için ortalama değer teoreminden orta nokta kuralının hata fonksiyonu

$$E(x) = \int_a^b \frac{1}{2}f''(\xi_x)(x - c)^2 dx = \frac{1}{2}f''(\xi) \int_a^b (x - c)^2 dx = \frac{1}{24}(b - a)^3 f''(\xi), \quad \xi \in (a, b) \quad (3.10)$$

olarak ifade edilebilir (Levy, 2010).

### 3.1.1. İnterpolasyon Yardımıyla Sayısal İntegral Hesabı

Bir fonksiyonun belirli bir aralıkta integralini hesaplayabilmenin en verimli yöntemlerinden birisi de polinom interpolasyonunu kullanmaktır. Bu yöntemde verilen  $f(x)$  fonksiyonu yerine  $P_n(x)$  n-inci derece interpolasyon polinomu alınır ve bu polinomun integrali alınarak integralin yaklaşık değeri hesaplanır.

Lagrange interpolasyon polinomu

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad 0 \leq i \leq n \quad (3.11)$$

olarak tanımlanır (Burden ve Faires, 2011). Ayrıca her bir  $i = 0, 1, \dots, N$  için  $l_i(x)$  fonksiyonları

$$\omega_{N+1}(x) = \kappa \prod_{j=0}^N (x - x_j) \quad (3.12)$$

$x = x_j, \quad j = 0, 1, \dots, N$  noktalarında reel ve birbirinden farklı  $(N + 1)$ . derece polinom olmak üzere

$$l_i(x) = \frac{\omega_{N+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{N+1}(x_i)} \quad (3.13)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Öte yandan bu polinomlar  $\delta_{ij}$  Kronoker delta olmak üzere

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (3.14)$$

şeklinde bir özellik sağlar. (3.12) denklemindeki  $\kappa$  sabiti teorik bir anlam ifade etmez. Bu ifade sadece nümerik yöntemlerde önemli bir role sahiptir (Dal, 2017).

Bir  $f(x)$  fonksiyonunun tanımlı olduğu  $[a, b]$  aralığını  $n$  eşit parçaya bölecek olursak

$$x_0 = a \quad x_n = b \quad \text{ve} \quad h = \frac{b - a}{n} \quad (3.15)$$

olmak üzere integrasyon noktaları

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.16)$$

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.17)$$

olacak şekilde ve (3.11) lagrange interpolasyon polinomu yardımıyla

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_i(x) \quad (3.18)$$

şeklinde  $P_n(x) \in \Pi_n$  polinomu elde edilebilir. Burada  $\Pi_n$  derecesi en fazla  $n$  olan polinomlar kümesini ifade eder. Böylece  $f(x)$  fonksiyonunun  $[a, b]$  aralığında integrali

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b P_n(x) dx = \int_a^b \left( \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_i(x) \right) dx \\ &= \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b \ell_i(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) w_i \end{aligned} \quad (3.19)$$

olarak elde edilebilir. Burada ağırlık katsayıları olan  $w_i$  değerleri

$$w_i = \int_a^b \ell_i(x) dx \quad (3.20)$$

olmak üzere Newton-Cotes formülleri

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n f(x_i) w_i \quad (3.21)$$

olarak ifade edilebilir. Newton-Cotes formüllerinde hata fonksiyonu

$$E(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) f^{(n+1)}[\xi(x)] dx \quad (3.22)$$

şeklindedir. Bu ise polinom interpolasyonunun hata teriminden yararlanılarak elde edilebilir (Burden ve Faires, 2011).

$n + 1$  nokta kullanarak oluşturulan kapalı Newton-Cotes formüllerinde integrasyon noktaları  $i = 0, 1, \dots, n$  olmak üzere  $x_i = x_0 + ih$  olarak tanımlanır. Kapalı Newton-Cotes formülleri denmesinin sebebi  $x_0 = a$  ve  $x_n = b$  olmak üzere bir  $[a, b]$  aralığının uç noktalarının da integrasyon noktaları olarak kullanılmasıdır.

$n = 1$  için bu yöntem "Yamuk (trapezoid) kuralı" olarak bilinir ve aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$x_0 = a$ ,  $x_1 = b$  ve  $h = b - a$  olmak üzere Lagrange interpolasyon polinomları

$$\ell_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - b}{a - b} \quad (3.23)$$

ve

$$\ell_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - a}{b - a} \quad (3.24)$$

olarak hesaplanır. Buradan ağırlık katsayıları

$$w_0 = \int_a^b \ell_0(x) dx = \int_a^b \frac{x - b}{a - b} dx = \frac{h}{2} \quad (3.25)$$

ve

$$w_1 = \int_a^b \ell_1(x) dx = \int_a^b \frac{x - a}{b - a} dx = \frac{h}{2} \quad (3.26)$$

elde edilir. Sonuç olarak yamuk kuralı

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^1 w_i f(x_i) = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] \quad (3.27)$$

ifadesiyle formüle edilebilir.

Yamuk kuralının hatası (3.22) eşitliğinden

$$E(f) = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1) f''[\xi(x)] dx \quad (3.28)$$

fonksiyonuyla verilir.  $[x_0, x_1]$  aralığında  $(x - x_0)(x - x_1)$  çarpımının işareti değişmez.

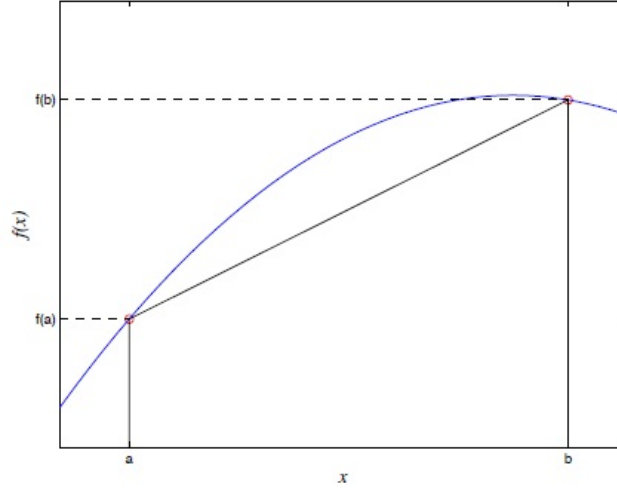
Dolayısıyla integraller için ortalama değer teoreminden hata fonksiyonu

$$E(f) = \frac{1}{2} f''(\xi) \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1) dx = -\frac{h^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_1) \quad (3.29)$$

olarak elde edilir.

Yamuk Kuralının hata terimi  $f''$  fonksiyonunu içerdiğinden bu kural ikinci türevi sıfır olan herhangi bir fonksiyona uygulandığında tam sonuç verir, dolayısıyla yamuk kuralının derecesi en fazla bir olan her polinom için tam sonuç verdiği söylenebilir.

$n = 2$  için kapalı Newton-Cotes formülü "Simpson kuralı" olarak bilinir ve aşağıdaki şekilde hesaplanır.



Şekil 3.3. Yamuk Kuralının Grafikle Gösterimi (Levy, 2010)

$x_0 = a$ ,  $x_2 = b$ ,  $h = (b - a)/2$  ve  $x_1 = a + h$  olmak üzere Lagrange interpolasyon polinomları

$$\ell_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \quad (3.30)$$

$$\ell_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \quad (3.31)$$

$$\ell_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (3.32)$$

olarak yazılabilir. Ağırlık katsayıları olan  $w_i$  değerleri  $f$  fonksiyonuna bağlı olmayıp sadece  $x$  değerlerine bağlı olduğundan  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = h$  ve  $x_2 = 2h$  olarak seçilirse

$$w_0 = \int_0^{2h} \ell_0(x) dx = \frac{h}{3} \quad (3.33)$$

$$w_1 = \int_0^{2h} \ell_1(x) dx = \frac{4h}{3} \quad (3.34)$$

$$w_2 = \int_0^{2h} \ell_2(x) dx = \frac{h}{3} \quad (3.35)$$

olarak hesaplanır. Dolayısıyla Simpson kuralı

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \quad (3.36)$$

olarak ifade edilir. Simpson kuralının hatası aşağıdaki teorem yardımıyla kolaylıkla hesaplanabilir.

**Teorem 3.1** (Burden ve Faires, 2011)  $n + 1$  noktalı kapalı Newton-Cotes formülleri  $\sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$  olarak verilsin.

$x_0 = a$  ,  $x_n = b$  ve  $h = (b - a)/n$  olmak üzere

$n$  çift sayısı için  $f(x) \in C^{(n+2)}[a, b]$  olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n t^2(t-1) \dots (t-n)dt \quad (3.37)$$

olacak şekilde bir  $\xi \in [a, b]$  vardır.

$n$  tek sayısı için  $f(x) \in C^{(n+1)}[a, b]$  olduğunu varsayarsak bu durumda

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n t(t-1) \dots (t-n)dt \quad (3.38)$$

olacak şekilde bir  $\xi \in [a, b]$  vardır.

Dolayısıyla Teorem 3.1'den Simpson kuralının hatası

$$E(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_2) \quad (3.39)$$

olarak hesaplanır.

$n = 3$  için kapalı Newton-Cotes formülü "Simpson-3/8 kuralı" olarak bilinir ve aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$h = (b - a)/3$  olmak üzere  $x_0 = a$  ,  $x_1 = a + h$  ,  $x_2 = a + 2h$  ,  $x_3 = a + 3h = b$  olarak alındığında Lagrange interpolasyon polinomları

$$\ell_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_0 - x_3} \quad (3.40)$$

$$\ell_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} \quad (3.41)$$

$$\ell_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} \quad (3.42)$$

$$\ell_3(x) = \frac{x - x_0}{x_3 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \quad (3.43)$$

olarak yazılabilir. Burada  $x_0 = 0$  ,  $x_1 = h$  ,  $x_2 = 2h$  ,  $x_3 = 3h$  olarak seçilirse

$$w_0 = \int_0^{3h} \ell_0(x)dx = \frac{3h}{8} \quad (3.44)$$

$$w_1 = \int_0^{3h} \ell_1(x)dx = \frac{9h}{8} \quad (3.45)$$

$$w_2 = \int_0^{3h} \ell_2(x)dx = \frac{9h}{8} \quad (3.46)$$



$$w_3 = \int_0^{3h} \ell_3(x) dx = \frac{3h}{8} \quad (3.47)$$

olarak hesaplanır. Dolayısıyla Simpson-3/8 kuralı

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] \quad (3.48)$$

olarak ifade edilir. Simpson-3/8 kuralı için hata fonksiyonu Teorem 3.1'den

$$E(f) = -\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_3) \quad (3.49)$$

olarak hesaplanabilir.

Açık Newton-Cotes formüllerinde ise  $[a, b]$  aralığının uç noktaları integrasyon noktalarına dahil değildir. Dolayısıyla  $x_{-1} = a$  ve  $x_{n+1} = b$  olarak tanımlarsak integrasyon noktaları  $i = 0, 1, \dots, n$  ve  $h = (b - a)/(n + 2)$  olmak üzere  $x_i = x_0 + ih$  şeklindedir. Buradan açık Newton-Cotes formüllerini

$$w_i = \int_a^b \ell_i(x) dx \quad (3.50)$$

olmak üzere

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_{-1}}^{x_{n+1}} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (3.51)$$

olarak tanımlayabiliriz.

Açık Newton-Cotes formüllerinin hatası aşağıdaki teorem yardımıyla hesaplanabilir.

**Teorem 3.2** (Burden ve Faires, 2011)  $n + 1$  noktalı açık Newton-Cotes formülleri  $\sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$  olarak verilsin.

$x_{-1} = a$ ,  $x_{n+1} = b$  ve  $h = (b - a)/(n + 2)$  olmak üzere

$n$  çift sayısı için  $f(x) \in C^{(n+2)}[a, b]$  olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n + 2)!} \int_{-1}^{n+1} t^2(t - 1) \dots (t - n) dt \quad (3.52)$$

olacak şekilde bir  $\xi \in [a, b]$  vardır.

$n$  tek sayısı için  $f(x) \in C^{(n+1)}[a, b]$  olduğunu varsayarsak bu durumda

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!} \int_{-1}^{n+1} t(t - 1) \dots (t - n) dt \quad (3.53)$$

olacak şekilde bir  $\xi \in [a, b]$  vardır.

Aşağıdaki çizelgelerde  $f(x_i) = f_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  olmak üzere yaygın olarak kullanılan bazı açık ve kapalı Newton-Cotes formülleri verilmiştir.

Çizelge 3.1. Yaygın kullanılan kapalı Newton-Cotes formülleri (Hildebrand, 1973)

İsim	Derece	Aralık Boyu	Formül
Yamuk	$n = 1$	$h = b - a$	$\frac{h}{2}[f_0 + f_1] - \frac{h^3}{12}f''(\xi)$
Simpson	$n = 2$	$h = \frac{b-a}{2}$	$\frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$
Simpson-3/8	$n = 3$	$h = \frac{b-a}{3}$	$\frac{3h}{8}[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3] - \frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\xi)$
Boole	$n = 4$	$h = \frac{b-a}{4}$	$\frac{2h}{45}[7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4] - \frac{8h^7}{945}f^{(6)}(\xi)$

Çizelge 3.2. Yaygın kullanılan açık Newton-Cotes formülleri (Hildebrand, 1973)

İsim	Derece	Aralık Boyu	Formül
Orta Nokta	$n = 0$	$h = \frac{b-a}{2}$	$2hf_0 + \frac{h^3}{3}f''(\xi)$
Yamuk	$n = 1$	$h = \frac{b-a}{3}$	$\frac{3h}{2}[f_0 + f_1] + \frac{3h^3}{4}f''(\xi)$
Milne	$n = 2$	$h = \frac{b-a}{4}$	$\frac{4h}{3}[2f_0 - f_1 + 2f_2] + \frac{14h^5}{45}f^{(4)}(\xi)$
	$n = 3$	$h = \frac{b-a}{5}$	$\frac{5h}{24}[11f_0 + f_1 + f_2 + 11f_3] + \frac{95h^5}{144}f^{(4)}(\xi)$

**Örnek 3.3** Aşağıdaki tabloda kapalı Newton-Cotes formüllerinin de yardımıyla bazı  $f(x)$  fonksiyonları için  $\int_0^3 f(x)dx$  değeri ondalık kısmın virgülden sonraki ilk üç basamağına kadar hesaplanmıştır.

Çizelge 3.3. Bazı  $f(x)$  Fonksiyonları için  $\int_0^3 f(x)dx$  Değerleri

$f(x)$	$x^3$	$\frac{1}{\sqrt{x+1}}$	$\cos x$	$e^x$
$\int_0^3 f(x)dx$				
Tam değeri	20.250	2.000	0.141	19.085
Yamuk Kuralı	40.500	2.250	0.015	31.628
Simpson Kuralı	20.250	2.015	0.146	19.506
Simpson 3/8 Kuralı	20.250	2.007	0.143	19.277

### 3.1.2. Bileşik Newton-Cotes Formülleri

Newton-Cotes formülleri genellikle bir fonksiyonun geniş bir aralıkta integralinin hesaplanmasında tek başına yeterli değildir. Çünkü eşit aralıklı noktalar kullanılarak

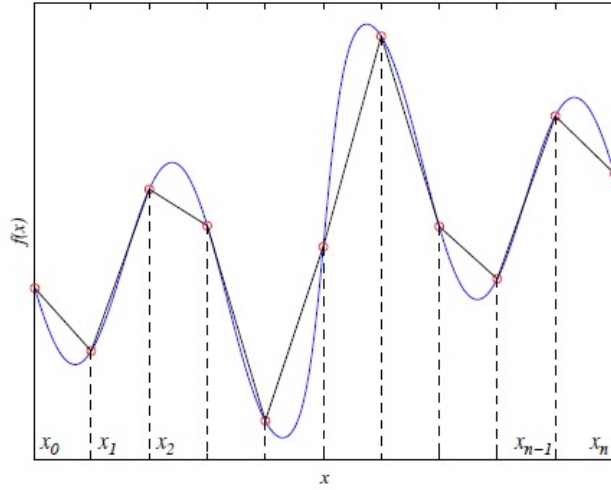
oluşturulan interpolasyon polinomlarının, aynı aralıkta salınım yapan yüksek dereceli fonksiyonların integrali için kullanımı, bu integralin gerçek değerinden önemli ölçüde sapma meydana getirir.

Bu bölümde yukarıda bahsedilen durumdan kaçınmak üzere tek bir aralık için uygulanan Newton-Cotes formüllerini, aynı aralığın parçalanmış her bir alt aralığına uygulayarak bu formüllerden bir bileşik kural elde edilecektir. Üstelik burada eşit aralıklı noktaların kullanımı da gerekli değildir.

Bir  $[a, b]$  aralığı  $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n=b$  şeklinde  $n$  parçaya bölünmüşse, bu durumda her bir alt aralığa yamuk kuralının uygulanmasıyla

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) [f(x_{i-1}) + f(x_i)], \quad i = 1, \dots, n \quad (3.54)$$

formülüyle "bileşik yamuk kuralı" elde edilebilir.



Şekil 3.4. Bileşik Yamuk Kuralının Grafikle Gösterimi (Levy, 2010)

Özel bir durum olarak eğer  $[a, b]$  aralığı  $n$  eşit parçaya bölünmüşse, bu durumda eşit aralıklı bileşik yamuk kuralı

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih \quad (3.55)$$

olmak üzere

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} [f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) + f(b)] = h \sum_{i=0}^n {}'' f(a + ih) \quad (3.56)$$

formunda yazılabilir. Burada  $\sum''$  sembolü toplamdaki ilk ve son terimlerin yarısı olduğunu belirtir (Levy, 2010).

Bileşik yamuk kuralının hatası aşağıdaki yöntemle hesaplanabilir.

$x_0 = a$ ,  $x_1 = b$  ve  $h = b - a$  olmak üzere (3.29) ifadesinden yamuk kuralının hatasının

$$E(f) = -\frac{h^3}{12}f''(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_1) \quad (3.57)$$

fonksiyonuyla verildiğini biliyoruz. Buradan yamuk kuralının her bir alt aralığındaki hata terimlerinin toplamı

$$\sum_{i=1}^n -\frac{h^3}{12}f''(\xi_i) = -\frac{h^3n}{12} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) \right] \quad (3.58)$$

olarak yazılabilir. Burada  $\xi_i$  notasyonunu  $i$ -inci aralığın orta noktasını belirtmek için kullandık. Eğer

$$M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f''(\xi_i) \quad (3.59)$$

olarak belirtirsek

$$\min_{x \in [a,b]} f''(x) \leq M \leq \max_{x \in [a,b]} f''(x) \quad (3.60)$$

olduğu açıktır. Eğer  $f''(x)$  fonksiyonunun  $[a, b]$  aralığında sürekli olduğunu varsayarsak

$$f''(\xi) = M \quad (3.61)$$

olacak şekilde bir  $\xi \in [a, b]$  noktası olduğunu söyleyebiliriz. Burada  $h = (b - a)/n$  olduğundan hata fonksiyonu

$$E = -\frac{(b - a)h^2}{12}f''(\xi), \quad \xi \in [a, b] \quad (3.62)$$

elde edilir. Buradan ise bileşik yamuk kuralının ikinci basamaktan kesinliğe sahip olduğu söylenebilir (Levy, 2010).

Yine aynı şekilde bileşik Simpson kuralını elde etmek için  $[a, b]$  aralığını çift sayıda  $n$  eşit parçaya bölecek olursak,

$$h = \frac{b - a}{n}, \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.63)$$

olacak şekilde her bir alt aralıktaki integrallerin toplamını

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n/2} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \quad (3.64)$$

şeklinde gösterebiliriz. Dolayısıyla bu ifadeden (3.36) denkleminin yardımıyla

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \sum_{i=1}^{n/2} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] \quad (3.65)$$

denklemini elde edilir. Böylece

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{i=2}^{n/2} f(x_{2i-2}) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + f(x_n) \right] \quad (3.66)$$

formunda "bileşik Simpson kuralı" elde edilebilir (Levy, 2010).

Bileşik Simpson kuralının hatası aşağıdaki yöntemle elde edilebilir.

Her bir alt aralıktaki hata terimlerinin toplamını (3.39) denkleminde yararlanarak

$$E = -\frac{h^5}{90} \sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i) = -\frac{h^5}{90} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i) \quad (3.67)$$

şekline yazabiliriz. Dolayısıyla buradan

$$\min_{x \in [a,b]} f^{(4)}(x) \leq \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i) \leq \max_{x \in [a,b]} f^{(4)}(x) \quad (3.68)$$

olduğu açıktır. Böylece bileşik Simpson kuralının hatası

$$E = -\frac{h^5}{90} \cdot \frac{n}{2} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b) \quad (3.69)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadeden bileşik Simpson kuralının dördüncü mertebeden kesinliğe sahip olduğu söylenebilir (Levy, 2010).

Eğer  $[a, b]$  aralığını çift sayıda  $n$  eşit parçaya bölecek olursak

$$h = \frac{b-a}{n+2}, \quad x_j = a + (j+1)h, \quad j = -1, 0, 1, \dots, n+1 \quad (3.70)$$

olmak üzere (3.2) denkleminde orta nokta kuralının her bir alt aralığa uygulanmasıyla

$$\int_a^b f(x)dx = 2h \sum_{j=0}^{n/2} f(x_{2j}) \quad (3.71)$$

formunda "bileşik orta nokta kuralı" elde edilebilir (Burden ve Faires, 2011).

Orta nokta kuralının hatasını  $h = (b-a)/2$  olmak üzere

$$E(f) = \frac{1}{24} (b-a)^3 f''(\xi) = \frac{1}{3} h^3 f''(\xi), \quad \xi \in (a, b) \quad (3.72)$$

olarak elde etmiştik. Buradan bileşik orta nokta kuralının hatasını her bir alt aralıktaki hata terimlerinin toplamı olarak yazdığımızda

$$\sum_{j=1}^{(n/2)+1} \frac{h^3}{3} f''(\xi_j) = \frac{h^3}{3} \frac{(n+2)}{2} \left[ \frac{2}{(n+2)} \sum_{j=1}^{(n/2)+1} f''(\xi_j) \right] = \frac{h^3(n+2)}{6} f''(\xi) \quad (3.73)$$

olacak şekilde  $\xi \in (a, b)$  vardır diyebiliriz. Dolayısıyla  $h = (b - a)/(n + 2)$  olduğundan bileşik orta nokta kuralının hatası

$$E = \frac{h^2(b-a)}{6} f''(\xi), \quad \xi \in (a, b) \quad (3.74)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bileşik orta nokta kuralı ikinci mertebe kesinliğe sahiptir.

### 3.1.3. Romberg İntegrasyon Metodu

Bu metot  $\int_a^b f(x)dx$  integraline bir dizi yaklaşım teknikleriyle daha iyi sonuca ulaşmayı hedefleyen bir ekstrapolasyon tekniğidir. İlk olarak 1955 yılında Werner Romberg tarafından önerilen bu teknikte özellikle bileşik yamuk kuralı kullanılarak daha keskin sonuç veren integral yaklaşımları elde edilmektedir.

Yaklaşık değerini hesaplamak istediğimiz integral

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad (3.75)$$

olsun. Bu integrale eşit aralıklı noktalar kullanan bileşik yamuk kuralı ile yaklaşmaya çalışalım.

$$f_i = f(a + ih) \quad \text{ve} \quad h = \frac{b-a}{2^n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.76)$$

olmak üzere

$$I_n^{(0)} = h \sum_{i=0}^n f_i = h \left[ \frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \right] \quad (3.77)$$

olarak yazılabilir. Burada (3.62) den bileşik yamuk kuralının ikinci basamaktan kesinliğe sahip olduğunu biliyoruz. O halde  $I$  ve  $I_n^{(0)}$  integralleri arasındaki hata teriminin yazılmasıyla

$$I = I_n^{(0)} + c_1 h^2 + c_2 h^4 + c_3 h^6 + \dots \quad (3.78)$$

elde edilir. Benzer şekilde aynı metodu bu sefer az önceki yöntemde kullanılan noktaların yarısı kadarını kullanarak uygularsak

$$I_{n-1}^{(0)} = 2h \left[ \frac{1}{2} f_0 + f_2 + \dots + f_{n-2} + \frac{1}{2} f_n \right] \quad (3.79)$$

elde edilir. Buradan

$$I = I_{n-1}^{(0)} + c_1(2h)^2 + c_2(2h)^4 + c_3(2h)^6 + \dots \quad (3.80)$$

olarak ifade edilebilir. Böylece (3.78) ve (3.80) denklemlerindeki  $h^2$  li terimin yok edilmesiyle

$$I = \frac{4I_n^{(0)} - I_{n-1}^{(0)}}{3} - 4c_2h^4 - 20c_3h^6 + \dots \quad (3.81)$$

elde edilir. Böylece bu ifade

$$I = I_n^{(1)} + \hat{c}_2h^4 + \hat{c}_3h^6 + \dots \quad (3.82)$$

şeklinde yazılarak hata terimi  $h^4$  ifadesini içeren yeni bir integral elde edilmekte, dolayısıyla hata teriminin mertebesi düşük olduğundan daha keskin bir sonuca ulaşılmaktadır (Young, 2014).

Yine aynı yöntemler kullanılarak daha da keskin sonuçlar elde etmek mümkündür. (3.81) denkleminde

$$I_n^{(1)} = \frac{4I_n^{(0)} - I_{n-1}^{(0)}}{3} = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n] \quad (3.83)$$

yazılabilir. Dikkat edilecek olursa, bu ifade (3.66) denklemiyle verilen bileşik Simpson kuralıdır. (3.82) denkleminde

$$I = I_{n-1}^{(1)} + \hat{c}_2(2h)^4 + \hat{c}_3(2h)^6 + \dots \quad (3.84)$$

yazılabilir. Böylece (3.82) ve (3.84) denklemlerindeki  $h^4$  lü terimin yok edilmesiyle

$$I = \frac{16I_n^{(1)} - I_{n-1}^{(1)}}{15} + \tilde{c}_3h^6 + \dots \quad (3.85)$$

elde edilir. Böylece bu ifadede

$$I_n^{(2)} = \frac{16I_n^{(1)} - I_{n-1}^{(1)}}{15} \quad (3.86)$$

yazılabilir. Genelleştirecek olursak

$$I_n^{(k)} = \frac{4^k I_n^{(k-1)} - I_{n-1}^{(k-1)}}{4^k - 1} \quad (3.87)$$

olmak üzere

$$I = I_n^{(k)} + O(h^{2k+2}), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.88)$$

şeklinde hata terimi  $2k + 2$  inci merteye olan çok daha keskin sonuçlar elde etmek mümkündür (Young, 2014).

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & I_0^{(0)} & & & & \\
 & & \searrow & & & & \\
 & & I_1^{(0)} & \longrightarrow & I_1^{(1)} & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \\
 & & I_2^{(0)} & \longrightarrow & I_2^{(1)} & \longrightarrow & I_2^{(2)} \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
 & & I_3^{(0)} & \longrightarrow & I_3^{(1)} & \longrightarrow & I_3^{(2)} & \longrightarrow & I_3^{(3)}
 \end{array} \tag{3.89}$$

### 3.2. Gauss Sayısal İntegrasyon Yöntemi

Aşağıdaki alt başlıkta veri noktalarını polinom fonksiyonu olarak interpolate etme yöntemi olan Hermite interpolasyon yöntemi verilmiştir.

#### 3.2.1. Genel İnterpolasyon Problemi: Hermite İnterpolasyonu

Bazı durumlarda belli  $n + 1$  tane ayrık noktada fonksiyon değerlerinin yanısıra  $m$ . mertebeye kadar türev değerleri de mevcut olabilir.

$$N = m(n + 1) + n \quad \text{ve} \quad f_i^{(k)} = \left. \frac{d^k f}{dx^k} \right|_{x=x_i} \tag{3.90}$$

olmak üzere

$$(x_i, f_i^{(k)}), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad k = 0, 1, \dots, m \tag{3.91}$$

biçimindeki  $N + 1$  tane veriyi ele alalım. Toplamda

$$(m + 1)(n + 1) = m(n + 1) + n + 1 = N + 1 \tag{3.92}$$

tane nokta olduğundan

$$h_N^{(k)}(x_i) = f_i^{(k)}, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad k = 0, 1, \dots, m \tag{3.93}$$

interpolasyon koşullarını sağlayan  $N$ . derece bir  $h_N(x)$  polinomu aramak akla yatkın görünmektedir. Bu genel problem Hermite interpolasyonu olarak bilinir. Şu iki durum dikkate değer:



i)  $m = 0$  ve  $N = n$ . Bu durumda  $h_N(x)$ ,  $f(x_i) = \ell_N(x_i)$   $i = 0, 1, \dots, n$  interpolasyon koşullarını sağlayan bildiğimiz interpolasyon polinomu  $\ell_N(x)$  ile çakışır.

ii)  $n = 0$  ve  $N = m$ . Yani elimizde  $\{(x_0, f_0), (x_0, f'_0), \dots, (x_0, f_0^{(N)})\}$  şeklinde bir veri kümesi var. Bu durumda

$$h_N^{(k)}(x_0) = \sum_{r=k}^N \frac{r!}{(r-k)!} x_0^{r-k} = f_0^{(k)} \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (3.94)$$

koşullarını sağlayan  $h_N(x) = \sum_{r=0}^N a_r x^r$  biçiminde bir polinom bulmalıyız.

Burada  $a_k$  katsayıları

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^N \\ 0 & 1 & 2x_0 & \dots & Nx_0^{N-1} \\ 0 & 0 & 2! & \dots & N(N-1)x_0^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & (N-1)!N!x_0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & N! \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f'_0 \\ \vdots \\ f_0^{(N-1)} \\ f_0^{(N)} \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

üçgensel sisteminin çözümleridir. Katsayı matrisinin köşegen elemanları pozitif olduğundan tekil değildir. Bu durumda sistemin tek bir çözümü vardır. Yani,  $h_N(x)$  polinomu biriciktir.  $f(x)$  fonksiyonunun  $x = x_0$  etrafındaki

$$T_N(x) = \sum_{j=0}^N \frac{f_0^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j = \sum_{j=0}^N \frac{f_0^{(j)}}{j!} (x - x_0)^j \quad (3.96)$$

Taylor polinomunun (3.94) ifadesindeki koşulları sağladığı hatırlanırsa, polinom interpolasyonunun tekliğinden

$$h_N(x) = T_N(x) \quad (3.97)$$

olduğu görülür.

**Teorem 3.4** (Hermite İnterpolasyonun varlığı ve tekliği) Keyfi  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  ayrık noktaları için (3.93) eşitliğindeki interpolasyon koşullarını sağlayan bir ve yalnız bir  $h(x) \in \Pi_N$  polinomu vardır.

**İspat.**  $h_1(x) \in \Pi_N$  ve  $h_2(x) \in \Pi_N$  interpolasyon koşullarını sağlayan iki polinom olsun. Bu durumda  $q(x) = h_1(x) - h_2(x)$  polinomu da en fazla  $N$ . derece bir polinom olur.

$$q^{(k)}(x) \Big|_{x=x_i} = 0 \quad k = 0, 1, \dots, n \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.98)$$

olduğundan her bir  $x_i$  kökü katlılığı en az  $m$  olan birer katlı kök olur. Bundan dolayı  $q(x)$  polinomunun en az  $(m + 1)(n + 1) = N + 1$  tane kökü vardır.  $q(x) \in \Pi_N$  olduğundan bu ancak  $q(x) = 0$  durumunda mümkündür. Dolayısıyla  $h_1(x) = h_2(x)$  bulunur ki bu da tekliği ispatlar.

Varlık kısmı için, Hermite interpolasyonunun

$$h(x) = \sum_{j=0}^N a_j x_j \quad (3.99)$$

şeklinde olduğunu hatırlayalım. Burada  $a_j$  katsayıları (3.93) koşullarına uygun olarak  $(N + 1) \times (N + 1)$  tipinde homojen olmayan bir cebirsel sistemin çözüm vektörüdür. Tekliğin bir sonucu olarak, sistemin katsayı matrisi terslenebilir. Yani teklik varlığı ima eder. Aksi durumda ya çözüm olmazdı, ya da sonsuz sayıda çözüm olurdu.  $\square$

Pratikte Hermite interpolasyon problemi

$$h(x_k) = f(x_k) = f_k, \quad h'(x_k) = f'(x_k) = f'_k := g_k \quad (3.100)$$

koşullarını sağlayan  $h(x)$  polinomunu elde etme problemidir. Yani  $m = 1$  özel durumudur.

**Teorem 3.5** (Burden ve Faires, 2011) (Hermite İnterpolasyonunun formülü)  $x_k$  birbirinden farklı  $n + 1$  nokta olsun. O zaman (3.100) ifadesindeki  $2n + 2$  interpolasyon koşulunu sağlayan  $h(x) \in \Pi_{2n+1}$  polinomu

$$h(x) = \sum_{k=0}^N \left[ f_k A_k(x) + g_k B_k(x) \right] \quad (3.101)$$

şeklinde dir. Burada  $\ell_k(x)$   $n$ . derece Lagrange polinomları olmak üzere  $A_k(x), B_k(x) \in \Pi_{2n+1}$  polinomları

$$A_k(x) = \left[ 1 - 2(x - x_k) \ell'_k(x_k) \right] \ell_k^2(x) \quad (3.102)$$

$$B_k(x) = (x - x_k) \ell_k^2(x) \quad (3.103)$$

şeklinde tanımlanır.

**İspat.** Teorem 3.4'den  $2n + 1$  interpolasyon koşulunu sağlayan bir ve yalnız bir polinomun varlığı kesindir. Bu yüzden (3.101) ile tanımlanan  $h(x)$  polinomunun, (3.100) interpolasyon koşullarını sağladığı gösterilmelidir.

Aslında  $j = 0, 1, \dots, n$  için

$$\begin{aligned}
 h(x_j) &= \sum_{k=0}^n [f_k A_k(x_j) + g_k B_k(x_j)] \\
 &= \sum_{k=0}^n \left\{ f_k [1 - 2(x_j - x_k) \ell'_k(x_k)] \ell_k^2(x_j) + g_k (x_j - x_k) \ell_k^2(x_j) \right\} \\
 &= \sum_{k=0}^n \left\{ f_k [1 - 2(x_j - x_k) \ell'_k(x_k)] \delta_{kj} + g_k (x_j - x_k) \delta_{kj} \right\} \\
 &= f_j
 \end{aligned} \tag{3.104}$$

bulunur. Ayrıca

$$A'_k(x) = 2[1 - 2(x - x_k) \ell'_k(x_k)] \ell'_k(x) \ell_k(x) - 2 \ell'_k(x_k) \ell_k^2(x) \tag{3.105}$$

$$B'_k(x) = \ell_k^2(x) + 2(x - x_k) \ell_k(x) \ell'_k(x) \tag{3.106}$$

ve

$$\ell_k(x_j) = \delta_{kj} \tag{3.107}$$

olduğundan  $j = 0, 1, \dots, n$  için

$$h'(x_j) = \sum_{k=0}^n [f_k A'_k(x_j) + g_k B'_k(x_j)] = [2 \ell'_j(x_j) - 2 \ell'_j(x_j)] f_j + g_j = g_j \tag{3.108}$$

bulunur. □

Öte yandan Hermite interpolasyon polinomunun yapısal ispatı şu şekilde verilebilir; (3.101) interpolasyon polinomunun (3.100) koşullarını sağlanması için

$$\begin{aligned}
 A_k(x_j) &= \delta_{kj}, \quad B_k(x_j) = 0 \\
 A'_k(x_j) &= 0, \quad B'_k(x_j) = \delta_{kj}, \quad k, j = 0, 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{3.109}$$

eşitlikleri sağlanmalıdır.  $\ell_k(x)$  Lagrange polinomunun derecesi  $n$  ve katsayı polinomları  $A_k(x), B_k(x) \in \Pi_{2n+1}$  olduğundan  $r$  ve  $s \in \Pi_1$  olmak üzere

$$A_k(x) = r_k(x) \ell_k^2(x), \quad B_k(x) = s_k(x) \ell_k^2(x) \tag{3.110}$$

şeklinde alınabilir. (3.109) denkleminde

$$\delta_{kj} = A_k(x_j) = r_k(x_j) \ell_k^2(x_j) = r_k(x_j) \delta_{kj} \tag{3.111}$$

yazılabilir. Buradan

$$r_k(x_k) = 1 \tag{3.112}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} 0 &= A'_k(x_j) = r'_k(x_j)[\ell_k(x_j)]^2 + 2r_k(x_j)\ell_k(x_j)\ell'_k(x_j) \\ &= r'_k(x_j)\delta_{kj} + 2r_k(x_j)\ell'_k(x_j)\delta_{kj} \\ 0 &= r'_k(x_k) + 2\ell'_k(x_k) \end{aligned} \quad (3.113)$$

elde edilir.  $r_k(x) = ax + b$  lineer olduğundan (3.112) ve (3.113) eşitliklerinden

$$r_k(x) = [-2\ell'_k(x_k)].x + [1 + 2x_k\ell'_k(x_k)] \quad (3.114)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$A_k(x) = [1 + 2\ell'_k(x_k)(x_k - x)]\ell_k^2(x) \quad (3.115)$$

bulunur. Benzer şekilde yine (3.109) denkleminde

$$0 = B_k(x_j) = s_k(x_j)\ell_k^2(x_j) = s_k(x_j)\delta_{kj} = s_k(x_k) \quad (3.116)$$

ve

$$\begin{aligned} \delta_{kj} &= B'_k(x_j) = s'_k(x_j)\ell_k^2(x_j) + 2s_k(x_j)\ell_k(x_j)\ell'_k(x_j) \\ &= s'_k(x_j)\delta_{kj} + 2s_k(x_j)\ell'_k(x_j)\delta_{kj} \\ 1 &= s'_k(x_k) + 2s_k(x_k)\ell'_k(x_k) \end{aligned} \quad (3.117)$$

yazılabilir. (3.116) ve (3.117) ifadelerinden

$$s_k(x) = x - x_k \quad (3.118)$$

bulunur ki bu da

$$B_k(x) = (x - x_k)\ell_k^2(x) \quad (3.119)$$

olduğunu gösterir.

**Teorem 3.6** (Burden ve Faires, 2011) (Hermite İnterpolasyonunun hatası) (3.101) ile verilen Hermite interpolasyonunun hatası

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k) \quad (3.120)$$

olmak üzere

$$E(x) = f(x) - h(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \omega_{n+1}^2(x) \quad (3.121)$$

şeklinde ifade edilebilir.

**İspat.** Bir  $x \in [a, b]$  noktası alalım. Eğer  $x = x_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  ise (3.121) ifadesinin her iki tarafı sıfır olduğundan ortada ispatlayacak birşey yoktur. Dolayısıyla  $x \neq x_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  olsun ve

$$E(t) = f(t) - h(t) - \frac{\omega^2(t)}{\omega^2(x)}[f(x) - h(x)] \quad (3.122)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyonun  $t = x_1, \dots, x_n$  ve  $t = x$  noktalarında  $n + 2$  tane kökü vardır. Rolle teoremini kullanarak  $E'(t)$  fonksiyonunun  $[a, b]$  kapalı aralığında  $t = x_0, x_1, \dots, x_n$  ve  $t = x$  noktalarından farklı en az  $n + 1$  tane kökü olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca (3.100) interpolasyon koşullarından  $t = x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  noktalarının  $E'(t)$  fonksiyonunun kökleri olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla  $E'(t)$  fonksiyonunun  $[a, b]$  kapalı aralığında en az  $2n + 2$  tane kökü vardır. Genelleştirilmiş Rolle teoreminden  $E^{(2n+2)}(\xi) = 0$  olacak şekilde bir  $\xi \in (a, b)$  olduğunu söyleyebiliriz. (3.122) ifadesinden

$$0 = f^{(2n+2)}(\xi) - \frac{[\omega^2(t)]^{(2n+2)}}{\omega^2(x)}[f(x) - h(x)] \quad (3.123)$$

yazılabilir.  $[(\omega^2(t))^{(2n+2)}] = (2n + 2)!$  olduğu hatırlanıp, son eşitlik  $f(x) - h(x)$  için çözülürse (3.121) elde edilir.  $\square$

### 3.2.2. Gauss Kuadratürü (Gauss Sayısal İntegrasyon Yöntemi)

Verimli ve etkili bir sayısal integrasyon yöntemi olan Gauss kuadratörünün altında yatan fikri açıklamak için önce "doğruluk derecesi"nin tanımı ile başlayalım.

**Tanım 3.7** Eğer kuadratür formülü keyfi bir  $f(x) \in \Pi_N$  için tam (hatası sıfır) sonuç veriyor fakat derecesi  $N + 1$  olan en az bir polinom için tam sonuç vermiyorsa, yöntemin doğruluk derecesi  $N$  dir denir.

Lagrange interpolasyon polinomu

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f_k \ell_k(x) + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \omega(x)}_{E(x)} \quad (3.124)$$

kullanarak sayısal integrasyon formülü

$$I(f) = \int_a^b f(x) \rho(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^n [f_k \ell_k(x) + E(x)] \rho(x) dx = \sum_{k=0}^n c_k f_k + E(f) \quad (3.125)$$

elde etmek mümkündür. Bu formül

$$Q_n(f) = \sum_{k=0}^n c_k f_k \sim I(f), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.126)$$

olmak üzere

$$I(f) = Q_n(f) + E(f) \quad (3.127)$$

şeklinde de yazılabilir ve interpolasyon yardımıyla kuadratur formülü olarak bilinir.

Burada ağırlık katsayıları

$$c_k = \int_a^b \ell_k(x) \rho(x) dx \quad (3.128)$$

ve hata terimi

$$E(f) = \int_a^b E(x) \rho(x) dx = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \omega_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi_x) \rho(x) dx \quad (3.129)$$

şeklindedir.

Hata terimine bakarak  $Q_n(f)$  kuadraturünün doğruluk derecesinin en az  $n$  olduğu görülür. Bu ise  $c_k$  ağırlıklarının hesabı için bir başka yöntem belirtir. İntegral alma işlemi lineer olduğundan  $Q_n(f)$  kuadraturü  $1, x, x^2, \dots, x^n$  polinomlarının integralleri için tam sonuç verir. Bunu kullanarak

$$I(f) = I(x^j) = \sum_{k=0}^n c_k x_k^j := M_j, \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (3.130)$$

biçiminde  $n + 1$  lineer denklem veya matris-vektör formunda

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} \quad (3.131)$$

sistemi elde edilir. Dikkat edilirse, katsayılar matrisi Vandermonde matrisinin devriği olup terslenebilirdir. Bu yüzden sistemi sağlayan tek bir  $c = [c_1 c_2 \dots c_n]^T$  vektörü vardır.

1814 yılında tüm zamanların en büyük matematikçilerinden biri olarak kabul edilen Carl Frederich Gauss (1777-1855) şu problemi ortaya atıp kısmen çözmüştür: (3.125) ifadesindeki  $x_k$  noktaları ve  $c_k$  ağırlıklarını bilinmeyen olarak kabul edelim. Bu durumda toplam  $2n + 2$  bilinmeyen olup, (3.130) ifadesinde  $j = 0, 1, \dots, 2n + 1$  için  $2n + 2$  tane lineer olmayan denklemden oluşan bir sistem elde edilir. Bu durumda acaba bu sistemin tek çözümü var mıdır? sorusu gündeme gelir.

Daha özeldede temel amaç  $f(x) = x^i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2n + 1$  için tam sonuç veren

$$Q_n(f) = \sum_{k=0}^n \lambda_k f(x_k) \quad (3.132)$$

biçiminde  $n + 1$  tane önceden belirlenmemiş nokta kullanan interpolasyona dayalı kuadratür formülü aramaktır. (3.132) denkleminde  $\lambda_k$  ağırlık katsayıları Christoffel sayıları olarak bilinir ve ileride tanımlanacaktır.

Gauss  $\rho(x) = 1$  ve  $x \in [-1, 1]$  özel durumu için bu lineer olmayan sistemin  $\lambda_k$  ve  $x_k$  bilinmeyenleri için tek çözümü olduğunu göstermiştir.

Diğer bir soru ise acaba (3.132) kuadratürü için ulaşılabilecek maksimum doğruluk derecesi  $2n + 1$  değeri midir? Aslında ele alınan bu problem Hermite interpolasyonu ile yakından ilgilidir. Kısaca hatırlamak gerekirse

$$A_k(x) = [1 - 2(x - x_k)\ell'_k(x_k)]\ell_k^2(x) \quad (3.133)$$

$$B_k(x) = (x - x_k)\ell_k^2(x) \quad (3.134)$$

derecesi  $2n + 1$  olan polinomlar olmak üzere

$$f(x) = h(x) + E(x) = \sum_{k=0}^n [f(x_k)A_k(x) + f'(x_k)B_k(x)] + \frac{f^{(2n+1)}(\xi_x)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x) \quad (3.135)$$

eşitliğini sağlayan tek bir  $h(x) \in \Pi_{2n+1}$  polinomu vardır. Buradan ağırlık katsayıları

$$\nu_k = \int_a^b A_k(x)\rho(x)dx, \quad \mu_k = \int_a^b B_k(x)\rho(x)dx \quad (3.136)$$

olmak üzere Hermite kuadratür formülü

$$\int_a^b f(x)\rho(x)dx = \sum_{k=0}^n \nu_k f(x_k) + \sum_{k=0}^n \mu_k f'(x_k) + E(f) \quad (3.137)$$

yazılabilir. Hata fonksiyoneli ise ortalama değer teoreminden

$$E(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \underbrace{\int_a^b \omega_{n+1}^2(x)\rho(x)dx}_{I(\omega_{n+1}^2)} \quad (3.138)$$

formundadır. Burada integrand pozitif olduğundan  $E(f)$  hiç bir zaman sıfır olamaz. Sonuç olarak Hermite kuadratür formülünün doğruluk derecesi tam olarak  $2n + 1$  olur. Aksine  $E(f)$  nin sabit katı olan  $I(\omega_{n+1}^2)$  değeri (3.125) ifadesinden hesaplanırsa  $Q_n(\omega_{n+1}^2) = 0$  bulunur. Yani  $f(x_k) = 0$  olduğundan (3.125) denklemindeki bütün ağırlıklı toplamlar sıfır olur. Fakat pozitif bir fonksiyonun belirli integralinin sıfır olması mümkün değildir.

Dolayısıyla, (3.125) veya (3.132) denklemdeki  $Q_n(f)$  derecesi  $2n + 2$  olan polinomlar için tam sonuç veremez. Bu ise  $n + 1$  nokta kullanan bu kuadratürün doğruluk derecesinin  $2n + 1$  değerini aşamayacağını gösterir.

Yukarıda yapılan irdeleme, (3.136) denklemdeki  $\mu_k$  katsayılarının yok edecek bir yol bulunursa, doğruluk derecesi  $2n + 1$  olarak kalmak üzere Hermite kuadratürünün (3.132) benzeri bir kuadrature dönüşeceğini göstermektedir.  $\mu_k$  katsayılarını

$$\mu_k = \frac{1}{\omega'_{n+1}(x_k)} \int_a^b \omega_{n+1}(x) \ell_k(x) \rho(x) dx \quad (3.139)$$

şeklinde yeniden yazıp,  $\omega_{n+1}(x)$  polinomunu ilgili ortogonal polinom ailesinin sabit bir katı olarak alırsak ( $x_k$  noktalarını ilgili ortogonal polinomun kökleri olarak seçersek) bütün  $\mu_k$  değerlerinin sıfır olduğu görülür. Yani,  $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots\}$  kümesi  $(a, b)$  aralığında  $\rho(x)$  ağırlığına göre ortogonal polinom ailesi olsun. Teorem 1.2'den  $P_{n+1}(x) = a_{n+1} \omega_{n+1}(x)$  elemanının derecesi kendisinden küçük her polinoma dik olduğu biliniyor. Her bir  $\ell_k(x)$  Lagrange polinomunun derecesi  $n$  olduğundan  $x_0, x_1, \dots, x_n$  noktaları  $P_{n+1}(x)$  polinomunun kökleri olarak seçilirse

$$\mu_k = \frac{1}{a_{n+1} \omega_{n+1}(x_k)} \int_a^b P_{n+1}(x) \ell_k(x) \rho(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (3.140)$$

olur. Sonuç olarak (3.137) denklemdeki Hermite kuadratürü (3.132) denklemdeki

$$Q_n(f) = \sum_{k=0}^n \lambda_k f(x_k) \quad (3.141)$$

formuna indirgenir. İşte doğruluk derecesi  $2n + 1$  olan bu yöntem "Gauss Kuadratürü" olarak adlandırılır.

Ayrıca (3.133) denklemi (3.136) denkleminin ilk kısmında yerine yazılması ile

$$\begin{aligned} \nu_k &= \int_a^b \ell_k^2(x) \rho(x) dx - 2\ell'_k(x_k) \underbrace{\int_a^b (x - x_k) \ell_k^2(x) \rho(x) dx}_{\mu_k} \\ &= \int_a^b \ell_k^2(x) \rho(x) dx - 2\ell'_k(x_k) \underbrace{\mu_k}_{=0} \\ &= \int_a^b \ell_k^2(x) \rho(x) dx \end{aligned} \quad (3.142)$$

bulunur. Gauss kuadratürünü (3.126) ve (3.128) formüllerinin özel bir hali olduğundan (3.128) ile verilen  $c_k$  ağırlıkları ile (3.142) ile verilen ağırlıkların aynı olması gerekir. Yani

$$\nu_k = \int_a^b \ell_k^2(x) \rho(x) dx = c_k = \int_a^b \ell_k(x) \rho(x) dx := w_k \quad (3.143)$$



olmalıdır. Aslında (3.126) ve (3.137) formülleri derecesi  $n$  olan polinomlar için tam sonuç verdiğiinden  $f(x) = \ell_j(x)$  alınırsa

$$\int_a^b \ell_j(x) \rho(x) dx = \sum_{k=0}^n c_k \ell_j(x_k) = c_j = \sum_{k=0}^n \nu_k \ell_j(x_k) = \nu_j \quad (3.144)$$

olur ve buradan  $c_j = \nu_j$  bulunur ki bu (3.143) eşitliğini doğrular. Ayrıca (3.142) denkleminde Christoffel sayılarının pozitif olduğu görülür. Bu sayıların açık temsili (3.143) ifadesinde Lagrange polinomları

$$\ell_k(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(x - x_k) P'_{n+1}(x_k)}, \quad P_{n+1}(x) = a_{n+1} \omega_{n+1}(x) \quad (3.145)$$

formunda yerine yazılarak bulunabilir. Bunun sonucunda

$$w_k = \frac{1}{P'_{n+1}(x_k)} \int_a^b \frac{P_{n+1}(x)}{(x - x_k)} \rho(x) dx \quad (3.146)$$

ifadesi elde edilir. Öte yandan Darboux-Christoffel formülü olarak bilinen Teorem 1.6'da  $y = x_k$  alınıp  $P_{n+1}(x_k) = 0$  olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\sum_{j=0}^n \frac{1}{h_j^2} P_j(x) P_j(x_k) = \frac{1}{h_n^2} \frac{a_n}{a_{n+1}} P_n(x_k) \frac{P_{n+1}(x)}{x - x_k} \quad (3.147)$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının  $P_0(x) \rho(x) = a_0 \rho(x)$  ile çarpılıp  $a$  dan  $b$  ye integralinin alınmasıyla

$$\int_a^b \frac{P_{n+1}(x)}{x - x_k} \rho(x) dx = \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{h_n^2}{P_n(x_k)} \quad (3.148)$$

eşitliği bulunur. Burada  $P_0(x) = a_0$  polinomunun  $k = 1, 2, \dots, N$  için  $P_k(x)$  polinomlarına dik olduğu gerçeği kullanılmıştır. Şimdi (3.148) ifadesinin (3.146) eşitliğinde yerine yazılmasıyla

$$w_k = \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{h_n^2}{P'_{n+1}(x_k) P_n(x_k)} \quad (3.149)$$

Christoffel sayılarının açık gösterimi bulunur. Öte yandan Teorem 1.9 ile verilen türevli yineleme bağıntısında  $n = N + 1$  ve  $x = x_k$  alınırsa  $C_n = \frac{\lambda_n}{n}$  olduğundan

$$P'_{N+1}(x_k) = \frac{a_N}{a_{N+1}} \frac{h_{N+1}^2}{h_N^2} \frac{\lambda_{2N+2}}{(2N+2)} \frac{1}{\sigma(x_k)} P_N(x_k) \quad (3.150)$$

bulunur. Son eşitlik (3.149) denkleminde yerine yazılırsa

$$w_k = \frac{a_{N+1}^2}{a_N^2} \frac{h_N^4}{h_{N+1}^2} \frac{(2N+2)}{\lambda_{2N+2}} \frac{\sigma(x_k)}{P_N^2(x_k)} \quad (3.151)$$

Christoffel sayıları için bir başka temsil elde edilir. Öte yandan  $\phi_N(x) = \frac{P_N(x)}{h_N}$  olduğundan  $w_k$  Christoffel sayılarını

$$w_k = \frac{a_{N+1}^2}{a_N^2} \frac{h_N^2}{h_{N+1}^2} \frac{(2N+2)}{\lambda_{2N+2}} \frac{\sigma(x_k)}{\phi_N^2(x_k)} \quad (3.152)$$

şeklinde yeniden ifade etmemiz mümkündür. Çizelge 3.4.'de klasik ortogonal polinomlar için bu katsayılar, baş katsayı ve  $L_2$  normunun karesi verilmiştir.

Ayrıca klasik ortogonal polinomların Teorem 1.4'den bir üç terimli yineleme bağıntısı sağladığını biliyoruz.  $P_k(x) = a_k x^k + b_k x^{k-1} + \dots$  olmak üzere burada gerekli olan  $b_k$  alt başkatsayısı

$$\frac{b_k}{a_k} = k \frac{(k-1)\sigma'(0) + \tau(0)}{(k-1)\sigma'' + \tau'} \quad (3.153)$$

formülüyle hesaplanabilir. Ayrıca bu bağıntıyı kullanabilmek için ihtiyaç duyulan  $P_0(x)$  ve  $P_1(x)$  polinomları

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = \frac{1}{\alpha_0}(x - \beta_0) \quad (3.154)$$

şeklindedir (Aytar, 2017).

**Örnek 3.8** Üç noktalı Gauss-Legendre kuadraturünü elde ediniz.

Teorem 1.4'deki (1.22)-(1.23) ile (3.153)-(3.154) eşitlikleri ve Çizelge 3.4.'den yararlanarak

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \quad (3.155)$$

bulunur.  $P_3(x)$  Legendre polinomunun köklerini  $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ ,  $x_1 = 0$  ve  $x_2 = +\sqrt{\frac{3}{5}}$  olarak bulabiliriz. Christoffel sayıları ise (3.151) eşitliğini ve Çizelge 3.4.'ü kullanarak  $w_0 = \frac{5}{9}$ ,  $w_1 = \frac{8}{9}$  ve  $w_2 = \frac{5}{9}$  olarak bulunur. Dolayısıyla

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{k=0}^2 w_k f(x_k) = \frac{1}{9} \left[ 5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right] \quad (3.156)$$

kuadraturü elde edilir.

**Örnek 3.9** İki noktalı Hermite-Gauss kuadraturünü elde ediniz.

Benzer şekilde yine Teorem 1.4'deki (1.22)-(1.23) ile (3.153)-(3.154) eşitlikleri ve Çizelge 3.4.'den yararlanarak  $H_0(x) = 1$ ,  $H_1(x) = 2x$ ,  $H_2(x) = 4x^2 - 2$  bulunur.

Çizelge 3.4. Klasik ortogonal polinomlar için temel bilgiler (Nikiforov ve Uvarov, 1988).

	$\rho(x)$	$\sigma(x)$	$\tau(x)$	$\lambda_k$	$a_k$	$h_k^2$
<b>Hermite</b> $x \in (-\infty, \infty)$	$e^{-x^2}$	1	$-2x$	$2k$	$2^k$	$2^k k! \sqrt{\pi}$
<b>Laguerre</b> $x \in (0, \infty)$	$x^\gamma e^{-x}$	$x$	$\gamma + 1 - x$	$k$	$\frac{(-1)^k}{k!}$	$\frac{\Gamma(k + \gamma + 1)}{k!}$
<b>Jacobi</b> $x \in (-1, 1)$	$(1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$	$1 - x^2$	$\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x$	$k(k + \alpha + \beta + 1)$	$\frac{1}{2^k k!} \frac{\Gamma(2k + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(k + \alpha + \beta + 1)}$	$\frac{2^{\alpha + \beta + 1} \Gamma(k + \alpha + 1) \Gamma(k + \beta + 1)}{k! (2k + \alpha + \beta + 1) \Gamma(k + \alpha + \beta + 1)}$
<b>Legendre</b> $x \in (-1, 1)$	1	$1 - x^2$	$-2x$	$k(k + 1)$	$\frac{(2k)!}{2^k (k!)^2}$	$\frac{2}{2k + 1}$
<b>Chebyshev</b> $x \in (-1, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$1 - x^2$	$-x$	$k^2$	$2^k$	$k = 0 \Rightarrow \pi$ $k \neq 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2}$

Dolayısıyla  $x_k$  noktaları  $H_2(x)$  polinomunun kökleri olan  $x_0 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$  ve  $x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$  noktalarıdır. Ağırlık katsayıları ise (3.151) ifadesinden  $w_0 = w_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  bulunur. Sonuç olarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2} dx \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[ f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \right] \quad (3.157)$$

kuadratürü elde edilir.

Öte yandan (3.138) ifadesinden

$$\begin{aligned} E_n(f) &= \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b \omega_{n+1}^2(x) \rho(x) dx \\ &= \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)! a_{n+1}^2} \int_a^b P_{n+1}^2(x) \rho(x) dx \\ E_n(f) &= \frac{f^{(2n+2)}(\xi) h_{n+1}^2}{(2n+2)! a_{n+1}^2} \end{aligned} \quad (3.158)$$

bulunur. Dolayısı ile Gauss-Legendre kuadratürünün hatası  $\xi \in (-1, 1)$  olmak üzere

$$E_n(f) = \frac{2^{2n+3} [(n+1)!]^4 f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+3) [(2n+2)!]^3} \quad (3.159)$$

şeklindedir. Buradan Örnek 3.8 için hata terimi

$$E_2(f) = \frac{2^7 (3!)^4 f^{(6)}(\xi)}{7(6!)^3} = \frac{f^{(6)}(\xi)}{15750} \quad (3.160)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde Hermite-Gauss kuadratürü için hata terimi bir  $\xi \in \mathbb{R}$  için

$$G_n(f) = \frac{2^{n+1} (n+1)! \sqrt{\pi}}{(2n+2)! 2^{2n+2}} f^{(2n+2)}(\xi) = \frac{(n+1)! \sqrt{\pi}}{(2n+2)! 2^{n+1}} f^{(2n+2)}(\xi) \quad (3.161)$$

biçimindedir. Dolayısıyla Örnek 3.9'daki iki noktalı Gauss-Hermite kuadratürünün hatası

$$E_1(f) = \frac{2! \sqrt{\pi}}{4! 2^2} f^{(4)}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{48} f^{(4)}(\xi) \quad (3.162)$$

ile verilir. Sonuç olarak (3.156), (3.157), (3.160) ve (3.162) ifadelerinden

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{9} \left[ 5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \right] + \frac{f^{(6)}(\xi)}{15750} \quad (3.163)$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[ f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \right] + \frac{\sqrt{\pi}}{48} f^{(4)}(\xi) \quad (3.164)$$

yazılabilir.

### 3.2.3. İntegrasyon Noktalarının ve Ağırlık Katsayılarının Nümerik Hesabı

Bu bölümde bilgisayar programında kullanılmak üzere klasik ortogonal polinomların kökleri ve ağırlık katsayılarının nasıl hesaplanacağı üzerinde durulmuştur. İlk olarak Gauss kuadraturündeki integrasyon noktalarının hesabıyla başlayalım.

Sonuç 1.5'den ortonormal polinomların sağladığı üç terimli yineleme bağıntısının  $n = 0, 1, \dots, N$  için yazılmasıyla,  $s(x) = -A_N\phi_{N+1}(x)$  olmak üzere

$$\begin{bmatrix} B_0 - x & A_0 & 0 & \dots & 0 \\ A_0 & B_1 - x & A_1 & \dots & \vdots \\ 0 & A_1 & B_2 - x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & A_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & A_{n-1} & B_n - x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0(x) \\ \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_{N-1}(x) \\ \phi_N(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ s(x) \end{bmatrix} \quad (3.165)$$

şeklinde homojen olmayan  $(R - xI)t = b$  lineer denklem sistemi elde edilir. Eğer  $x$  yerine  $\phi_{N+1}$  polinomunun kökleri olan  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  değerleri alınırsa denklem sistemi  $Rt = xt$  standart matris özdeğer problemine dönüşür. Yani  $\phi_{N+1}(x)$  dolayısıyla  $P_{N+1}(x)$  polinomunun  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  kökleri

$$R = \begin{bmatrix} B_0 & A_0 & 0 & \dots & 0 \\ A_0 & B_1 & A_1 & \dots & \vdots \\ 0 & A_1 & B_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & A_{N-1} \\ 0 & \dots & \dots & A_{N-1} & B_n \end{bmatrix} \quad (3.166)$$

simetrik üç köşegenli matrisin özdeğerleri olur. Bu yöntem Golub-Welsch algoritması olarak bilinir (Golub ve Welsch, 1969). R matrisinin bilgisayar tarafından hesaplanan  $k$ . öz vektörü  $v^k = [v_0^k, v_1^k, \dots, v_{N-1}^k, v_N^k]^T$  olup  $t^k = [\phi_0(x_k), \phi_1(x_k), \dots, \phi_{N-1}(x_k), \phi_N(x_k)]^T$  vektörünün bir katıdır. Yani  $v^k = a.t^k$  yazılabilir.  $\phi_0(x_k) = \frac{1}{h_0}$  sabit olduğundan buradaki  $a$  değeri bu iki vektörün ilk elemanlarının karşılaştırılmasıyla  $a = h_0 v_0^k$  olarak bulunur. Yani

$$\begin{bmatrix} \phi_0(x_k) \\ \phi_1(x_k) \\ \vdots \\ \phi_{N-1}(x_k) \\ \phi_N(x_k) \end{bmatrix} = \frac{1}{h_0 v_0^k} \begin{bmatrix} v_0^k \\ v_1^k \\ \vdots \\ v_{N-1}^k \\ v_N^k \end{bmatrix} \quad (3.167)$$

olur.

Çizelge 3.5. Klasik ortogonal polinomlar için  $A_n$  ve  $B_n$  katsayıları (Alıcı, 2010).

	$A_n$	$B_n$
Hermite $x \in (-\infty, \infty)$	$\sqrt{\frac{n+1}{2}}$	0
Laguerre $x \in (0, \infty)$	$-\sqrt{(n+1)(n+\gamma+1)}$	$2n + \gamma + 1$
Jacobi $x \in (-1, 1)$	$\frac{2}{2n+\alpha+\beta+2} \sqrt{\frac{(n+1)(n+\alpha+1)(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+3)}}$	$\frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}$

Şimdi de  $w_k$  ağırlıklarının (Christoffel sayılarının) hesabı için bir yöntem verelim.

$\phi_n(x) = \frac{P_n(x)}{h_n}$  olduğundan (3.147) ifadesi

$$\sum_{j=0}^N \phi_j(x) \phi_j(x_k) = \frac{h_{N+1}}{h_N} \frac{a_N}{a_{N+1}} \phi_N(x_k) \frac{\phi_{N+1}(x)}{x - x_k} \quad (3.168)$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. (3.168) ifadesi  $x \rightarrow x_k$  iken limit durumunda

$$\sum_{j=0}^N \phi_j^2(x_k) = \frac{a_N}{a_{N+1}} \frac{h_{N+1}}{h_N} \phi_N(x_k) \phi'_{N+1}(x_k) \quad (3.169)$$

elde edilir.  $\phi'_{N+1}(x_k) = P'_{N+1}(x_k)/h_{N+1}$  olduğundan bu denklem (3.150) ifadesinden yararlanarak

$$\sum_{j=0}^N \phi_j^2(x_k) = \frac{a_N^2}{a_{N+1}^2} \frac{h_{N+1}^2}{h_N^2} \frac{\lambda_{2N+2}}{2N+2} \frac{\phi_N^2(x_k)}{\sigma(x_k)} = \frac{1}{w_k} \quad (3.170)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada (3.167) ifadesinden

$$\frac{1}{w_k} = \sum_{j=0}^N \phi_j^2(x_k) = \frac{1}{(h_0 v_0^k)^2} \sum_{j=0}^N (v_j^k)^2 \quad (3.171)$$

denklemini bulunur ki

$$\sum_{j=0}^N (v_j^k)^2 = \|v^k\|^2 = 1, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (3.172)$$

olduğundan  $w_k$  ağırlıkları

$$w_k = (h_0 v_0^k)^2 \quad (3.173)$$

olarak elde edilir.

## 4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde klasik ortogonal polinomlar üzerine kurulan Gauss kuadratürü yardımıyla bazı fonksiyonların integralleri hesaplanacaktır. Bu hesaplamalar GNU Octave programında yapılmış, elde edilen sonuçlar var olan sonuçlarla karşılaştırılmış ve bu sayede yöntemin verimliliği değerlendirilmiştir. Gauss kuadratüründe kullanılan klasik ortogonal polinomların kökleri ve ağırlık katsayıları Golub-Welsch algoritmasıyla hesaplanmış ve integralleri hesaplamak için gerekli bilgisayar programı EKLER bölümünde verilmiştir.

**Örnek 4.1**  $x \in (-\infty, \infty)$  olmak üzere bazı  $f(x)$  fonksiyonlarının

$$I(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2} dx \quad (4.1)$$

şeklinde gösterilen integrallerini hesaplayalım.

Çizelge 4.1.  $x \in (-\infty, \infty)$  olmak üzere bazı  $f(x)$  fonksiyonları için  $I(f(x))$  değerleri

$I(x^2)$ ( $N = 2 - 5$ )	$I(\cos x)$ ( $N = 6 - 12$ )	$I(e^x)$ ( $N = 6 - 12$ )
0.886226925452758	1.380388410050733	2.275875747617357
0.886226925452759	1.380388447754078	2.275875793567224
0.886226925452758	1.380388447031299	2.275875794453714
0.886226925452758	1.380388447043317	2.275875794468527
	1.380388447043141	2.275875794468744
	1.380388447043143	2.275875794468746
	1.380388447043143	2.275875794468747

Çizelge 4.1., oldukça küçük  $N$  değerleri için bazı  $f(x)$  fonksiyonlarının  $(-\infty, \infty)$  aralığındaki integrallerini göstermektedir. Burada verilen fonksiyonların  $\rho(x) = e^{-x^2}$  ağırlığı altında integralleri Hermite-Gauss kuadratürü ile hesaplanmıştır. İlk sütuna dikkat edilecek olursa,  $f(x) = x^2$  fonksiyonu ikinci derece polinom olduğundan  $N \geq 2$  değerleri için Hermite-Gauss kuadratürünün kesin sonuç vereceği açıktır. Çünkü  $N$  nokta kullanan Gauss kuadratürünün derecesi  $\leq 2N - 1$  olan polinomlar için tam sonuç verdiği bilinmektedir. Öte yandan  $f(x) = x^2$  fonksiyonunun  $(-\infty, \infty)$  aralığında  $\rho(x) = e^{-x^2}$  ağırlığı altındaki integrali kolayca hesaplanabilir. Bu hesabı yapacak olursak

$$I(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \Gamma(3/2) = 0.886226925452758 \quad (4.2)$$

bulunur. Tabloya baktığımızda, Hermite-Gauss kuadratürüyle bu integral 14–15 basamak doğrulukla hesaplamıştır. Dolayısıyla bu ve diğer fonksiyonların integral hesabı için Hermite-Gauss kuadratürünün doğruluğunun oldukça yüksek olduğu söylenebilir.

**Örnek 4.2**  $x \in (0, \infty)$  olmak üzere bazı  $f(x)$  fonksiyonlarının

$$I(f(x)) = \int_0^{\infty} f(x)x^2e^{-x}dx \quad (4.3)$$

şeklinde gösterilen integrallerini hesaplayalım.

Çizelge 4.2.  $x \in (0, \infty)$  olmak üzere bazı  $f(x)$  fonksiyonları için  $I(f(x))$  değerleri

$I(x^3)$ ( $N = 2 - 6$ )	$I(\cos x + x^2)$ ( $N = 17 - 23$ )	$I(\sin 2x)$ ( $N = 61 - 67$ )
120	23.50000000155593	-3.200000000000110e - 02
119.99999999999999	23.49999999955197	-3.200000000000380e - 02
120.00000000000001	23.5000000004137	-3.19999999999995e - 02
119.99999999999999	23.5000000001170	-3.200000000000233e - 02
120	23.4999999999473	-3.20000000000019e - 02
	23.50000000000083	-3.19999999999782e - 02
	23.50000000000003	-3.20000000000003e - 02

Çizelge 4.2.'de (4.3) tipindeki bazı integrallerin Laguerre-Gauss kuadratürü ile elde edilen yaklaşık sonuçları verilmiştir. Ağırlık fonksiyonu  $\rho(x) = x^2e^{-x}$  olduğundan, mertebesi  $\gamma = 2$  olan Laguerre polinomları kullanılmıştır. Öte yandan  $f(x) = x^3$  fonksiyonunun  $(0, \infty)$  aralığında  $\rho(x) = x^2e^{-x}$  ağırlığı altındaki integrali rahatlıkla hesaplanabilir. Bu hesabı yapacak olursak

$$I(x^3) = \int_0^{\infty} x^5e^{-x}dx = \Gamma(6) = 5! = 120 \quad (4.4)$$

bulunur. Tabloya baktığımızda, Laguerre-Gauss kuadratürüyle bu integral tam doğrulukla hesaplanmıştır. Dolayısıyla bu ve diğer fonksiyonların integral hesabı için Laguerre-Gauss kuadratürünün doğruluğunun oldukça yüksek olduğu söylenebilir.

**Örnek 4.3**  $x \in (-1, 1)$  olmak üzere bazı  $f(x)$  fonksiyonlarının

$$I(f(x)) = \int_{-1}^1 f(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (4.5)$$

biçimindeki integrallerini hesaplayalım.



Çizelge 4.3.  $x \in (-1, 1)$  olmak üzere bazı  $f(x)$  fonksiyonları için  $I(f(x))$  değerleri

$I(x^6)$ ( $N = 5 - 8$ )	$I(e^x)$ ( $N = 9 - 12$ )	$I(\cos x)$ ( $N = 13 - 16$ )
0.981747704246810	3.977463260506419	2.403939430634412
0.981747704246811	3.977463260506416	2.403939430634412
0.981747704246809	3.977463260506422	2.403939430634415
0.981747704246810	3.977463260506424	2.403939430634412

Çizelge 4.3.'de (4.5) tipindeki bazı integrallerin Chebysev-Gauss kuadraturü ile elde edilen değerleri verilmiştir. Ağırlık fonksiyonu  $\rho(x) = (1-x)^{-1/2}(1+x)^{-1/2}$  olduğundan, mertebesi  $(\alpha, \beta) = (-1/2, -1/2)$  olan Jacobi polinomları (veya 1. tip Chebysev polinomları) kullanılmıştır. Öte yandan  $f(x) = x^6$  için (4.5) integrali rahatlıkla hesaplanabilir. Bu hesabı yapacak olursak

$$I(x^6) = \int_{-1}^1 x^6 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{5\pi}{16} = 0.981747704246810 \quad (4.6)$$

bulunur. Tabloya baktığımızda, Chebysev-Gauss kuadraturüyle bu integral 14 – 15 basamak doğrulukla hesaplanmıştır. Dolayısıyla bu ve diğer fonksiyonların integral hesabı için Chebyshev-Gauss kuadraturünün doğruluğunun oldukça yüksek olduğu söylenebilir.

**Örnek 4.4** *Bessel fonksiyonunun Poisson integral gösterimi,  $Re(\nu) > -1/2$  olmak üzere*

$$J_\nu(z) = \frac{(\frac{1}{2}z)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(zt) dt \quad (4.7)$$

şeklinde tanımlanır (Abramowitz and Stegun, 1964). Gauss kuadraturü yardımıyla bu fonksiyonun bazı noktalardaki değerlerini hesaplayalım.

(4.7) denkleminin hesabı için Jacobi-Gauss kuadraturü kullanılabilir. Dolayısıyla bu denklem

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \frac{(\frac{1}{2}z)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(zt) dt \\ &= \frac{(\frac{1}{2}z)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \sum_{k=0}^N f(t_k) w_k \end{aligned} \quad (4.8)$$

şeklinde düzenlenebilir. Burada  $f(t_k)$  fonksiyonu

$$f(t_k) = \cos(zt_k) \quad (4.9)$$

şeklinde ve  $t_k$  noktaları mertebesi  $(\alpha, \beta) = (\nu-1/2, \nu-1/2)$  olan Jacobi polinomunun kökleridir. Ağırlık katsayıları  $w_k$  değerleri ise (3.173) ifadesinden hesaplanabilir.

Çizelge 4.4.'de bu fonksiyonun  $\nu = 4$  için bazı  $z \in [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  noktalarındaki  $J_4(z)$  değerleri GNU Octave programı ile hesaplanmış ve sonuçlar MATHEMATICA programından alınan verilerle karşılaştırılmıştır. Oldukça düşük  $N = 13 - 14$  değerleri için 14 - 15 basamak doğruluk elde edilmiştir. Burada Gauss kuadraturünde, mertebesi  $(\alpha, \beta) = (\nu - 1/2, \nu - 1/2)$  olan Jacobi polinomları kullanılmıştır. Açıkça görülmektedir ki Jacobi-Gauss kuadratürü (4.7) tipindeki integraller için yüksek doğrulukta sonuçlar vermektedir.

Çizelge 4.4.  $\nu = 4$  için bazı  $z \in [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  noktalarındaki  $J_4(z)$  değerleri

$z$	$N = 13$	$N = 14$	MATHEMATICA verileri
0	0	0	0
0.1	2.602864854568405e - 07	2.602864854568405e - 07	2.602864854568403e - 07
0.2	4.158340274471934e - 06	4.158340274471935e - 06	4.158340274471932e - 06
0.3	2.099900591295839e - 05	2.099900591295839e - 05	2.099900591295837e - 05
0.4	6.613510772909681e - 05	6.613510772909682e - 05	6.613510772909676e - 05
0.5	1.607364763642876e - 04	1.607364763642876e - 04	1.607364763642875e - 04
0.6	3.314703677802371e - 04	3.314703677802372e - 04	3.314703677802369e - 04
0.7	6.100970079583514e - 04	6.100970079583514e - 04	6.100970079583510e - 04
0.8	1.032984994207303e - 03	1.032984994207303e - 03	1.032984994207302e - 03
0.9	1.640552230973337e - 03	1.640552230973337e - 03	1.640552230973336e - 03
1	2.476638964109955e - 03	2.476638964109956e - 03	2.476638964109955e - 03

Öte yandan, Şekil 4.1.'de  $N = 40$  ve  $\mu = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  değerleri için bazı  $z \in [0, 10] \subseteq \mathbb{R}$  noktalarında  $J_\nu(z)$  fonksiyonlarının grafiği verilmiştir. Bu grafik, (4.7) integrallerinin  $[0, 10] \subseteq \mathbb{R}$  aralığında 0.1 adımlarla hesaplanmasıyla elde edilen nümerik integral değerleri ile çizdirilmiştir.

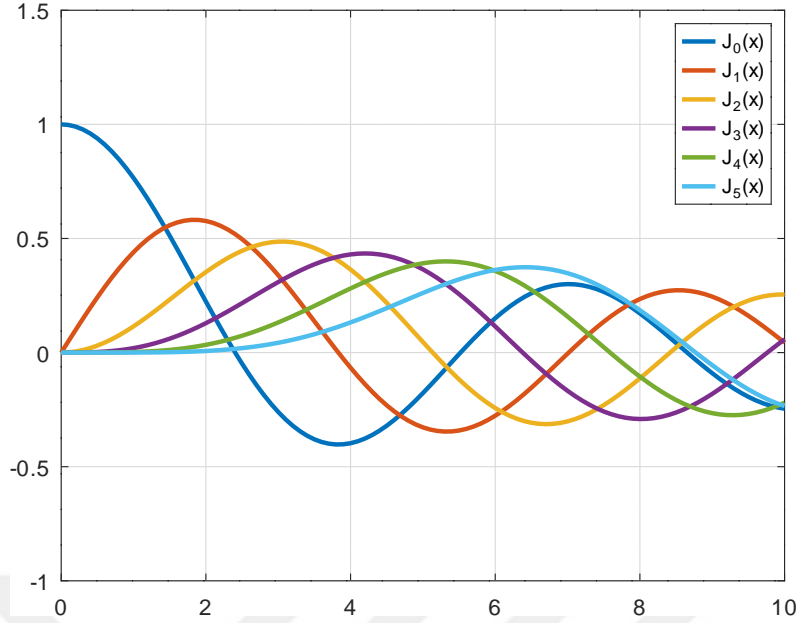
**Örnek 4.5** *Parabolik silindir fonksiyonunun integral gösterimi,  $Re(a) > -1/2$  olmak üzere*

$$U(a, z) = \frac{e^{-\frac{1}{4}z^2}}{\Gamma(\frac{1}{2} + a)} \int_0^\infty t^{a-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}t^2 - zt} dt \quad (4.10)$$

*şeklindedir (Abramowitz and Stegun, 1964). Gauss kuadratürü yardımıyla bu fonksiyonun bazı noktalardaki değerlerini hesaplayalım.*

(4.10) integralinin hesabı için Laguerre-Gauss kuadratürü kullanılabilir. Dolayısıyla bu denklem

$$\begin{aligned} U(a, z) &= \frac{e^{-\frac{1}{4}z^2}}{\Gamma(\frac{1}{2} + a)} \int_0^\infty t^{a-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}t^2 - zt} dt \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{4}z^2}}{\Gamma(\frac{1}{2} + a)} \sum_{k=0}^N f(t_k) w_k \end{aligned} \quad (4.11)$$



Şekil 4.1.  $N = 40$  olmak üzere  $\nu = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  ve bazı  $z \in [0, 10] \subseteq \mathbb{R}$  için  $J_\nu(z)$  fonksiyonlarının grafiği

şeklinde düzenlenebilir. Burada  $f(t_k)$  fonksiyonu

$$f(t_k) = e^{-\frac{t_k^2}{2} + (1-z)t_k} \quad (4.12)$$

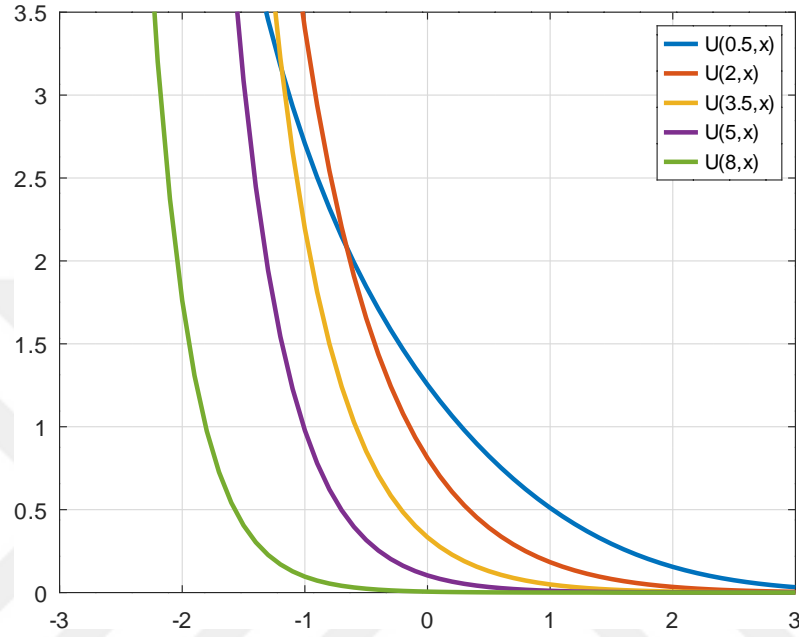
şeklinde ve  $t_k$  noktaları mertebesi  $\gamma = a - 1/2$  olan Laguerre polinomunun kökleridir. Ağırlık katsayıları  $w_k$  değerleri ise (3.173) ifadesinden hesaplanabilir.

Çizelge 4.5.'de bu fonksiyonun  $a = 2$  için bazı  $z \in [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  noktalarındaki değerleri, Laguerre-Gauss kuadratürüyle hesaplanmıştır ve sonuçlar MATHEMATICA programından alınan verilerle karşılaştırılmıştır. Burada Gauss kuadratüründe, mertebesi  $\gamma = a - 1/2$  olan Laguerre polinomları kullanılmıştır.

Çizelge 4.5.  $a = 2$  için bazı  $z \in [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  noktalarındaki  $U(2, z)$  değerleri

$z$	$N = 90$	$N = 91$	MATHEMATICA verileri
0	0.810853476171679	0.810853476171679	0.810853476171680
0.1	0.702315455654097	0.702315455654096	0.702315455654096
0.2	0.607866882210139	0.607866882210138	0.607866882210138
0.3	0.525657986568045	0.525657986568044	0.525657986568044
0.4	0.454098735061240	0.454098735061240	0.454098735061239
0.5	0.391818529769774	0.391818529769774	0.391818529769773
0.6	0.337632697857989	0.337632697857989	0.337632697857989
0.7	0.290514572096641	0.290514572096641	0.290514572096641
0.8	0.249572183345391	0.249572183345391	0.249572183345391
0.9	0.214028762712587	0.214028762712587	0.214028762712586
1	0.183206394638938	0.183206394638938	0.183206394638937

Tabloda görüldüğü gibi  $N = 90 - 91$  nokta kullanarak yine 14 - 15 basamak doğruluk elde edilmiştir. Dolayısıyla bu fonksiyonun değerlerinin hesaplanmasında da Gauss kuadraturünün verimi oldukça yüksektir. Aşağıda  $N = 90$  ve  $a = 0.5, 2, 3.5, 5, 8$  değerleri için  $[-3, 3] \subseteq \mathbb{R}$  aralığındaki  $z$  noktaları 0.1 artacak şekilde çizilen  $U(a, z)$  fonksiyonlarının grafiği verilmiştir.



Şekil 4.2.  $N = 90$  olmak üzere  $a = 0.5, 2, 3.5, 5, 8$  ve bazı  $z \in [-3, 3] \subseteq \mathbb{R}$  için  $U(a, z)$  fonksiyonlarının grafiği

**Örnek 4.6** İkinci tip Legendre fonksiyonu  $Q_\nu^\mu(z)$  ile Olver'in Legendre fonksiyonu  $Q_\nu^\mu(z)$  arasında

$$Q_\nu^\mu(z) = e^{\mu \cdot \pi \cdot i} \Gamma(\nu + \mu + 1) Q_\nu^\mu(z) \quad (4.13)$$

şeklinde bir ilişki vardır (Olver, 1974). Olver'in Legendre fonksiyonunun integral gösterimi,  $\nu = n$  ve  $\mu = m$  negatif olmayan tamsayılar olmak üzere  $x \in (1, \infty)$  için

$$Q_n^m(x) = \frac{(x^2 - 1)^{\frac{m}{2}}}{2^{n+1} n!} \int_{-1}^1 \frac{(1 - t^2)^n}{(x - t)^{n+m+1}} dt \quad (4.14)$$

şeklinde tanımlanır (Dunster, 2010-2021 NIST). Gauss kuadratürü yardımıyla bu fonksiyonun bazı noktalardaki değerlerini hesaplayalım.

(4.14) ifadesi  $n = 0$  için

$$Q_0^m(x) = \frac{(x^2 - 1)^{\frac{m}{2}}}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{(x - t)^{m+1}} dt \quad (4.15)$$

şeklindedir. Bu integrali hesaplayacak olursak

$$\mathbf{Q}_0^m(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|, & m = 0 \\ \frac{(x^2-1)^{\frac{m}{2}}}{2^m} [(x-1)^{-m} - (x+1)^{-m}], & m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4.16)$$

eşitliğini elde ederiz.

Öte yandan (4.14) integralinin hesabı için Jacobi-Gauss kuadratürü kullanılabilir. Dolayısıyla bu denklem

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_n^m(x) &= \frac{(x^2-1)^{\frac{m}{2}}}{2^{n+1}n!} \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^n}{(x-t)^{n+m+1}} dt \\ &= \frac{(x^2-1)^{\frac{m}{2}}}{2^{n+1}n!} \sum_{k=0}^N f(t_k) w_k \end{aligned} \quad (4.17)$$

şeklinde düzenlenebilir. Burada  $f(t_k)$  fonksiyonu

$$f(t_k) = \frac{1}{(x-t_k)^{n+m+1}} \quad (4.18)$$

şeklindedir ve  $t_k$  noktaları mertebesi  $(\alpha, \beta) = (n, n)$  olan Jacobi polinomunun kökleridir. Ağırlık katsayıları  $w_k$  değerleri ise (3.173) ifadesinden hesaplanabilir.

$\mathbf{Q}_n^m(x)$  fonksiyonunun  $n = 0$  ve  $m = 0$  için bazı  $x \in (1, 2)$  noktalarındaki değerleri Jacobi-Gauss kuadratürüyle hesaplanmış ve sonuçlar Çizelge 4.6.'da gösterilmiştir. Burada doğal olarak mertebesi  $(\alpha, \beta) = (n, n)$  olan Jacobi polinomları kullanılmıştır. Çıkan sonuçlar, bu integralin gerçek değeri olan (4.16) ifadesinden alınan sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.6.  $n = 0$  ve  $m = 0$  için bazı  $x \in (1, 2)$  noktalarındaki  $\mathbf{Q}_0^0(x)$  değerleri

$x$	$N = 110$	$N = 120$	Gerçek Değeri
1.01	2.651652454029446	2.651652454029536	2.651652454029537
1.11	1.476981430338848	1.476981430338849	1.476981430338848
1.21	1.176820131897166	1.176820131897167	1.176820131897165
1.31	1.004215253018324	1.004215253018325	1.004215253018324
1.41	0.885612433393174	0.885612433393174	0.885612433393173
1.51	0.796813653203730	0.796813653203730	0.796813653203729
1.61	0.726823271574691	0.726823271574691	0.726823271574691
1.71	0.669719471919193	0.669719471919193	0.669719471919193
1.81	0.621952757330654	0.621952757330654	0.621952757330653
1.91	0.581231880327321	0.581231880327322	0.581231880327321

Benzer şekilde  $\mathbf{Q}_n^m(x)$  fonksiyonunun  $n = 0$  ve  $m = 1$  için bazı  $x \in (1, 2)$  noktalarındaki değerlerini rahatlıkla hesaplayabiliriz.  $\mathbf{Q}_0^1(x)$  değerleri Çizelge 4.7.'de

gösterilmiştir. Yine burada  $Q_0^1(x)$  değerleri Jacobi-Gauss kuadratürüyle hesaplanmıştır ve mertebesi  $(\alpha, \beta) = (n, n)$  olan Jacobi polinomları kullanılmıştır. Çıkan sonuçlar, bu integralin gerçek değeri olan (4.16) ifadesinden alınan sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.7.  $n = 0$  ve  $m = 1$  için bazı  $x \in (1, 2)$  noktalarındaki  $Q_0^1(x)$  değerleri

$x$	$N = 110$	$N = 120$	Gerçek Değeri
1.01	7.053456158567111	7.053456158584738	7.053456158585978
1.11	2.075689697621009	2.075689697621013	2.075689697621008
1.21	1.467892379250259	1.467892379250259	1.467892379250257
1.31	1.181716128922779	1.181716128922780	1.181716128922778
1.41	1.006003635904912	1.006003635904913	1.006003635904911
1.51	0.883848951807802	0.883848951807802	0.883848951807801
1.61	0.792528390609124	0.792528390609125	0.792528390609124
1.71	0.720918516265345	0.720918516265346	0.720918516265345
1.81	0.662833318079882	0.662833318079883	0.662833318079882
1.91	0.614515454328551	0.614515454328551	0.614515454328551

Dikkat edilecek olursa, Çizelge 4.6. ve Çizelge 4.7.'deki  $x = 1.01$  noktası için  $Q_n^m(x)$  değerleri 11 basamak doğrulukla hesaplanmıştır. Bunun sebebi  $x$  değerinin 1 sayısına çok yakın olmasıdır. Bundan dolayı  $x = 1$  değerine oldukça yakın noktalarda  $N$  değerini artırmak gerekir. Çünkü (4.14) ifadesindeki integral altındaki fonksiyonun payda kısmında  $(x - t)^{n+m+1}$  vardır. Bunun dışındaki diğer noktalarda  $Q_n^m(x)$  fonksiyonu Jacobi-Gauss kuadratürü yardımıyla 14 – 15 basamak doğrulukla hesaplanmıştır. Dolayısıyla Olver'in Legendre fonksiyonunun integral gösterimi için Gauss kuadratürünün veriminin yüksek olduğu söylenebilir.

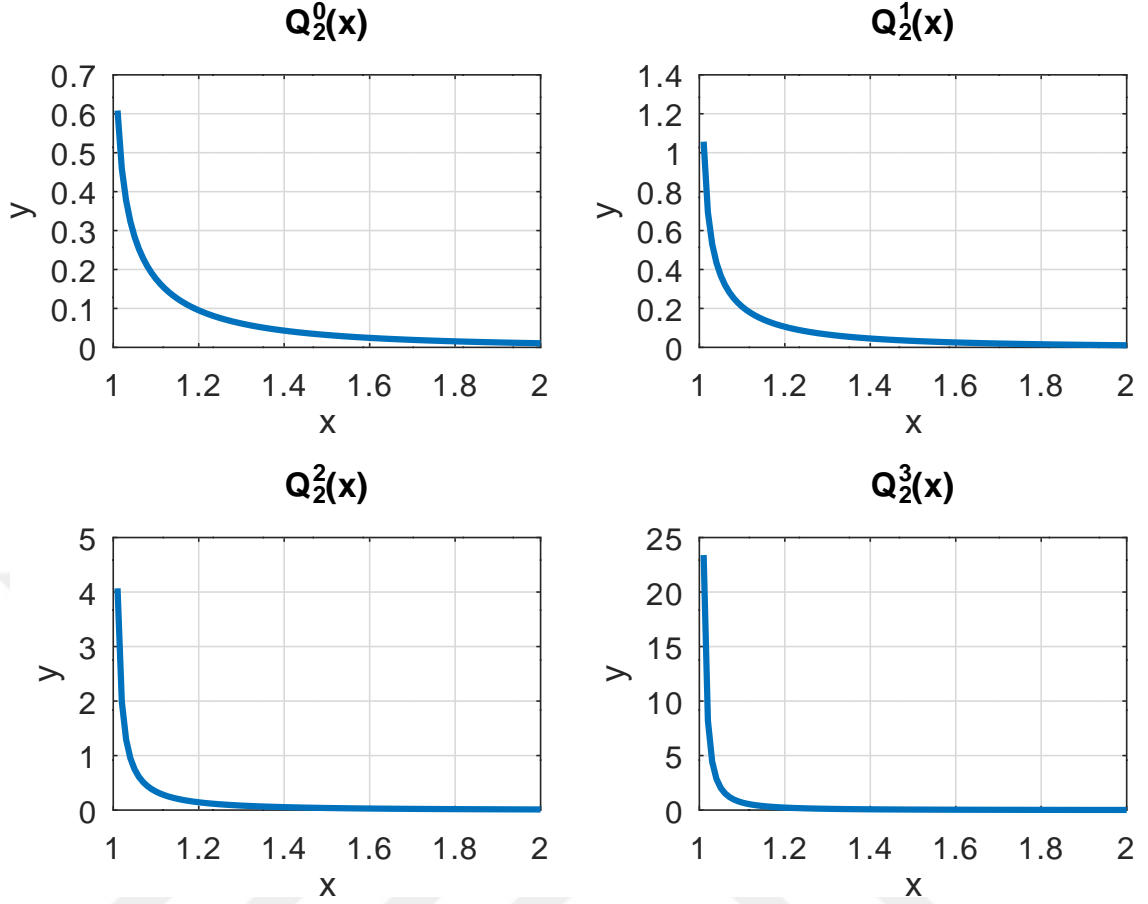
Öte yandan Şekil 4.3.'de  $N = 200$ ,  $n = 2$  ve  $m = 0, 1, 2, 3$  değerleri için,  $Q_2^m(x)$  fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Burada, fonksiyon değerleri (1, 8) aralığındaki  $x$  değerlerini 0.01 artırarak (4.14) integrallerinin Jacobi-Gauss kuadratürü ile hesaplanmasıyla elde edilmiştir.

**Örnek 4.7** Riemann-Zeta fonksiyonunun integral gösterimi,  $s \neq 1$  olmak üzere

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \quad (4.19)$$

şeklindedir (Abramowitz and Stegun, 1964). Gauss kuadratürü yardımıyla bu fonksiyonun bazı noktalardaki değerlerini hesaplayalım.

(4.19) integralinin hesabı için Laguerre-Gauss kuadratürü kullanılabilir. Dolayısıyla



Şekil 4.3.  $N = 200, n = 2$  ve  $m = 0, 1, 2, 3$  olmak üzere bazı  $x \in (1, 2) \subseteq \mathbb{R}$  için  $Q_2^m(x)$  fonksiyonlarının grafiği

bu denklem

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{k=0}^N f(x_k) w_k \end{aligned} \quad (4.20)$$

şeklinde düzenlenebilir. Burada  $f(x_k)$  fonksiyonu

$$f(x_k) = x_k^{s-1} \frac{e^{x_k}}{e^{x_k} - 1} \quad (4.21)$$

şeklinde ve  $x_k$  noktaları mertebesi  $\gamma = 0$  olan Laguerre polinomunun kökleridir. Ağırlık katsayıları  $w_k$  değerleri ise (3.173) ifadesinden hesaplanabilir.

Çizelge 4.8.'de bu fonksiyonun  $s = 2, 3, \dots, 10$  değerleri Laguerre-Gauss kuadratürü yardımıyla hesaplanmış ve elde edilen nümerik sonuçlar MATHEMATICA programından alınan verilerle karşılaştırılmıştır. Burada mertebesi  $\gamma = 0$  olan Laguerre polinomları kullanılmıştır.

Çizelge 4.8.  $s = 2, \dots, 10$  için  $\zeta(s)$  değerleri

$s$	$N = 80$	$N = 81$	MATHEMATICA verileri
2	1.644934066848227	1.644934066848226	1.644934066848226
3	1.202056903159595	1.202056903159594	1.202056903159594
4	1.082323233711140	1.082323233711138	1.082323233711138
5	1.036927755143372	1.036927755143369	1.036927755143369
6	1.017343061984451	1.017343061984449	1.017343061984449
7	1.008349277381926	1.008349277381922	1.008349277381922
8	1.004077356197947	1.004077356197943	1.004077356197944
9	1.002008392826087	1.002008392826080	1.002008392826082
10	1.000994575127823	1.000994575127816	1.000994575127818

Çizelge 4.8.'dan görüleceği üzere  $N = 80 - 81$  nokta kullanarak  $\zeta(s)$  fonksiyonu Jacobi-Gauss kuadratürü yardımıyla 14 - 15 basamak doğrulukla hesaplanmıştır. Dolayısıyla Riemann-Zeta fonksiyonunun integral gösterimi için Gauss kuadratürünün veriminin yüksek olduğu söylenebilir.

**Örnek 4.8** İkinci tip hiperbolik Bessel fonksiyonu,  $0 < \nu < 1$  ve  $x > 2$  olmak üzere

$$K_\nu(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^\nu \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^\infty \left(2 + \frac{t}{x}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} t^{\nu - \frac{1}{2}} e^{-t} dt \quad (4.22)$$

olarak tanımlanır (Gautschi, 2002). Gauss kuadratürü yardımıyla bu fonksiyonun bazı noktalardaki değerlerini hesaplayalım.

Burada  $\nu$ , 0 ya da 1 değerlerine çok yakın olursa (4.22) integralinin Gauss kuadratürüyle hesabında çok fazla doğruluk kaybı yaşanmaktadır. Bu yüzden bu örnekte  $0.05 \leq \nu \leq 0.95$  alınacaktır. Bu fonksiyonun  $\nu = 0.5$  için bazı  $x \in (2, 3]$  noktalarındaki değerleri, mertebesi  $\gamma = \nu - 1/2$  olan Laguerre-Gauss kuadratürüyle hesaplanıp, Çizelge 4.9.'da verilmiş ve çıkan sonuçlar MATHEMATICA programından alınan verilerle karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.9.'dan görüleceği üzere  $N = 90 - 91$  nokta kullanarak  $K_{0.5}(x)$  fonksiyonu Laguerre-Gauss kuadratürü yardımıyla 13 - 15 basamak doğrulukla hesaplanmıştır. Dolayısıyla ikinci tip hiperbolik Bessel fonksiyonunun integral gösterimi için Gauss kuadratürünün veriminin oldukça yüksek olduğu söylenebilir.

**Örnek 4.9** Airy fonksiyonun integral gösterimi

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt \quad (4.23)$$

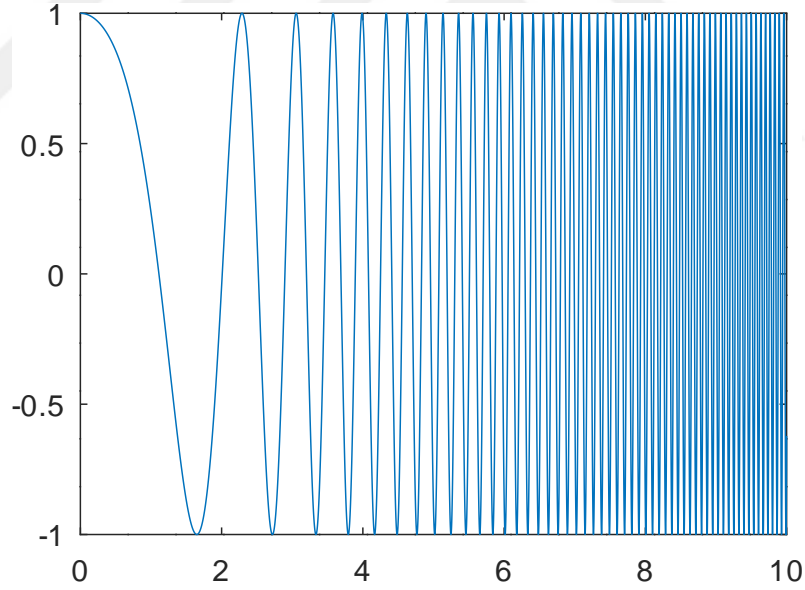


Çizelge 4.9.  $\nu = 0.5$  için bazı  $x \in (2, 3]$  noktalarındaki  $K_{0.5}(x)$  değerleri

$x$	$N = 90$	$N = 91$	MATHEMATICA verileri
2.1	$1.059087589969536e - 01$	$1.059087589969535e - 01$	$1.059087589969535e - 01$
2.2	$9.362692023167925e - 02$	$9.362692023167925e - 02$	$9.362692023167928e - 02$
2.3	$8.285499818361580e - 02$	$8.285499818361580e - 02$	$8.285499818361586e - 02$
2.4	$7.339180368364197e - 02$	$7.339180368364197e - 02$	$7.339180368364202e - 02$
2.5	$6.506594315400997e - 02$	$6.506594315400997e - 02$	$6.506594315400998e - 02$
2.6	$5.773080476413595e - 02$	$5.773080476413595e - 02$	$5.773080476413596e - 02$
2.7	$5.126051384233938e - 02$	$5.126051384233937e - 02$	$5.126051384233941e - 02$
2.8	$4.554664305820191e - 02$	$4.554664305820191e - 02$	$4.554664305820193e - 02$
2.9	$4.049551645342883e - 02$	$4.049551645342883e - 02$	$4.049551645342885e - 02$
3	$3.602598513176458e - 02$	$3.602598513176458e - 02$	$3.602598513176459e - 02$

şeklindedir (Moslehi ve Ansari, 2015). Gauss kuadratürü yardımıyla bu fonksiyonun bazı noktalardaki değerlerini hesaplayalım.

(4.23) integrali altındaki fonksiyon çok salınımlı olduğundan Laguerre-Gauss kuadratürü yakınsamamaktadır (Bkz. Şekil 4.4.).

Şekil 4.4.  $\cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)$  fonksiyonunun grafiği

Bu yüzden Airy fonksiyonu için bir başka integral gösterimi kullanılacaktır. Airy fonksiyonu, ikinci tip hiperbolik Bessel fonksiyonu ile yakından ilişkilidir.  $\nu = \frac{1}{3}$  için  $K_{\frac{1}{3}}$  ile  $Ai(x)$  fonksiyonu arasında

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{x}{3}} K_{\frac{1}{3}}(\zeta), \quad \zeta = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \quad (4.24)$$

ilişkisi vardır (Gautschi, 2002).  $\zeta > 2$  olmak üzere  $K_{\frac{1}{3}}$  için (4.22) integralini (4.24) ifadesiyle ilişkilendirecek olursak

$$Ai(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\zeta^{-\frac{1}{6}} e^{-\zeta}}{(48)^{\frac{1}{6}} \Gamma(\frac{5}{6})} \int_0^{\infty} \left(2 + \frac{t}{\zeta}\right)^{-\frac{1}{6}} t^{-\frac{1}{6}} e^{-t} dt \quad (4.25)$$

denklemini elde edilir.

Çizelge 4.10.'da bu fonksiyonun bazı  $x \in (2, 3]$  noktalarındaki değerleri, mertebesi  $\gamma = -1/6$  olan Laguerre polinomlarını kullanan Laguerre-Gauss kuadratürüyle hesaplanmış ve sonuçlar MATHEMATICA programından alınan verilerle karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.10.  $\zeta > 2$  olmak üzere bazı  $x \in (2, 3]$  noktalarındaki  $Ai(x)$  değerleri

$x$	$N = 90$	$N = 91$	MATHEMATICA verileri
2.1	2.995260211586653e - 02	2.995260211586651e - 02	2.995260211586652e - 02
2.2	2.561040442177322e - 02	2.561040442177319e - 02	2.561040442177321e - 02
2.3	2.183199318062263e - 02	2.183199318062260e - 02	2.183199318062263e - 02
2.4	1.855609362297546e - 02	1.855609362297545e - 02	1.855609362297546e - 02
2.5	1.572592338047049e - 02	1.572592338047048e - 02	1.572592338047048e - 02
2.6	1.328928252967148e - 02	1.328928252967147e - 02	1.328928252967148e - 02
2.7	1.119853545106588e - 02	1.119853545106586e - 02	1.119853545106588e - 02
2.8	9.410506914923967e - 03	9.410506914923955e - 03	9.410506914923962e - 03
2.9	7.886312304121228e - 03	7.886312304121219e - 03	7.886312304121230e - 03
3	6.591139357460718e - 03	6.591139357460711e - 03	6.591139357460719e - 03

Çizelge 4.10.'dan da görüldüğü üzere  $N = 90 - 91$  nokta kullanarak 14 - 15 basamak doğruluk elde edilmiştir. Ancak bu şekilde bir dönüşüm sayesinde Gauss kuadratürünün, Airy fonksiyonunun  $x > 2$  noktalarındaki değerlerini hesaplamada yüksek verime sahip olduğunu söyleyebiliriz.

## 5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tezde diğer sayısal integrasyon yöntemlerine göre daha kararlı olan ve yüksek doğrultuda sonuçlar veren Gauss sayısal integrasyon yöntemi (Gauss kuadratürü) detaylı şekilde incelenmiştir. Gauss kuadratürünün diğer yöntemlere göre en büyük avantajı  $N+1$  nokta kullanarak derecesi  $2N + 1$  olan polinomları tam olarak integre edebilmesidir. Bundan dolayı ortaya çıkan sonuçlar diğer yöntemlere nazaran daha keskindir. Ancak elbette Gauss kuadratürünün artı yönleri olduğu kadar eksi yönleri de vardır. Airy fonksiyonu buna örnek olarak verilebilir, çünkü bu integral altındaki cosinüs fonksiyonu çok salınımlıdır. Dolayısıyla Gauss kuadratürünün verimi oldukça düşükmektedir. Böyle bir durumda çok salınımlı bu tür fonksiyonlar için Filon tipi integral yöntemleri kullanılabilir (Xu ve Xiang, 2014). Ancak yine de Gauss kuadratürünün bir çok fonksiyonun integralini hesaplamada önemli derecede etkin bir rol oynadığı söylenebilir.

Gauss kuadratürü ayrıca fizik ve mühendislik alanının bir çok yerinde kullanılan klasik ortogonal (dik) polinomlar ile yakından ilişkilidir. Dolayısıyla bu çalışmanın fizik-matematik etkileşiminin bir nevi yansımasını göstermesinden dolayı bilim ve teknolojilere önemli katkılar sağlayacağı umulmaktadır. Öte yandan pratikte kullanmak ve hesaplamalar yapabilmek üzere bu yöntem için gerekli bilgisayar programı GNU Octave dilinde yazılmış ve EKLER bölümünde verilmiştir. Sayısal integral hesabı yapmak isteyen araştırmacılara kaynak teşkil etmesi açısından bu programın kullanıcı dostu olması planlanmaktadır.

## KAYNAKLAR

- ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, A.I., 1964. Handbook of mathematical functions with formulas graphs and mathematical tables. United States Department of Commerce, National Bureau of Standards, New York.
- ALICI, H., 2010. A general pseudospectral formulation of a class of Sturm-Liouville Systems. Middle East Technical University, The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Doctoral Thesis, Ankara, 96s.
- ANDREWS, L.C., 1998. Special Functions of Mathematics for Engineers. SPIE Optical Engineering Press, Washington.
- AYTAR, H., 2017. Küresel Dalga Denkleminin Sanki-Spektral Yöntemlerle Sayısal Çözümleri. Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Şanlıurfa, 46s.
- BOERRIGTER, P.M. AND VELDE, G.T. and BAERENDS, E.J., 1988. Three-dimensional numerical integration for electronic structure calculations. International Journal of Quantum Chemistry, 33(2):87-113.
- BURDEN, R.L. and FAIRES, J.D., 2011. Numerical Analysis. Brooks/Cole Cengage Learning, Boston.
- CLENSHAW, C.W. and CURTIS, A.R., 1960. A method for numerical integration on an automatic computer. Numerische Mathematik, 2(1):197-205.
- COLE, D.M. and KOSLOFF, D.D. and MINSTER, J.B., 1978. A numerical boundary integral equation method for elastodynamics. Bulletin of the Seismological Society of America, 68(5):1331-1357.
- DAL, M.S., 2017. Açık Mathieu Denkleminin Chebyshev Sanki-Spektral Yöntemi ile Sayısal Çözümleri. Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Şanlıurfa, 33s.
- DAVIS, P. J. and RABINOWITZ, P., 1984. Methods of Numerical Integration. Academic Press, INC., London.
- DUNSTER, T. M., 2010–2021 NIST. Digital Library of Mathematical Functions, 14.12.11, Olver's Associated Legendre Function, Erişim: 22 Haziran 2021, <https://dlmf.nist.gov/14.12>.
- EVANS, G.A. AND WEBSTER, J.R., 1999. A comparison of some methods for the evaluation of highly oscillatory integrals. Journal of Computational and Applied Mathematics, 112(1-2):55-69.
- GAUTSCHI, W., 2002. Computation of Bessel and Airy function and of related Gaussian quadrature formulae. BIT Numerical Mathematics, 42(1): 110-118.
- GOLUB, G.H. ve WELSCH, J.H., 1969. Calculation of Gauss Quadrature Rules. Math. Comput., 23:221-230+s1-s10.
- HASELGROVE, C.B., 1961. A method for numerical integration. Mathematics of Computation, 15:323-337.
- HILDEBRAND, F.B., 1973. Introduction to Numerical Analysis: Second Edition. Dover Publications, INC., New York.
- LEVY, D., 2010. Introduction to Numerical Analysis. University of Maryland, Department of Mathematics and Center for Scientific Computation and Mathematical Modeling (CSCAMM).

- MOSLEHI, L. and ANSARI, A., 2015. Integral representations of products of Airy functions related to fractional calculus. *Journal of Classical Analysis*, 7(2):99-112.
- NIKIFOROV, A.F. and UVAROV, V.B., 1988. *Special Functions of Mathematical Physics*. Birkhäuser, Basel.
- OLVER, F.W.J., 1974. *Asymptotics and Special Functions*. Academic Press, INC., San Diego.
- SERMUTLU, E., 2005. Comparison of Newton-Cotes and Gaussian methods of quadrature. *Applied Mathematics and computation*, 171(2):1048-1057.
- STOER, J. and BULIRSCH, R., 1980. *Introduction to Numerical Analysis*. New York:Springer-Verlag.
- ŞEKEROĞLU, B., 2003. Chebyshev polinomları ve bazı uygulamaları. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Ankara, 87s.
- TEUKOLSKY, S. A. and FLANNERY, B. P. and PRESS, W. H. and VETTERLING, W. T., 1992. Numerical recipes in C.. *SMR*, 693(1):145-160.
- TREFETHEN, L.N., 2008. Is Gauss quadrature better than Clenshaw-Curtis?. *SIAM Rev.*, 50(1):67-87.
- VELDE, G.T. and BAERENDS, E.J., 1992. Numerical integration for polyatomic systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 99(1):84-98.
- XU, Z. and XIANG, S., 2014. Numerical evaluation of a class of highly oscillatory integrals involving Airy functions. *Applied Mathematics and Computations*, 246:54-63.
- YOUNG, P., 2014. Romberg Integration [pdf], Erişim: 22 Haziran 2021, <https://young.physics.ucsc.edu/115/romberg.pdf>.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı:** Emre SANIR

### EĞİTİM

<b>Derece</b>	<b>Adı</b>	<b>Bitirme Yılı</b>
Lise	: Muzaffer Atasay Anadolu Lisesi, Uzunköprü, Edirne	2007
Üniversite	: Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, İstanbul	2013
Yüksek Lisans	: Harran Üniversitesi, Şanlıurfa	2021

### İŞ DENEYİMLERİ

<b>Yıl</b>	<b>Kurum</b>	<b>Görevi</b>
2013 – 2014	Kültür Dershanesi Şirinevler Şubesi	Matematik Öğretmeni
2015 – 2016	Kırklareli Özel Fen Bilimleri Koleji	Matematik Öğretmeni
2016 – 2018	Uzunköprü Özel Final Temel Lisesi	Matematik Öğretmeni
2018 –	Milli Eğitim Bakanlığı	Matematik Öğretmeni

### UZMANLIK ALANI

Matematik

### YABANCI DİLLER

İngilizce

## EKLER

**EK 1:** Klasik ortogonal polinomların köklerini ve Christoffel sayılarını, Golub-Welsch algoritmasını kullanarak hesaplayan .m dosyası.

```
% =====  
% Bu fonksiyon klasik ortogonal P_(N+1)(x) polinomunun  
% köklerini ve Gauss kuadratürünün ağırlıklarını (Christoffel  
% sayılarını) Golub-Welsch algoritması kullanarak hesaplamaktadır.  
% GİRDİ  
% N+1 : 1,2,... polinomun dereceleri  
% cop : 1 için Hermite polinomları  
%       2 için Laguerre polinomları  
%       3 için Jacobi polinomları  
% gama : Laguerre polinomlarının derecesi  
% (a,b) : Jacobi polinomlarının derecesi  
% Eğer cop ==1 ise gamma, a ve b değerleri önemli değildir, bunlar için  
% rastgele bir sayı giriniz  
% Eğer cop ==2 ise a ve b değerleri önemli değildir, bunlar için  
% rastgele bir sayı giriniz  
% Eğer cop ==3 gama değeri önemli değildir, bunun için rastgele bir  
% sayı giriniz  
% ÇIKTI  
% x : N+1 inci derece klasik ortogonal polinoma karşılık gelen kök  
% gw : Christoffel sayıları ya da Gauss kuadratürü ağırlıkları  
% =====  
  
function [W,x,gw,R] = roots_weights(N,a,b,gama,cop)  
if (cop ==1) %(-inf,inf), Hermite polinomlarının kökleri  
    B =0;  
    A =sqrt((1:N-1)/2)];  
    h0 =sqrt(pi);%Birinci Hermite polinomunu H_0(x) in L2 normunun karesi  
elseif (cop ==2)% (0,inf), mertebesi gama olan Laguerre polinomlarının kökleri  
    B = [2.*(1:N)+gama-1];  
    A = [-sqrt(((1:N-1)).*((1:N-1)+gama))];  
    h0 =gamma(gama+1);%L^(gama)_0(x) fonksiyonunun L_2 normunun karesi  
else %sınırlı aralık, mertebesi (a,b) olan Jacobi polinomlarının kökleri  
    B = [(b-a)/(a+b+2) (b^2-a^2)./(2.*(2:N)+a+b-2).*(2.*(2:N)+a+b))];  
    A = [2/(a+b+2)*sqrt((a+1)*(b+1)/(a+b+3)) ...  
        2./(2.*(2:N-1)+a+b).*sqrt((2:N-1).*((2:N-1)+a+b).*...  
        ((2:N-1)+a).*((2:N-1)+b)./(2.*(2:N-1)+a+b-1).*(2.*(2:N-1)+a+b+1))];  
    if (a+b ==-1) %P^(a,b)_0(x) polinomunun L2 normunun karesi  
        h0 =gamma(a+1)*gamma(b+1);  
    else  
        h0 =(2^(a+b+1)*gamma(a+1)*gamma(b+1))/((a+b+1)*(gamma(a+b+1)));  
    end  
end  
R =diag(A,1)+diag(B)+diag(A,-1); %köşegenleştirilmiş üçgensel matris  
[W,x] =eig(R); x =diag(x); %klasik ortogonal polinomların kökleri  
gw =h0.*W(1,:).^2; gw =gw'; %Gauss kuadratürü ağırlıkları.
```

**EK 2:** Klasik ortogonal polinomlar üzerine kurulu Gauss quadratürü için .m dosyası (EK 1'deki programa ihtiyaç duymaktadır).

```

% =====
% Bu fonksiyon şu tip integralleri hesaplamaktadır :

% eksi sonsuzdan sonsuza f(x)*e^(-x^2)dx Hermite durumunda (cop ==1)
% 0 dan sonsuza f(x)*x^(gama)*e^(-x)dx Laguerre durumunda (cop ==2)
% -1 den 1 e f(x)*(1-x)^a*(1+x)^b dx Jacobi durumunda (cop ==3)

% GİRDİ
% N+1 : 1,2,... polinomun dereceleri
% cop : 1 için Hermite polinomları
%       2 için Laguerre polinomları
%       3 için Jacobi polinomları
% gama : Laguerre polinomlarının derecesi
% (a,b) : Jacobi polinomlarının derecesi

% Eğer cop ==1 ise gamma, a ve b değerleri önemli değildir, bunlar için
% rastgele bir sayı giriniz.
% Eğer cop ==2 ise a ve b değerleri önemli değildir, bunlar için
% rastgele bir sayı giriniz.
% Eğer cop ==3 gama değeri önemli değildir, bunun için rastgele bir
% sayı giriniz.

% ÇIKTI
% int : Sonuç alınması istenen integralin değeri.
%-----
% ÜRNEK ÇALIŞTIRMA
% 1)
% int = gauss(@(x)(x.^2),1,5,0,0,0)
% eksi sonsuzdan sonsuza x^2 e^(-x^2)dx integralini hesaplar ki
% burada cop =1 (Hermite-Gauss), N =5 tir. a =b =gama =0 alınabilir,
% çünkü cop =1 olduğundan a,b ve gama hesaplamaya dahil değildir.
%-----
% 2)
% int = gauss(@(x)(x.^2),2,5,0,0,.5)
% 0 dan sonsuza x^2*x^(.5)*e^(-x)dx integralini hesaplar ki
% burada cop =2 (Laguerre-Gauss), N =5, ve gama =0.5 dir. a =b =0 alınabilir,
% çünkü cop =2 olduğundan a ve b hesaplamaya dahil değildir,
% sadece gama değeri hesaplamaya dahildir.
%-----
% 3)
% int = gauss(@(x)(x.^2),3,5,-0.5,-0.5,0)
% -1 den 1 e x^2/sqrt(1-x^2)dx integralini hesaplar ki
% burada cop =3 (Jacobi-Gauss), N =5, a =b =-0.5 dir. gama =0 alınabilir,
% çünkü cop =3 olduğundan gama hesaplamaya dahil değildir,
% sadece a ve b değerleri hesaplamaya dahildir.
% =====

function int = gauss(f,cop,N,a,b,gama)
[W,x,gw] = roots_weights(N,a,b,gama,cop);
int =sum(f(x).*gw);

```