T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOMPLEKS MANİFOLDLARIN REEL HİPERYÜZEYLERİ

Özlem DENİZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2020

T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOMPLEKS MANİFOLDLARIN REEL HİPERYÜZEYLERİ

Özlem DENİZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2020

Doç. Dr. Mehmet GÜLBAHAR danışmanlığında, Özlem DENİZ'ın hazırladığı **"Kompleks manifoldların reel hiperyüzeyleri"** konulu bu çalışma 04/12/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman : Doç. Dr. Mehmet GÜLBAHAR ....

Üye : Doç. Dr. Bilal Eftal ACET ....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Abdullah YILDIRIM ....

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalı'nda Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Doç. Dr. İsmail HİLALİ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu'ndaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KOMPLEKS MANİFOLDLARIN REEL HİPERYÜZEYLERİ

Özlem DENİZ

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Mehmet GÜLBAHAR
Yıl: 2020, Sayfa: 87

Beş bölümden oluşan bu tezin birinci bölümü giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde öncelikle tezin diğer bölümlerinde kullanılan bazı temel kavramlar, tanımlar ve teoremler ifade edilerek topolojik manifoldlar, Riemann manifoldları ve Riemann altmanifoldları ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde öncelikle hemen hemen kompleks manifoldların tanımlanmasında kullanılacak cebirsel kavramlar ile holomorfik fonksiyonlar verildikten sonra kompleks ve hemen hemen kompleks manifoldlar, Hermityen manifoldlar ve Kaehler manifoldlar kavramları ve temel özellikleri sunulmuştur. Daha sonra kontak manifoldların temel tanım, teorem ve bazı örneklerine yer verilmiştir. Dördüncü bölümde öncelikle kompleks manifoldların reel hiperyüzeyleri incelenmiş ve kompleks uzay formlar üzerinde tanımlanan hemen hemen kontak yapılardan kaynaklanan bazı temel eşitliklere yer verilmiştir. Daha sonra $\eta-$umbilik reel hiperyüzeylerin eğrilik tensörleri incelenip bazı sonuçlar elde edilmiştir. Beşinci bölümde ise dördüncü bölümde yapılan çalışmalarla ilgili sonuç ve öneriler verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Hiperyüzey, kompleks manifold, eğrilik.

ABSTRACT

MSc Thesis

REAL HYPERSURFACES OF COMPLEX MANİFOLDS

Özlem DENİZ

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Mehmet GÜLBAHAR
Year: 2020, Page: 87

The first chapter of this thesis which consist of five chapters is devoted to the introduction. In the second chapter, some basic concepts, definitions and theorems used in the other chapters of the thesis are expressed and general informations about topological manifolds, Riemannian manifolds and Riemann submanifolds are given. In the third chapter, after giving algebraic concepts and holomorphic functions which are utilized in the definition of almost complex manifolds, the notions of complex and almost complex manifolds, Hermitian manifolds and Kaehler manifolds and their main properties are presented. Then, basic definitions, theorems and some examples of contact manifolds are given. In the fourth chapter, firstly, real hypersurfaces of complex manifolds are examined and some basic equations arising from almost contact structures defined on complex space forms are given. Later, curvature tensors of η-umbilic real hypersurfaces are investigated and some results are obtained. In fifth chapter, the results and suggestions related studies in the fourth chapter are given.

KEYWORDS: Hypersurface, complex manifold, curvature.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımız boyunca desteklerini esirgemeyen hocam Doç. Dr. Mehmet GÜLBAHAR’a ve bana her koşulda ve her durumda destek olan çok değerli aile bireylerime teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

B. Riemann'a göre içinde yaşadığımız uzayın nasıl bir matematiksel model olduğunu bilmemizin yolu yoktur. Bu uzay, boyutu 3 den daha büyük olan bir Öklidyen uzay, bir küre, bir hiperbolik uzay veya bilmediğimiz bir uzay modeli olabilir. B. Riemann'ın bu fikiri matematik ve fizik alanlarında bir çıgır açmış olup bu fikir olgunlaşıp meyvelerini vermeye başlayınca A. Einstein, B. Riemann hakkında şu sözleri ifade etmiştir.

'Sadece Riemann'ın yanlız ve anlaşılmaz dehası, son yüzyılın ortalarında, uzayın eski katılığından kurtarılıp fiziksel uzaylarda rol oynama yetisinin olanaklı görüldügü yeni bir uzayın tasarımına doğru giden yolu bulmuştur. Riemann'ın çalışmalarından haberim olmasaydı görelilik kuramını hiçbir zaman geliştiremeyecektim.'

B. Riemann, yaptığı çalışmalar ile geometriye yeni bir bakış açısı kazandırarak Riemann manifoldlarının temelini atmıştır. Diferensiyellenebilir bir manifold üzerinde pozitif tanımlı, simetrik, bi-lineer bir dönüşüm tanımlanabiliyorsa bu tür manifoldlara Riemann manifoldu adı verilir. Riemann manifoldları ve Riemann geometrisi halen geometriciler ve fizikçiler tarafından çok yaygın olarak çalışılmaktadır.

Kompleks manifoldlara ait çalışmalar, 1930 lu yıllarda J. A.Schouten ve D.Van Dantzng'ın Riemann metriği ve afin konneksiyona sahip manifoldların diferensiyel geometrideki sonuçları bu uzaylara taşımalarıyla başlar (Schouten ve Dantzig, 1930), (Schouten ve Dantzig, 1931). 1933 yılında E. Kaehler (Kaehler, 1933), kompleks bir atlas yapısına sahip bir Riemann manifoldu üzerinde tanımlı Levi-Civita konneksiyonun özelliklerini inceleyerek bugün Kaehler manifoldlar adı verilen kompleks manifoldların bilinen bir örnek dışında hemen hemen her örneğini içeren manifoldları tanımlamıştır. A.Weil, 1947 yılında yayınlanan çalışmasında bu konuya farklı bir noktadan yaklaşmıştır. A. Weil (Weil, 1947) kompleks manifoldda karesi eksi birime eşit olan (1,1) mertebeli tensörün varlığını ortaya koymuştur. C.Ehresman (Ehresman, 1950) bu tensörü kullanarak çift boyutlu diferensiyellenebilir manifold olan hemen hemen kompleks manifoldları tanımladı. Böylece bir kompleks manifoldun hemen hemen kompleks manifold olduğu fakat bunun tersinin doğru olmadığını gösterdi.

Kompleks manifoldların ve altmanifoldlarının diferensiyel geometrisi birçok matematikçi tarafından halen incelenmektedir. Bu tez çalışmasında ise sabit holomorfik kesit eğrilikli kompleks manifoldlar olan kompleks uzay formların reel hiperyüzeyleri incelenmiş, bu tip hiperyüzeyler üzerinde kompleks uzay formun hemen hemen kompleks yapısından indirgenerek elde edilen hemen hemen kontakt yapınının sağladığı bazı temel eşitliklere yer verilmiştir. Ayrıca η-umbilik reel hiperyüzeyler incelenmiş olup bu yüzeylerin Riemann eğrilik invaryantları hesaplanarak bazı sonuçlar elde edilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölüm iki kısım olarak düzenlenmiştir. Birinci kısımda manifoldlar ve manifoldlar üzerinde temel yapılar, ikinci kısımda Riemann manifoldları, Riemann konneksiyonu, eğrilik kavramı ve altmanifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

2.1. Topolojik Manifoldlar

Tanım 2.1 *M bir Hausdorff uzayı olmak üzere M nin her p noktası ihtiva eden her bir açık alt kümesi E^n uzayına veya E^n in bir açık altkümesine homeomorf ise M uzayına bir topolojik manifold adı verilir (Şahin, 2012).*

Tanım 2.2 *$C^\infty(M,\mathbb{R})$ kümesi M topolojik manifoldu üzerinde tanımlanabilen tüm diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi olsun. Bu durumda her $f_1, f_2 \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ için*

(i) $X_p(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 X_P(f_1) + c_2 X_p(f_2)$

(ii) $X_p(f_1 f_2) = X_p(f_1) f_2 + f_1 X_p(f_2)$

şartlarını sağlayan $X_p : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dönüşümüne M manifoldunun p noktasındaki tanjant vektörü denir. $p \in M$ noktasının üzerinde tanımlanabilecek tüm tanjant vektörlerin kümesine p noktasının tanjant uzayı adı verilir ve bu uzay T_pM ile gösterilir. Tanjant uzay bir vektör uzayı yapısına sahiptir. Tanjant uzayın boyutu manifoldun boyutuna eşittir (Şahin, 2012).

M bir topolojik manifold olsun. M nin herbir $p \in M$ noktasına bir tanjant vektör karsılık getiren X diferensiyellenebilir dönüşümüne bir vektör alanı denir. Yani M manifoldu üzerinde bir vektör alanı $\forall p \in M$ için

$$X : M \to \bigcup_{p\in M} T_pM$$

diferensiyellenebilir dönüşümdür. Vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ile gösterilir (Matsushima, 1972).

Tanım 2.3 *M bir topolojik manifold ve M nin bir atlası $S = \{(\Psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ olsun. $W\alpha \cap W_\beta \neq \varnothing$ olmak üzere,*

$$\begin{aligned} \phi_{\beta\alpha} &= \Psi_\beta^{-1} o \Psi_\alpha \\ \phi_{\alpha\beta} &= \Psi_\alpha^{-1} o \Psi_\beta \end{aligned} \tag{2.1}$$

$\forall \alpha, \beta \in A$ ya karşılık gelen $\phi_{\alpha\beta}$ ve $\phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferensiyellenebilir iseler S atlasına C^k sınıfından diferensiyellenebilir bir yapı denir (Şahin, 2012).

Tanım 2.4 *M topolojik manifoldu üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir bir yapı tanımlanabilirse M manifolduna C^k sınıfından diferensiyellenebilir bir manifold denir (Hacısalihoğlu, 1982).*

Tanım 2.5 *M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $\forall X, Y, T \in \chi(M)$ ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için*

(i) $\nabla_{Y+T} X = \nabla_Y X + \nabla_T X$

(ii) $\nabla_Y (X + T) = \nabla_Y X + \nabla_Y T$

(iii) $\nabla_{fT} X = f \nabla_T X$

(iv) $\nabla_T (fX) = T(f) X + f \nabla_T X$

şartlarını sağlayan $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$ dönüşümüne afin veya lineer konneksiyon adı verilir. $\nabla_X Y$ vektör alanına Y vektör alanının X vektör alanı boyunca kovaryant türevi adı verilir (Şahin, 2012).

Tanım 2.6 *V vektör uzayı üzerinde $[,] : V \times V \to V$ dönüşümü*

i) *bilineer,*

ii) *alterne,*

iii) *$\forall X, Y, T \in V$ için*

$$[X, [Y, T]] + [Y, [T, X]] + [T, [X, Y]] = 0 \tag{2.2}$$

özellikleri sağlanıyorsa $[,]$ dönüşümüne, V üzerinde Lie parantez operatörü adı verilir (O'Neill, 1983).

Diferensiyellenebilir bir manifold üzerinde Lie parantez operatörü söyle tanımlanır.

M diferensiyellenebilir bir manifold, M nin bir açığı U olmak üzere,
$\forall f, g \in C^{\infty}(W, \mathbb{R})$ için

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \tag{2.3}$$

dir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.7 *V bir vektör uzayı ve W da V nin bir alt uzayı olsun. $\forall\, x, y \in V$ için $y - x \in W$ ise x elemanına modulo$W$ ya göre y elemanına kongruenttir denir ve $x \equiv y\,(modW)$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 1974).*

Teorem 2.8 *V vektör uzayı üzerinde*

i) $x \equiv y\,(modW)$ *bağıntısı V de bir denklik bağıntısıdır.*

ii) $x_1, y_1, x_2, y_2 \in V$ *için* $x_1 \equiv y_1\,(modW)$ *ve* $x_2 \equiv y_2\,(modW)$ *ise*
$x_1 + x_2 \equiv y_1 + y_2\,(modW)$ *dır.*

iii) $x \equiv y\,(modW)$ *ise* $\forall c \in F$ *için* $cx \equiv cy\,(modW)$ *dır.*

özellikleri sağlanır (Hacısalihoğlu, 1974).

Tanım 2.9 *V bir vektör uzayı ve W da V nin bir alt uzayı olmak üzere, $\forall x, y \in V$ için $x \equiv y\,(modW)$ bağıntısına göre V nin bütün denklik sınıflarının kümesine V nin W üzerindeki bölüm uzayı denir ve $V' = V/W$ ile gösterilir. Aynı zamanda $\pi : V \to V'$ lineer dönüşümüne ise gerçel izdüşüm denir (Hacısalihoğlu, 1974).*

Tanım 2.10 *F bir cisim ve $n \geq 1$ olmak şartıyla F^{n+1}, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$ için $x_i, y_i \in F$ ve $x = (x_0, x_1, ..., x_n) \in F^{n+1}$ ve $y = (y_0, y_1, ..., y_n) \in F^{n+1}$ olmak üzere $F^{n+1} \setminus \{0\}$ üzerinde $\backsim$ bağıntısı şöyle tanımlansın.*

$x \backsim y$ olması için gerek yeter koşul

$$x = \lambda y$$

olacak şekilde bir $\lambda \in F - \{0\}$ vardır.

Burada tanımlanan $\backsim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. $F^{n+1} - \{0\} \;/ \backsim$ bölüm kümesine n-boyutlu projektif denir ve bu uzay $P^n(F)$ ile gösterilir (Do Carmo, 1992).

Tanım 2.11 *M, $n-$boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere*

$$\begin{aligned} D \;\; : \;\; & M \to \bigcup_{p \in M} T_p M \\ & p \to D_p \subset T_p M, \;\; \textit{boy}\,(D_p) = r < n \end{aligned}$$

ile tanımlanan dönüşüme r-boyutlu bir distribüsyon denir (Şahin, 2012).

Örnek 2.12 *Bir M manifoldu üzerindeki her vektör alanı $1-$boyutlu bir distribüsyondur (Şahin, 2012).*

Örnek 2.13 *Bir M manifoldu üzerinde tanımlı vektör demetinin her alt vektör demeti bir distribüsyon tanımlar (Şahin, 2012).*

Tanım 2.14 *D, M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde $r-$boyutlu bir distribüsyon olsun. Bu distribüsyona ait her X, Y vektörleri için*

$$[X, Y] \in \Gamma(D)$$

eşitliği sağlanıyorsa D distribüsyonuna involutive dir denir (Şahin, 2012).

Tanım 2.15 *$\widetilde{M}$ diferensiyellenebilir bir manifold ve bu manifold üzerinde $r-$boyutlu bir distribüsyon D olsun. M, $\widetilde{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olmak üzere, $\forall p \in M$ için M manifoldunun tanjant uzayı ile D_p aynı ise M ye D distribüsyonunun integral manifoldu denir. Başka bir deyişle*

$$f : M \to \widetilde{M}$$

bir immersiyon olmak üzere M, D distribüsyonunun integral manifoldu ise $\forall p \in M$ için

$$f_* (T_p(M)) = D_p$$

eşitliği sağlanır. Eğer D distribüsyonunun M altmanifoldunu ihtiva eden başka bir integral manifoldu mevcut değilse bu manifolda D distribüsyonunun maksimal integral manifoldu denir (Şahin, 2012).

Örnek 2.16 *Bir vektör alanının integral eğrisi $1-$boyutlu distribüsyon olan vektör alanının integral manifoldudur (Şahin, 2012).*

Tanım 2.17 *M, $\widetilde{M}$ diferensiyellenebilir bir manifoldunun bir alt manifoldu olsun. M nin her p noktasını ihtiva eden bir maksimal integral manifoldu mevcutsa bu distribüsyona integrallenebilirdir denir (Şahin, 2012).*

Teorem 2.18 (Frobenius Teoremi) *$\widetilde{M}$ diferensiyellenebilir bir manifold ve D, $\widetilde{M}$ üzerinde $r-$boyutlu bir distribüsyon olsun. Bu durumda her involutive distribüsyon integrallenebilirdir. Üstelik D distribüsyonunun $\forall p \in M$ noktasından geçen bir tek maksimal integral manifoldu vardır ve p noktasını ihtiva eden diğer tüm integral manifoldlar bu maksimalin bir altmanifoldudur (Şahin, 2012).*

2.2. Riemann Manifoldları ve altmanifoldları

Tanım 2.19 *M diferensiyellenebilir bir manifold olsun.*

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M)$$

ile tanımlı g bilineer formu simetrik ve pozitif tanımlı ise, g bilineer formuna Riemann metriği ve (M, g) ikilisine ise bir Riemann manifoldu adı verilir (Şahin, 2012).

Tanım 2.20 *∇, (M, g) Riemann manifoldu üzerinde tanımlı bir afin konneksiyon olmak üzere $\forall X, Y, T \in \chi(M)$ için*

a) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X,$ *(sıfır torsiyon)*

b) $Xg(Y, T) = g(\nabla_X Y, T) + g(Y, \nabla_X T),$ *(metrik ile uyumluluk)*

özelliklerini sağlıyorsa, bu konneksiyona M üzerinde bir Riemann konneksiyonu ya da Levi-Civita konneksiyonu adı verilir (Şahin, 2012).

Teorem 2.21 *Her Riemann manifoldu üzerinde bir tek Levi-Civita konneksiyonu vardır (Yano ve Kon, 1984).*

Tanım 2.22 *M diferensiyellenebilir bir manifold olsun.*

$$\begin{aligned} R &: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M) \\ &\quad (X, Y, Z) \to R(X, Y, Z) = R(X, Y) Z \end{aligned}$$

öyleki

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{2.4}$$

ile tanımlanan R tensörüne ∇ konneksiyonuna göre eğrilik tensörü adı verilir (Hacısalihoğlu, 1982).

Tanım 2.23 *(M, g) bir Riemann manifoldu olmak üzere lineer bağımsız X ve Y vektörlerinin gerdiği düzlem Π olsun.*

$$K(\Pi) \equiv K(X, Y) = \frac{g(R(X, Y) Y, X)}{g(X, X) g(Y, Y) - g(X, Y)^2} \tag{2.5}$$

eşitliğindeki $K(\Pi)$ sayısına Π düzleminin kesit eğriliği denir (Hacısalihoğlu, 1982).

Tanım 2.24 *(M, g) bir Riemann manifoldu olmak üzere T_pM de her Π düzlemi ve M manifoldunun her p noktası için $K(\Pi)$ sabit bir c sayısı ise bu durumda M manifolduna sabit eğrilikli uzay veya uzay form adı verilir ve $M(c)$ ile gösterilir (Do Carmo, 1992).*

Burada

i) $c = 0$ olması durumunda M manifoldu E^n Öklid uzayı,

ii) $c = \frac{1}{r^2}$ olması durumunda M manifoldu, $S^n(r)$ küresi,

iii) $c = -\frac{1}{r^2}$ olması durumunda M manifoldu $H^n(r)$ hiperbolik uzay

olur.

Teorem 2.25 *$M(4c)$ sabit eğrilikli uzay form ve $\forall X, Y, T \in \chi(M)$ için*

$$R(X, Y) T = c \{g(Y, T) X - g(X, T) Y\} \tag{2.6}$$

dir (Şahin, 2012).

Tanım 2.26 $\{e_1, ..., e_n\}$ *kümesi* $\chi(M)$ *üzerinde ortonormal bir çatı alanı olsun.* $\forall X, Y \in \chi(M)$ *için*

$$S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i) \tag{2.7}$$

ile tanımlanan

$$S : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$$

tensör alanına (M, g) *manifoldunun Ricci tensörü adı verilir. Diğer taraftan* M *manifoldunun* X *doğrultusundaki Ricci eğriliği* $Ric(X)$

$$Ric(X) = \frac{S(X,X)}{g(X,X)} \tag{2.8}$$

ile tanımlanır (Şahin, 2012).

Tanım 2.27 (M, g) *bir Riemann manifoldu ve* $p \in M$ *noktasındaki tanjant uzay* T_pM *olsun.* T_pM *uzayının ortonormal bir bazı* $\{e_1, ..., e_n\}$ *olmak üzere* M *manifoldunun* $p \in M$ *noktasındaki skaler eğriliği* $\tau(p)$ *ile gösterilir ve*

$$\tau(p) = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i) \tag{2.9}$$

ile tanımlanır (Şahin, 2012).

Tanım 2.28 (M, g) *ve* $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ *iki Riemann manifold,* $\forall p \in M$ *için* $f_*(p)$ *türev dönüsümü birebir ise*

$$f : M \to \widetilde{M}$$

diferensiyellenebilir dönüşümüne bir immersiyon denir. Ayrıca $\forall X, Y \in \chi(M)$ *için*

$$\widetilde{g}(f_*X, f_*Y) = g(X,Y)$$

eşitliği sağlanıyorsa M *manifolduna* $\widetilde{M}$ *manifoldunun bir izometrik immersiyonu veya bir altmanifoldu denir (Şahin, 2012).*

Tanım 2.29 M, $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ $m-$*boyutlu bir Riemann manifoldunun* $n-$*boyutlu bir altmanifoldu olmak üzere* $\forall X_p \in T_pM$ *için*

$$\widetilde{g}_{f(p)}(f_*X, N) = 0$$

ise N *vektörüne* $f(p)$ *noktasında bir normal vektör denir.* M *üzerindeki tüm normal vektörlerin demeti* $TM^\perp$ *ile gösterilir (Şahin, 2012).*

Tanım 2.30 $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{M}$ *nın Riemann konneksiyonu ve* $\nabla, \widetilde{\nabla}$ *nın* M *üzerine indirgenmiş konneksiyonu olmak üzere* $\forall X, Y \in \chi(M)$ *için*

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \tag{2.10}$$

dir. Burada ∇ *konneksiyonu bir Riemann konneksiyonudur. Ayrıca*

$$h : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi^{\perp}(M)$$

ile tanımlı simetrik bilineer forma M *nin ikinci temel formu denir.* (2.10) *eşitliğine ise Gauss formülü denir (Şahin, 2012).*

Tanım 2.31 $X \in \chi(M)$, $N \in \chi^{\perp}(M)$ *için* $\widetilde{\nabla}_X N$ *nin sırasıyla teğet ve normal kısımlarını sırasıyla,* $-A_N X$ *ve* $\nabla_X^{\perp} N$ *ile gösterelim. Bu durumda*

$$\widetilde{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla_X^{\perp} N \tag{2.11}$$

yazılabilir. Burada A_N *lineer operatörüne* N *normal vektörüne göre şekil operatörü ve* (2.11) *denklemine de Weingarten formülü denir (Şahin, 2012).*

Ayrıca

$$g(h(X, Y), N) = g(A_N X, Y) \tag{2.12}$$

bağıntısı sağlanır.

Teorem 2.32 $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ *bir Riemann manifold ve* (M, g) *ise* $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ *nın bir altmanifoldu olsun.* M *ve* $\widetilde{M}$ *nın eğrilik tensörleri sırasıyla* R *ve* $\widetilde{R}$ *olmak üzere* $\forall X, Y, T, W \in \chi(M)$ *için*

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)T, W) &= g(\widetilde{R}(X, Y)T, W) + g(h(X, T), h(Y, W)) \\ &\quad - g(h(X, W), h(Y, T)) \end{aligned} \tag{2.13}$$

eşitliği sağlanır. Bu denkleme Gauss denklemi adı verilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.33 M, $\widetilde{M}$ *Riemann manifoldunun bir altmanifoldu ve* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *bu altmanifoldun ortonormal bir çatısı olsun. Bu durumda*

$$H = \frac{1}{n} iz\, h = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i) \tag{2.14}$$

ile tanımlı H *vektör alanına ortalama eğrilik vektör alanı denir (Şahin, 2012).*

Kesit eğriliği bir altmanifold için içsel invaryant iken ortalama eğrilik ise dışsal invaryanttır.

Tanım 2.34 *$\widetilde{M}$ bir Riemann manfoldu ve M, $\widetilde{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Eğer h ikinci temel form sıfır ise alt manifolda total geodeziktir denir (Şahin, 2012).*

Gauss formülünden, bir altmanifold total geodeziktir gerek ve yeter koşul M altmanifoldundaki herbir geodeziğin aynı zamanda $\widetilde{M}$ manifoldunda da geodezik olmasıdır. Örneğin Öklidyen uzayda, her düzlem (doğru veya hiperdüzlem) total geodezik altmanifolddur (Şahin, 2012).

Tanım 2.35 *$N \in \chi^{\perp}(M)$ ve $\lambda \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ olmak üzere*

$$A_N = \lambda I_n \tag{2.15}$$

ise M manifoldu N vektör alanına göre umbiliktir denir. Eğer M altmanifoldu her normal vektör alanına göre umbilik ise M altmanifolduna total umbilik altmanifold denir (Şahin, 2012)

Teorem 2.36 *(M, g), manifoldu $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun. H, M altmanifoldunun ortalama eğrilik vektör alanı olmak üzere M alt manifoldunu total umbilik olması için gerek ve yeter şart, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için*

$$h(X, Y) = g(X, Y)\, H \tag{2.16}$$

olmasıdır (Şahin, 2012).

İspat. $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_m\}$ kümesi $\chi(\widetilde{M})$ uzayının ortonormal bir bazı olmak üzere $\chi(M) = \text{Span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ ve $\chi^{\perp}(M) = \text{Span}\{e_{n+1}, \ldots, e_m\}$ olsun. M altmanifoldu total umbilik ise $\forall N \in \chi^{\perp}(M)$ için

$$A_N e_i = \lambda\, e_i, \qquad (1 \leq i \leq n)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ vardır. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^{n} g(A_N\, e_i, e_i) = n\lambda$$

olur. Böylece

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g\left(A_N\, e_i, e_i\right)$$

elde edilir. (2.12) den

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g\left(h\left(e_i, e_i\right), N\right)$$

dır. Bu durumda

$$\lambda = g\left(H, N\right)$$

olur. O halde $A_N X = \lambda X$ eşitliği sağlanır gerek ve yeter koşul

$$A_N X = g\left(H, N\right) X$$

dır. Böylece

$$g\left(A_N X, Y\right) = \widetilde{g}\left(h\left(X, Y\right) N\right) = g\left(X, Y\right) \widetilde{g}\left(H, N\right)$$

elde edilir. Bu ifade keyfi her N normal vektör alanı için geçerli olduğundan ispat tamamlanır. □

Tanım 2.37 *M, $\widetilde{M}$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olmak üzere M manifoldunun ortalama eğrilik vektör alanı sıfır ise M altmanifolduna minimal altmanifold denir (Şahin, 2012).*

Teorem 2.38 *Total umbilik bir alt manifoldun total geodezik olması için gerek ve yeter şart minimal olmasıdır (Chen, 1973).*

İspat. $(\Longrightarrow)$ $\widetilde{M}$ bir Riemann manifoldu ve M, $\widetilde{M}$ manifoldunun total umbilik altmanifoldu olsun. Bu takdirde $\forall X, Y \in \chi\left(M\right)$ için

$$h\left(X, Y\right) = g\left(X, Y\right) H$$

dır. Eğer M total geodezik ise

$$h\left(X, Y\right) = 0$$

olacağından

$$H = 0$$

bulunur. Böylece M minimaldir.

($\Longleftarrow$) M total umbilik altmanifoldu minimal ise

$$H = 0$$

olup $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$h(X, Y) = 0$$

bulunur. Dolayısıyla M total geodeziktir. $\square$

M, $m-$boyutlu bir $\widetilde{M}$ manifoldunun $n-$boyutlu bir altmanifoldu olsun. $\{e_1, ..., e_n\}$, $\chi(M)$ için ortomormal bir baz ve $\{e_{n+1}, ..., e_m\}$, $\chi^{\perp}(M)$ normal uzayının ortonormal bir bazı olmak üzere $p \in M$ noktasında ortalama eğrilik vektörü

$$H(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i) \tag{2.17}$$

ve ikinci temel formun bileşenleri $r = \{n+1, ..., m\}$ olmak üzere

$$h_{ij}^{r} = \langle h(e_i, e_j), e_r \rangle \quad \text{ve} \quad \|h\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \langle h(e_i, e_j), h(e_i, e_j) \rangle \tag{2.18}$$

ile tanımlansın. $\widetilde{K}_{ij}$ ve K_{ij} sırasıyla $\widetilde{M}$ üstmanifoldu ve M altmanifoldunun bir p noktasında e_i ve ej tarafından gerilen düzlem kesitinin kesit eğriliği olsun. Gauss denkleminden

$$R(e_i, e_j, e_j, e_i) = \widetilde{R}(e_i, e_j, e_j, e_i) + \langle h(e_i, e_i), h(e_j, e_j) \rangle - \langle h(e_i, e_j), h(e_i, e_j) \rangle$$

olduğundan

$$K_{ij} = \widetilde{K_{ij}} + \sum_{r=n+1}^{m} \left(h_{ii}^{r} \, h_{jj}^{r} - \left(h_{ij}^{r} \right)^2 \right) \tag{2.19}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$\widetilde{\tau}(T_p M) = \sum_{1 \le ij \le n}^{n} \widetilde{K_{ij}}$$

olmak üzere (2.17) ve (2.18) den

$$nH(P) = \sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i) \text{ ve } h_{ij}^{r} = \langle h(e_i, e_j), e_r \rangle$$

olduğundan, bu ifadeler (2.19) de yerine yazılırsa

$$2\tau(p) = 2\widetilde{\tau}(T_p M) + n^2 \|H(p)\|^2 - \|h\|^2 \tag{2.20}$$

bulunur.

Şimdi $n = 3$ için

$$
\begin{aligned}
\|h\|^2 &= \sum_{i,j=1}^{3} \langle h(e_i, e_j), h(e_i, e_j) \rangle \\
&= \langle h(e_1, e_j), h(e_1, e_j) \rangle + \langle h(e_2, e_j), h(e_2, e_j) \rangle + \langle h(e_3, e_j), h(e_3, e_j) \rangle \\
&= \langle h(e_1, e_1), h(e_1, e_1) \rangle + \langle h(e_1, e_2), h(e_1, e_2) \rangle + \langle h(e_1, e_3), h(e_1, e_3) \rangle \\
&\quad + \langle h(e_2, e_1), h(e_2, e_1) \rangle + \langle h(e_2, e_2), h(e_2, e_2) \rangle + \langle h(e_2, e_3), h(e_2, e_3) \rangle \\
&\quad + \langle h(e_3, e_1), h(e_3, e_1) \rangle + \langle h(e_3, e_2), h(e_3, e_2) \rangle + \langle h(e_3, e_3), h(e_3, e_3) \rangle \\
&= \sum_{r=n+1}^{m} \Big\{ (h_{11}^r + h_{22}^r + h_{33}^r)^2 - 2(h_{11}^r h_{22}^r + h_{22}^r h_{33}^r + h_{11}^r h_{33}^r) \\
&\quad + 2\left((h_{12}^r)^2 + (h_{13}^r)^2 + (h_{23}^r)^2 \right) \Big\} \\
&= \sum_{r=n+1}^{m} \Big\{ \frac{1}{2}(h_{11}^r + h_{22}^r + h_{33}^r)^2 + \frac{1}{2}(h_{11}^r - h_{22}^r - h_{33}^r)^2 - 2(h_{22}^r h_{33}^r) \\
&\quad + 2\left((h_{12}^r)^2 + (h_{13}^r)^2 + (h_{23}^r)^2 \right) \Big\} \\
&= \sum_{r=n+1}^{m} \Big\{ \frac{1}{2}(h_{11}^r + h_{22}^r + h_{33}^r)^2 + \frac{1}{2}(h_{11}^r - h_{22}^r - h_{33}^r)^2 - 2(h_{22}^r h_{33}^r) \\
&\quad + 2(h_{12}^r)^2 + 2(h_{13}^r)^2 + 2(h_{23}^r)^2 \Big\} \\
&= \frac{1}{2} n^2 \|H\|^2 + \sum_{r=n+1}^{m} \Big\{ \frac{1}{2}(h_{11}^r - h_{22}^r - h_{33}^r)^2 - 2(h_{22}^r h_{33}^r) + 2(h_{12}^r)^2 \\
&\quad + 2(h_{13}^r)^2 + 2(h_{23}^r)^2 \Big\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan $n = 3$ özel durumundan benzer bir yolla

$$
\begin{aligned}
\|h\|^2 &= \sum_{r=n+1}^{m} \left\{ (h_{11}^r + h_{22}^r + \dots + h_{nn}^r)^2 \right\} + \sum_{r=n+1}^{m} 2 \sum_{i<j} \left(h_{ij}^r \right)^2 \\
&\quad - 2 \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{2 \le i < j \le n}^{m} h_{ii}^r \, h_{jj}^r \\
&= \sum_{r=n+1}^{m} (h_{11}^r + h_{22}^r + \dots + h_{nn}^r)^2 + \sum_{r=n+1}^{m} (h_{11}^r - h_{22}^r - \dots - h_{nn}^r)^2 \\
&\quad + 2 \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{1<i<j} \left(h_{ij}^r \right)^2 - 2 \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{2 \le i < j \le n}^{m} h_{ii}^r \, h_{jj}^r
\end{aligned}
$$

dir. Böylece son eşitlikten

$$
\begin{aligned}
\|h\|^2 &= \frac{1}{2} n^2 \|H\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{r=n+1}^{m} (h_{11}^r - h_{22}^r - h_{33}^r)^2 - 2 \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{j=2}^{n} \left(h_{ij}^r \right)^2 \\
&\quad - 2 \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{2 \le i < j \le n}^{m} \left(h_{ii}^r h_{jj}^r - \left(h_{ij}^r \right)^2 \right) \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

elde edilir (Chen, 1999).

Teorem 2.39 *M, $m-$boyutlu $\widetilde{M}$ Riemann manifoldunun $n-$boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bu durumda*

i) $T_p^1 M = \{X \in T_p M : \langle X, X \rangle = 1\}$ *olmak şartıyla* $X \in T_p^1 M$ *için*

$$Ric\,(X) \leq \frac{1}{4} n^2 \|H\|^2 + \widetilde{Ric}_{T_P M}\,(X) \qquad (2.22)$$

dır. Burada $\widetilde{Ric}_{T_P M}\,(X)$, $X \in T_p^1 M$ *de* $\widetilde{M}$ *nın n-Ricci eğriliğidir.*

ii) $X \in T_p^1 M$ *için* (2.22) *eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter koşul*

$$\begin{cases} h\,(X, Y) = 0, \ \forall Y \in T_p M, \quad X \in T_p^1 M, \ \ Y \perp X \\ \quad h\,(X, X) = \frac{n}{2} H\,(p) \end{cases} \qquad (2.23)$$

olmasıdır.

iii) $\forall X \in T_p^1 M$ *için* (2.22) *eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter koşul ya* p *total geodezik nokta ya da* $n = 2$ *için* p *total umbilik nokta olmasıdır (Tripathi, 2003).*

İspat. (2.20) eşitliğinde (2.21) eşitliği yazılırsa

$$\begin{aligned} 2\tau\,(p) &= 2\widetilde{\tau}\,(T_p M) + n^2 \|H\,(p)\|^2 - \frac{1}{2} n^2 \|H\|^2 \\ &\quad -\frac{1}{2} \sum_{r=n+1}^{m} (h_{11}^r - h_{22}^r - \ldots - h_{nn}^r)^2 - 2 \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{j=2}^{n} \left(h_{ij}^r\right)^2 \\ &\quad +2 \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{2 \leq i < j \leq n}^{m} \left(h_{ii}^r\, h_{jj}^r - \left(h_{ij}^r\right)^2\right) \\ &= 2\widetilde{\tau}\,(T_p M) + \frac{1}{2} n^2 \|H\,(p)\|^2 - \frac{1}{2} \sum_{r=n+1}^{m} (h_{11}^r - h_{22}^r - \ldots - h_{nn}^r)^2 \\ &\quad -2 \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{j=2}^{n} \left(h_{ij}^r\right)^2 + 2 \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{2 \leq i < j \leq n}^{m} \left(h_{ii}^r\, h_{jj}^r - \left(h_{ij}^r\right)^2\right) \\ &= \widetilde{\tau}\,(T_p M) + \frac{1}{4} n^2 \|H\,(p)\|^2 - \frac{1}{4} \sum_{r=n+1}^{m} (h_{11}^r - h_{22}^r - \ldots - h_{nn}^r)^2 \\ &\quad - \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{j=2}^{n} \left(h_{ij}^r\right)^2 + \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{2 \leq i < j \leq n}^{m} \left(h_{ii}^r\, h_{jj}^r - \left(h_{ij}^r\right)^2\right) \qquad (2.24) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} n^2 \|H\,(p)\|^2 &= \tau\,(p) - \widetilde{\tau}\,(T_p M) + \frac{1}{4} \sum_{r=n+1}^{m} (h_{11}^r - h_{22}^r - \ldots - h_{nn}^r)^2 \\ &\quad + \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{j=2}^{n} \left(h_{ij}^r\right)^2 - \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{2 \leq i < j \leq n}^{m} \left(h_{ii}^r\, h_{jj}^r - \left(h_{ij}^r\right)^2\right) \qquad (2.25) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca (2.19) den

$$K_{ij} = \widetilde{K_{ij}} + \sum_{r=n+1}^{m} \left(h_{ii}^{r}\, h_{jj}^{r} - \left(h_{ij}^{r} \right)^{2} \right)$$

olup

$$\sum_{r=n+1}^{m} \sum_{2 \leq i < j \leq n}^{m} \left(h_{ii}^{r}\, h_{jj}^{r} - \left(h_{ij}^{r} \right)^{2} \right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{m} K_{ij} - \widetilde{K_{ij}} \tag{2.26}$$

dır. Burada

$$Ric\,(e_1) = \tau\,(p) - \sum_{2 \leq i < j \leq n}^{m} K_{ij}, \quad \widetilde{Ric}_{T_pM}\,(e_1) = \widetilde{\tau}\,(p) - \sum_{2 \leq i < j \leq n}^{m} \widetilde{K}_{ij}$$

olduğundan (2.25) ve (2.26) dan

$$\begin{aligned} \tau\,(p) &= \frac{1}{4} n^2 \left\| H\,(p) \right\|^2 + \widetilde{\tau}\,(T_pM) - \frac{1}{4} \sum_{r=n+1}^{m} \left(h_{11}^{r} - h_{22}^{r} - \ldots - h_{nn}^{r} \right)^2 \\ & - \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{j=2}^{n} \left(h_{ij}^{r} \right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{m} K_{ij} - \widetilde{K_{ij}} \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} Ric\,(e_1) &= \frac{1}{4} n^2 \left\| H\,(p) \right\|^2 + \widetilde{Ric}_{T_pM}\,(e_1) - \frac{1}{4} \sum_{r=n+1}^{m} \left(h_{11}^{r} - h_{22}^{r} - \ldots - h_{nn}^{r} \right)^2 \\ & - \sum_{r=n+1}^{m} \sum_{j=2}^{n} \left(h_{ij}^{r} \right)^2 \end{aligned} \tag{2.27}$$

elde edilir. $X = e_1$ seçelim. (2.27) ifadesinden teoremde verilen (2.22) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter koşul $r = \{n+1, ..., m\}$ için

$$h_{12}^{r} = \ldots = h_{1n}^{r} = 0 \quad \text{ve} \quad h_{11}^{r} = h_{22}^{r} + \cdots + h_{nn}^{r}$$

olmasıdır. Böylece

$$n \left\| H\,(p) \right\| = h_{11}^{r} + h_{22}^{r} + ... + h_{nn}^{r} = 2h_{11}^{r}$$

olur. Bu ise (2.23) ifadesine denktir. O halde (**ii**) ispatlanmış olur.

$\forall X \in T_p^1 M$ için (2.22) nın eşitlik durumu sağlansın. (2.23) den $r = \{n+1, \ldots, m\}$ için

$$h_{ij}^{r} = 0 \;\; i \neq j \tag{2.28}$$

ve

$$2h_{ii}^{r} = h_{11}^{r} + h_{22}^{r} + \cdots + h_{nn}^{r} \tag{2.29}$$

elde edilir. (2.29) den

$$\begin{aligned} & 2h_{11}^r = 2h_{22}^r = \ldots = 2h_{nn}^r = h_{11}^r + h_{22}^r + \cdots + \ h_{nn}^r \\ \Rightarrow \ & 2h_{11}^r + 2h_{22}^r + \cdots + 2h_{nn}^r = n\left(h_{11}^r + h_{22}^r + \cdots + h_{nn}^r\right) \\ \Rightarrow \ & 2\left(h_{11}^r + h_{22}^r + \cdots + h_{nn}^r\right) = n\left(h_{11}^r + h_{22}^r + \cdots + h_{nn}^r\right) \\ \Rightarrow \ & (n-2) = \left(h_{11}^r + h_{22}^r + \cdots + h_{nn}^r\right) = 0 \end{aligned}$$

olur. Bundan dolayı ya $h_{11}^r + h_{22}^r + \cdots + h_{nn}^r = 0$ ya da $n = 2$ dir. Eğer $h_{11}^r + h_{22}^r + \cdots + h_{nn}^r = 0$ ise (2.29) den $h_{ii}^r = 0$ dır ve (2.28) den $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$ için $h_{ij}^r = 0$ olur ki bu da p nin bir total geodezik nokta olduğunu gösterir. Eğer $n = 2$ ise (2.29) eşitliğinden $2h_{11}^r = 2h_{22}^r = \cdots = h_{11}^r + h_{22}^r$ olur ki p nin bir total umbilik noktadır. □

Teorem 2.40 *M, $m-$boyutlu bir $\widetilde{M}$ Riemann manifoldunun $n-$boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bu durumda*

$$\tau(p) \leq \frac{1}{2} n^2 \|H\|^2 + \widetilde{\tau}(T_pM) \tag{2.30}$$

dir. Bu eşitsizlikte eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul M altmanifoldunun total geodezik olmasıdır (Tripathi, 2003).

İspat. (2.20) eşitliğinden

$$\tau(p) = \widetilde{\tau}(T_pM) + \frac{1}{2} n^2 \|H(p)\|^2 - \frac{1}{2}\|h\|^2$$

olup

$$\tau(p) \leq \frac{1}{2} n^2 \|H(p)\|^2 + \widetilde{\tau}(T_pM)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter koşul $\|h\|^2 = 0$ olması, yani $h = 0$ dır. Bu ise M nin total geodezik olduğunu gösterir. □

Lemma 2.41 *$n > 1$ ve $a_1, a_2, ..., a_n$ reel sayı $n-$lisi için*

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \tag{2.31}$$

dir (Şahin, 1996).

İspat.

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{i<j}(a_i-a_j)^2=(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+...+(a_1-a_n)^2\\
&\quad+(a_2-a_3)^2+...+(a_2-a_n)^2+...+(a_{n-1}-a_n)^2\\
&= a_1^2-2a_1a_2+a_2^2+a_1^2-2a_1a_3+a_3^2+...+a_1^2-2a_1a_n+a_n^2\\
&\quad+a_2^2-2a_2a_3+a_3^2+...+a_2^2-2a_2a_n+a_n^2+...+a_{n-1}^2-2a_{n-1}a_n+a_n^2\\
&= (n-1)\sum_i(a_i)^2-2\sum_{i<j}a_ia_j
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
0 &\leq (n-1)\sum_i(a_i)^2-2\sum_{i<j}a_ia_j\\
&\Longrightarrow 2\sum_{i<j}a_ia_j\leq(n-1)\sum_i(a_i)^2\\
&\Longrightarrow \sum_i(a_i)^2+2\sum_{i<j}a_ia_j\leq n\sum_i(a_i)^2\\
&\Longrightarrow \frac{1}{n}\left(\sum_i(a_i)\right)^2\leq n\sum_i(a_i)^2\\
&\Longrightarrow \frac{1}{n}\left(\sum_i a_i\right)^2\leq\sum_i(a_i)^2
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 2.42 *M, $m-$boyutlu bir $\widetilde{M}$ Riemann manifoldunun $n-$boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bu durumda*

$$\tau(p)\leq\frac{n(n-1)}{2}\|H(p)\|^2+\tilde{\tau}(T_pM) \qquad (2.32)$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul p nin totol umbilik nokta olmasıdır (Tripathi, 2003).

İspat. $\{e_1,...,e_n,e_{n+1},...,e_m\}$, p noktasında $T_p\widetilde{M}$ nin ortonormal bir bazı olsun. Öyle ki $\{e_1,...,e_n\}$ kümesi p noktasında M altmanifolduna teğet , $e_{n+1}, H(p)$ ortalama eğrilik vektörüne parelel ve $\{e_1,...,e_n\}$, A_{n+1} şekil operatörünü köşegenleştirsin. Bu durumda şekil operatörü $\forall i,j=\{1,2,...,n\}$ ve $r=\{n+2,...,m\}$ olmak üzere

$$A_{n+1}=diag\left(h_{11}^{n+1},h_{22}^{n+1},...,h_{nn}^{n+1}\right) \qquad (2.33)$$

ve

$$A_{e_r}=h_{ij}^r,\ \ \mathrm{iz}A_{e_r}=\sum_{i=1}^{n}h_{ii}^r=0 \qquad (2.34)$$

olur. Ayrıca

$$H(p)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h(e_i,e_i)$$

ve

$$\langle nH(p),nH(p)\rangle=\left\langle \sum_{i=1}^{n}h(e_i,e_i),\sum_{i=1}^{n}h(e_i,e_i)\right\rangle$$

olduğu göz önune alınırsa

$$\begin{aligned} n^2\|H(p)\|^2 &= \left(h_{11}^{r+1}+...+h_{nn}^{r+1}\right)^2+...+\left(h_{11}^{m},...,h_{nn}^{m}\right)^2 \\ &= \left(h_{11}^{r+1}+...+h_{nn}^{r+1}\right)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (2.20) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \|h\|^2 &= \left(h_{11}^r\right)^2+...+\left(h_{nn}^r\right)^2+2\left(h_{12}^r\right)^2+...+2\left(h_{1n}^r\right)^2+2\left(h_{23}^r\right)^2+...+2\left(h_{2n}^r\right)^2 \\ &\quad +2\left(h_{n-11}^r\right)^2+...+2\left(h_{n-1n}^r\right)^2 \end{aligned}$$

dir. $r=n+1$ için $h_{ij}^r=0$ olduğundan

$$\begin{aligned} 2\tau(p) &= 2\widetilde{\tau}(T_pM)+n^2\|H(p)\|^2-\sum_{i=1}^{n}\left(h_{ii}^{n+1}\right)^2 \\ &\quad -\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(h_{ij}^r\right)^2 \end{aligned} \tag{2.35}$$

elde edilir. Lemma 2.41 den

$$n\|H(p)\|^2\leq\sum_{i=1}^{n}\left(h_{ii}^{n+1}\right)^2 \tag{2.36}$$

olur. (2.35) ve (2.36) den

$$\tau(p)\leq\widetilde{\tau}(T_pM)+\frac{n(n-1)}{2}\|H(p)\|^2-\frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(h_{ij}^r\right)^2$$

dır. (2.32) eşitsizliği sağlanır. Lemma 2.41 ve (2.34) den

$$h_{11}^{n+1}=h_{22}^{n+1}=...=h_{nn}^{n+1}\ \text{ ve }\ r=\{n+2,...,m\}\ \text{ için } A_{e_r}=0$$

olur. Böylece p bir total umbilik noktadır.

Tersine p bir total umbilik nokta ise

$$h_{11}^{n+1}=h_{22}^{n+1}=...=h_{nn}^{n+1}\text{ ve }h_{ij}^{n+1}=0$$

dır. Ayrıca

$$n\|H(p)\|^2=\sum_{i=1}^{n}\left(h_{ii}^{n+1}\right)^2$$

olduğundan

$$\tau\left(p\right)=\frac{n\left(n-1\right)}{2}\left\|H\left(p\right)\right\|^{2}+\widetilde{\tau}\left(T_{p}M\right)$$

elde edilir.

□

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Cebirsel Kavramlar

Tanım 3.1 *V reel bir vektör uzayı olmak üzere*

$$V^c = \{Z \mid Z = X + iY; X, Y \in V\} \tag{3.1}$$

kümesini gözönüne alalım. V^c üzerinde aşağıda verilen işlemleri tanımlayalım.

$$\begin{aligned} + : V^c \times V^c &\rightarrow V^c \\ (Z, Z_1) &\rightarrow Z + Z_1 = (X + iY) + (X_1 + iY_1) = (X + X_1) + i(Y + Y_1) \end{aligned} \tag{3.2}$$

ve

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{C} \times V^c &\rightarrow V^c \\ (\lambda, Z) &\rightarrow (c_1 + ic_2)(X + iY) = (c_1X - c_2Y) + i(c_2X + c_1Y). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Bu işlemlere göre V^c bir vektör uzayı yapısına sahip olup bu uzaya V nin komplekslestirilmiş uzayı denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 3.2 *I dönüşümü V üzerinde tanımlı birim dönüşüm olmak üzere V vektör uzayı üzerinde $J^2 = -I$ ile tanımlı J lineer endomorfizmine bir kompleks yapı denir.*

V, J kompleks yapısıyla verilen bir reel vektör uzayı ve $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ve $\forall X \in V$ için V üzerinde

$$(c_1 + ic_2)X = c_1X + c_2JX \tag{3.4}$$

çarpma işlemi tanımlansın. Bu durumda V kompleks bir vektör uzayı olur. Tersine V, kompleks bir vektör uzayı olsun. V üzerinde J endomorfizmi

$$JX = iX \tag{3.5}$$

ile tanımlanırsa J, V nin kompleks yapısı olur (Hsiung, 1995).

Önerme 3.3 *Bir J kompleks yapıya sahip V reel vektör uzayının boyutu çifttir (Martin, 1991).*

İspat. $\{e_1, \ldots, e_n\}$, V nin ortonormal bir bazı olsun. $u = \sum_{k=1}^{n} u^k e_k \in V$ vektörü için

$$J(u) = J\left(\sum_{k=1}^{n} u^k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} u^k J(e_k) = \sum_{k=1}^{n} u^k J_k^i e_i \tag{3.6}$$

yazılabilir. Burada

$$J(e_k) = \sum_{k=1}^{n} J_k^i e_i \tag{3.7}$$

dır. (3.5) eşitliğinden

$$-u = -I(u) = J^2(u) = J(J(u)) = J\left(u^k J_k^i e_i\right) = u^k J_k^i J(e_i) = u^k J_k^i J_i^j e_j$$

elde edilir. Son eşitlikten δ_k^j Kronecker deltası olmak üzere

$$J_k^i J_i^j = -\delta_k^j \tag{3.8}$$

bulunur. J kompleks yapısının $n \times n$ tipindeki matrisini $\left(J_j^i\right)$ ile gösterirsek, burada J_j^i elemanı i.sütun, j. satır elemanını gösterir. $\left(J_j^i\right)$ matrisinin determinantı $\left|J_j^i\right|$ olmak üzere (3.8) de verilen matrislerin determinantı alınırsa

$$(-1)^n = \left|J_k^i J_i^j\right| = \left|J_k^i\right| . \left|J_i^j\right| = \left|J_i^j\right|^2$$

eşitliğinden n nin çift olduğu görülür. □

Örnek 3.4 *$\mathbb{C}^n$ kompleks vektör uzayı ve $W \in \mathbb{C}^n$, $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, $w_k = x_k + iy_k$, $1 \leq k \leq n$ ve $i^2 = -1$ olsun.*

$$\begin{aligned} JW &= iW \\ &= (iw_1, iw_2, \ldots, iw_n) \end{aligned}$$

olacak şekilde J tensörü tanımlanabilir. Böylece $\mathbb{R}^{2n}$ üzerinde $X = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ vektörü için

$$JX = (-y_1, \ldots, -y_n, x_1, \ldots, x_n)$$

tanımlanırsa

$$J(JX) = (-x_1, \ldots, -x_n, -y_1, \ldots, -y_n)$$

elde edilir. Bu durumda $\forall X \in \mathbb{R}^{2n}$ için $J^2 X = -X$ olur. Dolayısıyla J, $\mathbb{R}^{2n}$ üzerinde bir kompleks yapıdır.

Önerme 3.5 *J, boyutlu $2n$ olan reel bir vektör uzayı V nin kompleks yapısı olsun. Bu durumda $\{X_1, \ldots, X_n\}$ lineer bağımsız vektörler ise*

$$\{X_1, \ldots, X_n, JX_1, \ldots, JX_n\}$$

kümesi V üzerinde bir bazıdır (Kobayashi ve Nomizu, 1969).

İspat. $\{X_1, \ldots, X_n\}$, V de lineer bağımsız bir küme olsun. Bu durumda $c_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, ..., n$ için

$$c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_n = 0$$

iken

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$$

bulunur. Burada $c_j = a_j + ib_j$ yazılırsa

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j + ib_j) X_j = 0$$

olup $\forall j \in \{1, 2, ..., n\}$ için $a_j = b_j = 0$ olur. O halde (3.4) den

$$a_1X_1 + b_1JX_1 + a_2X_2 + b_2JX_2 + ... + a_nX_n + b_nJX_n = 0 \tag{3.9}$$

iken $\forall j \in \{1, 2, ..., n\}$ için $a_j = b_j = 0$ olur. Bu ise $\{X_1, \ldots, X_n, JX_1, \ldots, JX_n\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğunu gösterir.

V nin boyutu $2n$ olduğundan ve $\{X_1, \ldots, X_n, JX_1, \ldots, JX_n\}$ kümesi lineer bağımsız olduğundan $\{X_1, \ldots, X_n, JX_1, \ldots, JX_n\}$, V vektör uzayının bir bazıdır. $\square$

Şimdi $\mathbb{R}^{2n}_J$ ile J kompleks yapıya sahip $2n$-boyutlu bir reel vektör uzayını gösterelim.

Teorem 3.6 $\mathbb{R}^{2n}$, *J kompleks yapısına sahip $2n-$boyutlu reel bir vektör uzayı olmak üzere $\mathbb{R}^{2n}_J$ ile $\mathbb{C}^n$ uzayları birbirine izomorftur (Okubu, 1987).*

İspat. $\mathbb{C}^n$ kompleks vektör uzayı olmak üzere $\mathbb{C}^n$ nin bir bazı $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ verilsin. Bu durumda $\mathbb{R}^{2n}$ nin elemanlarını $a^kX_k + b^kJX_k$ formunda ve $\mathbb{C}^n$ nin elemanlarını

$\left(a^k + ib^k\right) \xi_k$ şeklinde yazabiliriz. Böylece

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^{2n} & \rightarrow & \mathbb{C}^n \\ X & \rightarrow & \sum\limits_{k=1}^{n} \left(a^k + ib^k\right) \xi_k \end{array} \tag{3.10}$$

ile tanımlanan dönüşüm lineerdir. Gerçekten; $X = \sum\limits_{k=1}^{n} a^k X_k + b^k JX_k$, $Y = \sum\limits_{k=1}^{n} c^k X_k + d^k JX_k$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f(\lambda X) &= f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda a^k X_k + \lambda b^k JX_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda a^k + \lambda i b^k\right) \xi_k \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{n} \left(a^k + ib^k\right) \xi_k \\ &= \lambda f(X) \end{aligned} \tag{3.11}$$

ve

$$\begin{aligned} f(X+Y) &= f\left(\sum_{k=1}^{n} \left(a^k X_k + b^k JX_k + c^k X_k + d^k JX_k\right)\right) \\ &= f\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\left(a^k + c^k\right) X_k + \left(b^k + d^k\right) JX_k\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\left(a^k + c^k\right) + i\left(b^k + d^k\right)\right) \xi_k\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(a^k + ib^k\right) \xi_k + \sum_{k=1}^{n} \left(c^k + id^k\right) \xi_k \\ &= f(X) + f(Y) \end{aligned} \tag{3.12}$$

olur. Böylece f lineer bir dönüsüm olur. Şimdi f nin birebir olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $f(X) = f(Y)$ olsun. Bu durumda

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} a^k X_k + b^k JX_k\right) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \left(c^k X_k + d^k JX_k\right)\right) \tag{3.13}$$

eşitliğinden

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a^k + ib^k\right) \xi_k = \sum_{k=1}^{n} \left(c^k + id^k\right) \xi_k. \tag{3.14}$$

Böylece

$$\left(a^k + ib^k\right) = \left(c^k + id^k\right) \Rightarrow a^k = c^k, b^k = d^k \tag{3.15}$$

olur. Buradan $X = Y$ elde edilir. Bu ise f nin birebir olduğunu gösterir. Şimdi f nin örten bir dönüşüm olduğunu gösterelim. $\forall Z \in \mathbb{C}^n$ için

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{k=1}^{n} \left(\left(a^k + ib^k \right) \xi_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a^k \xi_k + i \sum_{k=1}^{n} b^k \xi_k \end{aligned}$$

olmak üzere f lineer olduğundan $k = \{1, \ldots, n\}$ için $f(X_k) = \xi_k$ olacak şekilde $\{X_1, \ldots, X_n, JX_1, \ldots, JX_n\}$ bazı vardır. O halde $\forall Z \in \mathbb{C}^n$ için bir tek

$$X = \sum_{k=1}^{n} a^k X_k + b^k JX_k \in \mathbb{R}_J^{2n} \tag{3.16}$$

olmak üzere $f(X) = Z$ eşitliği sağlayan bir tek $X \in \mathbb{R}_J^{2n}$ vardır. Dolayısıyla f örtendir. Böylece f bir vektör uzayı izomorfizmasıdır. □

$\mathbb{R}^{2n}$ in kompleks yapısı J_0, $Z_k = X_k + iY_k$ olmak üzere

$$\begin{aligned} J_0 : \mathbb{R}^{2n} &\rightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) &\rightarrow (y_1, \ldots, y_n, -x_1, \ldots, -x_n) \end{aligned}$$

ile verilsin. Burada tanımlanan J_0 tensörüne kanonik kompleks yapı denir ve J_0 tensörüne karşılık gelen matris $[J_0]$ olmak üzere

$$[J_0] = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

dır (Kobayashi ve Nomizu, 1969).

Teorem 3.7 *J, V üzerinde bir kompleks yapı ve V nin bir bazı $\{X_1, \ldots, X_n, JX_1, \ldots, JX_n\}$ ise*

$$Z_k = \frac{1}{2}(X_k - iJX_k), \quad \overline{Z_k} = \frac{1}{2}(X_k + iJX_k) \tag{3.18}$$

olmak üzere $\left\{Z_1, \ldots, Z_n, \overline{Z_1}, \ldots, \overline{Z_n}\right\}$ kümesi V^c nin bir bazıdır (Yano ve Kon, 1984).

İspat. Önce $c^k, \lambda^k \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\left\{Z_1, \ldots, Z_n, \overline{Z}_1, \ldots, \overline{Z}_n\right\}$ cümlesinin lineer bağımsız olduğunu gösterelim.

$$\sum_k \lambda^k Z_k + \sum_k c^k \overline{Z_k} = 0$$

olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{2}\sum_{k}\lambda^{k}\left(X_{k}-iJX_{k}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k}c^{k}\left(X_{k}+iJX_{k}\right)=0$$

olup

$$\sum_{k}\left(\lambda^{k}+c^{k}\right)X_{k}+i\sum_{k}\left(c^{k}-\lambda^{k}\right)JX_{k}=0$$

elde edilir. Burada $\{X_1,...,X_n,JX_1,...,JX_n\}$lineer bağımsız olduğundan

$$\lambda^{k}+c^{k}=0 \text{ ve } c^{k}-\lambda^{k}=0$$

dır. Bu ise

$$c^{k}=\lambda^{k}=0$$

olduğunu gösterir.

Şimdi $V^c=\text{span}\left\{Z_1,\ldots,Z_n,\overline{Z}_1,\ldots,\overline{Z}_n\right\}$ olduğunu gösterelim.
$Z=X+iY\in V^c$, $X,Y\in V$ ve V nin bir bazı $\{X_1,\ldots,X_n,JX_1,\ldots,JX_n\}$ olmak üzere

$$Z=\sum_{k=1}^{n}\left(a^{k}X_{k}+b^{k}JX_{k}\right)+i\sum_{k=1}^{n}\left(c^{k}X_{k}+d^{k}JX_{k}\right)$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_{k=1}^{n}\left(a^{k}\left(Z_{k}+\overline{Z_{k}}\right)+i\,b^{k}\left(\overline{Z_{k}}-Z_{k}\right)\right)+i\sum_{k=1}^{n}\left(c^{k}\left(Z_{k}+\overline{Z_{k}}\right)+i\,d^{k}\left(\overline{Z_{k}}-Z_{k}\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(a^{k}Z_{k}+a^{k}\overline{Z_{k}}+i\,b^{k}\overline{Z_{k}}-i\,b^{k}Z_{k}+i\,c^{k}Z_{k}+i\,c^{k}\overline{Z_{k}}-d^{k}\overline{Z_{k}}+d^{k}Z_{k}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\left(a^{k}-i\,b^{k}\right)Z_{k}+\left(d^{k}+i\,c^{k}\right)Z_{k}+\left(a^{k}+i\,b^{k}\right)\overline{Z_{k}}+\left(-d^{k}+i\,c^{k}\right)\overline{Z_{k}}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\left(\left(a^{k}+d^{k}\right)+i\left(-b^{k}+c^{k}\right)\right)Z_{k}+\left(\left(a^{k}-d^{k}\right)+i\left(b^{k}+c^{k}\right)\right)\overline{Z_{k}}\right.\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_{k}Z_{k}+\mu\overline{Z_{k}}\right)\in V^{c}
\end{aligned}$$

olup bu ise $V^c=\text{Span}\left\{Z_1,\ldots,Z_n,\overline{Z_1},\ldots,\overline{Z_n}\right\}$ olduğunu gösterir. □

Teorem 3.8 *J, V üzerinde tanımlanan bir kompleks yapı olmak üzere*

$$\begin{aligned}
\widetilde{J}:V^{c} &\rightarrow V^{c}\\
Z &\rightarrow \widetilde{J}(Z)=\widetilde{J}(X+iY)=J(X)+iJ(Y)
\end{aligned}\tag{3.19}$$

dönüşümü V^c üzerinde bir kompleks yapıdır (Yano ve Kon, 1984).

İspat. $\widetilde{J}$ dönüşümünün V^c üzerinde bir kompleks yapı olduğunu göstermek için; $\widetilde{J}$ nın bir endomorfizm ve $\widetilde{J}^2 = -I$ olduğunu göstermek yeterlidir.
$\forall Z, Z' \in V^c$ için $Z = X + iY$ ve $Z' = X' + Y'$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \widetilde{J}(Z+Z') &= \widetilde{J}((X+iY)+(X'+iY')) \\ &= \widetilde{J}((X+X')+i(Y+Y')) \\ &= J(X+X')+iJ(Y+Y') \\ &= JX+JX'+iJY+iJY' \\ &= \widetilde{J}(X+iY)+\widetilde{J}(X'+iY') \\ &= \widetilde{J}(Z)+\widetilde{J}(Z') \end{aligned}$$

ve $c = (a+ib) \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \widetilde{J}((a+ib)(X+iY)) &= \widetilde{J}((aX-bY)+i(aY+bX)) \\ &= J(aX-bY)+iJ(aY+bX) \\ &= aJX-bJY+iaJY+ibJX \\ &= a(JX+iJY)+ib(JX+iJY) \\ &= (a+ib)(JX+iJY) \\ &= (a+ib)\widetilde{J}(X+iY) \end{aligned}$$

olduğundan $\widetilde{J}$ nün bir endomorfizma olduğu görülür.

Şimdi $J^2 = -I$ olduğunu gösterelim. $\forall (X+iY) \in V^c$ için

$$\begin{aligned} \widetilde{J}^2(X+iY) &= \widetilde{J}(JX+iJY) \\ &= J(JX)+iJ(JY) \\ &= -(X+iY) \\ &= -I \end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır. □

Örnek 3.9 $\mathbb{R}^{2n}$ *reel vektör uzayı ve* $\mathbb{R}^{2n}$ *nin kompleksleştirilmişi olan* $\mathbb{C}^n$ *kompleks vektör uzayını göz önüne alalım.* $Z \in \mathbb{C}^n$, $W = (W_1, \ldots, W_n)$, $W_s = X_s + iY_s,\ 1 \le s \le n$ *olsun.*

$$\begin{aligned} JW_k &= iW_k \\ &= -Y_k + iX_k \end{aligned}$$

olup $\mathbb{R}^{2n}$ *üzerinde* J_1 *kompleks yapısı*

$$\begin{aligned} J_1 &: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n} \\ (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n) &\to (-y_1, x_1, -y_2, x_2, \ldots, -y_n, x_n) \end{aligned}$$

olarak tanımlanabilir.

Örnek 3.10 $\mathbb{C}^n$ *kompleks vektör uzayı ve* $Z \in \mathbb{C}^n$, $Z = (Z_1 \ldots, Z_n)$, $1 \leq k \leq n$ *ve* $i^2 = -1$ *olsun.* $Z_k = X_k + iY_k$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} JZ_k &= -iZ_k \\ &= Y_k - iX_k \end{aligned}$$

olup V^c *üzerinde* J_2 *kompleks yapısı*

$$\begin{aligned} J_2 &: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n} \\ (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n) &\to (y_1, -x_1, y_2, -x_2, \ldots, y_n, -x_n) \end{aligned}$$

olarak tanımlanabilir.

Şimdi $Z_k = \frac{1}{2}(X_k - iJX_k)$, $\overline{Z_k} = \frac{1}{2}(X_k + iJX_k)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} J(Z_k) &= \frac{1}{2}\left(JX_k - iJ^2 X_k\right) \\ &= \frac{1}{2}(JX_k + iX_k) \\ &= i\left(\frac{1}{2}X_k - i\frac{1}{2}JX_k\right) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$J(Z_k) = iZ_k$$

elde edilir. Benzer olarak

$$\begin{aligned} J\left(\overline{Z_k}\right) &= \frac{1}{2}\left(JX_k +, iJ^2 X_k\right) \\ &= \frac{1}{2}(JX_k - iX_k) \\ &= -i\left(\frac{1}{2}X_k + i\frac{1}{2}JX_k\right) \end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$J\left(\overline{Z_k}\right) = -i\overline{Z_k}$$

elde edilir. Böylece elde ettiğmiz eşitliklerden V^c nin iki alt cümlesi

$$V^{1,0} = \{Z \mid Z \in V^c : JZ = iZ\}, \tag{3.20}$$

ve

$$V^{0,1} = \{Z \mid Z \in V^c : JZ = -iZ\} \tag{3.21}$$

tanımlanabilir.

Teorem 3.11 *V^c kompleksleştirilmiş vektör uzayı olmak üzere*

$$V^c = V^{1,0} \oplus V^{0,1} \tag{3.22}$$

dır (Martin, 1991).

İspat. Kabul edelim ki $V^{1,0} \cap V^{0,1} \neq \{0\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} Z \in V^{1,0} \quad &\Longrightarrow \quad Z = \frac{1}{2}(X_1 - iJX_1) \\ Z \in V^{0,1} \quad &\Longrightarrow \quad Z = \frac{1}{2}(X_2 + iJX_2) \end{aligned}$$

dır. Buradan $X_1 - X_2 = 0$ ve $2JX_1 = 0$ olur. J lineer ve birebir olduğundan $X_1 = X_2 = 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir.

$Z \in V^c, Z = Y_1 + Y_2$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{2}[X_1 + JX_2 - iJ(X_1 + JX_2)] \in V^{1,0} \\ Y_2 &= \frac{1}{2}[X_1 - JX_2 + iJ(X_1 - JX_2)] \in V^{0,1} \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ise $V^c = V^{1,0} + V^{0,1}$ olduğunu gösterir. Buradan ispat tamamlanır. □

3.2. $\mathbb{C}^n$ de Holomorfik Fonksiyonlar

$\mathbb{C}^n$ ile $\mathbb{R}^{2n}$ izomorf olduğundan $\mathbb{C}^n$ uzayı $2n-$boyutlu bir afin uzay olarak ele alınabilir. Buna göre $\mathbb{C}^n$ nin bir p noktası $T_p\mathbb{R}^{2n}$ olarak alınır. Böylece $T_p\mathbb{R}^{2n}$ nin bir bazı $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \frac{\partial}{\partial y_1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_k}|_p, \frac{\partial}{\partial y_k}|_p\right\}$, $k \in \{1, ..., n\}$ için

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Z_k}|_p &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_k}|_p - i\frac{\partial}{\partial y_k}|_p\right\} \\ \frac{\partial}{\partial \overline{Z_k}}|_p &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_k}|_p + i\frac{\partial}{\partial y_k}|_p\right\} \end{aligned} \tag{3.23}$$

tanımlanabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \mid_p &= \left\{ \frac{\partial}{\partial Z_k} \mid_p + i \frac{\partial}{\partial \overline{Z_k}} \mid_p \right\} \\ \frac{\partial}{\partial y_k} \mid_p &= i \left\{ \frac{\partial}{\partial Z_k} \mid_p - i \frac{\partial}{\partial \overline{Z_k}} \mid_p \right\} \end{aligned} \tag{3.24}$$

olur. O halde $T_p\mathbb{R}^{2n}$ üzerinde

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial Z_1} \mid_p, \frac{\partial}{\partial \overline{Z_1}} \mid_p, ..., \frac{\partial}{\partial Z_n} \mid_p, \frac{\partial}{\partial \overline{Z_n}} \mid_p \right\} \tag{3.25}$$

kümesi bir bazdır (Okubu, 1987).

Tanım 3.12 *$\mathbb{C}^n$ nin bir W açık alt cümlesinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon f olsun. Eğer $f(p) = u(p) + iv(p)$ fonksiyonunun reel ve imajiner kısımları C^1 sınıfından ise f ye C^1 sınıfındandır denir.*

Ayrıca, f nin kısmi ve total diferansiyelleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \mid_p f &= \frac{\partial}{\partial x_k} \mid_p u + i \ \frac{\partial}{\partial x_k} \mid_p v \\ \frac{\partial}{\partial y_k} \mid_p f &= \frac{\partial}{\partial y_k} \mid_p u + i \frac{\partial}{\partial y_k} \mid_p v \end{aligned} \tag{3.26}$$

ve

$$df \mid_p = du \mid_p + i \ dv \mid_p \tag{3.27}$$

ile tanımlanır (Okubu, 1987).

Tanım 3.13 *$\mathbb{C}^n$ nin bir W açık alt cümlesinde tanımlı kompleks değerli bir fonksiyon f olsun. $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$ için $p = z_0 \in D$ noktasında*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f\left(z_{0_k} + \Delta z_k\right) - f\left(z_{0_k}\right)}{\Delta z_k}$$

limit değeri her k için mevcut ve z_k, Δx_k ve Δy_k yaklaşımından bağımsız ise kompleks değerli f fonksiyonuna holomorfiktir denir. Bu durumda

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial y_k}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y_k} = -\frac{\partial v}{\partial x_k} \tag{3.28}$$

Couchy-Riemann denklemlerine sahip oluruz. $W \subset \mathbb{C}^n$ üzerinde verilen kompleks değerli f fonksiyonu Couchy-Riemann denklemlerini sağlarsa f ye holomorfik bir fonksiyon denir (Okubu, 1987).

Örnek 3.14

$$\begin{aligned} f:\mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\rightarrow f(z)=e^{z} \end{aligned}$$

ile tanımlanan fonksiyon holomorfiktir. Gerçekten; $z=x+iy$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{x+iy}=e^{x}.e^{iy} \\ &= e^{x}.(\cos y+i\sin y) \\ &= e^{x}\cos y+ie^{x}\sin y \end{aligned}$$

olur. Burada $u(x,y)=e^{x}\cos y$ *ve* $v(x,y)=e^{x}\sin y$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}=e^{x}\cos y, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}=-e^{x}\sin y \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise f *nin holomorfik olduğunu gösterir (Berreira ve Valls, 2012).*

Önerme 3.15 $W\subset\mathbb{C}^{n}$ *üzerinde verilen kompleks değerli bir* f *fonksiyonunun* z_0 *noktasında holomorfik bir fonksiyondur gerek ve yeter şart* f *fonksiyonu* z_0 *noktasında* C^1 *sınıfından ve* $\frac{\partial}{\partial \overline{Z_k}}(f)=0$ *olmasıdır (Okubu, 1987).*

İspat. $k\in\{1,...,n\}$ için

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \overline{Z_k}} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(u+iv)}{\partial x_k}+i\frac{\partial(u+iv)}{\partial y_k}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x_k}+i\frac{\partial v}{\partial x_k}+i\frac{\partial u}{\partial y_k}-\frac{\partial v}{\partial y_k}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}-\frac{\partial v}{\partial y_k}\right)+i\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}+\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)\right] \end{aligned}$$

olur. Buradan $\frac{\partial}{\partial \overline{Z_k}}(f)=0$ eşitliği sağlanır gerek ve yeter koşul f fonksiyonu C^1 sınıfından ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_k}-\frac{\partial v}{\partial y_k} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y_k}+\frac{\partial v}{\partial x_k}=0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_k} &= \frac{\partial v}{\partial y_k} \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial y_k}=-\frac{\partial v}{\partial x_k} \end{aligned}$$

olur. Böylece Couchy-Riemann denklemleri elde edilir ve ispat tamamlanır. □

3.3. Kompleks Manifoldlar

Tanım 3.16 *M, bir Hausdorff uzay olmak üzere M de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ açık altkümeleri verilsin. Eğer $\forall p \in M$ noktasında*

$$\Psi_\alpha : U_\alpha \subset M \to W_\alpha \subset C^n$$

homeomorfizmaları mevcut olup $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ için

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha\beta} &= \Psi_\alpha o \Psi_\beta^{-1} : \Psi_\beta \left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \to \Psi_\alpha \left(U_\alpha \cap U_\beta\right), \\ \phi_{\beta\alpha} &= \Psi_\beta o \Psi_\alpha^{-1} : \Psi\alpha \left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \to \Psi_\beta \left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \end{aligned}$$

dönüşümleri holomorfik ise M ye kompleks bir manifold denir. Burada $\{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ ya M nin holomorfik koordinat komşuluğu sistemi olarak isimlendirilir (Yano ve Kon, 1984).

$\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ kümesi M kompleks manifoldunun holomorfik koordinat komşuluğu sistemi olsun. Bu durumda $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ için

$$\Psi\left(p\right) = (z_1(p), \ldots, z_n(p))$$

tanımlanırsa $z_i\left(p\right)$ sayısına lokal koordinatlar ve $(z_1, \ldots, z_n)$ sistemine lokal koordinat fonksiyonları sistemi olarak isimlendirilir (Yano ve Kon, 1984).

T_pM nin bir bazı $\left\{\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial y_k}\right\}, k \in \{1, ..., n\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} J : T_pM &\to T_pM \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) &\to J\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial y_k}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) &\to J\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned} \tag{3.29}$$

ile tanımlanırsa J dönüşümüne T_pM üzerinde bir kompleks yapıdır denir. Bu durumda U ve U', M nin iki açık komşuluğu ve $p \in U \cap U'$ olmak üzere T_pM nin kompleksleştirilmişi

$T_p^c M$ üzerinde J tensörü

$$\begin{aligned} J\left(\frac{\partial}{\partial x'_k}\right) &= J\left(\frac{\partial x_k}{\partial x'_k}\frac{\partial}{\partial x_k}+\frac{\partial y_k}{\partial x'_k}\frac{\partial}{\partial y_k}\right) \\ &= \frac{\partial x_k}{\partial x'_k}J\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)+\frac{\partial y_k}{\partial x'_k}J\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) \\ &= \frac{\partial y_k}{\partial y'_k}\frac{\partial}{\partial y_k}+\frac{\partial x_k}{\partial y'_k}\frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial y'_k} \end{aligned} \tag{3.30}$$

eşitliğini sağlar. Benzer işlemler ile

$$J\left(\frac{\partial}{\partial y'_k}\right) = -\frac{\partial}{\partial x'_k} \tag{3.31}$$

olduğu gösterilebilir (Martin, 1991).

Tanım 3.17 *M reel $2n-$boyutlu kompleks manifold olsun. $T_p^c M$ nin bir bazı $\left(\frac{\partial}{\partial Z_k}, \frac{\partial}{\partial \overline{Z_k}}\right)$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} J &: T_p^c M \to T_p^c M \\ \left(\frac{\partial}{\partial Z_k}\right) &\to J\left(\frac{\partial}{\partial Z_k}\right) = i\,\frac{\partial}{\partial Z_k}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \overline{Z_k}}\right) &\to J\left(\frac{\partial}{\partial \overline{Z_k}}\right) = -i\frac{\partial}{\partial \overline{Z_k}} \end{aligned} \tag{3.32}$$

ile tanımlı dönüşüme $T_p^c M$ nin kompleks yapısı denir (Chen, 1999).

Tanım 3.18 *M reel $2n$-boyutlu bir manifold ve $\forall p \in M$ için*

$$J_p : T_p M \to T_p M$$

lineer dönüşümü $J^2 = -I$ eşitliğini sağlıyorsa bu tensöre M üzerinde hemen hemen kompleks bir yapı denir. M ye de J kompleks yapıyla birlikte hemen hemen kompleks bir manifold adı verilir (Yano ve Kon, 1984).

Teorem 3.19 *Hemen hemen kompleks manifoldların boyutu çiftir (Kobayashi ve Nomizu, 1969).*

İspat. Kabul edelim ki M nin reel boyutu m olsun. J, $T_p M$ üzerinde lineer bir dönüşüm olduğundan J ye karşılık gelen $J = \left[J_\mu^v\right]$ matrisi için

$$[\text{Det }(J)]^2 = (\text{Det } J)\,.\,(\text{Det } J) = \text{Det}\left(J^2\right) = \text{Det }(-I_m) = (-1)^m$$

olur. Det(J) reel ve $[Det\,(J)]^2$ pozitif olduğundan m çift olmak zorundadır. $\square$

Teorem 3.20 *M bir kompleks manifold olsun. Bu durumda M üzerinde hemen hemen kompleks bir yapı vardır (Yano ve Kon, 1984).*

İspat. Bir $\{U_\alpha, \Psi_\alpha\}$ kompleks atlası için

$$\Psi_\alpha : U_\alpha \subset M \to W_\alpha \subset \mathbb{C}^n$$

dönüşümü holomorfiktir. $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ kümesi M kompleks manifoldunun bir lokal koordinat komşuluğu olsun. Bu durumda $Z_j = x_j + y_j$, $j \in \{1, ..., n\}$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial Z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \ \frac{\partial}{\partial \overline{Z_j}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \tag{3.33}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} J\left(\frac{\partial}{\partial Z_j}\right) &= \frac{1}{2}\left(J\frac{\partial}{\partial x_j} - iJ\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y_j} + i\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\ &= i\frac{\partial}{\partial Z_j} \end{aligned} \tag{3.34}$$

ve

$$\begin{aligned} J\left(\frac{\partial}{\partial \overline{Z_j}}\right) &= \frac{1}{2}\left(J\frac{\partial}{\partial x_j} + iJ\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y_j} - i\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\ &= -i\frac{\partial}{\partial \overline{Z_k}} \end{aligned} \tag{3.35}$$

olup T_pM üzerinde $J^2 = -I_n$ şartını sağlayan J endomorfizması vardır. $\square$

Tanım 3.21 *M ve M' sırasıyla J ve J' tensörleri ile birlikte hemen hemen kompleks manifoldlar olsun. Eğer*

$$J' \circ f_* = f_* \circ J \tag{3.36}$$

ise f ye hemen hemen komplekstir veya f, J ve J' yapılarını korur denir (Yano ve Kon, 1984).

Yukarıdaki tanımdan; f, J ve J' yapılarını korur ise aşağıdaki diyagram

$$\begin{array}{ccc} T_P M & \xrightarrow{f_*} & T_{f(p)}M' \\ \Big\downarrow J & & \Big\downarrow J' \\ T_P M & \xrightarrow{f_*} & T_{f(p)}M' \end{array}$$

değişimlidir.

Önerme 3.22 *$\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^m$ nin kompleks yapıları sırasıyla J ve J' ve $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda f nin $\mathbb{C}^n$ ve $\mathbb{C}^m$ in hemen hemen kompleks yapılarını koruması için gerek ve yeter şart f nin holomorfik olmasıdır (Kobayashi ve Nomizu, 1969).*

İspat. $(z_1, \ldots, z_m)$, $\mathbb{C}^n$ nin bir lokal koordinat sistemi olsun. Bu durumda $z_k = u^k + iv^k$,

$$\begin{aligned} u^k &= u^k(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \\ v^k &= v^k(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{3.37}$$

ve

$$f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial u_k} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial v_k}, \\ f_*\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial u_k}{\partial y_j}\right)\frac{\partial}{\partial u_k} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial v_k}{\partial y_j}\right)\frac{\partial}{\partial v_k} \end{aligned} \tag{3.38}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitliklere J uygulanırsa

$$\begin{aligned} f_*\left(J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right) &= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u_k}{\partial y_j}\right)\frac{\partial}{\partial u_k} + \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial v_k}{\partial y_j}\right)\frac{\partial}{\partial v_k}, \\ f_*\left(J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)\right) &= -\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial u_k} - \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial v_k}, \\ Jf_*\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) &= \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial v_k} - \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial u_k}, \\ Jf_*\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) &= \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u_k}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial v_k} - \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial v_k}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial u_k} \end{aligned} \tag{3.39}$$

elde edilir. $Jf_* = f_*J$ eşitliği gözönüne alınırsa

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_k}{\partial y_j} \;, \; \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = -\frac{\partial u_k}{\partial y_j} \tag{3.40}$$

bulunur. Bunlar ise Couchy-Riemann denklemleridir. □

Bu önermenin daha genel bir ifadesi olarak aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 3.23 *M ve M' kompleks manifoldlar olsun. Bu durumda $f : M \to M'$ dönüşümünün holomorfik olması için gerek ve yeter koşul M ve M' kompleks manifoldlarının kompleks yapılarına göre f nin hemen hemen kompleks olmasıdır (Yano ve Kon, 1984).*

İspat. J ve J', M ve M' manifoldlarının kompleks yapılar ve $p \in M, f(p) \in M'$ noktalarının komşuluklarında tanımlanan lokal koordinat sistemleri sırasıyla $\{z_1, \ldots, z_n\}$ ve $\{w_1, \ldots, w_n\}$ olsun. $w_k = u_k + iv_k$ olmak üzere

$$f_* u_j = \alpha^j \left(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n\right)$$

ve

$$f_* v_j = \beta^j \left(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n\right) \tag{3.41}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$\begin{aligned} f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) &= \sum_j \left\{ \left(\frac{\partial \alpha^j}{\partial x_k}\right) \frac{\partial}{\partial u_j} + \left(\frac{\partial \beta^j}{\partial x_k}\right) \frac{\partial}{\partial v_j} \right\} \\ f_*\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) &= \sum_j \left\{ \left(\frac{\partial \alpha^j}{\partial y_k}\right) \frac{\partial}{\partial u_j} + \left(\frac{\partial \beta^j}{\partial y_k}\right) \frac{\partial}{\partial v_j} \right\} \end{aligned} \tag{3.42}$$

elde edilir.

$$f_*\left(J\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\right) \text{ ile } J'\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\right) \ , \ f_*\left(J\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)\right) \text{ ile } J'\left(f_*\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)\right)$$

karşılaştırılırsa

$$\frac{\partial \alpha^j}{\partial x_k} = \frac{\partial \beta^j}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial \alpha^j}{\partial y_k} = -\frac{\partial \beta^j}{\partial x_k} \tag{3.43}$$

olur. Bunlar ise Couchy-Riemann denklemleridir. Yani; $\forall X_p \in T_pM$ için f, hemen hemen kompleks ise

$$f_*(JX_p) = J'(f_* X_p) \tag{3.44}$$

eşitliği sağlanır. $\square$

Tanım 3.24 *M bir kompleks manifold ve J, M üzerinde hemen hemen kompleks bir yapı olsun. Bu durumda*

$$N(X, Y) = -[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] \tag{3.45}$$

ile tanımlı N tensör alanına J nin Nijenhuis tensör alanı denir (Kobayashi ve Nomizu, 1969).

Teorem 3.25 *M kompleks bir manifold ise Nijenhuis tensör alanı sıfırdır (Vandoren, 2009).*

İspat. M kompleks bir manifold, $(z_1, ..., z_n)$, $p \in M$ noktasının bir lokal koordinat sistemi olsun. $z_k = x_k + iy_k$ alınırsa M nin reel olan $\{x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n\}$ lokal koordinat sistemi vardır. Burada $J : T_pM \to T_pM$ dönüşümü

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial y_k}\ , J\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_k}$$

olacak şekilde tanımlanırsa

$$N\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = N\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = N\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = N\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = 0$$

olur. Bu ise Nijenhuis tensörünün sıfır olduğunu gösterir. □

Tanım 3.26 *M kompleks bir manifold, J hemen hemen kompleks bir yapı ve Z, W vektör alanları $(1, 0)$ tipinde olsun. $[Z, W]$, $(1, 0)$ tipinde olması durumunda bu tensöre integrallenebilirdir denir (Yano ve Kon, 1984).*

Teorem 3.27 *M kompleks bir manifold olsun. J tensörünün integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart Nijenhuis tensör alanının sıfır olmasıdır (Yano ve Kon, 1984).*

İspat. X ve Y reel vektör alanları ve $Z = [X - iJX, Y - iJY]$ olsun. Bu durumda

$$Z + iJZ = -N(X, Y) - iJN(X, Y)$$

eşitliği elde edilir. Buradan $Z + iJZ = 0$ eşitliği sağlanır gerek ve yeter koşul Z nin $(1, 0)$ tipindedir. Bu ise $N = 0$ olması için gerek ve yeterdir. □

Tanım 3.28 *(M, J) hemen hemen kompleks bir manifold olsun. Eğer M bir kompleks manifoldu meydana getiren 2n-boyutlu reel manifold ise hemen hemen J kompleks yapısına kompleks yapı denir (Kobayashi ve Nomizu, 1969).*

Sonuç 3.29 *M hemen hemen kompleks manifold ve J, M üzerinde hemen hemen kompleks yapı olsun. J nin kompleks bir yapı olması için gerek ve yeter koşul $N = 0$ olmasıdır (Kobayashi ve Nomizu, 1969).*

Teorem 3.30 *M, $2n$-boyutlu hemen hemen kompleks manifold ve M üzerinde hemen hemen kompleks bir yapı J olsun. U kümesi M nin bir açık altkümesi olmak üzere üzerinde*

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial}{\partial y_j},\quad J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)=-\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{3.46}$$

olacak şekilde $\{x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n\}$ lokal koordinat sistemi var ise M bir kompleks manifolddur (Yano ve Kon, 1984).

İspat. $U\cap V\neq\varnothing$ olmak üzere U ve V üzerinde sırasıyla $\{x_j,y_j\}$, $\{u_j,v_j\}$ lokal koordinat sistemleri verilsin. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} &= \sum\frac{\partial\alpha^k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial u_k}+\frac{\partial\beta^k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial v_k},\\
\frac{\partial}{\partial y_j} &= \sum\frac{\partial\alpha^k}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial u_k}+\frac{\partial\beta^k}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial v_k},\\
J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) &= \sum\frac{\partial\alpha^k}{\partial x_j}J\left(\frac{\partial}{\partial u_k}\right)+\frac{\partial\beta^k}{\partial x_j}J\left(\frac{\partial}{\partial v_k}\right),\\
J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) &= \sum\frac{\partial\alpha^k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial v_k}-\frac{\partial\beta^k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial u_k}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada ikinci ve dördüncü denklemler karşılaştırılırsa

$$\frac{\partial\alpha^k}{\partial x_j}=\frac{\partial\beta^k}{\partial y_j},\quad -\frac{\partial\beta^k}{\partial x_j}=\frac{\partial\alpha^k}{\partial y_j}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
u_k &= \alpha^k(x_j,y_j)\\
v_k &= \beta^k(x_j,y_j)
\end{aligned}$$

ise

$$w_k=u_k+iv_k=\alpha^k(x_j,y_j)+i\beta^k(x_j,y_j)$$

dır. $f_k=\alpha^k+i\beta^k$, $(x_k,y_k)\leftrightarrow Z_k=x_k+iy_k$ olduğundan

$$\begin{aligned}
f_k(Z_1,\ldots,Z_n) &= \alpha^k(Z_1,\ldots,Z_n)+i\beta^k(Z_1,\ldots,Z_n)\\
w_k &= f_k(Z_1,\ldots,Z_n)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece f_k $\forall k\in\{1,...,n\}$ için holomorfik olur. Bu ise M nin kompleks bir manifold olduğunu gösterir. □

Tanım 3.31 *Z, M kompleks manifoldu üzerinde bir vektör alanı olmak üzere her f holomorfik fonksiyonu için Zf holomorfik oluyorsa Z ye holomorfik bir vektör alanı adı verilir Yano ve Kon (1984)*

Böylece $Z = \sum f_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ vektör alanının holomorfik olması için gerek ve yeter koşul f_i fonksiyonunun holomorfik olması gerekir. O halde

$$Z = \sum f_i \frac{\partial}{\partial z_i} \quad \text{holomorfiktir} \Longleftrightarrow f_i \quad \text{holomorfiktir}. \tag{3.47}$$

Teorem 3.32 *(M, J) hemen hemen kompleks manifoldunun kompleks bir manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla J = 0$, $T = 0$ olacak şekilde M üzerinde ∇ konneksiyonunun var olmasıdır. Burada T ,∇ konneksiyonunun torsiyon tensör alanıdır (Yano ve Kon, 1984).*

İspat. Kabul edelim ki $\nabla J = 0$ ve $T = 0$ şartlarını sağlayan ∇ konneksiyonu var olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \nabla_X Y - \nabla_Y X \\ \nabla_X JY &= (\nabla_X J) Y + J\nabla_X Y = J\nabla_X Y \end{aligned} \tag{3.48}$$

yazarız. Böylece

$$\begin{aligned} N(X, Y) &= [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] - [X, Y] \\ &= \nabla_{JX} JY - \nabla_{JY} JX - J\nabla_X JY + J\nabla_{JY} X - J\nabla_{JX} Y \\ &\quad + J\nabla_Y JX - \nabla_X Y + \nabla_Y X \\ &= (\nabla_{JX} J) Y + J\nabla_{JX} Y - ((\nabla_{JY} J) X + J\nabla_{JY} X) - J(\nabla_X J) Y \\ &\quad + \nabla_X Y + J\nabla_{JY} X - J\nabla_{JX} Y + J((\nabla_Y J) X + J\nabla_Y X) \\ &\quad - \nabla_X Y + \nabla_Y X \end{aligned} \tag{3.49}$$

olur. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$N(X, Y) = \nabla_Y X + J(\nabla_{JY} X) + \nabla_X Y - \nabla_X Y = 0 \tag{3.50}$$

elde edilir. O halde M kompleks bir manifolddur.

($\Longrightarrow$) Kabul edelim ki M bir kompleks manifold olsun. M parakompakt olduğu için M üzerinde bir Riemann metriği vardır. Bu nedenle $T = 0$ olacak şekilde bir ∇ lineer konneksiyonu vardır.

$$\begin{aligned} A(X,Y) &= (\nabla_X J)Y - (\nabla_X J)X \\ B(X,Y) &= (\nabla_X J)Y + (\nabla_X J)X \end{aligned} \tag{3.51}$$

yazılırsa

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{4}[A(X,JY) - JB(X,Y)] \tag{3.52}$$

ile tanımlanan ∇', M üzerinde bir konneksiyondur. İspatlayacağız ki $\nabla' J = 0$ ve $T' = 0$ dır.

$$\begin{aligned} (\nabla'_X J)Y &= \nabla'_X JY - J\nabla'_X Y \\ &= \nabla_X JY + \frac{1}{4}[A(X,-Y) - JB(X,JY)] \\ &\quad -J\left(\nabla_X Y + \frac{1}{4}[A(X,JY) - JB(X,Y)]\right) \\ &= \nabla_X JY - J\nabla_X Y + \frac{1}{4} - (\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X \\ &\quad -J(\nabla_X J)JY - J(\nabla_{JY} J)X - J(A(X,JY) - B(X,Y)) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte gerekli işlemler yapıldığında

$$(\nabla'_X J)Y = \frac{1}{2}(\nabla_X J)Y - \frac{1}{2}J((\nabla_X J)JY)$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} J(\nabla_X J)JY &= J(\nabla_X J^2 Y - J(\nabla_X JY)) \\ &= J\nabla_X J^2 Y - J^2 \nabla_X JY \\ &= -J\nabla_X Y + \nabla_X JY \\ &= -J\nabla_X Y + J\nabla_X Y + (\nabla_X J)Y \\ &= (\nabla_X J)Y \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$(\nabla'_x J)Y = \frac{1}{2}(\nabla_X J)Y - \frac{1}{2}(\nabla_X J)Y = 0$$

elde edilir. $T = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} A(JX,Y) + A(X,JY) &= (\nabla_{JX} J)Y - (\nabla_Y J)JX + (\nabla_X J)JY - (\nabla_{JY} J)X \\ &= \nabla_{JX} JY - J\nabla_{JX} Y - [-\nabla_Y X - J(\nabla_Y JX)] + \\ &\quad \left[\nabla_X J^2 Y - J\nabla_X JY\right] - [\nabla_{JY} JX - J(\nabla_{JY} X)] \end{aligned}$$

olur. Gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned} A(JX,Y)+A(X,JY) &= -[X,Y]+[JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY] \\ &= N(X,Y) \end{aligned} \tag{3.53}$$

dır. Buradan

$$T'(X,Y)=\nabla'_X Y-\nabla'_Y X-[X,Y]$$

eşitliğinde bulunan değerler yerlerine yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$T'(X,Y)=(A(X,JY)+A(JX,Y)) \tag{3.54}$$

elde edilir. (3.53) ve (3.54) eşitliklerinden

$$T'(X,Y)=\frac{1}{4}N(X,Y)$$

bulunur. M kompleks bir manifold olduğundan $N=0$ olup bu ise

$$T'=0$$

olduğunu gösterir. □

3.4. Hermityen Manifoldlar

Tanım 3.33 *M hemen hemen kompleks bir manifold ve M nin hemen hemen kompleks yapısı J olsun. M üzerinde bir Riemann metriği g olsun. $\forall X,Y\in\chi(M)$ için*

$$g(JX,JY)=g(X,Y) \tag{3.55}$$

şartını sağlayan g dönüşümüne M üzerinde Hermityen bir metrik adı verilir (Yano ve Kon, 1984).

Örnek 3.34 *$\mathbb{C}^n$ kompleks vektör uzayı ve $Z,W\in\mathbb{C}^n$ olmak üzere $Z=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ ve $W=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$, $z_k=x_k+iy_k$, $w_k=t_k+is_k$, $1\leq k\leq n$, ve $i^2=-1$ olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} JZ &= iZ=i(z_1,z_2,\ldots,z_n), \\ JW &= iW=i(w_1,w_2,\ldots,w_n) \end{aligned}$$

olmak üzere $\mathbb{C}^n$ üzerinde Riemann metriği

$$g(Z,W) = Re\{\langle Z,W\rangle\} = Re\{\sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w}_i\} \tag{3.56}$$

ile tanımlansın. Bu durumda

$$g(Z,W) = \sum_{i=1}^{n}[x_i t_i + y_i s_i] \tag{3.57}$$

ve

$$\begin{aligned} g(JZ,JW) &= Re\{\sum_{i=1}^{n} iz_i.\overline{iw_i}\} \\ &= \sum_{i=1}^{n}[x_i t_i + y_i s_i] \end{aligned} \tag{3.58}$$

olur. Buradan $g(Z,W) = g(JZ,JW)$ olduğu görülür. Böylece g, $\mathbb{C}^n$ kompleks vektör uzayı üzerinde Hermityen bir metriktir.

Tanım 3.35 *M hemen hemen kompleks bir manifold olmak üzere M üzerinde g Hermityen metriği tanımlı ise (M,g) ikilisine hemen hemen Hermityen bir manifold denir. M bir kompleks manifold ve M üzerinde g Hermityen metriği tanımlı ise (M,g) ikilisine Hermityen bir manifold denir (Yano ve Kon, 1984).*

Tanım 3.36 *(M,g) hemen hemen Hermityen bir manifold, J, M nin bir hemen hemen kompleks yapısı olsun. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için*

$$\Phi(X,Y) = g(X,JY) \tag{3.59}$$

ile tanımlanan Φ tensörüne temel 2-form denir (Yano ve Kon, 1984).

Lemma 3.37 *Φ, M üzerinde temel 2-form olmak üzere*

$$\Phi(JX,JY) = \Phi(X,Y), \quad \forall X,Y \in \chi(M) \tag{3.60}$$

dir (Yano ve Kon, 1984).

İspat. Temel iki formun tanımı göz önüne alındığında, g bilineer ve $JX \neq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \Phi(JX,JY) &= g\left(JX,J^2Y\right) \\ &= g(JX,-Y) \\ &= g(X,JY) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\Phi(JX, JY) = \Phi(X, Y)$$

elde edilir. □

Lemma 3.38 (M, g) *hemen hemen Hermityen bir manifold ve* J*,* M *üzerinde hemen hemen kompleks bir yapı olsun. Bu durumda* $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ *için*

a)

$$(\nabla_X \Phi) Y = g(Y, (\nabla_X J) Z). \quad (3.61)$$

b)

$$2g((\nabla_X J) Y, Z) - g(JX, N(Y, Z)) = 3d\Phi(X, JY, JZ) - 3d\Phi(X, Y, Z). \quad (3.62)$$

eşitlikleri sağlanır (Yano ve Kon, 1984).

İspat. a)

$$\begin{aligned} (\nabla_X J) JY &= \nabla_X JJY - J(\nabla_X JY) \\ &= -\nabla_X Y - J((\nabla_X J) Y + J(\nabla_X Y)) \\ &= -\nabla_X Y - J(\nabla_X J) Y + \nabla_X Y \\ &= -J(\nabla_X J) Y \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} (\nabla_X \phi) Y &= X(\Phi(Y, Z)) - \Phi(Y, \nabla_X Z) - \Phi(\nabla_X Y, Z) \\ &= X(g(Y, JZ)) - g(Y, J\nabla_X Z) - g(\nabla_X Y, JZ) \\ &= (\nabla_X Y, JZ) + g(Y, \nabla_X JZ) - g(Y, J\nabla_X Z) - (\nabla_X Y, JZ) \\ &= g(Y, (\nabla_X J) Z) \quad (3.63) \end{aligned}$$

elde edilir.

b)

$$\begin{aligned} N(Y, Z) &= [JX, JY] - J[Y, JZ] - J[JY, Z] - [Y, Z] \\ &= (\nabla_{JY} JZ - \nabla_{JZ} JY) - J(\nabla_Y JZ - \nabla_{JZ} Y) \\ &\quad - J(\nabla_{JY} Z - \nabla_Z JY) - (\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) \quad (3.64) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$N\left(Y,Z\right)=\left(\nabla_{JY}J\right)Z-\left(\nabla_{JZ}J\right)Y+J\left(\nabla_{Z}J\right)Y-J\left(\nabla_{Y}J\right)Z$$

ve

$$\begin{aligned}3d\phi\left(X,Y,Z\right) &= X\left(\Phi\left(Y,Z\right)\right)+Y\left(\Phi\left(Z,X\right)\right)+Z\left(\Phi\left(X,Y\right)\right)\\ &\quad -\Phi\left(\left[X,Y\right],Z\right)-\Phi\left(\left[Y,Z\right],X\right)-\Phi\left(\left[Z,X\right],Y\right)\end{aligned}$$

olup gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}3d\phi\left(X,Y,Z\right) &= g\left(Y,\left(\nabla_{X}J\right)Z\right)+g\left(Z,\left(\nabla_{Y}J\right)X\right)\\ &\quad +g\left(X,\left(\nabla_{Z}J\right)Y\right)\end{aligned}\tag{3.65}$$

elde edilir. Benzer olarak

$$\begin{aligned}3d\phi\left(X,JY,JZ\right) &= g\left(JY,\left(\nabla_{X}J\right)JZ\right)+g\left(JZ,\left(\nabla_{JY}J\right)X\right)\\ &\quad +g\left(X,\left(\nabla_{JZ}J\right)JY\right)\end{aligned}\tag{3.66}$$

olur. (3.63), (3.64), (3.65) ve (3.66) denklemlerinden

$$\begin{aligned}3d\phi\left(X,Y,Z\right)-3d\phi\left(X,JY,JZ\right) &= g\left(Y,\left(\nabla_{X}J\right)Z\right)+g\left(Z,\left(\nabla_{Y}J\right)X\right)\\ &\quad +g\left(X,\left(\nabla_{Z}J\right)Y\right)-g\left(JY,\left(\nabla_{X}J\right)JZ\right)\\ &\quad -g\left(JZ,\left(\nabla_{JY}J\right)X\right)-g\left(X,\left(\nabla_{JZ}J\right)JY\right)\\ &= g\left(Y,\left(\nabla_{X}J\right)Z\right)-g\left(JY,\left(\nabla_{X}J\right)JZ\right)\\ &\quad +g\left(Z,\left(\nabla_{Y}J\right)X\right)-g\left(JZ,\left(\nabla_{JY}J\right)X\right)\\ &\quad +g\left(X,\left(\nabla_{Z}J\right)Y\right)-g\left(X,\left(\nabla_{JZ}J\right)JY\right)\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$-g\left(JY,\left(\nabla_{X}J\right)JZ\right)=g\left(Y,\left(\nabla_{X}J\right)Z\right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}3d\phi\left(X,Y,Z\right)-3d\phi\left(X,JY,JZ\right) &= g\left(Y,\left(\nabla_{X}J\right)Z\right)+g\left(Y,\left(\nabla_{X}J\right)Z\right)\\ &\quad +g\left(Z,\left(\nabla_{Y}J\right)X\right)+g\left(X,\left(\nabla_{Z}J\right)Y\right)\\ &\quad -g\left(JZ,\left(\nabla_{JY}J\right)X\right)-g\left(X,\left(\nabla_{JZ}J\right)JY\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$Xg\left(Y,JZ\right)=-Xg\left(JY,Z\right)$$

eşitliğinden

$$g\left(Y,\left(\nabla_X J\right)Z\right)=-g\left(\left(\nabla_X J\right)Y,Z\right)$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}3d\phi\left(X,Y,Z\right)-3d\phi\left(X,JY,JZ\right) &= -2g\left(\left(\nabla_X J\right)Y,Z\right)-g\left(J\left(\nabla_Y J\right)Z,JX\right)\\ &\quad +g\left(\left(\nabla_{JY} J\right)Z,JX\right)+g\left(JX,J\left(\nabla_Z J\right)Y\right)\\ &\quad -g\left(\left(\nabla_{JZ} J\right)Y,JX\right)\\ &= -2g\left(\left(\nabla_X J\right)Y,Z\right)+g\left(JX,N\left(Y,Z\right)\right)\end{aligned}$$

ve

$$2g\left(\left(\nabla_X J\right)Y,Z\right)-g\left(JX,N\left(Y,Z\right)\right)=3d\phi\left(X,Y,Z\right)-3d\phi\left(X,Y,Z\right)$$

bulunur. □

Teorem 3.39 *(M,g,J) hemen hemen Hermityen bir manifold olsun. ∇, g ile tanımlı Riemann konneksiyonu olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Yano ve Kon, 1984).*

a) $\nabla J=0.$

b) $\nabla\Phi=0.$

c) *J torsiyonsuz ve temel 2-formu kapalıdır.*

İspat. $(a \Longleftrightarrow b)$ (3.63) den

$$\left(\nabla_X\Phi\right)\left(Y,Z\right)=g\left(Y,\left(\nabla_X J\right)Z\right)$$

dır. Böylece

$$\nabla J=0 \Longleftrightarrow \nabla\Phi=0$$

olur.

$(b \Longleftrightarrow c)$ (b) den $\nabla\phi=0$ dır. (a) ve (3.65) den $d\phi=0$, Lemma 3.37 den ise $N=0$ elde edilir.

$(c \Longleftrightarrow b)$ Lemma 3.37 den $\nabla J=0$ dır. Bu ise $\nabla\Phi=0$ olması demektir. □

3.5. Kaehler Manifoldları

Tanım 3.40 *(M, g, J) hemen hemen kompleks bir manifold olmak üzere Φ temel 2-formu kapalı ise $(d\Phi = 0)$ g Hermityen metriğine bir Kaehler metrik adı verilir (Yano ve Kon, 1984).*

Tanım 3.41 *M hemen hemen kompleks bir manifold olmak üzere g Kaehler metriği tanımlı ise M ye bir hemen hemen Kaehler manifold denir. Eğer M bir kompleks manifold ve M üzerinde g Kaehler metriği tanımlı ise M manifolduna Kaehler manifold adı verilir. (Yano ve Kon, 1984).*

Teorem 3.42 *(M, g, J) Hermityen bir manifoldunun bir Kaehler manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla J = 0$ olmasıdır (Bejancu, 1986).*

İspat. Teorem 3.39 den ispat açıktır. □

Örnek 3.43 *$\mathbb{R}^4$ üzerinde bir J kompleks yapısı*

$$\begin{aligned} J \quad &: \quad \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \quad &\to \quad J\ (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3) \end{aligned}$$

tanımlansın. Bu durumda $(\mathbb{R}^4, J)$ nin bir Kaehler manifold olması için $\nabla_X J = 0$ olmalıdır. Bu durumda

$$\nabla_X JY = (\nabla_X J)\, Y + J\nabla_X Y$$

eşitliğinden

$$\nabla_X JY = J\nabla_X Y$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Gerçekten;

$$\begin{aligned} JY &= (-y_2, y_1, -y_4, y_3)\,, \\ \nabla_X JY &= (X[-y_2]\,, X[y_1]\,, X[-y_4]\,, X[y_3])\,, \\ J\nabla_X Y &= J\,(X[y_1]\,, X[y_2]\,, X[y_3]\,, X[y_4])\,, \\ &= (-X[y_2]\,, X[y_1]\,, -X[y_4]\,, X[y_3]) \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\nabla_X JY = J\nabla_X Y$$

elde edilir. O halde $\nabla J = 0$ olup, $(\mathbb{R}^4, J)$ bir Kaehler manifoldudur.

Önerme 3.44 *(M, g) bir Kaehler manifold olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için aşağıdaki özellikler sağlanır (Yano ve Kon, 1984).*

a) R Riemann eğrilik tensörü olmak üzere

$$R(X,Y)JZ = JR(X,Y)Z \text{ ve } R(JX,JY)Z = R(X,Y)Z. \tag{3.67}$$

b) S Ricci tensörü olmak üzere

$$S(JX,JY) = S(X,Y) \text{ ve } S(X,Y) = \frac{1}{2}(izJR(X,JY)). \tag{3.68}$$

İspat. a) Riemann eğrilik tensörünün tanımından

$$\begin{aligned} R(X,Y)JZ &= \nabla_X\nabla_Y JZ - \nabla_Y\nabla_X JZ - \nabla_{[X,Y]}JZ \\ &= \nabla_X((\nabla_Y J)Z + J\nabla_Y Z) - \nabla_Y((\nabla_X J)Z + J\nabla_X Z) \\ &\quad -\left(\left(\nabla_{[X,Y]}J\right)Z + J\nabla_{[X,Y]}Z\right) \\ &= \nabla_X J(\nabla_Y Z) - \nabla_Y J(\nabla_X Z) - J\nabla_{[X,Y]}Z \\ &= (\nabla_X J)\nabla_Y Z + J(\nabla_X\nabla_Y Z) - (\nabla_Y J)\nabla_X Z \\ &\quad -J(\nabla_Y\nabla_X Z) - J\left(\nabla_{[X,Y]}Z\right) \\ &= J(\nabla_X\nabla_Y Z) - J(\nabla_Y\nabla_X Z) - J\left(\nabla_{[X,Y]}Z\right) \\ &= JR(X,Y)Z \end{aligned} \tag{3.69}$$

ve

$$\begin{aligned} g(R(JX,JY)Z,W) &= g(R(W,Z)JX,JY) \\ &= g(JR(W,Z)X,JY) \\ &= g(R(W,Z)X,Y) \\ &= g(R(X,Y)Z,W) \\ R(JX,JY) &= R(X,Y) \end{aligned} \tag{3.70}$$

bulunur.

b) M nin ortonormal bir bazı $\{e_1, ..., e_n\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} S(JX, JY) &= \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, JX) JY, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(R(Je_i, JX) JY, Je_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X) JY, Je_i) \\ &= S(X, Y) \end{aligned} \tag{3.71}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} S(X, Y) &= \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X) Y, e_i) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} g(JR(e_i, X) JY, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} [g(JR(X, JY) e_i, e_i) + g(JR(JY, e_i) X, e_i)] \\ &= izJR(X, JY) - S(X, Y) \\ S(X, Y) &= \frac{1}{2} izJR(X, JY) \end{aligned} \tag{3.72}$$

elde edilir. □

Önerme 3.45 *(M, g) bir Kaehler manifold olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için*

$$(\nabla_Z S)(X, Y) = (\nabla_X S)(Y, Z) + (\nabla_{JY} S)(JX, Z)$$

eşitliği sağlanır (Yano ve Kon, 1984).

İspat. Önerme 3.44 gözönüne alındığında $\{e_1, ..., e_n\}$ M için ortonormal bir bazı olmak üzere

$$\begin{aligned} (\nabla_Z S)(X, Y) &= \frac{1}{2} \sum g(J(\nabla_Z R)(X, JY) e_i, e_i) \\ (\nabla_Z S)(X, Y) &= \frac{1}{2} \sum g((\nabla_X R)(JY, Z) e_i, e_i) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum g(J(\nabla_{JY} R)(Z, X) e_i, e_i) \\ &= (\nabla_X S)(Y, Z) + (\nabla_{JY} S)(JX, Z) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Önerme 3.46 *M bir Kaehler manifoldu, J ve g sırasıyla M üzerinde hemen hemen kompleks yapı ve Kaehler metrik olmak üzere $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için aşağıda verilen eşitlikler saglanır (Okubu, 1987).*

$$g(R(JX, JY)Z, W) = g(R(X,Y)JZ, JW) = g(R(X,Y)Z, W). \tag{3.73}$$

İspat. Önerme 3.44 dan

$$R(JX, JY)Z = R(X,Y)Z$$

olup, buradan

$$g(R(JX, JY)Z, W) = g(R(X,Y)Z, W)$$

dır. Diğer taraftan

$$g(R(X,Y)JZ, JW) = g(JR(X,Y)Z, JW)$$

olup ayrıca g Kaehler metrik olduğundan

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

eşitliği göz önüne alınırsa

$$g(R(X,Y)JZ, JW) = g(JR(X,Y)Z, JW) = g(R(X,Y)Z, W).$$

olur. □

Tanım 3.47 *M hemen hemen kompleks bir manifold, $p \in M$ için T_pM nin bir düzlemi Π olsun. Eğer Π düzlemi J altında invaryant ise Π ye holomorfik bir düzlem kesiti denir (Okubu, 1987).*

Tanim 3.47 den $\forall X \in \chi(M)$ için $\Pi = \text{Span}\{X, JX\}$ düzlemi holomorfik bir düzlem kesitidir.

Tanım 3.48 *M bir Kaehler manifoldu, M üzerinde hemen hemen kompleks bir yapı J olsun. Π holomorfik düzleminde tanımlı kesit eğriliğine holomorfik kesit eğriliği denir ve $X \in \chi(M)$ için*

$$K(\Pi) = R(X, JX, X, JX) = g(R(X, JX), X) \tag{3.74}$$

ile verilir. Eğer M nin her p noktasındaki düzlem kesitleri için $K(\Pi)$ değeri sabit oluyorsa M manifolduna sabit holomorfik kesit eğrilikli manifold (uzay) denir (Okubu, 1987).

Tanım 3.49 *Sabit kesit eğrilikli bir Kaehler manifolduna kompleks uzay form adı verilir (Wali, 2009).*

Teorem 3.50 *M bir Kaehler manifold olsun. Bu durumda M sabit holomorfik kesit eğrilikli olması için gerek ve yeter koşul $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $c \in \mathbb{R}$ için*

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \frac{1}{4}c(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X + g(JX,Z)JY \\ &\quad -g(JY,Z)JX + 2g(JX,Y)JZ) \end{aligned} \tag{3.75}$$

olmasıdır (Yano ve Kon, 1984).

İspat. $\chi(M)$ üzerinde bir R_0 tensörü $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R_0(X,Y,Z,W) &= \frac{1}{4}(g(X,W)g(Y,Z) - g(Y,W)g(X,Z) + g(X,JW) \\ &\quad +g(Y,JZ) - g(Y,JW)g(X,JZ) + 2g(X,JY)g(W,JZ)) \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,W) &= cg(R_0(X,Y)Z,W) \\ &= \frac{1}{4}c(g(g(X,Z)Y,W) - g(g(Y,Z)X,W) \\ &\quad -g(g(X,JZ)JY,W) + g(g(Y,JZ)JX,W) \\ &\quad -2g(g(X,JY)JZ,W)) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,W) &= \frac{1}{4}c[g(g(X,Z)Y,W) - g(g(Y,Z)X,W) \\ &\quad +g(g(JX,Z)JY,W) - g(g(JY,Z)JX,W) \\ &\quad +2g(g(JX,Y)JZ,W)] \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \frac{1}{4}c(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X + g(JX,Z)JY - g(JY,Z)JX \\ &\quad +2g(JX,Y)JZ) \end{aligned}$$

elde edilir. □

3.6. Hemen Hemen Kontak Manifoldlar

Tanım 3.51 *M manifoldu $(2n+1)-$boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere*

$$\varphi : \chi(M) \to \chi(M)$$

lineer dönüşümü, $\xi \in \chi(M)$ ve

$$\eta : \chi(M) \to C^{\infty}(M, R)$$

$1-$formu verilsin. Hernahgi bir $X \in \chi(M)$ için

$$\eta(\xi) = 1 \tag{3.76}$$

ve

$$\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi \tag{3.77}$$

koşulları sağlanıyorsa (φ, ξ, η) üçlüsüne hemen hemen kontak yapı ve M manifolduna ise hemen hemen kontak bir manifold adı verilir (Blair, 1976).

Teorem 3.52 *(M, φ, ξ, η) hemen hemen kontak bir manifold olmak üzere aşağıda verilen eşitlikler sağlanır (Yano ve Kon, 1976):*

i)

$$\varphi\xi = 0. \tag{3.78}$$

ii)

$$\eta(\varphi X) = 0. \tag{3.79}$$

iii)

$$\text{rank}\,\varphi = 2n. \tag{3.80}$$

İspat. $\eta(\xi) = 1$ ve $\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi$ olduğundan

$$\varphi^2(\xi) = -\xi + \eta(\xi)\xi = 0$$

dır. Bu durumda ya $\varphi\xi = 0$ ya da $\varphi\xi, \varphi$ nin 0 özdeğerine karşılık gelen bir özvektörüdür.

$\varphi\xi \neq 0$ olduğunu varsayalım.

$$0 \;=\; \varphi\left(\varphi^2\xi\right) = \varphi^2(\varphi\xi) = -\varphi\xi + \eta(\varphi\xi)\,\xi$$

eşitliğinden

$$\eta(\varphi\xi)\,\xi = \varphi\xi$$

olup $\varphi\xi \neq 0$ seçtiğimizden $\eta(\varphi\xi) \neq 0$ elde edilir. Aynı zamanda $\eta(\varphi\xi)\,\varphi\xi = \varphi^2\xi$ olur. Fakat $\eta(\varphi\xi)\,\varphi\xi = \varphi^2\xi = 0$ dır. Bu ise bir çelişkidir. Bu durumda

$$\varphi\xi = 0 \quad \text{ve} \;\; \eta(\varphi\xi) = 0$$

olur. $\forall X \in \chi(M)$ için $\varphi^2(\varphi X) = -\varphi X + \eta(\varphi X)\,\xi$ olduğundan

$$\eta(\varphi X) = 0$$

dır. $\varphi\xi = 0$ olduğundan rank$\varphi \leq 2n$ ve X, M de bir vektör olmak üzere $\varphi X = 0$ ve $\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\,\xi = 0$ dır. Buradan $\eta(X)\,\xi = X$ olur. X ile ξ orantılıdır. Dolayısıyla

$$\text{rank}\varphi = 2n$$

dir. □

Örnek 3.53 $\mathbb{R}^3$ *uzayında*

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{1}{2}(dz - ydx)\,, \\
\xi &= 2\frac{\partial}{\partial z} \in \chi(M)\,, \\
\varphi &: \chi(M) \xrightarrow{\text{lineer}} \chi(M)
\end{aligned}$$

verilsin. $\mathbb{R}^3$ *ün standart bazınına göre* φ *nin matrisi*

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. Böylece $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta)$ *hemen hemen kontak manifoldtur. Gerçekten;*

$$\begin{aligned}
\eta(\xi) &= \left(\frac{1}{2}(dz - ydx)\right)2\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \frac{1}{2}2dz\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{1}{2}2ydx\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

olur. Şimdi $X \in \chi(M)$ *ve* $X = (x_1, x_2, x_3)$ *olmak üzere* $\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi$ *olduğunu gösterelim.*

$$\begin{aligned}
\eta(X) &= \left(\frac{1}{2}(dz - ydx)\right)\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\
&= \frac{1}{2}x_1 dz\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}x_2 dz\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}x_3 dz\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}yx_1 dx\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{1}{2}yx_2 dx\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}yx_3 dx\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&= \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}yx_1 \\
&= \frac{1}{2}(x_3 - yx_1)
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ yx_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\varphi^2(X) = \varphi(\varphi(X)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ yx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -yx_1 \end{bmatrix} \tag{3.81}$$

dır. Böylece

$$\varphi^2(X) = (-x_1, -x_2, -yx_1) \tag{3.82}$$

elde edilir. Ayrıca (3.77) *eşitliğinden*

$$\begin{aligned}
-X + \eta(X)\xi &= (-x_1, -x_2, -x_3) + \left(\frac{1}{2}(x_3 - yx_1)\right)(0, 0, 2) \\
&= (-x_1, -x_2, -x_3) + (0, 0, x_3 - yx_1) \\
&= (-x_1, -x_2, -yx_1) \qquad (3.83)
\end{aligned}$$

dır. (3.82) *ve* (3.83) *eşitliklerinden* $\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi$ *eşitliği elde edilir. Böylece* $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta)$ *dörtlüsü hemen hemen kontak bir manifolddur (Blair, 1976).*

Teorem 3.54 M *hemen hemen kontak bir manifold olmak üzere* $\forall X, Y \in \chi(M)$ *için*

$$\eta(X) = g(X, \xi) \tag{3.84}$$

ve

$$g(\varphi(X), \varphi(Y)) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{3.85}$$

eşitliklerini sağlayan bir g Riemann metriği vardır (Yano ve Kon, 1976).

İspat. $\forall X \in \chi(M)$ olmak üzere $\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi$ ifadesinden

$$\varphi^2(X) + X = \eta(X)\xi$$

olup eşitliğin her iki tarafını ξ ile iç çarpımı alınırsa

$$g\left(\varphi^2(X) + X, \xi\right) = g(\eta(X)\xi, \xi)$$

olup

$$g\left(\varphi^2(X), \xi\right) + g(X, \xi) = \eta(X)g(\xi, \xi)$$

elde edilir. g Hermityen bir metrik ve $g(\xi, \xi) = 1$ olduğundan

$$-g(\varphi X, \varphi\xi) + g(X, \xi) = \eta(X)$$

eşitliği ve Teorem 3.52 göz önüne alınırsa $\varphi\xi = 0$ ve $g(\varphi X, \varphi\xi) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla son eşitlikten

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

bulunur. Ayrıca $\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi$ eşitliğinin her iki tarafını $\forall Y \in \chi(M)$ için Y ile iç çarpımı alınırsa

$$g\left(\varphi^2(X), Y\right) = g(-X + \eta(X)\xi, Y),$$

eşitliğinden

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y).$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

□

(3.85) eşitliğinde X yerine φX yazılırsa

$$g(\varphi X, Y) = g\left(\varphi^2 X, \varphi Y\right) + \eta(\varphi X)\eta(Y)$$

olur. Teorem 3.52 den

$$\begin{aligned} g(\varphi X, Y) &= g(-X + \eta(X)\xi, \varphi Y) + 0\eta(Y) \\ &= g(-X, \varphi Y) + \eta(X) g(\xi, \varphi Y) \\ &= -g(X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(\varphi Y) \\ &= -g(X, \varphi Y) + \eta(X) 0 \\ &= -g(X, \varphi Y) \end{aligned}$$

dır. Son eşitlikten

$$g(\varphi X, Y) + g(X, \varphi Y) = 0 \tag{3.86}$$

dır.

Tanım 3.55 *M hemen hemen kontak bir manifold olmak üzere*

$$\begin{aligned} \eta(X) &= g(X, \xi) \\ g(\varphi X, \varphi Y) &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \end{aligned} \tag{3.87}$$

şartlarını sağlıyorsa bir g metriği varsa bu metriğe M üzerinde hemen hemen kontak metrik ve bu manifolda hemen hemen kontak metrik bir manifold adı verilir (Yano ve Kon, 1976).

Örnek 3.56 *Örnek 3.53 da verilen $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta)$ hemen hemen kontak manifoldunu göz önune alalım. M üzerinde*

$$\begin{aligned} g &= ds^2 = \frac{1}{4}(dx \otimes dx + dy \otimes dy + d\eta \otimes d\eta) \\ &= \frac{1}{4}\left(\left(1 + y^2\right) dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2ydxdz\right) \end{aligned}$$

olmak üzere g metriğine karşılık gelen matris

$$g = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Burada

$$g(X, \xi) = X^T g\, \xi \tag{3.88}$$

eşitliğini kullanılırsa

$$\begin{aligned} g\left(X,\xi\right) &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2y \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\left[-2yx_1 + 2x_3\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(x_3 - yx_1\right) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.84) *ve* (3.88) *eşitliklerinden*

$$\eta\left(X\right) = g\left(X,\xi\right)$$

olur. Şimdi

$$g\left(\varphi X,\varphi Y\right) = g\left(X,Y\right) - \eta\left(X\right)\eta\left(Y\right)$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$X = (x_1, x_2, x_3) \in \chi\left(\mathbb{R}^3\right)$ *ve* $Y = (y_1, y_{2,}y_3) \in \chi\left(\mathbb{R}^3\right)$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} \varphi X &= (x_2, -x_1, y\, x_2) = x_2\frac{\partial}{\partial x} - x_1\frac{\partial}{\partial y} + y\, x_2\frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi Y &= (y_2, -y_1, y\, y_2) = y_2\frac{\partial}{\partial x} - y_1\frac{\partial}{\partial y} + y\, y_2\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} g\left(\varphi X,\varphi Y\right) &= \left(\varphi X\right)^T g\left(\varphi Y\right) \qquad (3.89) \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & y\, x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \\ y\, y_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & y\, x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(1+y^2\right)y_2 - y^2 y_2 \\ -y_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ g\left(\varphi X,\varphi Y\right) &= \frac{1}{4}\left(x_1 y_1 + x_2 y_2\right) \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
g(X,Y) &= X^T g\, Y \\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (1+y^2)\,y_1 - y\,y_3 \\ y_2 \\ -y\,y_1 + y_3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\left\{x_1\left(\left(1+y^2\right)y_1 - y\,y_3\right) + x_2y_2 + x_3\left(-y\,y_1 + y_3\right)\right\} \\
g(X,Y) &= \frac{1}{4}\left\{\left(1+y^2\right)x_1y_1 - x_1y\,y_3 + x_2y_2 - x_3y\,y_1 + x_3y_3\right\}
\end{aligned}
$$

dir. Böylece

$$
\eta(X) = \frac{1}{2}\left(x_3 - y\,x_1\right)
$$

$$
\eta(Y) = \frac{1}{2}\left(y_3 - y\,y_1\right)
$$

olduğundan

$$
\eta(X)\;\eta(Y) = \frac{1}{4}\left(x_3y_3 - x_3y\,y_1 - x_1y_3y\; + y^2x_1y_1\right) \tag{3.90}
$$

olur. Böylece

$$
g(X,Y) - \eta(X)\,\eta(Y) = \frac{1}{4}\left(x_1y_1 + x_2y_2\right)
$$

olduğu görülür. (3.89) *ve* (3.90) *eşitliklerinden*

$$
g(\varphi X, \varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\,\eta(Y)
$$

eşitliğinin sağlandığı görülür (Yano ve Kon, 1976).

Tanım 3.57 M *hemen hemen kontak bir metrik manifold olmak üzere*

$$
\Psi(X) = g(X, \varphi Y) \tag{3.91}
$$

ile tanımlanan Ψ *dönüşümü bu manifoldun temel-2 formu olarak isimlendirilir (Yano ve Kon, 1976).*

Tanım 3.58 M*,* $(2n+1)-$ *boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold olmak üzere* M *nin herbir noktasında*

$$
\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0 \tag{3.92}
$$

eşitliğini sağlayan η diferensiyellenebilir 1-formuna bir kontak form ve M manifolduna ise kontak bir manifold denir. Burada $(d\eta)^n$ ifadesi

$$(d\eta)^n = \underbrace{d\eta \wedge d\eta \wedge \cdots \wedge d\eta}_{n \text{ tane}} \tag{3.93}$$

ile verilir. Ayrıca $d\eta$ $2-$form, $n \wedge (d\eta)^n$ ise $2n+1-$formdur. Bundan dolayı kontak manifoldlar $2n+1$ boyutludur (Blair, 1976).

Tanım 3.59 *M, $(2n+1)-$boyutlu kontak bir manifold olmak üzere*

$$D = \{X \in \chi(M) \ : \eta(X) = 0\} \tag{3.94}$$

ile tanımlı D kümesine M manifoldunun kontak bir distribüsyon denir (Blair, 1976).

$\chi(M)$ vektör uzayı $(2n+1)-$boyutlu olduğundan $\chi^*(M)$ vektör uzayı da $(2n+1)-$boyutludur. Bu iki vektör uzayının sırasıyla , $\{\xi, X_1, \ldots, X_{2n}\}$ ve $\{\eta, \eta_1, \ldots, \eta_{2n}\}$ tabanları vardır. $i = 1, 2, \ldots, 2n$ için $\eta(X_i) = 0$ ve $\{X_1, \ldots, X_{2n}\}$ dir. Burada $D = span\{X_1, ..., X_{2n}\}$ dir. Dolayısıyla $boyD = 2n$ dir (Blair, 1976).

Teorem 3.60 *ω, $n-$boyutlu M manifoldu üzerinde 1-form olsun. M üzerinde*

$$\eta \wedge (d\omega)^p \neq 0$$

ve

$$(d\omega)^{p+1} = 0$$

olsun. O zaman M nin her bir noktasının bir komşuluğunda

$$\omega = dy^{p+1} - \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i$$

olacak şekilde $(x_1, x_2, ..., x_p, y_1, y_2, \ldots, y_{n-p})$ koordinat sistemi vardır. Böylece $(2n+1)$ boyutlu M kontak manifoldunun her bir noktasının bir komşuluğu üzerinde

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i$$

olacak şekilde $i = 1, 2, \ldots, n$ için (x_i, y_i, z) koordinatları vardır (Blair, 1976).

Tanım 3.61 *$(2n+1)-$ boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^{2n+1}$ de*

$$(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n, z)$$

kartezyen koordinatlarını alalım. $\eta_0, \mathbb{R}^{2n+1}$ *de* $1-$*form olmak üzere*

$$\eta_0 = dz - \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i$$

olsun. Bu durumda

$$\eta_0 \wedge (d\eta_0)^n \neq 0$$

dır. Burada $\eta_0, \mathbb{R}^{2n+1}$ *de bir kontak formdur denir (Blair, 1976).*

Örnek 3.62 $\mathbb{R}^{2n+1}$ $(2n+1)$ *−boyutlu Öklid uzayında,* $\xi = \frac{\partial}{\partial z}$ *olmak üzere*

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i$$

1-formu $\mathbb{R}^{2n+1}$ *üzerinde kontak formdur. Gerçekten*

$$\eta(\xi) = \eta\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = dz\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - \sum_{i=1}^{n} y_i dx_i \left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = 1$$

olur.

$n = 2$ *için* $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ *olduğunu gösterelim.*

$$\eta = dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2$$

olduğundan

$$d\eta = -dy_1 \wedge dx_1 - dy_2 \wedge dx_2$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
(d\eta)^2 &= \frac{1}{2}(d\eta \wedge d\eta) \\
&= dy_1 \wedge dx_1 \wedge dy_2 \wedge dx_2 + dy_2 \wedge dx_2 \wedge dy_1 \wedge dx_1 \\
&= (dy_1 \wedge dx_1 \wedge dy_2 \wedge dx_2) \\
&= dy_1 \wedge dx_1 \wedge dy_2 \wedge dx_2
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\eta \wedge (d\eta)^2 &= (dz - y_1 dx_1 - y_2 dx_2) \wedge (dy_1 \wedge dx_1 \wedge dy_2 \wedge dx_2) \\
&= dz \wedge dy_1 \wedge dx_1 \wedge dy_2 \wedge dx_2
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$dz \wedge dy_1 \wedge dx_1 \wedge dy_2 \wedge dx_2 \neq 0$$

olduğundan

$$\eta \wedge (d\eta)^2 \neq 0$$

dir (Yano ve Kon, 1984).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Kompleks Manifoldların Reel Hiperyüzeyleri

$\widetilde{M}$, kompleks boyutu n (reel boyutu $2n$) olan bir Hermityen manifold olmak üzere $\widetilde{M}$ nin hemen hemen kompleks yapısını J ile ve Hermityen metriğini g ile gösterelim. M, $\widetilde{M}$ nin reel $(2n-1)-$boyutlu bir hiperyüzey olsun. Bu durumda

$$\text{boy}T_pM = 2n-1 \;\text{ ve }\; boyT_PM^{\perp} = 1 \tag{4.1}$$

olur. $X \in \chi(M)$ seçilirse $JX \in \chi(\widetilde{M})$ ve $N \in \chi^{\perp}(M)$ olduğundan $JN \in \chi(M)$ olur.

Şimdi $\xi \in \chi(M)$ için $JN = -\xi$ olsun. $\forall X \in \chi(M)$ için

$$JX = \varphi X + \eta(X)N \;\text{ ve }\; JN = -\xi \tag{4.2}$$

olarak yazılabilir. Burada φX, JX in teğetsel kısmı olup

$$\varphi : T_p\widetilde{M} \to T_pM$$

bir projeksiyondur ve η, $1-$ form olup

$$\eta : \chi(M) \to C^{\infty}(M,R)$$

ile tanımlıdır (Kon, 2008).

Önerme 4.1 *$\widetilde{M}$ Hermityen bir manifold ve M, $\widetilde{M}$ nın reel bir hiperyüzeyi olsun. $JN = -\xi$ ve $\forall X \in \chi(M)$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Kon, 2008).*

$$\eta(\varphi X) = 0, \tag{4.3}$$

$$\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi, \tag{4.4}$$

$$\varphi\xi = 0. \tag{4.5}$$

İspat. $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} -X &= J^2(X) & (4.6)\\ &= J(\varphi X + \eta(X)N) \\ &= J(\varphi X) + \eta(X)JN \\ &= \varphi^2(X) + \eta(\varphi X)N - \eta(X)\xi & (4.7)\end{aligned}$$

bulunur. (4.7) eşitliğinde $\varphi^2(X), \eta(X)\xi, -X \in \chi(M)$ ve $\eta(\varphi X)N \in \chi^\perp(M)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\eta(\varphi X)N = 0$$

olduğu görülür. Böylece $N \neq 0$ olduğundan (4.3) eşitliği elde edilir.

(4.7) eşitliğinden

$$J^2(X) = \varphi^2(X) - \eta(X)\xi = -X$$

yazılabilir. Son eşitliğin teğet ve normal kısımları karşılaştırılırsa (4.5) eşitliği elde edilir.

$J\xi = N$ eşitliği ve (4.4) den

$$J(\xi) = \varphi\xi + \eta(\xi)N$$

olur. $\eta(\xi) = 1$ ve $N = J\xi$ olduğu göz önüne alınırsa (4.7) eşitliği elde edilir. □

Önerme 4.2 *$\widetilde{M}$ Hermityen bir manifold ve M, $\widetilde{M}$ nın reel bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda $\forall X \in \chi(M)$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Kon, 2008):*

$$\begin{aligned} g(\varphi X, Y) + g(X, \varphi Y) &= 0, && (4.8)\\ g(\varphi X, \varphi Y) &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), && (4.9)\\ \eta(X) &= g(X, \xi). && (4.10) \end{aligned}$$

İspat. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(JX, Y) = -g(X, JY)$$

olduğundan ve (4.4) den

$$g(\varphi X + \eta(X)N, Y) = -g(X, \varphi Y + \eta(Y)N)$$

olup

$$g(\varphi X, Y) + \eta(X)g(N, Y) = -g(X, \varphi Y) - \eta(Y)g(X, N)$$

elde edilir. $g(N, Y) = g(X, N) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa (4.8) eşitliği elde edilir.

Diğer taraftan

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

olduğundan ve (4.4) den

$$g(\varphi X+\eta(X)N,\varphi Y+\eta(Y)N)=g(X,Y)$$

ve

$$g(\varphi X,\varphi Y)+\eta(Y)g(\varphi X,N)+\eta(X)g(N,\varphi Y)+\eta(X)\eta(Y)g(N,N)=g(X,Y)$$

elde edilir. Son eşitlikte $g(\varphi X,N)=g(N,\varphi Y)=0$ ve $g(N,N)=1$ olduğundan (4.9) eşitliğinin doğruluğu ispatlanır.

(4.8) eşitliğinden

$$g\left(\varphi^2 X,\xi\right)=-g(\varphi X,\varphi\xi)=0$$

olur. Böylece $\varphi^2(X)=-X+\eta(X)\xi$ olup

$$g\left(\varphi^2(X),\xi\right)=g(-X+\eta(X)\xi,\xi)$$

eşitliğinden

$$g(-X,\xi)+\eta(X)g(\xi,\xi)=0$$

olup bu ise (4.10) eşitliğinin doğruluğunu gösterir. □

Önerme 4.1 ve Önerme 4.2 göz önüne alındığında aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 4.3 *$\widetilde{M}$ bir Hermityen manifold ve $M,\widetilde{M}$ nın reel bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M hiperyüzeyi hemen hemen kontak metrik bir manifoldtur.*

Lemma 4.4 *$\widetilde{M}$ reel $2n-$boyutlu bir Hermityen manifold ve M, $\widetilde{M}$ manifoldunun reel $(2n-1)-$boyutlu reel bir hiperyüzeyi olmak üzere Gauss ve Weingarten formülleri*

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y+g(A_N X,Y)N, \tag{4.11}$$

$$\widetilde{\nabla}_X N = -A_N X \tag{4.12}$$

ile verilir (Kon, 2008).

İspat. $1-$boyutlu $\chi(M)^{\perp}$ uzayını geren birim normal vektör alanı N olmak üzere $X,Y\in\chi(M)$ için $h(X,Y)=\lambda N$ yazılabilir. Böylece

$$g(h(X,Y),N)=\lambda g(N,N)$$

olup

$$g\left(h\left(X,Y\right),N\right)=\lambda$$

elde edilir. (2.12) eşitliğinden

$$g\left(A_N X,Y\right)=\lambda$$

olur. Bu durumda (2.10) ile verilen Gauss formülü

$$\widetilde{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+g\left(A_N X,Y\right)N$$

olarak yazılabilir. Bu ise (4.11) eşitliğinin doğruluğunu gösterir.

Diğer taraftan

$$g\left(\nabla_X^{\perp}N,N\right)=g\left(\widetilde{\nabla}_X N,N\right)=0$$

elde edilir. Bu durumda (2.11) ile verilen Weingarten formülü

$$\widetilde{\nabla}_X N=-A_N X$$

olur. Bu ise (4.12) eşitliğidir. □

Lemma 4.5 *$\widetilde{M}$ reel $2n-$boyutlu bir Hermityen manifold ve M, $\widetilde{M}$ manifoldunun reel $(2n-1)-$boyutlu reel bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda $\forall X\in\chi\left(M\right)$ için*

$$\eta\left(\nabla_X\xi\right)=0 \tag{4.13}$$

eşitliği sağlanır (Kon, 2008).

İspat. ξ birim bir vektör olduğundan $g\left(\xi,\xi\right)=1$ olup

$$g\left(\nabla_X\xi,\xi\right)+g\left(\xi,\nabla_X\xi\right)=0$$

eşitliğinden

$$g\left(\nabla_X\xi,\xi\right)=0$$

elde edilir. Bu ise

$$\eta\left(\nabla_X\xi\right)=0$$

olduğunu gösterir. □

Lemma 4.6 *$\widetilde{M}$ bir Kaehler manifold ve $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ ise $\widetilde{M}$ nın reel bir hiperyüzeyi olsun. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ üzerindeki herbir X, Y vektörleri için*

$$\nabla_X \xi = \varphi A_N X \tag{4.14}$$

ve

$$(\nabla_X \varphi) Y = \eta(Y) A_N X - g(A_N X, Y) \xi \tag{4.15}$$

eşitlikleri sağlanır (Kon, 2008).

İspat. (4.4) ve (4.13) eşitlikleri (4.12) ile verilen Weingarten formülünde yerine yazılırsa

$$\widetilde{\nabla}_X N = \widetilde{\nabla}_X J\xi = -A_N X$$

olur. Bu durumda

$$J\widetilde{\nabla}_X \xi + \left(\widetilde{\nabla}_X J\right) \xi = -A_N X,$$

olup

$$J\widetilde{\nabla}_X \xi = -A_N X$$

bulunur. Böylece

$$J\left(\nabla_X \xi + g(A_N X, \xi) N\right) = -A_N X$$

olduğundan

$$\varphi \nabla_X \xi + \eta(\nabla_X \xi)\xi - g(A_N X, \xi)\xi = -A_N X$$

dır. $\eta(\nabla_X \xi) = 0$ olduğu göz önüne alındığında

$$\varphi\left(\varphi \nabla_X \xi - g(A_N X, \xi)\xi\right) = -\varphi A_N X$$

yazılabilir. (4.4) den

$$\nabla_X \xi = \varphi A_N X$$

elde edilir.

Şimdi (4.15) eşitliğini ispatını verelim. $\forall Y \in \chi(M)$ için $JY = \varphi Y + \eta(Y) N$ dır. Buradan

$$\varphi Y = JY - \eta(Y) N$$

olup

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X (\varphi Y) &= \widetilde{\nabla}_X (JY - \eta(Y) N) \\ &= \widetilde{\nabla}_X JY - \eta(Y) \widetilde{\nabla}_X N \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikten

$$\left(\widetilde{\nabla}_X \varphi\right) Y + \varphi\left(\widetilde{\nabla}_X Y\right) = J\widetilde{\nabla}_X Y + \left(\widetilde{\nabla}_X J\right) Y - \eta(Y)\widetilde{\nabla}_X N.$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\left(\widetilde{\nabla}_X \varphi\right) Y = J\widetilde{\nabla}_X Y - \eta(Y)\widetilde{\nabla}_X N - \varphi\left(\widetilde{\nabla}_X Y\right)$$

dir. Gauss ve Weingarten formüllerinden

$$\begin{aligned}
\left(\widetilde{\nabla}_X \varphi\right) Y &= J\left(\nabla_X Y + g\left(A_N X, Y\right) N\right) - \eta(Y)\left(-A_N X\right) \\
&\quad -\varphi\left(\nabla_X Y + g\left(A_N X, Y\right) N\right) \\
&= J\nabla_X Y + g\left(A_N X, Y\right) JN + \eta(Y) A_N X - \varphi\left(\nabla_X Y\right) \\
&\quad -g\left(A_N X, Y\right)\varphi(N) \\
&= J\nabla_X Y - g\left(A_N X, Y\right)\xi + \eta(Y) A_N X - \varphi\left(\nabla_X Y\right) \\
&\quad -g\left(A_N X, Y\right)\varphi(N) \\
&= \varphi\left(\nabla_X Y\right) + \eta\left(\nabla_X Y\right) N - g\left(A_N X, Y\right)\xi + \eta(Y) A_N X \\
&\quad -\varphi\left(\nabla_X Y\right) - g\left(A_N X, Y\right)\varphi(N)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\varphi(N) = 0$ olduğundan

$$\left(\widetilde{\nabla}_X \varphi\right) Y = \eta(Y) A_N X - g\left(A_N X, Y\right)\xi$$

eşitliği elde edilir. □

Önerme 4.7 $\widetilde{M}(4c)$ *, c sabit eğrilikli kompleks uzay form ve* M, $\widetilde{M}(4c)$ *uzay formunun reel bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Kon, 2008):*

i) $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ *için*

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= c\left\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(\varphi Y, Z)\varphi X - g(\varphi X, Z)\varphi Y\right. \\
&\quad \left.-2g(\varphi X, Y)\varphi Z\right\} + g\left(A_N Y, Z\right) A_N X \\
&\quad -g\left(A_N X, Z\right) A_N Y. \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

ii) $\forall X, Y \in \chi(M)$ *için*

$$\left(\nabla_X A\right) Y - \left(\nabla_Y A\right) X = c\left\{\eta(X)\varphi Y - \eta(Y)\varphi X - 2g(\varphi X, Y)\xi\right\}. \qquad (4.17)$$

İspat. M, $\widetilde{M}$ kompleks uzay formunun reel bir hiperyüzeyi olmak üzere Gauss denkleminden

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X \\ &\quad + (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z) \qquad (4.18)\end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca, $\widetilde{M}$ bir kompleks uzay form olduğundan $JX = \varphi X + \eta(X)N$, $JY = \varphi Y + \eta(Y)N$ ve $JZ = \varphi Z + \eta(Z)N$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)Z &= c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(JY,Z)JX \\ &\quad - g(JX,Z)JY - 2g((JX,Y)JZ)\} \qquad (4.19)\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)Z &= c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(\varphi Y + \eta(Y)N, Z)(\varphi X + \eta(X)N) \\ &\quad - g(\varphi X + \eta(X)N, Z)(\varphi Y + \eta(Y)N) \\ &\quad - 2g((\varphi X + \eta(X)N, Y)(\varphi Z + \eta(Z)N))\} \\ &= c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(\varphi Y, Z)\varphi X + g(\varphi Y, Z)\eta(X)N \\ &\quad - g(\varphi X, Z)\varphi Y - g(\varphi X, Z)\eta(Y)N - 2g(\varphi X, Y)\varphi Z \\ &\quad - 2g(\varphi X, Y)\eta(Z)N\} \\ &= c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(\varphi Y, Z)\varphi X - g(\varphi X, Z)\varphi Y \\ &\quad - 2g(\varphi X, Y)\varphi Z\} + c\{g(\varphi Y, Z)\eta(X)N - g(\varphi X, Z)\eta(Y)N \\ &\quad - 2g(\varphi X, Y)\eta(Z)N\} \qquad (4.20)\end{aligned}$$

elde edilir. (4.18) ve (4.20) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}R(X,Y)Z &= c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(\varphi Y, Z)\varphi X - g(\varphi X, Z)\varphi Y \\ &\quad - 2g(\varphi X, Y)\varphi Z\} + g(A_N Y, Z)A_N X - g(A_N X, Z)A_N Y \qquad (4.21)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z) &= c\{g(\varphi Y, Z)\eta(X)N - g(\varphi X, Z)\eta(Y)N \\ &\quad - 2g(\varphi X, Y)\eta(Z)N\} \qquad (4.22)\end{aligned}$$

olur. (4.22) dan

$$(\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X = c\{\varphi Y \eta(X)N - \varphi X \eta(Y)N - 2g(\varphi X, Y)\xi N\}$$

elde edilir. □

Lemma 4.8 *$\widetilde{M}$ reel $2n-$boyutlu bir Hermityen manifold ve M, $\widetilde{M}$ manifoldunun reel $(2n-1)-$boyutlu v hiperyüzeyi olsun. $\{e_1, e_2, \ldots, e_{2n-2}, \xi\}$, $\chi(M)$ nin ortonormal bir bazı olmak üzere $\forall j \in \{1, 2, \ldots, 2n-2\}$ için*

$$g(\varphi e_j, e_j) = 0$$

dır (Kon, 2008).

İspat. $\forall j \in \{1, 2, \ldots, 2n-2\}$ için

$$g(Je_j, e_j) = 0$$

olup

$$g(\varphi e_j + \eta(e_j) N, e_j) = g(\varphi e_j, e_j) + \eta(e_j) g(N, e_j) = 0$$

elde edilir. Burada $N \in \chi^{\perp}(M)$ olduğundan

$$g(N, e_j) = 0$$

olup

$$g(\varphi e_j, e_j) = 0$$

bulunur. □

Önerme 4.9 *M, $\widetilde{M}$ kompleks uzay formunun reel $(2n-1)-$boyutlu bir hiperyüzeyi ve S, M nin Ricci tensörü olmak üzere*

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= (2n+1)\, c\, g(X,Y) - 3c\eta(X)\eta(Y) \\ &\quad + izA\, g(AX,Y) - g(AX,AY) \end{aligned} \tag{4.23}$$

dir (Kon, 2008).

İspat. (4.21) eşitliğinden

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,W) &= c\{g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W) \\ &\quad + g(\varphi Y,Z)g(\varphi X,W) - g(\varphi X,Z)g(\varphi Y,W) \\ &\quad - 2g(\varphi X,Y)g(\varphi Z,W)\} + g(A_N Y,Z)g(A_N X,W) \\ &\quad - g(A_N X,Z)g(A_N Y,W) \end{aligned} \tag{4.24}$$

yazılabilir. $\{e_1, e_2, \ldots, e_{2n-2}, \xi\}$, $\chi(M)$ nin ortonormal bir bazı olmak üzere son eşitlikte X ve W yerine e_j, Y yerine X ve Z yerine Y yazılırsa

$$\begin{aligned}
g(R(e_j,X)Y,e_j) &= c\{g(X,Y)g(e_j,e_j) - g(e_j,Y)g(X,e_j) \\
&\quad + g(\varphi X,Y)g(\varphi e_j,e_j) - g(\varphi e_j,Y)g(\varphi X,e_j) \\
&\quad - 2g(\varphi e_j,X)g(\varphi Y,e_j)\} + g(A_N X,Y)g(A_N\, e_j,e_j) \\
&\quad - g(A_N\, e_j,Y)g(A_N X,e_j) \\
&= c\{g(X,Y) - g(X,g(e_j,Y)e_j) - g(\varphi e_j,Y)g(\varphi X,e_j) \\
&\quad - 2g(\varphi e_j,X)g(\varphi Y,e_j)\} + g(A_N X,Y)g(A_N\, e_j,e_j) \\
&\quad - g(A_N e_j,Y)g(A_N X,e_j)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
S(X,Y) &= \sum_{j=1}^{2n-1} g(R(e_j,X)Y,e_j) \\
&= \sum_{j=1}^{2n-1} c\{g(X,Y) - g(X,g(e_j,Y)e_j) - g(\varphi e_j,Y)g(\varphi X,e_j) \\
&\quad - 2g(\varphi e_j,X)g(\varphi Y,e_j)\} + \sum_{j=1}^{2n-1}(g(A_N X,Y)g(A_N\, e_j,e_j) \\
&\quad - g(A_N e_j,Y)g(A_N X,e_j)) \\
&= (2n-1)c\,g(X,Y) - c\left(\sum_{j=1}^{2n-1} g(X,g(e_j,Y)e_j) + g(\varphi e_j,Y)g(\varphi X,e_j)\right. \\
&\quad + 2g(\varphi e_j,X)g(\varphi Y,e_j)) + g(A_N X,Y)\,izA - g(A_N X,A_N Y) \\
&= (2n-1)c\,g(X,Y) - c\left(\sum_{j=1}^{2n-1} g(X,g(e_j,Y)e_j)\right) \\
&\quad - c\left(\sum_{j=1}^{2n-1} g(\varphi e_j,Y)g(\varphi X,e_j) + 2g(\varphi e_j,X)g(\varphi Y,e_j)\right) \\
&\quad + g(A_N X,Y)\,izA - g(A_N X,A_N Y) \\
&= (2n-1)c\,g(X,Y) - c\,g(X,Y) \\
&\quad + c\left(\sum_{j=1}^{2n-1} g(\varphi Y,e_j)g(\varphi X,e_j) + 2g(\varphi X,e_j)g(\varphi Y,e_j)\right) \\
&\quad + g(A_N X,Y)\,izA - g(A_N X,A_N Y) \\
&= (2n-2)c\,g(X,Y) + c(3g(\varphi X,\varphi Y)) + g(A_N X,Y)\,izA \\
&\quad - g(A_N X,A_N Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. $g(\varphi X, \varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$ olduğundan

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= (2n-2)\, c\, g(X,Y) + 3c\,(g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)) \\ &\quad + g(A_N X, Y)\, izA - g(A_N X, A_N Y) \\ &= (2n-2)\, c\, g(X,Y) + 3cg(X,Y) - 3\eta(X)\eta(Y) \\ &\quad + g(A_N X, Y)\, izA - g(A_N X, A_N Y) \\ &= (2n+1)\, cg(X,Y) - 3\eta(X)\eta(Y) + g(A_N X, Y)\, izA \\ &\quad - g(A_N X, A_N Y) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 4.10 *$M^n(c)$, $c \neq 0$ kompleks uzay formunun total umbilik reel bir hiperyüzeyi mevcut degildir (Tashiro ve Tachibana, 1963).*

İspat. M total umbilik reel bir hiperyüzey ise her X, Y teğet vektörü için $h(X,Y) = \lambda g(X,Y)$ olur. Bu ifade (4.22) da yerine yazılırsa ve $c \neq 0$ olduğu göz önüne alınırsa ispat tamamlanır. □

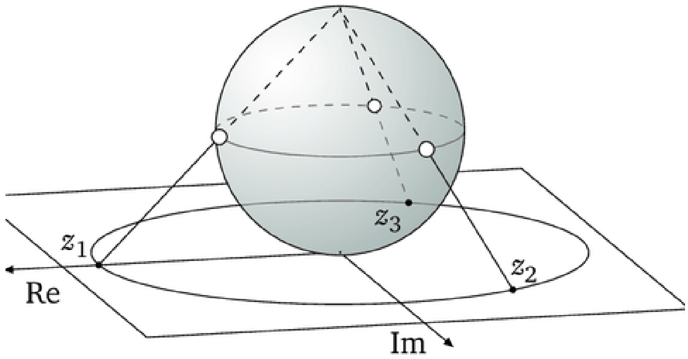
4.2. $\eta-$Umbilik Reel Hiperyüzeyler

Tanım 4.11 *$\widetilde{M}$ hemen hemen kompleks bir manifold ve M, $\widetilde{M}$ nın reel bir hiperyüzeyi olsun. $\forall X \in \chi(M)$ için*

$$A_N X = aX + b\eta(X)\xi \tag{4.26}$$

eşitliği sağlanıyorsa M reel hiperyüzeyine total $\eta-$umbilik reel bir hiperyüzey denir (Kon, 2008).

Örnek 4.12 *$\mathbb{C}^3$ de $\mathbb{S}^5 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : \sum_{j=1}^{3} |z_j|^2 = 1\}$ küresini ve $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{C}^3$ stereografik izdüşümünü göz önüne alalım.*



Şekil 4.1. Stereografik izdüşüm

r pozitif bir reel sayı olmak üzere $\mathbb{S}^3$ de bir hiperyüzey $M'(4,r)$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = r|z_3|^2 \text{ ve } \sum_{j=1}^{3} |z_j|^2 = 1$$

ile tanımlansın. Bu durumda $\pi(M'(4,r)) = M(3,r)$, $\mathbb{C}P^2$ kompleks projektif uzayının bir hiperyüzeyi olur. Bu hiperyüzey paremetrik olarak birbirinden farklı iki farklı asli eğriliği olup, $\mathbb{C}P^2$ nin $\eta-$umbilik reel bir hiperyüzeyidir.

Tanım 4.13 *$\widetilde{M}$ hemen hemen kompleks bir manifold ve M, $\widetilde{M}$ nın reel bir hiperyüzeyi olsun. M reel hiperyüzeyinde bir distribüsyon*

$$T_0 = \{X \in T_x M : \eta(X) = 0\} \tag{4.27}$$

olmak üzere, T_0 distribüsyonu integrallenebilir ve integral alt manifoldu total geodezik bir alt manifold ise M ye bir reel regle hiperyüzeyi adı verilir (Kon, 2008).

M, $n \geq 3$ olmak üzere $M^n(c)$, $c \neq 0$ kompleks uzay formunun reel bir hiperyüzeyi olsun. A şekil operatörünün herhangi $X, Y \in T_0$ için $g(AX, Y) = a\, g(X, Y)$ eşitliğinin sağlandığını varsayalım. M nin ortonormal bir $\{e_1, e_2, ..., e_{2n-2}, \xi\}$ bazını seçelim. Böylece şekil operatörü A_N

$$A_N = \begin{bmatrix} a & \dots & 0 & h_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a & h_{2n-2} \\ h_1 & \dots & h_{2n-2} & b \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

olur. Burada $h_i = g(Ae_i, \xi)$, $i = 1, 2, ..., 2n-2$ ve $b = g(A\xi, \xi)$ ile tanımlanır. Şimdi tanımladığımız bu ifadeleri $a \neq 0$ için değerlendirelim (Kon, 2008).

Lemma 4.14 *M, $n \geq 3$ olmak üzere $M^n(c)$, $c \neq 0$ kompleks uzay formun reel bir hiperyüzeyi, A_N şekil operatörünün herhangi $X, Y \in T_0$ için kabul edelim ki $g(A_N X, Y) = a\, g(X, Y)$, $a \neq 0$ eşitliği sağlansın. Bu durumda $i \neq j$, $j \neq k$, $k \neq i$, $i, j, k \in \{1, \ldots 2n-2\}$ için*

$$h_i\, g(\varphi e_j, e_k) = h_j\, g(\varphi e_k, e_i) = h_k\, g(\varphi e_i, e_j) \tag{4.29}$$

eşitliği sağlanır (Kon, 2008).

İspat. $i, j, k, l \leq 2n-2$ olmak üzere, (4.17) eşitliğinde X yerine e_i, Y yerine e_j yazılırsa

$$(\nabla_{e_i} A_N) e_j - \left(\nabla_{e_j} A_N\right) e_i = c\{\eta(e_i)\varphi e_j - \eta(e_j)\varphi X - 2g(\varphi e_i, Y)\xi\}$$

ve $\eta(e_i) = \eta(e_j) = 0$ olduğundan

$$(\nabla_{e_i} A_N) e_j - \left(\nabla_{e_j} A_N\right) e_i = 2cg(e_i, \varphi e_j)\xi \tag{4.30}$$

ede edilir. Diğer taraftan $Ae_i = ae_i + h_i\xi$, $i = 1, 2, ..., 2n-2$ için

$$\begin{aligned}(\nabla_{e_i} A_N) e_j - \left(\nabla_{e_j} A_N\right) e_i &= \nabla_{e_i} A_N e_j - A_N \nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} A_N e_i + A_N \nabla_{e_j} e_i \\ &= \nabla_{e_i}(ae_j + h_j\xi) - A_N \nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j}(ae_i + h_i\xi) \\ &\quad + A\nabla_{e_j} e_i \\ &= e_i(ae_j) + a\nabla_{e_i} e_j + e_i(ah_j)\xi + h_j \nabla_{e_i}\xi - A_N \nabla_{e_i} e_j \\ &\quad - e_j(ae_i) - a\nabla_{e_j} e_i + e_j(ah_i)\xi - h_i \nabla_{e_j}\xi \\ &\quad + A_N \nabla_{e_j} e_i \end{aligned} \tag{4.31}$$

elde edilir. (4.16) eşitliği ve $\nabla_X \xi = \varphi A_N X$ olduğundan $\nabla_{e_i}\xi = \varphi A e_i$ ve $\nabla_{e_j}\xi = \varphi A_N e_j$ olup

$$\begin{aligned}(\nabla_{e_i} A) e_j - \left(\nabla_{e_j} A\right) e_i &= e_i(ae_j) + a\nabla_{e_i} e_j + e_i(ah_j)\xi + h_j\varphi A e_i - A\nabla_{e_i} e_j \\ &\quad - e_j(ae_i) - a\nabla_{e_j} e_i + e_j(ah_i)\xi - h_i\varphi A e_j + A\nabla_{e_j} e_i \\ &= e_i(ae_j) + a\nabla_{e_i} e_j + e_i(ah_j)\xi + h_j\varphi(ae_i + h_i\xi) \\ &\quad - A\nabla_{e_i} e_j - e_j(ae_i) - a\nabla_{e_j} e_i + e_j(ah_i)\xi \\ &\quad - h_i\varphi(ae_j + h_j\xi) + A\nabla_{e_j} e_i \\ &= a\left(\nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i\right) + e_i(ah_j)\xi + ah_j\varphi(e_i) + h_j h_i \varphi\xi \\ &\quad - A\nabla_{e_i} e_j - e_j(ah_i)\xi - ah_i\varphi(e_j) + h_i h_j \varphi\xi \\ &\quad + A\nabla_{e_j} e_i \end{aligned} \tag{4.32}$$

bulunur. $\varphi\xi = 0$ olduğundan son eşitlik

$$\begin{aligned}(\nabla_{e_i}A)\,e_j - \left(\nabla_{e_j}A\right)e_i &= a\left(\nabla_{e_i}e_j - \nabla_{e_j}e_i\right) + a\left(h_j\varphi(e_i) - h_i\varphi(e_j)\right) \\ &\quad - A\left(\nabla_{e_i}e_j - \nabla_{e_j}e_i\right) + e_i(ah_j)\,\xi - e_j(ah_i)\,\xi \qquad (4.33)\end{aligned}$$

olur. $(\nabla_{e_i}A)\,e_j - \left(\nabla_{e_j}A\right)e_i = 2cg(e_i, \varphi e_j)\,\xi$ olduğundan

$$\begin{aligned}&a\left(\nabla_{e_i}e_j - \nabla_{e_j}e_i\right) + a\left(h_j\varphi(e_i) - h_i\varphi(e_j)\right) - A\left(\nabla_{e_i}e_j - \nabla_{e_j}e_i\right) \\ &+ e_i(ah_j)\,\xi - e_j(ah_i)\,\xi = 2cg(e_i, \varphi e_j)\,\xi \qquad (4.34)\end{aligned}$$

dir. Şimdi (4.34) eşitliğinin her iki tarafını e_k ile iç çarpımı alınırsa

$$\begin{aligned}&ag\left(\nabla_{e_i}e_j - \nabla_{e_j}e_i, e_k\right) + ag\left(h_j\varphi(e_i) - h_i\varphi(e_j), e_k\right) \\ &- g\left(A\left(\nabla_{e_i}e_j - \nabla_{e_j}e_i\right), e_k\right) + ag\left(e_i(h_j)\,\xi - e_j(h_i)\,\xi, e_k\right) \\ &= 2cg(e_i, \varphi e_j)\,g(\xi, e_k) \qquad (4.35)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}&ag\left(\nabla_{e_i}e_j - \nabla_{e_j}e_i, e_k\right) + ag\left(h_j\varphi(e_i) - h_i\varphi(e_j), e_k\right) \\ &- g\left(\nabla_{e_i}e_j - \nabla_{e_j}e_i, Ae_k\right) + ag\left((e_ih_j - e_jh_i)\,\xi, e_k\right) = 2cg(e_i, \varphi e_j)\,g(\xi, e_k)\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}&ag\left(\nabla_{e_i}e_j - \nabla_{e_j}e_i, e_k\right) + ag\left(h_j\varphi(e_i) - h_i\varphi(e_j), e_k\right) \\ &- g\left(\nabla_{e_i}e_j - \nabla_{e_j}e_i, Ae_k\right) = 0\end{aligned}$$

elde edilir ki doğrudan işlemler ile

$$ag\left(h_j\varphi(e_i) - h_i\varphi(e_j), e_k\right) - h_kg\left(\nabla_{e_i}e_j - \nabla_{e_j}e_i, \xi\right) = 0$$

bulunur. Ayrıca son eşitlikten

$$ah_jg\left(\varphi(e_i, e_k)\right) - ah_ig\left(\varphi(e_j), e_k\right) - h_kg\left(\nabla_{e_i}e_j, \xi\right) + h_kg\left(\nabla_{e_j}e_i, \xi\right) = 0 \qquad (4.36)$$

elde edilir. $\nabla_{e_i}\xi = \varphi e_i$ olduğundan

$$\begin{aligned}&ah_jg\left(\varphi(e_i, e_k)\right) - ah_ig\left(\varphi e_j, e_k\right) + h_kg\left(e_j, \varphi(ae_i + h_i\xi)\right) \\ &- h_kg\left(e_i, \varphi(ae_j + h_j\xi)\right) = 0\end{aligned}$$

olup

$$ah_jg\left(\varphi(e_i, e_k)\right) - ah_ig\left(\varphi e_j, e_k\right) + 2ah_kg\left(e_j, \varphi e_i\right) = 0 \qquad (4.37)$$

bulunur. (4.37) de i yerine j, j yerine k, k yerine i yazılırsa

$$ah_k g(\varphi(e_j, e_i)) - ah_j g(\varphi e_k, e_i) + 2ah_i g(e_k, \varphi e_j) = 0 \tag{4.38}$$

elde edilir. (4.37) de i yerine k,k yerine j, j yerine i yazılırsa

$$ah_i g(\varphi e_k, e_j) - ah_k g(\varphi e_i, e_j) + 2ah_j g(e_i, \varphi e_k) = 0 \tag{4.39}$$

bulunur. (4.37), (4.38) ve (4.39) denklemlerinden gerekli işlemler yapıldığında

$$h_i g(\varphi e_j, e_k) = h_j g(\varphi e_k, e_i) = h_k g(\varphi e_i, e_j)$$

eşitliği elde edilir. □

Lemma 4.15 *M, $n \geq 3$ olmak üzere $M^n(c)$, $c \neq 0$ kompleks uzay formun reel bir hiperyüzeyi ve M nin şekil operatörü A_N olmak üzere herbir $X, Y \in T_0$ ve $a \neq 0$ için $g(A_N X, Y) = ag(X, Y)$ eşitliği sağlansın. Bu durumda bir $i \in \{1, \ldots, 2n-2\}$ için $h_i = 0$ ise*

$$h_1 = h_2 = ... = h_{2n-2} = 0 \tag{4.40}$$

dır (Kon, 2008).

İspat. $i \neq j, j \neq k, k \neq i$ olan herhangi i, j, k için

$$h_i\, g(\varphi e_j, e_k) = h_j\, g(\varphi e_k, e_i) = h_k\, g(\varphi e_i, e_j)$$

eşitliğinden ve $h_i = 0$ kabulünden

$$h_i\, g(\varphi e_j, e_k) = h_j\, g(\varphi e_k, e_i) = h_k\, g(\varphi e_i, e_j) = 0$$

olur. $h_j \neq 0$ ise $k \neq i$ ve $k \neq j$ olacak şekilde herhangi bir k için $g(\varphi e_k, e_i) = 0$ olur. Böylece $e_i = \varphi e_j$ veya $e_i = -\varphi e_j$ olur. $h_k\, g(\varphi e_i, e_j) = 0$ olduğunda $k \neq i$ ve $k \neq j$ olacak şekilde herhangi bir k için $h_k = 0$ olur.

ℓ yi $\ell \neq i, \ell \neq j$ ve $l \neq k$ olacak şekilde tanımlayalım. $h_k = 0$ ve $h_i = 0$ olduğunda

$$\begin{aligned} h_j\, g(\varphi e_k, e_\ell) &= h_k\, g(\varphi e_l, e_j) = 0 \\ h_j\, g(\varphi e_i, e_\ell) &= h_i\, g(\varphi e_l, e_j) = 0 \end{aligned}$$

dır. $h_j \neq 0$ ise $k \neq i$ ve $k \neq j$ için $g(\varphi e_k, e_l) = 0$ ve $g(\varphi e_i, e_\ell) = 0$ olur. Böylece $e_\ell = \varphi e_j$ ya da $e_\ell = -\varphi e_j$ olur. O zaman $e_i = e_\ell$ ya da $e_i = -e_l$ dir. Bu ise bir çelişkidir. Öyleyse $h_i = 0$ ise

$$h_1 = h_2 = ... = h_{2n-2} = 0$$

elde edilir. □

Lemma 4.16 *M, $n \geq 3$ olmak üzere $M^n(c)$, $c \neq 0$ kompleks uzay formun reel bir hiperyüzeyi ve M nin şekil operatörü A olmak üzere herbir $X, Y \in T_0$ ve $a \neq 0$ için $g(AX, Y) = ag(X, Y)$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda $h_i = 0$ olan $i \in \{1, \ldots, 2n-2\}$ vardır (Kon, 2008).*

İspat. Kabul edelim ki $h_1 \neq 0, h_2 \neq 0, ..., h_{2n-2} \neq 0$ ve $i \neq j \neq k \neq l$ olsun. Lemma 4.14 dan i, j, k, ℓ nin yer değiştirmesiyle

$$\begin{aligned}
h_i\, g(\varphi e_j, e_k) &= h_j\, g(\varphi e_k, e_i) = h_k\, g(\varphi e_i, e_j) \\
h_j\, g(\varphi e_k, e_\ell) &= h_k\, g(\varphi e_\ell, e_j) = h_\ell\, g(\varphi e_j, e_k) \\
h_k\, g(\varphi e_\ell, e_i) &= h_l\, g(\varphi e_i, e_k) = h_i\, g(\varphi e_k, e_\ell) \\
h_l\, g(\varphi e_i, e_j) &= h_i\, g(\varphi e_j, e_l) = h_j\, g(\varphi e_\ell, e_i)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.40) den

$$h_k\, g(\varphi e_\ell, e_j) = h_\ell\, g(\varphi e_j, e_k)$$

olup

$$g(\varphi e_j, e_k) = \frac{h_k}{h_\ell} g(\varphi e_\ell, e_j)$$

eşitliğin her iki tarafı h_i ile çarpılırsa

$$h_i g(\varphi e_j, e_k) = \frac{h_i\, h_k}{h_\ell} g(\varphi e_\ell, e_j) \tag{4.41}$$

$$h_i g(\varphi e_j, e_k) = -\frac{h_i\, h_k}{h_\ell} g(\varphi e_j, e_\ell) \tag{4.42}$$

olup (4.41) den ve $h_i\, g(\varphi e_j, e_\ell) = h_\ell\, g(\varphi e_i, e_j)$ olduğundan

$$h_i g(\varphi e_j, e_k) = -\frac{h_k}{h_\ell} h_\ell g(\varphi e_i, e_j) = -h_k\, g(\varphi e_i, e_j) \tag{4.43}$$

olur. (4.14) ve (4.43) den

$$h_i g(\varphi e_j, e_k) = \frac{h_i\, h_k}{h_\ell} g(\varphi e_\ell, e_j) = -\frac{h_k}{h_\ell} h_l g(\varphi e_i, e_j) = -h_k\, g(\varphi e_i, e_j)$$

elde edilir.

Lemma 4.15 den $h_i g(\varphi e_j, e_k) = h_k\ g(\varphi e_i, e_j)$ olduğunda $h_i g(\varphi e_j, e_k) = 0$ olduğunu biliyoruz. Buradan $h_i \neq 0$ olduğunda herhangi j ve k için $i \neq j, j \neq k, k \neq i$ için $g(\varphi e_j, e_k) = 0$ olur. Herhangi $k \neq i$ için $e_k = \varphi e_i$ ya da $e_k = -\varphi e_i$ elde edilir. Bu ise bir çelikidir. Sonuç olarak $h_i = 0$ bulunur. □

Teorem 4.17 *M, $n \geq 3$ olmak üzere $M^n(c)$, $c \neq 0$ kompleks uzay formun reel bir hiperyüzeyi olsun. M reel hiperyüzeyinde bir holomorfik distribüsyon*

$$T_0 = \{X \in T_x M : \eta(X) = 0\} \tag{4.44}$$

olmak üzere, eğer M reel hiperyüzeyinin şekil operatörü A_N, $\forall X, Y \in T_0$ için

$$g(A_N X, Y) = a\, g(X, Y) \tag{4.45}$$

eşitliği sağlanırsa, M total $\eta-$umbilik ya da regle reel bir hiperyüzey olur (Kon, 2008).

İspat. Lemma 4.14, Lemma 4.15 ve Lemma 4.16 den eğer $a \neq 0$ ise herbir i için $h_i = 0$ olduğundan

$$A_N = a\, I + b\, \eta \otimes \xi$$

olur. Böylece M total $\eta-$umbilik reel hiperyüzeydir.

Şimdi $a = 0$ olduğunu varsayalım. Herhangi bir $X, Y \in T_0$ için $g(AX, Y) = 0$ dır. Bu durumda $X, Y \in T_0$ için

$$g(Y, \xi) = \eta(Y) = 0$$

eşitliğinden

$$g(\nabla_X Y, \xi) + g(Y, \nabla_X \xi) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$g(\nabla_X Y, \xi) + g(Y, \varphi AX) = 0$$

olur. Böylece

$$g(\nabla_X Y, \xi) = -g(Y, \varphi AX)$$

olup, buradan

$$g(\nabla_X Y, \xi) = -g(Y, \varphi AX) = g(AX, \varphi Y)$$

elde edilir. O halde $\forall X, Y \in T_0$ için $\nabla_X Y \in T_0$ dir ve T_0 integrallenebilirdir.
$h_i = 0$ olduğundan $\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y$ dir. Bu nedenle T_0 integral manifoldu $M^n(c)$ nin total geodezik bir altmanifoldudur. Sonuç olarak M regle reel bir hiperyüzeydir. $\square$

4.3. $\eta-$Umbilik Reel Hiperyüzeylerde Eğrilik İlişkileri

Lemma 4.18 *M, $n \geq 3$ olmak üzere $2n$-boyutlu $\widetilde{M}(c)$, $c \neq 0$ kompleks uzay formun η umbilik reel bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

i) X, T_0 distribüsyonu üzerinde birim vektör alanı olmak üzere

$$\widetilde{Ric}_{T_pM}(X) = c\{2n+3\}. \tag{4.46}$$

ii) ξ, M nin yapı vektör alanı olmak üzere

$$\widetilde{Ric}_{T_pM}(\xi) = 2nc. \tag{4.47}$$

İspat. $\widetilde{M}$ kompleks uzay formunun eğrilik tensörü $\widetilde{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X,Y,Z,T) &= c\{g(Y,Z)\,g(X,T) - g(X,Z)\,g(Y,T) \qquad (4.48)\\ &\quad + g(JY,T)\,g(JX,T) - g(JX,Z)\,g(JY,T)\\ &\quad -2g(JX,Y)\,g(JZ,T)\} \qquad (4.49)\end{aligned}$$

ile verilir. Burada X ve T yerine e_i, Y ve Z yerine e_j yazılırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(e_i,e_j,e_j,e_i) &= c\{g(e_j,e_j)\,g(e_i,e_i) - g(e_i,e_j)\,g(e_j,e_i) + g(Je_j,e_1)\,g(Je_i,e_i)\\ &\quad -g(Je_i,e_j)\,g(Je_j,e_i) - 2g(Je_i,e_j)\,g(Je_j,e_i)\}\end{aligned}$$

olup

$$\widetilde{R}(e_i,e_j,e_j,e_i) = c\left\{1 + 3g(Je_j,e_i)^2\right\} \tag{4.50}$$

elde edilir. (4.50) de e_j yerine ξ yazılırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(e_i,\xi,\xi,e_i) &= c\left\{1 + 3g(J\xi,e_i)^2\right\}\\ &= c\left\{1 + 3g(N,e_i)^2\right\}\\ &= c \qquad (4.51)\end{aligned}$$

dır. $\{e_1, e_2, ..., e_{2n-1}, \xi\}$ kümesi $\chi(M)$ uzayının ortonormal bir bazı olarak göz önüne alınırsa

$$\widetilde{Ric}_{T_pM}(e_j) = \left[\sum_{i=1}^{2n-1} \widetilde{R}(e_i, e_j, e_j, e_i)\right] + \widetilde{R}(\xi, e_1, e_1, \xi) \tag{4.52}$$

olduğu göz önüne alınırsa (4.50), (4.51) ve (4.52) den,

$$\begin{aligned}
\widetilde{Ric}_{T_pM}(e_j) &= c\left\{\sum_{i=1}^{2n-1} 1 + 3g(Je_j, e_i)^2\right\} + c \\
&= c\Big\{2n - 1 + 3g(Je_j, e_1)^2 + 3g(Je_1, e_2)^2 \\
&\quad + \cdots + 3g(Je_1, e_{2n-1})^2\Big\} + c \\
&= c\{2n+2\} + c \\
&= c\{2n+3\}
\end{aligned}$$

elde edilir. $X = e_j$ yazılarak (a) ispatlanır.

Şimdi (b) nin ispatını verelim.

$$\widetilde{Ric}_{T_pM}(\xi) = \left[\sum_{i=1}^{2n-1} \widetilde{R}(e_i, \xi, \xi e_i)\right] + \widetilde{R}(\xi, \xi, \xi, \xi)$$

olduğundan

$$\widetilde{Ric}_{T_pM}(\xi) = 2nc$$

elde edilir. □

Lemma 4.19 *M, $n \geq 3$ olmak üzere $M^n(c)$, $c \neq 0$ kompleks uzay formun η umbilik reel bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

i) X, T_0 distribüsyonu üzerinde birim bir vektör alanı olmak üzere

$$Ric(X) = (2n+1)c + (2n-3)a^2 + ab. \tag{4.53}$$

ii) ξ yapı vektörü için

$$Ric(\xi) = (2n-2)c + (2n-2)ab \tag{4.54}$$

dir.

İspat. M total η-umbilik reel hiperyüzeyinin şekil operatörü A

$$A = \begin{bmatrix} a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b \end{bmatrix}$$

olduğundan ve $\forall X \in T_0$ için $\eta(X) = 0$ olduğundan M hiperyüzeyinin $\{e_1, e_2, ..., e_{2n-2}, \xi\}$ ortonormal bir bazı için $\eta(e_1) = 0$ dır. Ayrıca M total η-umbilik reel hiperyüzey olmak üzere $\forall X, Y \in T_0$, $g(AX, Y) = ag(X, Y)$ eşitliği sağladığından

$$\begin{aligned} g(AX, AY) &= ag(X, AY) \\ &= ag(AX, Y) \\ &= a^2 g(X, Y) \end{aligned} \tag{4.55}$$

olur. (4.23) eşitliğinde X ve Y yerine e_1 yazılacak olursa

$$\begin{aligned} Ric(e_1) &= S(e_1, e_1) = (2n+1)c\, g(e_1, e_1) - 3c\eta(e_1)\eta(e_1) \\ &\quad + izA\, g(Ae_1, e_1) - g(Ae_1, Ae_1) \\ &= S(e_1, e_1) = (2n+1)c - 3c\eta(e_1)^2 + izA\, g(Ae_1, e_1) - g(Ae_1, Ae_1) \\ &= (2n+1)c + ((2n-2)a + b)a - a^2 \\ &= (2n+1)c + (2n-2)a^2 + ab - a^2 \\ &= (2n+1)c + (2n-3)a^2 + ab \end{aligned} \tag{4.56}$$

elde edilir. Böylece (a) ispatlanır.

Benzer şekilde $g(A\xi, \xi) = b$ ve $g(A\xi, A\xi) = b^2$ olduğundan

$$\begin{aligned} Ric(\xi) &= S(\xi, \xi) = (2n+1)c\, g(\xi, \xi) - 3c\eta(\xi)\eta(\xi) + izA\, g(A\xi, \xi) - g(A\xi, A\xi) \\ &= (2n+1)c - 3c + ((2n-2)a + b)b - b^2 \\ &= (2n-2)c + (2n-2)ab \end{aligned}$$

dır. Bu ise (b) nin ispatıdır. □

Lemma 4.20 *M, $n \geq 3$ olmak üzere $M^n(c)$, $c \neq 0$ kompleks uzay formun η umbilik reel bir hiperyüzeyi olsun. $p \in M$ noktasında ortalama eğrilik vektörü $H(p)$ olmak üzere*

$$H(p) = \frac{1}{2n-1}\left[(2n-2)aN + bN\right] \tag{4.57}$$

dır.

İspat. Ortalama eğrilik vektör alanın tanımından

$$H(p) = \frac{1}{2n-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{2n-2} h(e_i, e_i)\right) + h(\xi, \xi)\right]$$

yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} h(e_i, e_i) &= g(Ae_i, e_i) N \\ &= ag(e_i, e_i) N \\ &= aN \end{aligned} \tag{4.58}$$

ve

$$\begin{aligned} h(\xi, \xi) &= g(A\xi, \xi) N \\ &= bN \end{aligned} \tag{4.59}$$

dır. (4.58) ve (4.59) eşitliklerinden ispat tamamlanır. □

Lemma 4.21 *M, $n \geq 3$ olmak üzere $M^n(c)$, $c \neq 0$ kompleks uzay formun η umbilik reel bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda aşağıda verilen eşitlik sağlanır:*

$$(2n-1)^2 \|H(p)\|^2 = \left(4n^2 - 8n + 4\right) a^2 + (4n-4) ab + b^2. \tag{4.60}$$

İspat. Lemma 4.20 den

$$(2n-1) H(p) = (2n-2)\ aN + bN$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} (2n-1)^2 \|H(p)\|^2 &= g((2n-2)\ aN + bN\ , (2n-2)\ aN + bN) \\ &= ((2n-2)\ a + b)^2 \\ &= \left(4n^2 - 8n + 4\right) a^2 + (4n-4) ab + b^2 \end{aligned} \tag{4.61}$$

bulunur. Bu ise lemmanın ispatıdır. □

Lemma 4.22 *M, $n \geq 3$ olmak üzere $M^n(c)$, $c \neq 0$ kompleks uzay formun η umbilik reel bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda*

$$\widetilde{\tau}(T_pM) = \left(2n^2 + 3n - \frac{3}{2}\right) c \tag{4.62}$$

dır.

İspat. $\widetilde{\tau}(T_pM)$ nin tanımı göz önüne alındığında

$$\widetilde{\tau}(T_pM) = \frac{1}{2}\left[\left(\widetilde{Ric}_{(T_pM)}(e_1) + \widetilde{Ric}_{(T_pM)}(e_2) + ... + \widetilde{Ric}_{(T_pM)}(e_{2n-1}) + \widetilde{Ric}(\xi)\right)\right]$$

yazılabilir. Lemma 4.18 den

$$\widetilde{Ric}_{T_pM}(e_1) = \widetilde{Ric}_{T_pM}(e_2) = ... = \widetilde{Ric}_{T_pM}(e_{2n-1}) = c(2n+3)$$

ve

$$\widetilde{Ric}_{T_pM}(\xi) = 2nc$$

olup

$$\begin{aligned} \widetilde{\tau}(T_pM) &= \frac{1}{2}\left[c(2n-1)(2n+3) + 2nc\right] \\ &= \left(2n^2 + 3n - \frac{3}{2}\right)c \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece lemma ispatlanır. □

Lemma 4.23 *M, $n \geq 3$ olmak üzere $M^n(c)$, $c \neq 0$ kompleks uzay formun η umbilik reel bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda*

$$\tau(p) = (n-1)(2n+2)c + (n-1)(2n-3)a^2 + 2(n-1)ab \qquad (4.63)$$

dır.

İspat. Skaler eğriliğin tanımı göz önune alındığında

$$\begin{aligned} \tau(p) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-2}\left[\left(\sum_{j=1}^{2n-2} R(e_j, e_i, e_i, e_j)\right) + R(\xi, e_j, e_j, \xi)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(Ric(e_1) + Ric(e_2) + \cdots + Ric(e_{2n-2}) + Ric(\xi)\right) \end{aligned}$$

olur. Lemma 4.18 den

$$\begin{aligned} \tau(p) &= \frac{1}{2}\left[(2n-2)\left((2n+1)c + (2n-3)a^2 + ab\right) + (2n-2)c + (2n-2)ab\right] \\ &= (n-1)\left((2n+1)c + (2n-3)a^2 + ab\right) + (n-1)c + (n-1)ab \\ &= (n-1)(2n+1)c + (n-1)(2n-3)a^2 + (n-1)ab + (n-1)c \\ &\quad + (n-1)ab \\ &= (n-1)(2n+2)c + (n-1)(2n-3)a^2 + 2(n-1)ab \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise lemmanın ispatıdır. □

4.4. $\eta-$Umbilik Reel Hiperyüzeylerde Bazı Temel Eşitsizlikler ve Sonuçları

Teorem 4.24 *M, $n \geq 3$ olmak üzere $\widetilde{M}^n(c)$, kompleks uzay formun $\eta-$umbilik reel bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda*

$$[(2n-4)a+b]^2 \geq -8c \tag{4.64}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Chen-Ricci eşitsizliği göz önüne alındığında ve bu eşitsizlikte $X = e_1$ seçildiğinde

$$Ric(e_1) \leq \frac{1}{4}(2n-1)^2 \|H(p)\|^2 + \widetilde{Ric}_{T_pM}(e_1)$$

yazılabilir. (4.56), (4.60) ve (4.63) den

$$(2n+1)c + (2n-3)a^2 + ab \leq \frac{1}{4}\left[\left(4n^2-8n+4\right) a^2 + (4n-4)ab + b^2\right]$$

elde edilir. Son eşitlik düzenlenirse

$$4\left(n^2-4n+4\right)a^2 + 4(n-2)ab + b^2 \geq -8c$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. □

Teorem 4.24 in $n = 3$ özel durumu için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.25 *M, $\widetilde{M}^3(c)$ reel 6 boyutlu kompleks uzay formun $\eta-$umbilik reel bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda*

$$(2a+b)^2 \geq -8c \tag{4.65}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart M total geodezik ve $\widetilde{M}$ ise bir kompleks Öklidyen uzay olmasıdır.

Sonuç 4.26 *M, $\widetilde{M}^3(c)$ reel 6 boyutlu kompleks uzay formun $\eta-$umbilik reel bir hiperyüzeyi olsun. $a = -\frac{b}{2}$ ise $c \geq 0$ dır.*

Teorem 4.27 *M, $n \geq 3$ olmak üzere $\widetilde{M}^n(c)$, kompleks uzay formun $\eta-$umbilik reel bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda*

$$(-2n+2)a^2 - b^2 \leq (6n+1)c \tag{4.66}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. (2.30) den

$$\tau(p) \leq \frac{1}{2}(2n-1)^2 \|H(p)\|^2 + \tilde{\tau}(T_pM)$$

yazılabilir. (4.61) ve (4.62) de elde edilen eşitlikler (4.66) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$(n-1)(2n+2)c + (n-1)(2n-3)a^2 + 2(n-1)ab$$

olur. Son eşitsizlik düzenlenecek olursa (4.66) elde edilir. $\square$

Sonuç 4.28 *M, $\widetilde{M}^3(c)$ reel 6 boyutlu kompleks uzay formun $\eta-$umbilik reel bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda $c \geq 0$ dır.*

İspat. (4.66) eşitsizliği $n=3$ için

$$-4a^2 - b^2 \leq 19c$$

olur. Bu ise $c \geq 0$ olduğunu gösterir. $\square$

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tezde kompleks manifoldların reel hiperyüzeyleri üzerinde tanımlanan hemen hemen kompleks yapılar ve bu yapıdan indirgenen hemen hemen kontakt yapıların temel bazı özellikleri sunulmuş, Riemann eğrilik tensör alanı incelenmiş ve bu eğrilik tensörleri yardımı ile bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca bu sonuçlar, η-umbilik reel hiperyüzeyler üzerinde tartışılmıştır. Literatürde bir Riemann manifoldu ve altmanifoldunun invaryantları arasındaki ilişkileri sunan Chen-eşitsizliği ve Chen-Ricci eşitsizliği gibi önemli eşitsizlikler η-umbilik reel hiperyüzeylerde incelenmiş ve bu eşitsizliklerin özel durumlarında çeşitli sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tez çalışması ile elde edilen sonuçlar pozitif tanımlı olmayan belirsiz (indefinite) kompleks uzay formların reel hiperyüzeyleri için incelenebilir ve bu tezde elde edilen sonuçlar belirsiz kompleks uzay formların reel hiperyüzeyleri üzerinde karşılaştırılabilir.

KAYNAKLAR

BEJANCU, A., 1986. Geometry of CR-submanifolds. D. Reidel publishing company, Dordrecht, Holland, 148s.

BERREIRA, L. ve VALSS, C., 2012. Complex analysis and differential equations. Softcover, VIII, 415s.

BLAİR, D. 1976. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Math. 509: Springer-Verlag, 156s.

CHEN, B. Y. 1973. Geometry of submanifolds. Marcel Dekker Inc., New York, 371s.

CHEN, B. Y. 1999. Relations between Ricci curvature and shape operator for submanifolds with arbitrory codimensions. Glasgow Math. J., 41: 3–41.

DO CARMO, M., 1992. Riemannian geometry. Birkhäuser, Boston, 300s.

EHRESMAN, C. 1950. Les connexions infinitésimales dans un escape fibré différentiable. In Colleque de Topologie. 29–55.

HACISALİHOĞLU, H. H., 1974. Lineer cebir. Ankara Univ., Fen Fakültesi, Ankara.

HACISALİHOĞLU, H. H., 1982. Diferansiyel geometri. İnönü Univ., Fen-Edb. Fakültesi, 22s.

HSIUNG, C.C., 1995. Almost complex and complex structures. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 328p.

KAEHLER, E. 1933. über eine bemerkenswerte Hermitische Metrik. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 9:173–186.

KOBAYASHI, S. ve NOMIZU, K., 1969. Founddations of differential geometry I. Interscience Publishing of John Wiley, 108p.

KON M., 2008. A characterization of totally η-umbilical real hypersurfaces and ruled real hypersurfaces of a complex space form. Czechoslovak Math. J., 58(4): 1279–1287.

MARTIN, D., 1991. Manifold theory. Ellis Horwood limited England, 424s.

MATSUSHİMA, Y., 1972. Differentiable Manifolds. Marcell Dekker Inc. Newyork, 350s.

OKUBU, T., 1987. Differentiable geometry. Marcell Dekker Inc. 816s.

O'NEİLL, B., 1983. Semi-Riemannian geometry with aplications to relativity. Academic Press Inc. 482s.

SCHOUTEN, J. A. and DANTZİG, D. V., 1930. Ober unitare Geometrie. Math. Ann., 103: 319–346.

SCHOUTEN, J. A. and DANTZİG, D. V., 1931. Ober unitare Geometrie konstanter Krümmung. Proc. Kon. Nederl. Akad. Amsterdam, 34:1293–1314.

SUNGPYO, H., MATSUMOTO, K., TRIPATHI M. M. 2005. Certain basic inequalities for submanifolds of locally confonormal Kaehler space forms. Sci. Univ. Tokyo J. Math., 41(1):75–94.

ŞAHİN, B., 1996. CR-Altmanifoldların geometrisi. İnönü Ünv. Fen Bil. Enst. Mat. Böl., Yüksek Lisans Tezi, Malatya, 164s.

ŞAHİN, B., 2012. Manifoldların diferensiyel geometrisi. Nobel Yayınları, Ankara, 294s.

TASHIRO, Y. ve TACHIBANA, S., 1963. On Fubinian and C-Fubinian manifolds. Kodai Math. Sem. Rep. 15: 176–183.

TRIPATHI, M. M., 2003. Certain basic inequalities for submanifolds in (κ, μ) $-$spaces. Recent advences in Riemannian and Lorentzian geometries (Baltimore, MD, 2003), 187-202, Contemp. Math Soc., Providence, RI.

VANDOREN S., 2009. Lectures on Riemannian Geometry, Part II: Complex Manifolds. Institute for Theoretical Physics and Spinoza Instute Utrecht Unv, 3508 TD Utrecht, The Netherland.

WALI, A. R., 2009. On totally real maximal spacelike submanifolds of an inde nite complex space form. Mathematics Applied in Science and Tecnology. 1(1): 1–7.

WEİL, A. 1947. Sur la théorie des formes différentielles attachées à une- variété analytique complexe. Comm. Math. Helv. 20: p. 110.

YANO, K., Kon, M., 1976. Anti-invariant submanifolds. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, no. 21. Marcel Dekker, Inc., New York-Basel.

YANO, K. ve KON, M., 1984. Structures on manifolds. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 520s.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Özlem DENİZ
Uyruğu : T.C
Doğum Yeri ve Tarihi: Antakya, 1982
e-mail : denizozlem729@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	23 Temmuz Merkez Lisesi, Antakya	1999
Üniversite	:	İnönü Üniversitesi, Malatya	2004
Yüksek Lisans	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2016 – 2019	Selahattin Eyyübi Anadolu İmam Hatip Lisesi,	Matematik Öğretmeni
2019 – 2020	Süleymaniye Anadolu İmam Hatip Lisesi,	Matematik Öğretmeni
2020 –	Malatya Anadolu Lisesi, Malatya	Matematik Öğretmeni

YAYINLAR

DENİZ Ö., GÜLBAHAR M., 2020. Some characterizations on totally η-umbilical real hypersurfaces of a complex space form. 3rd International Conference on Pure and Applied Mathematics (ICPAM-VAN 2020), September 03-05, Van, Turkey.

DENİZ Ö., GÜLBAHAR M., On the Riemannian Curvature invariants of totally η-umbilical real hypersurfaces of a complex space form. Fundamentals of Contemporary Mathematical Sciences, (İncelemede).