T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ADOMIAN AYRIŞIM METODUNUN UYGULAMALARI

Esra ÇADIRCI AKSAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2019

T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ADOMIAN AYRIŞIM METODUNUN UYGULAMALARI

Esra ÇADIRCI AKSAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2019

Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ danışmanlığında, Esra ÇADIRCI AKSAN'nın hazırladığı **"Adomian Ayrışım Metodunun Uygulamaları"** konulu bu çalışma 08/08/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman	: Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ	....
Üye	: Doç. Dr. Mehmet GÜLBAHAR	....
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Abdulkadir KARAKAŞ	....

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Doç. Dr. İsmail HİLALİ
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ADOMIAN AYRIŞIM METODUNUN UYGULAMALARI

Esra ÇADIRCI AKSAN

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ
Yıl: 2019, Sayfa: 58

Bu tezde, Adomian ayrışım metodu kullanılarak lineer ve lineer olmayan bazı problemlerin çözümleri elde edilmiştir. Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, ele alınan problemlerin niye çalışılması gerektiği üzerinde durulmuştur. İkinci bölümde, önceki çalışmalar üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde Adomian ayrışım metodu tanıtılarak örneklere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde,

$$y' + p(x)y = q(x), \qquad y' = p(x)y + q(x)y^2 + r(x), \qquad y' = (ax + by + c)^2,$$
$$y'' + p(x)y = q(x)y^n, \qquad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$
$$u^2u_x - u_y = 0, \qquad u^3u_x - u_y = 0$$

şeklinde verilen belirli bir yapıya sahip denklemler Adomian ayrışım metodu ile yaklaşık çözümleri için gerekli teoremler formüle edilerek örneklerle izah edilmiştir. Son bölümde ise Adomian ayrışım metoduyla elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Diferansiyel denklemler, Adomian ayrışım metodu, Taylor seri metodu

ABSTRACT

MSc Thesis

APPLICATIONS OF ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD

Esra ÇADIRCI AKSAN

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Tanfer TANRIVERDİ
Year: 2019, Page: 58

In this thesis, Adomian decomposition method is applied to spesific ordinary and partial differential equations to obtain their solutions. This study contains five chapters. In the first chapter, the importance of the problems taken into consideration are mentioned. In the second and third chapter Adomian decomposition method and its history are introduced.

$$y' + p(x)y = q(x), \qquad y' = p(x)y + q(x)y^2 + r(x), \qquad y' = (ax + by + c)^2,$$
$$y'' + p(x)y = q(x)y^n, \qquad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$
$$u^2u_x - u_y = 0, \qquad u^3u_x - u_y = 0.$$

Theory of these specific first and second order linear and non linear ordinary and partial differential equations similar to classical ones are formulated by Adomian decomposition method and also their approximating solutions are obtained. Accuracy of obtained results is tested by examples.

KEY WORDS: Differential equations, Adomian decomposition method, Taylor series method

TEŞEKKÜR

Bu tezin çalışmasında ve hazırlamasında bana her türlü imkanı sağlayan, benden desteklerini esirgemeyen, beni motive eden, bana her konuda yardımcı olan, her düştüğümde ayağa kaldıran ve bana güvenen tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ hocama, tez jürimde bulunmayı kabul eden hocalarıma,

Hayatımı düzene koyan ve daha da güzelleştiren eşime ve beni türlü fedakarlıklarla yetiştiren aileme özellikle anneme ve babama teşekkür ederim. Babam görseydi gurur duyardı.

1. GİRİŞ

Mekanikte, matematiksel fizikte ve diğer uygulamalı bilim dallarında ve hatta sosyal bilimlerde problemlerin çoğu lineer veya lineer olmayan yapıdadır. Bu lineer ve lineer olmayan problemlerin yaklaşık veya tam çözümlerini bilmek oldukça önemlidir. Aşağıdaki diferansiyel denklemler Adomian ayrışım metodu ile irdelenmiştir.

$$y' + p(x)y = q(x)$$

denklemi lineerdir. Bu lineer denklem Adomian ayrışım metodu ile irdelenerek klasik çözümle karşılaştırılmıştır.

$$y' = p(x)y + q(x)y^2 + r(x)$$

denklemi literatürde Riccati denklemi olarak bilinmektedir. Klasik olarak çözmek için denklemin bir özel çözümüne gereksinim vardır fakat Adomian ayrışım metodu ile çözmek için özel bir çözüme gereksinim yoktur.

$$y' = (ax + by + c)^2$$

denklemi lineer olmayan bir denklemdir. Klasik çözüme benzer olarak bu denklem Adomian ayrışım metodu ile irdelenmiştir.

$$y'' + p(x)y = q(x)y^n$$

denklemi Bernoulli denklemi olarak bilinir. Adomian ayrışım metodu ile klasik çözüme benzer olarak yaklaşık bir çözüm verilmiştir.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

matematikte, matematiksel fizikte ve mekaniğin bir çok alanında önemli bir yere sahip olan bu denklem Adomian ayrışım metodu ile ele alınmıştır.

$$u^2u_x - u_y = 0$$

ve

$$u^3 u_x - u_y = 0$$

yarı lineer kısmi diferansiyel denklemlerinin çözümü Adomian ayrışım metodu ile elde edilmiştir.

Bu denklem ve benzerleri matematiksel fizikte birçok uygulama alanına sahiptir. Bu denklemin değişik varyasyonu olan ve pratikte uygulamalara sahip olan ve şimdiye kadar Adomian ayrışım metodu ile formüle edilemeyen problemler ele alınarak irdelenmiştir. Diferansiyel denklemler teorisi doğada gerçek hayat problemlerini formüle eden en temel enstrümanlardan biridir. Dolayısıyla, yaklşık veya tam çözümlerini bilmemize yardımcı olan ve oldukça önemli olan metotlardan bir tanesi Adomian ayrışım metodudur.

Ayrıca, mekanik, fizik ve diğer sosyal bilimlerde de yaygın bir kullanıma sahiptir. Sistem konumun değişim oranı ve konumu içeren bir denklem tarafından idare ediliyorsa sistemin modellemesi genellikle ya bayağı diferansiyel denklemler (BDD) ya da kısmi diferansiyel denklemler (KDD) ile ifade edilir. Dolayısıyla, matematiksel fizikte problemlerin çoğu ikinci mertebedendir. Bayağı ve kısmi diferansiyel denklemlerin uygulama alanları oldukça zengindir. Bu denklemlerin uygulama alanları için çeşitli kaynaklar mevcuttur. Bunlardan birkaçı (Davis, 1962; Chandrasekhar, 1967; Richardson, 1921) olarak sıralanabilir.

Bu denklem için yarı analitik çözüm sayılan metot: ilk kez 1970 yılından 1990 yıllarına kadar George Adomian tarafından geliştirilmiştir. Literatürde kendi ismi ile anılan Adomian ayrışım metodu olarak bilinmektedir (Adomain, 1986). Değişik uygulamaları ve bu metodun yakınsaklığı için (Adomian, 1988; Adomian, 1992; Adomian, 1994; Cherrault, 1989; Abbaoui ve Cherrault, 1994) çalışmalarına bakılabilir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, ele alınan problemlerin niye çalışılması gerektiği üzerinde durulmuştur. İkinci bölümde, önceki çalışmalar üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde Adomian ayrışım metodu tanıtılarak örneklere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde,

$$y' + p(x)y = q(x), \qquad y' = p(x)y + q(x)y^2 + r(x), \qquad y' = (ax + by + c)^2,$$

$$y'' + p(x)y = q(x)y^n, \qquad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

$$u^2 u_x - u_y = 0, \qquad u^3 u_x - u_y = 0$$

şeklinde verilen belirli bir yapıya sahip denklemler Adomian ayrışım metodu ile yaklaşık çözümleri için gerekli teoremler formüle edilerek örneklerle izah edilmiştir. Son bölümde ise Adomian ayrışım metoduyla elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bilim ve teknolojide birçok problemin modeli başlangıç ya da sınır değer problemi olarak bilinen bir kısmi diferansiyel denklem veya genel olarak bir diferansiyel denklem olarak ifade edilir. Bu modelize edilen problemin matematiksel olarak bir anlam ifade edip etmediğini bilmek oldukça önemlidir. Bu problemin nümeriksel olarak matematiksel çıkarsamalarını elde edebilmek için çesitli metodlar mevcuttur. Bu metotlardan bir kaçı; Lineerleştirme, Ayrıklaştırma, Pertürbasyon, Diferansiyel dönüşüm metodu, İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu, Homotopi analiz metodu, Homotopi pertürbasyon metodu ve Varyasyonel iterasyon metodu şeklindedir. Bazı metodlar gibi pratikte kullanışlı olan metodlardan birisi (Adomian, 1986) tarafından geliştirilen Adomian ayrışım metodudur.

Literatürde yarı analitik metot olarak bilinen Adomian ayrışım metodu ilk kez George Adomian tarafından geliştirilmiştir. Literatürde kendi ismi ile anılan Adomian ayrışım metodu olarak bilinmektedir (Adomain, 1986). Değişik uygulamaları ve bu metodun yakınsaklığı için (Adomian, 1988; Adomian, 1992; Adomian, 1994; Cherrault, 1989; Abbaoui ve Cherrault, 1994) çalışmalarına bakılabilir.

Benzer problemlerin daha farklı metotlarla çözümü için (Tanriverdi, 2009; Tanriverdi ve Mcleod, 2007; Ağırağaç, 2017; Tanriverdi ve Ağırağaç, 2018) çalışmalarına bakılabilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, Adomian ayrışım metodu tanıtılacaktır. Ayrıca, bu metot farklı bir ve iki değişkenli fonksiyonlara uygulanarak karşılık gelen Adomian polinomları bulunmuştur. Bununla birlikte, farklı bir çok bayağı ve kısmi diferansiyel denklemlere Adomian ayrışım metodu uygulanmıştır (Adomian, 1994).

3.1. Adomian Ayrışım Metodu

Sınır değer problemlerinin çoğu nonlineerdir ve nonlineer problemlerin çoğunda analitik çözümü bulmak oldukça zordur. Bu nedenle problemin yaklaşık çözümü için yeni yaklaşımlar gerekmektedir. Şimdi bu yaklaşımlardan Adomian ayrışım metodu ele alınacaktır (Adomian, 1994).

$$F(u) = g(t) \tag{3.1}$$

denklemini göz önüne alalım. Burada F lineer ve lineer olmayan terimleri içeren bir diferansiyel operatördür. L lineer operatör olmak üzere Lu lineer terimi olsun. Bu durumda L'nin tersi kolaylıkla bulunabilir. Bu her zaman karşılaştığımız bir durum değildir. L en yüksek mertebeden türevin terimini göstermek üzere

$$Fu = Lu + Ru + Nu \tag{3.2}$$

şeklinde yazalım. L türev olduğundan tersi de integraldir. L'nin mertebesi n ise , L^{-1} de n defa integraldir. Lineer operatörün geri kalan kısmı da R dir. Nonlineer terimi ise Nu tarafından temsil edilir. Böylece (3.1) denklemini

$$\begin{aligned} Lu + Ru + Nu &= g \\ Lu &= g - Ru - Nu \\ L^{-1}Lu &= L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \end{aligned} \tag{3.3}$$

biçiminde yazarız. Başlangıç değer problemi için $L = d^n/dt^n$ ise L^{-1}, 0 dan t ye n defa ardarda integral alınması gerekir. Eğer operatör

$$L = \frac{d^2}{dt^2}$$

ise (3.3) denkleminin sol tarafı ele alınırsa

$$L^{-1}Lu = \int_0^t \int_0^t u''(t)dt.dt$$

$$= \int_0^t [(u'(t) + c)|_0^t]dt$$

$$= \int_0^t (u'(t) + c - u'(0) - c)dt$$

$$= \int_0^t (u'(t) - u'(0))dt$$

$$= [u(t) - tu'(0)|_{t_0}^t]$$

$$= u(t) - tu'(0) - u(0) - 0.u'(0))$$

$$L^{-1}Lu = u - u(0) - tu'(0)$$

bulunur. Bu durumda (3.3) denkleminin son hali

$$u = u(0) + tu'(0) + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{3.4}$$

olur. Aynı operatörü sınır değer problemi ile ele alalım. L^{-1} belirsiz integral ve $u = A + Bt$ şartları kullanılarak A ve B terimleri elde edilir. $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ toplam dekompozisyonunda ilk üç terimi u_0 olarak tanımlanır. Nonlineerlik için A_n ler Adomian polinomlarını göstermek üzere

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, u_2, ..., u_n)$$

olsun. Burada Nu nun analitik olduğu kabul edilir. Bu A_n Adomian polinomları

$$\begin{aligned}
A_0 &= f(u_0)\\
A_1 &= u_1\left(\frac{d}{du_0}\right)f(u_0)\\
A_2 &= u_2\left(\frac{d}{du_0}\right)f(u_0)+\left(\frac{u_1^2}{2!}\right)\left(\frac{d^2}{du_0^2}\right)f(u_0)\\
A_3 &= u_3\left(\frac{d}{du_0}\right)f(u_0)+u_1u_2\left(\frac{d^2}{du_0^2}\right)f(u_0)+\left(\frac{u_1^3}{3!}\right)\left(\frac{d^3}{du_0^3}\right)f(u_0)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklinde gösterilir. $n \geq 1$ olmak üzere

$$A_n = \sum_{\nu=1}^{n} c(\nu,n)f^{(\nu)}(u_0)$$

şeklinde bulunur. $f(u) = u$ olması halinde A_n, u_n e indirgenir. Aksi halde

$$A_n = A_n(u_0, u_1, ...u_n)$$

olur.

$$f(u) = u^2$$

ise

$$\begin{aligned}
A_0 &= u_0^2\\
A_1 &= 2u_0u_1\\
A_2 &= u_1^2 + 2u_0u_2\\
A_3 &= 2u_1u_2 + 2u_0u_3 \dots
\end{aligned}$$

olur. A_n nin her teriminin üst indis ile alt indis çarpımının toplamı n ye eşittir. $c(\nu,n)$ bileşeni u olan ν üst indislerin toplamıdır. Burada u nun üst indis ile alt indis çarpımının toplamı n dir ve tekrar eden alt indisli terimin katsayısı tekrar edilen sayının faktöriyelinin 1 e bölünmesiyle bulunur. Sonuç olarak $c(1,3)$ sadece u_3 tür. $c(2,3)$ ise u_1u_2 dir ve $c(3,3) = (1/3!)u_1^3$ dir. u ya göre lineer olmayan bir denklemde,

$f(u) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ şeklinde yazılabilir. Bilindiği gibi A_n polinomları tek bir biçimde yazılamaz.

$$f(u) = u^2$$

ise

$$A_0 = u_0^2\,,$$
$$A_1 = 2u_0u_1\,,$$
$$A_2 = u_1^2 + 2u_0u_2$$

dir. Fakat burada $A_1 = 2u_0u_1 + u_1^2$ şeklinde de yazılabilir. Yani A_2 nin ilk terimini de içerebilir. Çünkü u_2 nin hesaplanabilmesi için u_0 ve u_1 in bilinmesi gerekir. Nu için $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ serisinin toplamı genelleştirilmiş Taylor serisinin $u_0(x)$ civarındaki toplamına eşittir. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ serisi genelleştirilmiş Taylor serisinin u_0 fonksiyonu civarındaki toplamına eşittir. m en yüksek mertebeli lineer diferansiyel operatörünün mertebesi ise serilerin toplamı $1/(mn)!$ e yakınsar. Yani bu sıfıra yakınsar. Bu seriler yakınsak olduğundan $\varphi_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} u_i$, n. kısmi toplamı bu tez ve yapısı için pratik bir çözümü olarak alınabilir ve

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = u$$

dur.

$$f(u) = \sum_{n=o}^{\infty} A_n[f(u)]$$

olsun veya daha basit bir ifadeyle

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

olsun yani $f(u) = u$ ise $u = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ dir. Burada

$$A_0 = u_0\,, \quad A_1 = u_1$$

bulunur. Sonuç olarak çözümün nonlineerliği söz konusu olduğunda u ve $f(u)$, A_n

terimleri cinsinden yazılır veya basitçe u_i lerin dekompozisyonu olarak yazılır. Yani n terimli yaklaşım $\varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$ toplamındaki yaklaşım $n \to \infty$ için

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

e yakınsar. Bu durumda çözüm

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

şeklinde genel seri formu elde edilir ve benzer olarak açık bir şekilde

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ u_2 &= -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1 \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n\,, \qquad n \geq 0 \end{aligned}$$

dir. A_0 sadece u_0 a bağlı olduğundan bütün bileşenler belirlenebilir. A_1, u_0 ve u_1 e, A_2, u_0, u_1, u_2 e bağlıdır ve diğerleri de bu şekilde bulunur. Bir başka deyişle ayrıştırılmış polinomların genel hali

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n}N\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0}, \; n \geq 0$$

biçiminde formüle edilerek (Adomian, 1994) ve (Seng ve ark., 1996) tarafından literatüre kazandırılmıştır. n terimli yaklaşık pratik bir çözüm olarak ele alınır veya u nun yaklaşığı olarak düşünülür. (Bazen bu φ_n olarak ifade edilir.)

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \sum_{i=0}^{u-1} u_i\,, \\ \lim_{n\to\infty}\varphi_n &= \sum_{i=0}^{\infty} u_i = u \end{aligned}$$

olur. Burada yakınsaklık (Cherrault, 1989) da verilmiştir. Bu konudaki daha ayrıntılı çalışmalar için (Gabet, 1962) ye bakılabilir.

3.2. Dekompozisyon Eşitliği için Bir Baz

Yakınsaklığın oranı ve doğruluğu için en alt basamağı ele alalım. u_0 başlangıç terimi ilk yaklaşıktır. Burada u_0 sistem hakkında bilgi veren en uygun yaklaşıktır. Sonuç olarak

$$u_0 = \Phi + L^{-1}g$$

dir. g girdisi fiziksel sistem tarafından tanımlıdır ve Φ nin içerdiği başlangıç ve sınır değer koşulları $L\Phi = 0$ çözümüdür. Üstelik m, ϕ_m yaklaşığındaki terim sayısı, n ise L nin mertebesi ise yakınsama $1/(mn)!$ dir. Hatta m sayısı küçük olduğunda da ϕ_m çözümünün çoğunu içerir. Bu konuda daha fazla bilgi için (Adomian ve ark., 1989) a bakınız.

A_n polinomları genelleştirilmiş Taylor serisinin başlangıç fonksiyonu civarındaki formlarını oluşturduğundan aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n &= f(u_0) + u_1 f^{(1)}(u_0) + \left(\frac{u_1^2}{2!}\right) f^{(2)}(u_0) + u_2 f^{(1)}(u_0) \\ &+ u_3 f^{(1)}(u_0) + u_1 u_2 f^{(2)}(u_0) + \left(\frac{u_1^3}{3!}\right) f^{(3)}(u_0) + \ldots \end{aligned}$$

Bu denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} f(u) &= f(u_0) + (u_1 + u_2 + \ldots) f^{(1)}(u_0) + \left[\frac{u_1^2}{2!} + u_1 u_2 + \ldots\right] f^{(2)}(u_0) + \ldots \\ &= f(u_0) + \left[\frac{u - u_0}{1!}\right] f^{(1)}(u_0) + \left[\frac{(u - u_0)^2}{2!}\right] f^{(2)} u_0 + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(u - u_0)^n}{n!}\right] f^{(n)}(u_0) \end{aligned}$$

elde edilir (Adomian,1994).

3.3. Adomian Polinomları

$$
\begin{aligned}
A_0 &= f(u_0)\\
A_1 &= u_1 f^{(1)}(u_0)\\
A_2 &= u_2 f^{(1)}(u_0) + \left(\frac{1}{2!}\right) u_1^2 f^{(2)}(u_0)\\
A_3 &= u_3 f^{(1)}(u_0) + u_1 u_2 f^{(2)}(u_0) + \left(\frac{1}{3!}\right) u_1^3 f^{(3)}(u_0)\\
A_4 &= u_4 f^{(1)}(u_0) + \left[\left(\frac{1}{2!}\right) u_2^2 + u_1 u_3\right] f^{(2)}(u_0)\\
&+ \left(\frac{1}{2!}\right) u_1^2 u_2 f^{(3)}(u_0) + \left(\frac{1}{4!}\right) u_1^4 f^{(4)}(u_0)\\
A_5 &= u_5 f^{(1)}(u_0) + [u_2 u_3 + u_1 u_4] f^{(2)}(u_0)\\
&+ \left[\left(\frac{1}{2!}\right) u_1 u_2^2 + \left(\frac{1}{2!}\right) u_1^2 u_3\right] f^{(3)}(u_0)\\
&+ \left(\frac{1}{3!}\right) u_1^3 u_2 f^{(4)}(u_0) + \left(\frac{1}{5!}\right) u_1^5 f^{(5)}(u_0)\\
A_6 &= u_6 f^{(1)}(u_0) + \left[\left(\frac{1}{2!}\right) u_3^2 + u_2 u_4 + u_1 u_5\right] f^{(2)}(u_0)\\
&+ \left[\left(\frac{1}{3!}\right) u_2^3 + u_1 u_2 u_3 + \left(\frac{1}{2!}\right) u_1^2 u_4\right] f^{(3)}(u_0)\\
&+ \left[\left(\frac{1}{2!}\right) u_1^2 \left(\frac{1}{2!}\right) u_2^2 + \left(\frac{1}{3!}\right) u_1^3 u_3\right] f^{(4)}(u_0)\\
&+ \left(\frac{1}{4!}\right) u_1^4 u_2 f^{(5)}(u_0) + \left(\frac{1}{6!}\right) u_1^6 f^{(6)}(u_0)\\
A_7 &= u_7 f^{(1)}(u_0) + [u_3 u_4 + u_2 u_5 + u_1 u_6] f^{(2)}(u_0)\\
&+ \left[\left(\frac{1}{2!}\right) u_2^2 u_3 + u_1 \left(\frac{1}{2!}\right) u_3^2 + u_1 u_2 u_4 + \left(\frac{1}{2!}\right) u_1^2 u_5\right] f^{(3)}(u_0)\\
&+ \left[u_1 \left(\frac{1}{3!}\right) u_2^3 + \left(\frac{1}{2!}\right) u_1^2 u_2 u_3 + \left(\frac{1}{3!}\right) u_1^3 u_4\right] f^{(4)}(u_0)\\
&+ \left[\left(\frac{1}{3!}\right) u_1^3 \left(\frac{1}{2!}\right) u_2^2 + \left(\frac{1}{4!}\right) u_1^4 u_3\right] f^{(5)}(u_0)\\
&+ \left(\frac{1}{5!}\right) u_1^5 u_2 f^{(6)}(u_0) + \left(\frac{1}{7!}\right) u_1^7 f^{7}(u_0)\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Diğer polinomlar da benzer yolla oluşturulabilir (Adomian, 1994).

Örnek 1 (Adomian, 1994)

$f(u) = u^2$ fonksiyonun Adomian polinomlarını bulunuz.

Çözüm 1

$$A_0 = u_0^2$$
$$A_1 = 2u_0u_1$$
$$A_2 = 2u_0u_2 + u_1^2$$
$$A_3 = 2u_0u_3 + 2u_1u_2$$

Her u^m terimi m defa terimin çarpanıdır. Her A_n terimi ise 2 çarpana sahiptir, üst indislerin toplamı m dir. (Bu durumda $m = 2$ dir). Bir terimdeki bir alt indis ile bir üst indis çarpımının, başka bir alt indis ile bir üst indis çarpımı ile toplamı ise n i verir. Örnek olarak, A_3 ün ilk terimini ele alalım. $2u_0u_3$ ve her bir u lu terimdeki alt indis ile üst indis çarpılıp bütün terimler toplandığında 3 ü verir. Bu katsayıları gözden geçirelim. Her katsayı $m!$ in, her bir terimin üst indislerinin faktöriyellerinin çarpımına bölünmesiyle elde edilir. Bunun sonucu olarak $A_3(u^2)$ in ikinci terimi

$$\frac{2!}{1!1!} = 2$$

katsayısına sahiptir. Ayrıca A_2 nin ikinci terimine bakalım

$$\frac{2!}{2!} = 1$$

katsayısına sahiptir. A_n ler bu şekilde devam edilirse u^2 in diğer terimleri bulunur.

$$A_4 = 2u_0u_4 + u_2^2 + 2u_1u_3$$
$$A_5 = 2u_2u_3 + 2u_1u_4 + 2u_0u_5$$
$$\vdots$$

Örnek 2 (Adomian, 1994)

$f(u) = u^3$ fonksiyonun Adomian polinomlarını bulunuz.

Çözüm 2

$$
\begin{aligned}
A_n &= \sum_{\nu=1}^{n} c(\nu,n) f^{(\nu)}(u_0) \\
A_0 &= f(u_0) = u_0^3 \\
A_1 &= \sum_{\nu=1}^{1} c(\nu,1) f^{(\nu)}(u_0) = c(1,1) f^{(1)}(u_0) \\
&= u_1^1.3u_0^2 = 3u_0^2u_1 \\
A_2 &= \sum_{\nu=1}^{2} c(\nu,2) f^{(\nu)}(u_0) = c(1,2) f^{(1)}(u_0) + c(2,2) f^{(2)}(u_0) \\
&= u_2^1.3u_0^2 + \frac{1}{2!}u_1^2.6u_0 = 3u_0^2u_2 + 3u_0u_1^2 \\
A_3 &= \sum_{\nu=1}^{3} c(\nu,3) f^{(\nu)}(u_0) = c(1,3) f^{(1)}(u_0) + c(2,3) f^{(2)}(u_0) + c(3,3) f^{(3)}u_0) \\
&= u_3^1.3u_0^2 + u_1^1u_2^1.6u_0 + \frac{1}{3!}u_1^3.6 = u_1^3 + 3u_0^2u_3 + 6u_0u_1u_2 \\
A_4 &= \sum_{\nu=1}^{4} c(\nu,4) f^{(\nu)}(u_0) = c(1,4) f^{(1)}(u_0) + c(2,4) f^{(2)}(u_0) + c(3,4) f^{(3)}(u_0) \\
&+ c(4,4) f^{(4)}(u_0) \\
&= u_4^1.3u_0^2 + (\frac{1}{2!}u_2^2 + u_1^1u_3^1).6u_0 + \frac{1}{2!}u_1^2u_2^1.6 + \frac{1}{4!}u_1^4.0 \\
&= 3u_0^2u_4 + 3u_1^2u_2 + 3u_2^2u_0 + 6u_0u_1u_3 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Örnek 3 (Adomian, 1994)

$f(u) = u^5$ fonksiyonun Adomian polinomlarını bulunuz.

Çözüm 3

$$
\begin{aligned}
A_n &= \sum_{\nu=1}^{n} c(\nu,n) f^{(\nu)}(u_0) \\
A_0 &= f(u_0) = u_0^5 \\
A_1 &= \sum_{\nu=1}^{1} c(\nu,1) f^{(\nu)}(u_0) = c(1,1) f^{(1)}(u_0) = 5u_0^4u_1
\end{aligned}
$$

$$A_2 = \sum_{\nu=1}^{2} c(\nu,2)f^{(\nu)}(u_0) = c(1,2)f^{(1)}(u_0) + c(2,2)f^{(2)}(u_0)$$

$$A_2 = 5u_0^4u_2 + 10u_0^3u_1^2$$

$$A_3 = \sum_{\nu=1}^{3} c(\nu,3)f^{(\nu)}(u_0) = c(1,3)f^{(1)}(u_0) + c(2,3)f^{(2)}(u_0) + c(3,3)f^{(3)}(u_0)$$

$$A_3 = 5u_0^4u_3 + 20u_0^3u_1u_2 + 10u_0^2u_1^3$$

$$A_4 = \sum_{\nu=1}^{4} c(\nu,4)f^{(\nu)}(u_0) = c(1,4)f^{(1)}(u_0) + c(2,4)f^{(2)}(u_0) + c(3,4)f^{(3)}(u_0)$$
$$+ c(4,4)f^{(4)}(u_0)$$

$$A_4 = 5u_0^4u_4 + 5u_1^4u_0 + 10u_0^3u_2^2 + 20u_0^3u_1u_3 + 30u_0^2u_1^2u_2$$

$$A_5 = \sum_{\nu=1}^{5} c(\nu,5)f^{(\nu)}(u_0) = c(1,5)f^{(1)}(u_0) + c(2,5)f^{(2)}(u_0) + c(3,5)f^{(3)}(u_0)$$
$$+ c(4,5)f^{(4)}(u_0) + c(5,5)f^{(5)}(u_0)$$

$$A_5 = u_1^5 + 5u_0^4u_5 + 20u_0^3u_1u_4 + 20u_0^3u_2u_3 + 20u_1^3u_0u_2 + 30u_0^2u_2^2u_1$$
$$+ 30u_0^2u_1^2u_3$$

$$A_6 = \sum_{\nu=1}^{6} c(\nu,6)f^{(\nu)}(u_0) = c(1,6)f^{(1)}(u_0) + c(2,6)f^{(2)}(u_0) + c(3,6)f^{(3)}(u_0)$$
$$+ c(4,6)f^{(}4)(u_0) + c(5,6)f^{(5)})(u_0) + c(6,6)f^{(6)}(u_0)$$

$$A_6 = 5u_0^4u_6 + 5u_1^4u_2 + 10u_0^3u_3^2 + 10u_0^2u_2^3 + 20u_0^3u_1u_5 + 20u_0^3u_2u_4$$
$$+ 20u_1^3u_0u_3 + 30u_0^2u_1^2u_4 + 30u_1^2u_2^2u_0 + 60u_0^2u_1u_2u_3$$

$$A_7 = \sum_{\nu=1}^{7} c(\nu,7)f^{(\nu)}(u_0) = c(1,7)f^{(1)}(u_0) + c(2,7)f^{(2)}(u_0) + c(3,7)f^{(3)}(u_0)$$
$$+ c(4,7)f^{(4)}(u_0) + c(5,7)f^{(5)})(u_0) + c(6,7)f^{(6)}(u_0) + c(7,7)f^{(7)}(u_0)$$

$$A_7 = 5u_0^4u_7 + 5u_1^4u_3 + 10u_1^3u_2^2 + 20u_0^3u_1u_6 + 20u_0^3u_2u_5 + 20u_0^3u_3u_4$$
$$+ 20u_2^3u_1u_0 + 20u_1^3u_0u_4 + 30u_0^2u_2^2u_3 + 30u_0^2u_3^2u_1$$
$$+ 30u_0^2u_1^2u_5 + 60u_0^2u_1u_2u_4 + 60u_1^2u_0u_2u_3$$

$$A_8 = \sum_{\nu=1}^{8} c(\nu,8)f^{(\nu)}(u_0) = c(1,8)f^{(1)}(u_0) + c(2,8)f^{(2)}(u_0) + c(3,8)f^{(3)}(u_0)$$
$$+ c(4,8)f^{(4)}(u_0) + c(5,8)f^{(5)})(u_0) + c(6,8)f^{(6)}(u_0) + c(7,8)f^{(7)}(u_0)$$
$$+ c(8,8)f^{(8)}(u_0)$$

$$
\begin{aligned}
A_8 &= 5u_0^4u_8 + 5u_2^4u_0 + 5u_1^4u_4 + 10u_0^3u_4^2 + 10u_1^2u_2^3 + 20u_0^3u_3u_5 \\
&+ 20u_0^3u_2u_6 + 20u_0^3u_1u_7 + 20u_1^3u_5u_0 + 20u_1^3u_2u_3 + 30u_0^2u_2u_3^2 \\
&+ 30u_0^2u_2^2u_4 + 30u_0^2u_1^2u_6 + 30u_1^2u_3^2u_0 + 60u_1^2u_2u_4u_0 \\
&+ 60u_1u_2^2u_3u_0 + 60u_0^2u_1u_3u_4 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Örnek 4 (Adomian, 1994)

$f(\theta) = \sin\theta$ ise Adomian polinomlarını bulunuz.

Çözüm 4

$$
\begin{aligned}
A_n &= \sum_{\nu=1}^{n} c(\nu,n)f^{(\nu)}(\theta_0) \\
A_0 &= f(\theta_0) = \sin\theta_0 \\
A_1 &= \sum_{\nu=1}^{1} c(\nu,1)f^{(\nu)}(\theta_0) = c(1,1)f^{(1)}(\theta_0) \\
&= \theta_1\cos\theta_0 \\
A_2 &= \sum_{\nu=1}^{2} c(\nu,2)f^{(\nu)}(\theta_0) = c(1,2)f^{(1)}(\theta_0) + c(2,2)f^{(2)}(\theta_0) \\
&= \theta_2^1.\cos\theta_0 - \frac{1}{2!}\theta_1^2\sin\theta_0 \\
&= -\left(\frac{\theta_1^2}{2}\right)\sin\theta_0 + \theta_2\cos\theta_0 \\
A_3 &= \sum_{\nu=1}^{3} c(\nu,3)f^{(\nu)}(\theta_0) = c(1,3)f^{(1)}(\theta_0) + c(2,3)f^{(2)}(\theta_0) + c(3,3)f^{(3)}(\theta_0) \\
&= \theta_3^1\cos\theta_0 + \theta_1^1\theta_2^1(-\sin\theta_0) + \frac{1}{3!}\theta_1^3(-\cos\theta_0) \\
&= -\left(\frac{\theta_1^3}{6}\right)\cos\theta_0 - \theta_1\theta_2\sin\theta_0 + \theta_3\cos\theta_0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Örnek 5 (Adomian, 1994)

$f(x) = \sin h\left(\frac{x}{2}\right)$ ise Adomian polinomlarını bulunuz.

Çözüm 5

$$
\begin{aligned}
A_n &= \sum_{\nu=1}^{n} c(\nu,n) f^{(\nu)}(x_0) \\
A_0 &= f(x_0) = \sin h\left(\frac{x_0}{2}\right) \\
A_1 &= \sum_{\nu=1}^{1} c(\nu,1) f^{(\nu)}(x_0) = c(1,1) f^{(1)}(x_0) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right) x_1 \cos h\left(\frac{x_0}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \sum_{\nu=1}^{2} c(\nu,2) f^{(\nu)}(x_0) = c(1,2) f^{(1)}(x_0) + c(2,2) f^{(2)}(x_0) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right) x_2^1 \cos h\left(\frac{x_0}{2}\right) + \left(\frac{1}{2!}\right) x_1^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \sin h\left(\frac{x_0}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right) x_2 \cos h\left(\frac{x_0}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) x_1^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin h\left(\frac{x_0}{2}\right) \\
A_3 &= \sum_{\nu=1}^{3} c(\nu,3) f^{(\nu)}(x_0) = c(1,3) f^{(1)}(x_0) + c(2,3) f^{(2)}(x_0) + c(3,3) f^{(3)}(x_0) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right) x_3^1 \cos h\left(\frac{x_0}{2}\right) + x_1^1 x_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin h\left(\frac{x_0}{2}\right) + \left(\frac{1}{3!}\right) x_1^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cos h\left(\frac{x_0}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right) x_3 \cos h\left(\frac{x_0}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x_1 x_2 \sin h\left(\frac{x_0}{2}\right) + \left(\frac{1}{6}\right) x_1^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cos h\left(\frac{x_0}{2}\right) \\
A_4 &= \sum_{\nu=1}^{4} c(\nu,4) f^{(\nu)}(x_0) = c(1,4) f^{(1)}(x_0) + c(2,4) f^{(2)}(x_0) + c(3,4) f^{(3)}(x_0) \\
&+ c(4,4) f^{(4)}(x_0) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right) x_4^1 \cos h\left(\frac{x_0}{2}\right) + \left(x_1^1 x_3^1 + \frac{1}{2!} x_2^2\right) . \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin h\left(\frac{x_0}{2}\right) \\
&+ \left(\frac{1}{2!} x_1^2 x_2^1\right) \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cos h\left(\frac{x_0}{2}\right) + \left(\frac{1}{4!}\right) . \left(\frac{1}{2}\right)^4 x_1^4 \sin h\left(\frac{x_0}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right) x_4 \cos h\left(\frac{x_0}{2}\right) + \left[x_1 x_3 + \frac{1}{2} x_2^2\right] \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin h\left(\frac{x_0}{2}\right) \\
&+ \left(\frac{1}{2} x_1^2 x_2\right) \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cos h\left(\frac{x_0}{2}\right) + \left(\frac{1}{24}\right) x_1^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \sin h\left(\frac{x_0}{2}\right) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Örnek 6 (Adomian, 1994)

$m > 0$ olmak üzere, $f(u) = u^{-m}$ fonksiyonun Adomian polinomlarını bulunuz.

Çözüm 6

$$
\begin{aligned}
A_n &= \sum_{\nu=1}^{n} c(\nu, n) f^{(\nu)}(u_0) \\
A_0 &= f(u_0) = u_0^{-m} \\
A_1 &= \sum_{\nu=1}^{1} c(\nu, 1) f^{(\nu)}(u_0) = c(1,1) f^{(1)}(u_0) \\
&= -u_1^1 m u_0^{-(m+1)} = -m u_0^{-(m+1)} u_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \sum_{\nu=1}^{2} c(\nu, 2) f^{(\nu)}(u_0) = c(1,2) f^{(1)}(u_0) + c(2,2) f^{(2)}(u_0) \\
&= -u_2^1 m u_0^{-(m+1)} + \frac{1}{2!} u_1^2 m(m+1) u_0^{-(m+2)} \\
&= \frac{1}{2} m(m+1) u_0^{-(m+2)} u_1^2 - m u_0^{-(m+1)} u_2 \\
A_3 &= \sum_{\nu=1}^{3} c(\nu, 3) f^{(\nu)}(u_0) = c(1,3) f^{(1)}(u_0) + c(2,3) f^{(2)}(u_0) + c(3,3) f^{(3)}(u_0) \\
&= -u_3^1 m u_0^{-(m+1)} + u_1^1 u_2^1 m(m+1) u_0^{-(m+2)} + \frac{1}{3!} u_1^3 [-m(m+1)(m+2)] u_0^{-(m+3)} \\
&= -\frac{1}{6} m(m+1)(m+2) u_0^{-(m+3)} u_1^3 + m(m+1) u_0^{-(m+2)} u_1 u_2 - m u_3 u_0^{-(m+1)} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Örnek 7 (Adomian, 1994)

γ ondalık sayı olmak üzere, $f(u) = u^{\gamma}$ fonksiyonun Adomian polinomlarını bulunuz.

Çözüm 7

$$
\begin{aligned}
A_n &= \sum_{\nu=1}^{n} c(\nu, n) f^{(\nu)}(u_0) \\
A_0 &= f(u_0) = u_0^{\gamma} \\
A_1 &= \sum_{\nu=1}^{1} c(\nu, 1) f^{(\nu)}(u_0) = c(1,1) f^{(1)}(u_0) \\
&= \gamma u_1^1 u_0^{\gamma-1} = \gamma u_0^{\gamma-1} u_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \sum_{\nu=1}^{2} c(\nu,2) f^{(\nu)}(u_0) = c(1,2) f^{(1)}(u_0) + c(2,2) f^{(2)}(u_0) \\
&= \gamma u_2^1 u_0^{\gamma-1} + \frac{1}{2!} u_1^2 \gamma(\gamma-1) u_0^{\gamma-2} \\
&= \gamma u_0^{\gamma-1} u_2 + \frac{1}{2}\gamma(\gamma-1) u_0^{\gamma-2} u_1^2 \\
A_3 &= \sum_{\nu=1}^{3} c(\nu,3) f^{(\nu)}(u_0) = c(1,3) f^{(1)}(u_0) + c(2,3) f^{(2)}(u_0) + c(3,3) f^{(3)}(u_0) \\
&= \gamma u_3^1 u_0^{\gamma-1} + u_2^1 u_1^1 \gamma(\gamma-1) u_0^{\gamma-2} + \frac{1}{3!} u_1^3 \gamma(\gamma-1)(\gamma-2) u_0^{\gamma-3} \\
&= \gamma u_0^{\gamma-1} u_3 + \gamma(\gamma-1) u_0^{\gamma-2} u_1 u_2 + \frac{1}{6}\gamma(\gamma-1)(\gamma-2) u_0^{\gamma-3} u_1^3 \\
A_4 &= \sum_{\nu=1}^{4} c(\nu,4) f^{(\nu)}(u_0) = c(1,4) f^{(1)}(u_0) + c(2,4) f^{(2)}(u_0) + c(3,4) f^{(3)}(u_0) \\
&+ c(4,4) f^{(4)}(u_0) \\
&= \gamma u_4 u_0^{\gamma-1} + \left(\frac{1}{2!} u_2^2 + u_1 u_3\right) \gamma(\gamma-1) u_0^{\gamma-2} + \left(\frac{1}{2!} u_1^2 u_2^1\right) \gamma(\gamma-1)(\gamma-2) u_0^{\gamma-3} \\
&+ \left(\frac{1}{4!} u_1^4\right) \gamma(\gamma-1)(\gamma-2)(\gamma-3) u_0^{\gamma-4} \\
&= \gamma u_0^{\gamma-1} u_4 + \gamma(\gamma-1)\left(\frac{1}{2} u_2^2 + u_1 u_3\right) u_0^{\gamma-2} \\
&+ \frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)(\gamma-2) u_0^{\gamma-3} u_1^2 u_2 + \frac{1}{24}\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)(\gamma-3) u_0^{\gamma-4} u_1^4 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Örnek 8 (Adomian, 1994)

k, p, g sabit olmak üzere

$$\frac{d^2u}{dx^2} - kx^p u = g \ , \ \ u(1) = u(-1) = 0$$

diferansiyel denklemini Adomian ayrışım metodu ile ele alalım.

Çözüm 8 $L = \frac{d^2}{dx^2}$ ve $L^{-1} = \int_0^x \int_0^x (.) dx$ olduğundan verilen denklem

$$Lu = g + kx^p u$$

olur. Her iki tarafa L^{-1} uygulanırsa

$$u_0 = c_1 + c_2 x + g\frac{x^2}{2}$$

olmak üzere, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ yi ele alalım. Bu halde, $m \geq 0$ olmak üzere

$$u_{m+1} = L^{-1}[kx^p u_m]$$

yazılır. Böylece u seri çözümü

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{m=0}^{\infty}(L^{-1}kx^p)^m u_0 \\
u &= \sum_{m=0}^{\infty}(L^{-1}kx^p)^m c_1 + \sum_{m=0}^{\infty}(L^{-1}kx^p)^m c_2 x + \sum_{m=0}^{\infty}(L^{-1}kx^p)^m g\frac{x^2}{2} \\
u &= c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \Gamma(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m x^{mp+2}}{(mp+1)(mp+2)} \\
\phi_2(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m x^{mp+3}}{(mp+2)(mp+3)} \\
\Gamma(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} g k^m x^{mp+4}}{(mp+3)(mp+4)}
\end{aligned}$$

olur. $u(1) = u(-1) = 0$ olduğundan c_1 ve c_2 katsayıları

$$\begin{aligned}
c_1\phi_1(1) + c_2\phi_2(1) + \Gamma(1) &= 0 \\
c_1\phi_1(-1) + c_2\phi_2(-1) + \Gamma(-1) &= 0
\end{aligned}$$

sisteminden elde edilir.

3.4. Dekompozisyon Çözümlerinin Analitik Yaklaşıkları

u çözümünün m terimli ϕ_m yaklaşığı $\phi_m[u]$ ile gösterilir. Bu $\phi_m[u]$ ifadesi, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ yakınsak serisinin u ayrışım metodunu temsil eder. Γ,

$$\frac{d^2}{dt^2}(.) + \alpha\frac{d}{dt}(.) + \beta(.)$$

operatörünü temsil etsin ve

$$\Gamma u = g(t)$$

denklemini ele alalım. Burada,

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n t^n$$

olsun. Sadece m terim kullanılacağından

$$\phi_m[g] = \sum_{n=0}^{m-1} g_n t^n$$

ele alınır. Denkleme karşılık gelen u analitik çözümünün yaklaşığı

$$\Gamma \sigma_m[u] = \phi_m[g]$$

ile temsil edilir.

$m \to \infty$ için limit alınırsa $\phi_m[g]$ yaklaşığı g ve $\sigma_m[u]$ da u olur.

NOT: $\sigma_{n+1}[u]$ hesaplanan son yaklaşığı $\sigma_n(u)$ ya eşit olduğunda pc hesaplamalarında sıkıntı oluşabilir.

Kısmi diferansiyel denklemler söz konusu olduğundan u çözümünün analitik yaklaşıkları benzer olarak hesaplanır.

$$g(t,x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} g_{l,m} t^l x^m$$

olmak üzere,

$$L_t \sigma_m[u] + R_t \sigma_m[u] = \phi_m[g]$$

yi ele alalım.

Verilen g yaklaşıkları ve başlangıç koşulları için $\sigma_m(u)$ lar hesaplanabilir. Nihayetinde katsayılar,

$$\alpha(t,x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{l,m} t^l x^m$$

gibidir.

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n,\ u(0) = c_0,\ u'(0) = c_1$$

denklemindeki asimptotik ayrışım için (Adomian, 1986) a bakılabilir. Yine bu asimptotik ayrışım metodu ile denklem

$$u = g(x) - \frac{d^2u}{dx^2}$$

olarak yazılır. Bu halde,

$$u_0 = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$$

ve $m > 1$ için

$$u_m = -\left(\frac{d^2}{dx^2}\right) u_{m-1}$$

yazılır. g yaklaşığı veya

$$\phi_m[g] = \sum_{n=0}^{m-1} g_n x^n$$

yazılır. Analitik yaklaşık $\sigma_m[u]$ seri olarak $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(m)}$ şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned}
\sigma_0^{(m)} &= \phi_m[g] \\
\sigma_n^{(m)} &= -\frac{d^2}{dx^2}\sigma_{n-1}^{(m)}\ (n \geq 1) \\
\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(m)} &= \sigma_m = -\frac{d^2}{dx^2}\sigma_{n-1}^{m}
\end{aligned}$$

dir. Eğer g nin tümü kullanılmazsa $\phi_m = \sum\limits_{i=0}^{m-1} u_i$ de $m \to \infty$ için limit halinde u ya yaklaşılır. Bu ise sadece $\sigma_m[u]$ mevcuttur. Aynı denklemde

$$\begin{aligned} u &= g(x) - \frac{d^2u}{dx^2} \\ u_0 &= g(x) \\ u_m &= -\frac{d^2}{dx^2}u_{m-1} \end{aligned}$$

yazılırsa,

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(0)} x^n \\ u_m &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} x^n \\ a_n^{(m)} &= -(n+1)(n+2)a_{n+2}^{(m-1)} \end{aligned}$$

yazılır. Böylece,

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} u_m = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{m=0}^{\infty} a_n^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

bulunur. Burada

$$a_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_n^{(m)}$$

dir. Asimptotik ayrışım (dekompozisyon) için çözüm

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

ile verilir.

Burada altı çizilmesi gereken iki nokta vardır.

1) Bu metod, nonlineer denklemlerdeki nonlineer terimi de yukarıdaki polinomlar cinsinden ifade ederek açıklar.

2) Katsayıları singüler olan bayağı diferansiyel denklemler için de bu metod, asimptotik

ayrışımda hiçbir güçlüğe sebebiyet vermemektedir. Örneğin,

$$(1-x)\frac{d^2u}{dx^2}+u=g(x)$$
$$u=g(x)+(x-1)\frac{d^2u}{dx^2}$$
$$u_0=g(x)$$

dir (Adomian, 1994).

3.5. İki Değişkenli Fonksiyonlarda Dekompozisyon

Bu kısımda diferansiyel denklemler için dekompozisyon metodunun nasıl kullanılacağı üzerinde durulacaktır. Buradaki yaklaşım da tek boyutlu yaklaşımla aynıdır. Burada x ve t ye göre türevler sırasıyla, $L_x u$ ve $L_t u$ ile gösterilir. Bu metodu bazı örneklerle izah etmeye çalışalım (Adomian, 1994).

$$f(u)=u^2$$

olsun. Ayrışım metoduyla

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+f(u)=0\,,\quad u(0,x)=\frac{1}{2x}\,,\quad u(t,0)=-\frac{1}{t}$$

yi ele alalım.

$$L_t u=-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-u^2$$

yazılır. Bu halde $u=\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ ve u^2 de $u=\sum_{n=0}^{\infty}A_n$ şeklinde temsil edilir. Bu halde,

$$L_t u=-(\partial/\partial x)\sum_{n=0}^{\infty}u_n-\sum_{n=0}^{\infty}A_n$$
$$u=u_0-L_t^{-1}(\partial/\partial x)\sum_{n=0}^{\infty}u_n-L_t^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}A_n$$

yazılır. Sonuç olarak,

$$
\begin{aligned}
u_0 &= u(x,0) = \frac{1}{2x} \\
u_1 &= -L_t^{-1}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) - L_t^{-1}A_0 \\
u_2 &= -L_t^{-1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) - L_t^{-1}A_1 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

yazılır. $A_n(u^2)$ değerleri yazılır toplanırsa,

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2x} + \frac{t}{4x^2} + \frac{t^2}{8x^3} + \frac{t^4}{16x^4} + \cdots \\
u &= \frac{1}{2x}\left[1 + \frac{t}{2x} + \frac{t^2}{4x^2} + \cdots\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Eğer $\frac{t}{2x} < 1$ ise geometrik seriden $u = \frac{1}{(2x-t)}$ elde edilir. Tersine $L_x u$ ya göre yük problemi çözülürse,

$$
\begin{aligned}
L_x u &= -\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - f(u) \\
u &= u_0 - L_x^{-1}(\partial/\partial t)\sum_{n=0}^{\infty} u_n - L_t^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \\
u_0 &= -1/t \\
u_1 &= -L_x^{-1}\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right) - L_x^{-1}A_0 = -2x/t^2 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

olur veya

$$
u = -\frac{1}{t}\left[1 + \frac{2x}{t} + \cdots\right]
$$

bu ise geometrik seriden $\frac{2x}{t} < 1$ olması halinde $u = \frac{1}{(2x-t)}$ olur. Netice itibariyle farklı yakınsaklık bölgelerinde aynı sonuç elde edildi. Operatör seçimleriyle yakınsaklık aralığının değişik olduğu görüldü.

Örnek 9 (Adomian, 1994)

$$u_{tt} - u_{xx} + \frac{\partial f(u)}{\partial t} = 0$$

denklemini ele alalım. $f(u(x,t))$ analitik bir fonksiyondur.

Çözüm 9 Burada

$$L_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$
$$L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

olsun. Dolayısıyla problem

$$L_t u - L_x u = -\frac{\partial f(u)}{\partial t}$$

şeklinde yazılır. Dekompozisyon metodu kullanılarak

$$L_t u = L_x u - \frac{\partial f(u)}{\partial t}$$
$$L_x u = L_t u + \frac{\partial f(u)}{\partial t}$$

denklemlerinden herhangi biri çözülebilir. Tersi alınırsa,

$$u = \Phi_t + L_t^{-1} L_x u - L_t^{-1}\left(\frac{\partial f(u)}{\partial t}\right) \qquad \text{veya}$$
$$u = \Phi_x + L_x^{-1} L_t u + L_x^{-1}\left(\frac{\partial f(u)}{\partial t}\right)$$

elde edilir. Burada Φ_t ve Φ_x verilen başlangıç veya sınır değer koşullarından elde edilir. Genel olarak Φ_t ve Φ_x den herhangi biri kullanılarak çözüm elde edilir. $\frac{\partial f(u)}{\partial t}$ alışık olduğumuz yöntemle elde edilir. Netice itibariyle çözüm $f(u)$ ya ve yukarıda verilen başlangıç koşullarına göre elde edilir. (Problemin anlaşılabilirliği için $f(u) = 0$ alalım.) Yukarıdaki problemi aşağıdaki gibi modifiye ederek çözelim.

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \qquad u(0,x) = 0\ ,\ \ u(t,0) = 0\ ,\ u(\pi/2,x) = \sin x\ ,\ u(t,\pi/2) = \sin t$$

$$L_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad \text{ve} \qquad L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

olmak üzere yük denklemi

$$L_t u = L_x u$$

şeklinde yazalım. Buradan,

$$u = c_1 k_1(x) + c_2 k_2(x)t + L_t^{-1} L_x u \qquad \text{veya}$$
$$u = c_3 k_3(t) + c_4 k_4(t)x + L_x^{-1} L_t u$$

çözümleri elde edilir.

$$\Phi_t = c_1 k_1(x) + c_2 k_2(x)t$$
$$\Phi_x = c_3 k_3(t) + c_4 k_4(t)x$$

olarak alınırsa

$$u = \Phi_t + L_t^{-1} L_x u \qquad \text{ve}$$
$$u = \Phi_x + L_x^{-1} L_t u$$

elde edilir. ϕ_1 in ilk yaklaşığı $u_0 = \Phi_t$ ve iki terimli ϕ_2 nin yaklaşığı ise $u_0 + u_1$ dir. Burada $u_1 = L_t^{-1} L_x u_0$ dır. t ye göre yukarıdaki koşullar

$$\phi_1 = u_0 = c_1 k_1(x) + c_2 k_2(x)t$$

için uygulanırsa, bir sonraki terim için

$$u_1 = L_t^{-1} L_x u_0 = L_t^{-1} L_x [c_2 t \sin x]$$

elde edilir. Bu muhakemeye devamla $u_2, u_3, ..., u_n$ elde edilir. Dolayısıyla herhangi bir n için

$$u_n = (L_t^{-1} L_x)^n u_0 = c_2 (\sin x)(-1)^n t^{2n+1}/(2n+1)!$$

yazılır. Dolayısıyla m terimli yaklaşım

$$\Phi_m = c_2 \sin x \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n t^{2n+1}/(2n+1)!$$

ile ifade edilir. Ayrıca,

$$\Phi_m(\pi/2, x) = \sin x$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$c_1 k_1(x) = 0\,,$$

$$c_2 \sin x \sum_{n=0}^{m-1} (\pi/2)^{2n+1}/(2n+1)! = \sin x$$

elde edilir. $m \to \infty$ için, $c_2 \to 1$ olduğu aşikardır. Dolayısıyla çözüm $u = \sin x \sin t$ dir. Bu yüzden elde ettiğimiz yaklaşık çözüm tam çözümü verir.

Örnek 10 (Adomian, 1994)

$$u_{tt} - u_{xx} = 0\,,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi\,,\ t \geqslant 0$$

denklemini

$$u(x,0) = \sin x\,,\ u(0,t) = 0\,,\ u_t(x,0) = 0\,,\ u_x(\pi,t) = 0$$

ile çözelim.

Çözüm 10 Dekompozisyon denklemleri

$$u = c_1 k_1(t) + c_2 k_2(t) x + L_x^{-1} L_t u \qquad \text{ve}$$
$$u = c_3 k_3(x) + c_4 k_4(x) t + L_t^{-1} L_x u$$

şeklinde olur. Birinci denklemdeki ilk terimli yaklaşık $\phi_1 = u_0$

$$u_0 = c_1 k_1(t) + c_2 k_2(t) x$$

şeklindedir. Başlangıç şartları kullanılırsa

$$c_1 k_1(t) = 0 \qquad c_2 k_2(t)\pi = 0 \qquad \text{ile birlikte} \qquad u_0 = 0$$

olur. Bu durumda çözüm hakkında herhangi bir bilgi elde edilmez.

$$u = c_1 k_1(t) + c_2 k_2(t)x + L_x^{-1} L_t u$$
$$u = c_3 k_3(x) + c_4 k_4(x)t + L_t^{-1} L_x u$$

denklem sisteminin 2. denklemine

$$c_3 k_3(x) = \sin x \,, \; c_4 k_4(x)t = 0$$

başlangıç koşulları uygulanırsa

$$\begin{aligned} u_0 &= \sin x \\ u_1 &= L_t^{-1} L_x u_0 = (-t^2/2!) \sin x \\ u_2 &= L_t^{-1} L_x u_1 = (t^4/4!) \sin x \\ &\vdots \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$u = (1 - t^2/2! + t^4/4! - \ldots) \sin x = \sin x \cos t$$

çözümü elde edilir.

Sonuç olarak genel form incelenirse

$$L_x u = L_t u + \frac{\partial f(u)}{\partial t}$$
$$L_t u = L_x u - \frac{\partial f(u)}{\partial t}$$

veya

$$u = c_1 k_1(t) + c_2 k_2(t)x + L_x^{-1} L_t u - L_x^{-1} \left(\frac{\partial f(u)}{\partial t} \right)$$
$$u = c_3 k_3(x) + c_4 k_4(x)t + L_t^{-1} L_x u + L_t^{-1} \left(\frac{\partial f(u)}{\partial t} \right)$$

elde edilir. $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ve $f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ olduğu göz önüne alınarak sonuca gidilir. Eğer

$f(u) = u$ ise $A_0 = u_0$, $A_1 = u_1, .., $ şeklindedir. Yani

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

elde edilir ve dolayısıyla

$$u = u_0 + L_x^{-1} L_t \sum_{n=0}^{\infty} u_n + L_x^{-1} \frac{\partial \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n \right)}{\partial t}$$

$$u = u_0 + L_t^{-1} L_x \sum_{n=0}^{\infty} u_n + L_t^{-1} \frac{\partial \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n \right)}{\partial t}$$

bulunur.

$$u(0,t) = 0 \, , \; u(x,0) = f(x) \, , \; u_x(0,t) = 0 \, , \; u_t(x,0) = 0$$

şartları kullanılırsa

$$c_1 k_1(t) = c_2 k_2(t) = 0 \qquad \text{ya da} \qquad u_0 = 0$$

bulunur. Dolayısıyla L_x^{-1} çözüm hakkında bilgi edinmemizi sağlamaz. Diğer denklem için de

$$c_3 k_3(x) = f(x) \qquad \text{ve} \qquad c_4 k_4(x) = 0$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned} u_0 &= f(x) \\ u_1 &= L_t^{-1} L_x u_0 - L_t^{-1} \frac{\partial A_0}{\partial t} \\ u_2 &= L_t^{-1} L_x u_1 - L_t^{-1} \frac{\partial A_1}{\partial t} \\ &\vdots \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda $\phi_n = \sum\limits_{m=0}^{n-1} u_m$, n terimli yaklaşımı $m \to \infty$ için u ya yakınsaktır.

Örnek 11 (Adomian, 1994)

$g = -\sin^2 x \sin(2t)$ olmak üzere

$$u_{tt} - u_{xx} + \frac{\partial u^2}{\partial t} = g$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0\ ,\ u(x,0) = \sin x\ ,\ u_t(x,0) = 0$$

dalga denklemini ele alalım.

Çözüm 11 Burada

$$u_0 = k_1(x) + k_2(x)t + L_t^{-1} g$$

elde edilir. Benzer olarak

$$u_0 = k_3(t) + k_4(t)x - L_x^{-1} g$$

elde edilir. $u(x,0) = \sin x\ ,\ u_t(x,0) = 0$ koşulları altında

$$k_1(x) = \sin x$$

$$k_2(x) = 0$$

$$u_0 = \sin x - (\sin^2 x)(t/2 - 1/4 \sin 2t)$$

yazılır. n terimli ϕ_n yaklaşımı

$$\phi_n = \sum_{i=0}^{n-1} (L_t^{-1} L_x)^i u_0 - L_t^{-1} \left(\frac{\partial \sum\limits_{m=0}^{n-1} A_m}{\partial t} \right)$$

ile verilir. Burada

$$A_0 = u_0 u_0,$$

$$A_1 = u_0 u_1 + = u_0 u_1, \ldots$$

fizikteki gürültü terimini ifade eder.

Eğer $u_0 = \sin x$ ise

$$u_1 = \left(-t^2/2!\right) \sin x\ ,\ u_2 = \left(t^4/4!\right) \sin x$$

böylece $u = \cos t \sin x$ olarak elde edilir. Çözüm

$$u = \cos t \sin x + \text{diğer terimler}$$

dir. $u = \cos t \sin x + N$ yazılırsa $N = 0$ yazılır. Dolayısıyla diğer kalan terimler birbirlerini yok eder ve $u = \cos t \sin x$ tam(doğru) çözümdür.
Özet olarak,

$$L_t u = g + L_x u - \frac{\partial f(u)}{\partial t}$$
$$L_x u = -g + L_t u + \frac{\partial f(u)}{\partial t}$$

yazılır. L_t^{-1} ilk denkleme L_x^{-1} ikinci denkleme uygulanırsa

$$u = k_1(x) + k_2(x)t + L_t^{-1} g + L_t^{-1} L_x u - L_t^{-1}\left(\frac{\partial f(u)}{\partial t}\right)$$
$$u = k_3(x) + k_4(t)x - L_x^{-1} g + L_x^{-1} L_t u + L_x^{-1}\left(\frac{\partial f(u)}{\partial t}\right)$$

bulunur. Daha önceden olduğu gibi

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\ ,\ f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

kullanılırsa

$$u_0 = k_1(x) + k_2(x)t + L_t^{-1} g$$
$$u_{n+1} = L_t^{-1} L_x u_n - L_t^{-1}\left(\frac{\partial A_n}{\partial t}\right)$$

veya

$$u_0 = k_3(t) + k_4(t)x + L_x^{-1} g$$
$$u_{n+1} = L_x^{-1} L_t u_n - L_x^{-1}\left(\frac{\partial A_n}{\partial t}\right)$$

elde edilir. Buradan da çözüme katkı yapan denklem belirlenir.

Örnek 12 (Adomian, 1994)

$$u_{tt} - u_{xx} + \frac{\partial f(u)}{\partial t} = g(x,t)$$
$$u(x,0) = \sin x\ ,\ u_t(x,0) = -\sin x\ ,\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

denklemini ele alalım.

Çözüm 12 Burada

$$g = 2e^{-t}\sin x - 2e^{-2t}\sin x\cos x\ ,\ f(u) = uu_x$$

olsun.

$$L_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

olmak üzere

$$L_t u = g - \frac{\partial f(u)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$u = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$, $f(u) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ olduğu gözönüne alınırak 0 dan t ye integral almak üzere L_t^{-1} uygulanırsa $m \geqslant 0$ için ,

$$u_0 = u(x,0) + tu_t(x,0) + L_t^{-1} g$$
$$u_{m+1} = -L_t^{-1}\left(\frac{\partial A_m}{\partial t}\right) + L_t^{-1}\left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}\right)$$

elde edilir. Bu halde $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ serisi yakınsak olduğundan

$$\phi_m = \sum_{i=0}^{m-1} u_i$$

kısmi toplam aradığımız çözümün yaklaşığıdır.

$$e^{-t} = 1 - t + \frac{t^2}{2}$$
$$\sin x = x$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$$

gözönüne alınırsa,

$$g \approx 2\left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right)(x) - 2(1 - 2t + 2t^2)x\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

şeklindedir. Bu halde $L^{-1}g \approx 0$ olması gerektiğinden

$$\begin{aligned} u_0 &= x - tx \\ u_1 &= L_t^{-1}\left(\frac{\partial A_0}{\partial t}\right) + L_t^{-1}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right) = \frac{xt^2}{2} \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla iki terimli yaklaşık,

$$\begin{aligned} \phi_2 &= u_0 + u_1 = x - tx + x\frac{t^2}{2} \\ &= \left(1 - t^2 + \frac{t^2}{2}\right)x \approx e^{-t}\sin x \end{aligned}$$

dir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

p, q, y ve $y' \in C^k$ olsun. Bu halde,

$$y' + p(x)y = q(x)\,,\ y(x_0) = A \tag{4.1}$$

denkleminin gerçek çözümü klasik olarak

$$y = \lambda^{-1}\int \lambda q(x)dx + c\lambda^{-1}\,,\ \lambda = e^{\int p(x)dx}$$

olduğunu biliyoruz. Burada c sabittir. Şimdi, bu denklemi Adomian ayrışım metodu ile formüle edelim.

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial}{\partial x} \qquad \text{ise} \\ L^{-1} &= \int_0^x (.)dx \end{aligned} \tag{4.2}$$

olmak üzere (4.1) denklemine önce L ardından L^{-1} uygulanırsa

$$\begin{aligned} Ly &= q(x) - p(x)y \\ L^{-1}Ly &= L^{-1}[q(x)] - L^{-1}[p(x)y] \\ y(x) &= A + L^{-1}[q(x)] - L^{-1}[p(x)y] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} y_0 &= A + L^{-1}[q(x)] \\ y_n &= -L^{-1}[p(x)y_{n-1}] \qquad n \geqslant 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{4.3}$$

iterasyonu bulunur.

Teorem 1 (4.1) denkleminin Adomian ayrışım metodu ile çözümü (4.3) ile verilir. Yani, çözüm

$$n \to \infty \qquad \text{için} \qquad y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

ile verilir. Ayrıca,

$$n \to \infty \qquad \text{için} \qquad y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \quad n \neq 0,1 \;\; y(x_0) = A$$

Bernoulli denklemine

$$u = y^{1-n}$$
$$u' = (1-n)y^{-n}y'$$

dönüşümleri uygulanırsa

$$u' + (1-n)p(x)y = (1-n)q(x)$$

lineer denklemi elde edilir ve bunun çözümü ise Teorem(1) ile verilir.

Örnek 13 (Ağırağaç, 2017; Tanriverdi ve Ağırağaç, 2018)

$$y' - y = 0\,, \quad y(0) = 1 \tag{4.4}$$

diferansiyel denklemini Adomian ayrışım metodu ile inceleyelim.

Çözüm 13 Bu denkleme ait tam çözümün

$$y = e^x$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi verilen diferansiyel denklemi Adomian ayrışım metodu ile ele alalım. (4.1) denkleminden

$$y = y(0) + L^{-1}[y]$$

bulunur. Burada

$$y_0 = y(0) = 1$$
$$y_n = L^{-1}[y_{n-1}]$$

dir. Buna devam edilirse

$$
\begin{aligned}
y_1 &= L^{-1}[y_0] = L^{-1}[1] = \int_0^x 1dx = x|_0^x = x \\
y_2 &= L^{-1}[y_1] = L^{-1}[x] = \int_0^x xdx = \frac{x^2}{2}|_0^x = \frac{x^2}{2} \\
y_3 &= L^{-1}[y_2] = L^{-1}\left[\frac{x^2}{2}\right] = \int_0^x \frac{x^2}{2}dx = \frac{x^3}{6}|_0^x = \frac{x^3}{6} \\
y_4 &= L^{-1}[y_3] = L^{-1}\left[\frac{x^3}{6}\right] = \int_0^x \frac{x^3}{6}dx = \frac{x^4}{24}|_0^x = \frac{x^4}{24}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda çözüm

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1}(x) = L^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\right]$$

kullanılırsa

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots$$

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$n \to \infty$ için

$$y = e^x$$

bulunur.

Örnek 14 (Ağırağaç, 2017; Tanriverdi ve Ağırağaç, 2018)

$$y' - y = e^x\ , \quad y(0) = -1$$

diferansiyel denklemini Adomian ayrışım metodu ile inceleyim.

Çözüm 14 Bu denklemin gerçek çözümünün

$$y = xe^x$$

olduğunu biliyoruz. (4.1) denkleminden hareketle

$$y = y(0) + L^{-1}[y] + L^{-1}[e^x]$$

bulunur ve buradan

$$y_0(x) = e^x - 1$$

dir. Çözüme devam edilirse

$$y_n(x) = L^{-1}[y_{n-1}]$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
y_1 &= L^{-1}[y_0] = \int_0^x (e^x - 1)dx = e^x - x - 1 \\
y_2 &= L^{-1}[y_1] = \int_0^x (e^x - x - 1)dx = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1 \\
y_3 &= L^{-1}[y_2] = \int_0^x \left(e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1\right)dx = e^x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^2}{2!} - x - 1 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

bulunur.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+1} = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_n$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
y &= y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} \\
&= (e^x - 1) + (e^x - x - 1) + \left(e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1\right) + \left(e^x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^2}{2!} - x - 1\right) \\
&+ \left(e^x - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} - \frac{x^{n-3}}{(n-3)!} - \ldots - x - 1\right) \\
&= ne^x - \left[n + (n-1)x + (n-2)\frac{x^2}{2!} + \ldots + 3\frac{x^{n-3}}{(n-3)!} + 2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right] \\
&= ne^x - n\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots\right) + x + x^2 + 3\frac{x^3}{3!} + 4\frac{x^4}{4!} + \ldots + (n-3)\frac{x^{n-3}}{(n-3)!} \\
&+ (n-2)\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + (n-1)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= n(e^x - e^x)
\end{aligned}$$

$n \to \infty$ için 0 dır.

$$x\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\right)$$

$n \to \infty$ için xe^x dır.

Örnek 15 (Ağırağaç, 2017; Tanriverdi ve Ağırağaç, 2018)

$$y' - xy = x\,, \quad y(0) = 0$$

diferansiyel denklemini Adomian ayrışım metodu ile ele alalım.

Çözüm 15

$$y' - xy = x\,, \quad y(0) = 0$$

diferansiyel denkleminin tam çözümünün

$$y = -1 + e^{\frac{x^2}{2}}$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi bu diferansiyel denklemi Adomian ayrışım metodu ile ele alalım.

$$\begin{aligned} y' &= x + xy \\ Ly &= x + xy \\ L^{-1}Ly &= L^{-1}[x] + L^{-1}[xy] \\ y(x) &= L^{-1}[x] + L^{-1}[xy] \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$y_0(x) = L^{-1}[x] = \int_0^x x dx = \frac{x^2}{2}$$

dir. Çözüme devam edilirse

$$y_n = L^{-1}[xy_{n-1}]$$

kullanılırsa

$$y_1 = L^{-1}[xy_0] = L^{-1}\left[x\frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2}\right] = \int_0^x \frac{x^3}{2}dx = \frac{x^4}{8}$$
$$y_2 = L^{-1}[xy_1] = L^{-1}\left[x\frac{x^4}{8} = \frac{x^5}{8}\right] = \int_0^x \frac{x^5}{8}dx = \frac{x^6}{48}$$
$$y_3 = L^{-1}[xy_2] = L^{-1}\left[x\frac{x^6}{48} = \frac{x^7}{48}\right] = \int_0^x \frac{x^7}{48}dx = \frac{x^8}{384}$$
$$\vdots$$

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots$$
$$y = -1 + 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384} + \ldots + \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!}$$
$$y = -1 + e^{\frac{x^2}{2}}$$

elde edilir.

Örnek 16

$$y'' + y = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0$$

diferansiyel denklemini Adomian ayrışım metodu ile ele alalım.

Çözüm 16 Denklemin gerçek çözümü

$$y = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

dir. Bu denklemi Adomian ayrışım metodu ile inceleyelim.

$$y'' + y = 0$$
$$y'' = -y$$

$$L = \frac{d^2}{dx^2}$$
$$L^{-1} = \int_0^x \int_0^x (.)dxdx$$

olmak üzere denklemin her iki yanına L^{-1} uygulanırsa

$$L^{-1}L[y] = -L^{-1}[-y]$$

bulunur. Denklem çözülmeye devam edilecek olursa

$$
\begin{aligned}
y(x) &= 1 - L^{-1}[y] \\
y &= 1 - \int_0^x \int_0^x y(x)dx \\
y &= 1 - \int_0^x (x-t)y(t)dt
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
y_0 &= 1 \\
y_n &= -\int_0^x (x-t)y_{(n-1)}dt
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -\int_0^x (x-t)y_0 dt = -\int_0^x (x-t)dt \\
&= -(xt - \frac{t^2}{2})|_0^x = -(x^2 - \frac{x^2}{2}) = -\frac{x^2}{2} \\
y_2 &= -\int_0^x (x-t)y_1 dt = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)t^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^x (xt^2 - t^3)dt \\
&= \frac{1}{2}\left[x\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}|_0^x\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{4}\right] \\
&= \frac{x^4}{24} \\
y_3 &= -\int_0^x (x-t)y_2 dt = -\frac{1}{24}\int_0^x (x-t)t^4 dt \\
&= -\frac{1}{24}\int_0^x (xt^4 - t^5)dt \\
&= -\frac{1}{24}\left[x\frac{t^5}{5} - \frac{t^6}{6}|_0^x\right] = -\frac{1}{24}\left[\frac{x^6}{5} - \frac{x^6}{6}\right] \\
&= -\frac{1}{24}\frac{x^6}{30} \\
&= -\frac{x^6}{6!}
\end{aligned}
$$

$$\lim_{n\to\infty}(y_0 + y_1 + y_2 + \dots y_n) \longrightarrow y$$
$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots$$
$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$
$$n \longrightarrow \infty \qquad \text{için} \qquad \cos x$$

çözümdür.

Örnek 17

$$y'' + 2y' + y = 0\,, \quad y(0) = 5\,, \quad y'(0) = -3$$

diferansiyel denklemini Adomian ayrışım metodu ile ele alalım.

Çözüm 17 Bu diferansiyel denklemin tam çözümünün

$$y = (5 + 2x)e^{-x}$$

veya

$$y = 5 - 3x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi de bu denklemi Adomian ayrışım metodu ile inceleyelim.

$$L = \frac{d^2}{dx^2}$$
$$L^{-1} = \int_0^x \int_0^x (.)dxdx$$

olmak üzere denklemin her iki yanına önce L ardından L^{-1} uygulanırsa

$$y'' = -2y' - y$$
$$Ly = -2y' - y$$
$$L^{-1}Ly = -2L^{-1}[y'] - L^{-1}[y]$$
$$y = 5 - 3x - 2L^{-1}[y'] - L^{-1}[y]$$

elde edilir. Burada

$$y_0 = 5 - 3x$$
$$y_n = -2L^{-1}\left[\frac{\partial y_{n-1}}{\partial x}\right] - L^{-1}[y_{n-1}]$$

dir. Buna göre

$$y_1 = -2L^{-1}\left[\frac{\partial y_0}{\partial x}\right] - L^{-1}[y_0]$$
$$y_1 = -2L^{-1}[-3] - L^{-1}[5 - 3x] = 3x^2 - \frac{5x^2}{2} + \frac{x^3}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}$$
$$y_2 = -2L^{-1}\left[\frac{\partial y_1}{\partial x}\right] - L^{-1}[y_1]$$
$$y_2 = -2L^{-1}\left[x + \frac{3x^2}{2}\right] - L^{-1}\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}\right]$$
$$y_2 = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{40} = -\frac{x^3}{3} - \frac{7x^4}{24} - \frac{x^5}{40}$$
$$\vdots$$

elde edilir.

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots$$

olduğundan

$$y = 5 - 3x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{7x^4}{24} - \frac{x^5}{40}$$
$$y = 5 - 3x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$$

elde edilir.

Örnek 18

$$y' + y + y^2 = 0\,, \quad y(0) = 1$$

diferansiyel denklemini Adomian ayrışım metodu ile ele alalım.

Çözüm 18 Gerçek çözümün

$$\frac{y}{y+1} = \frac{1}{2}e^{-x}$$
$$\frac{y}{y+1} = \frac{1}{2}\left[1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right]$$

olduğunu biliyoruz. Adomian ayrışım metodu ile incelenirse

$$y' + y + y^2 = 0$$
$$y' = -y + y^2$$

denkleme önce L sonra L^{-1} uygulanırsa

$$Ly = -y - y^2$$
$$L^{-1}L[y] = -L^{-1}[y] - L^{-1}[y^2]$$
$$y = 1 - L^{-1}[y] - L^{-1}[y^2]$$

elde edilir.

$$y_0 = 1$$
$$y_n = -L^{-1}[y_{n-1}] - L^{-1}[y_{n-1}^2] \qquad \text{veya}$$
$$y_n = -L^{-1}[y_{n-1}] - L^{-1}[A_{n-1}]$$

ve

$$A_0 = y_0^2$$
$$A_1 = 2y_0y_1$$
$$A_2 = y_1^2 + 2y_0y_2$$
$$A_3 = 2y_1y_2 + 2y_0y_3$$
$$A_4 = 2y_0y_4 + y_2^2 + 2y_0y_3$$

Adomian polinomları kullanılırsa

$$A_0 = y_0^2 = 1$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -L^{-1}[y_0] - L^{-1}[A_0] = -L^{-1}[1] - L^{-1}[1] = -x - x = -2x \\
A_1 &= 2y_0y_1 = 2.1.(-2x) = -4x \\
y_2 &= -L^{-1}[y_1] - L^{-1}[A_1] = -L^{-1}[-2x] - L^{-1}[-4x] = x^2 + 2x^2 = 3x^2 \\
A_2 &= y_1^2 + 2y_0y_2 = 6x^2 + 4x^2 = 10x^2 \\
y_3 &= -L^{-1}[y_2] - L^{-1}[A_2] = -L^{-1}[3x^2] - L^{-1}[10x^2] = -x^3 - \frac{10}{3}x^3 = -\frac{13}{3}x^3 \\
A_3 &= 2y_1y_2 + 2y_0y_3 = -\frac{62}{3}x^3 \\
y_4 &= -L^{-1}[y_3] - L^{-1}[A_3] = -L^{-1}\left[-\frac{13}{3}x^3\right] - L^{-1}\left[-\frac{62}{3}x^3\right] = \frac{13}{12}x^4 + \frac{31}{2}x^4 \\
&= \frac{199}{12}x^4
\end{aligned}
$$

bulunur.

$$
\begin{aligned}
\frac{y}{y+1} &= \frac{y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots}{1 + y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots} \\
&= \frac{1 - 2x + 3x^2 - \frac{13}{3}x^3 + \frac{199}{12}x^4 + \ldots}{2 - 2x + 3x^2 - \frac{13}{3}x^3 + \frac{199}{12}x^4 + \ldots}
\end{aligned}
$$

elde edilir ve polinom bölmesi uygulanırsa

$$
y = \frac{1}{2}\left[1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right]
$$

sonucuna varılır.

Örnek 19

$$
y' = -2 - y + y^2\,, \quad y(x) = 2\,, \quad y(0) = 0 \tag{4.5}
$$

denklemini Adomian ayrışım metodu ile inceleyelim.

Çözüm 19 Denklemin gerçek çözümünün

$$
y = 2 - \frac{6}{e^{-3x} + 2}
$$

veya

$$y = -2x + x^2 + x^3 - \frac{4x^3}{4} - \frac{16x^5}{15} + \ldots \tag{4.6}$$

olduğunu biliyoruz. Bu denklemi bir de Adomian ayrışım metodu ile inceleyelim. (4.5) denkleminin her iki tarafına önce L ardından L^{-1} uygulanırsa

$$\begin{aligned} Ly &== -2 - y + y^2 \\ L^{-1}Ly &= L^{-1}[-2] - L^{-1}[y] + L^{-1}[y^2] \\ y &= -2x - L^{-1}[y] + L^{-1}[y^2] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} y_0 &= -2x \\ y_n &= -L^{-1}[y_{n-1}] + L^{-1}[y_{n-1}^2] \qquad \text{veya} \\ y_n &= -L^{-1}[y_{n-1}] + L^{-1}[A_{n-1}] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} A_0 &= y_0^2 \\ A_1 &= 2y_0y_1 \\ A_2 &= y_1^2 + 2y_0y_1 \end{aligned}$$

Adomian polinomları kullanılırsa

$$\begin{aligned} A_0 &= y_0^2 = (-2x)^2 = 4x^2 \\ y_1 &= -L^{-1}[y_0] + L^{-1}[A_0] = -L^{-1}[-2x] + L^{-1}[4x^2] = x^2 + \frac{4}{3}x^3 \\ A_1 &= 2y_0y_1 = 2.(-2x)(x^2 + \frac{4}{3}x^3) = -4x^3 - \frac{16}{3}x^4 \\ y_2 &= -L^{-1}[y_1] + L^{-1}[A_1] = -L^{-1}\left[x^2 + \frac{4}{3}x^3\right] + L^{-1}\left[-4x^3 - \frac{16}{3}x^4\right] \\ &= \frac{-x^3}{3} - \frac{-4x^4}{3} - \frac{-16x^5}{15} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
y &= -2x + x^2 + \frac{4x^3}{3} - \frac{x^3}{3} - \frac{4x^4}{3} - \frac{16x^5}{15} + \dots \\
y &= -2x + x^2 + x^3 - \frac{4x^4}{3} - \frac{16x^5}{15} + \dots
\end{aligned}
$$

bulunur.

Teorem 2

$$
y' = (ax + by + c)^2 , \quad y(x_0) = A \tag{4.7}
$$

denkleminin Adomian ayrışım metodu ile $k + 1$ inci terimi

$$
y = \sum_{k=0}^{k} y_k
$$

ile verilir. Dolaysıyla seri çözüm

$$
k \longrightarrow \infty \text{ için } y = \sum_{k=0}^{\infty} y_k
$$

İspat 1 (4.7) denkleminde sağ tarafın karesi alınırsa

$$
y' = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2 + 2abxy + 2acx + 2bcy \tag{4.8}
$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{d}{dx} \\
L^{-1} &= \int_0^x (.)dx
\end{aligned}
$$

olmak üzere (4.8) denkleminin her iki tarafına önce L ardından L^{-1} uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
Ly &= a^2x^2 + b^2y^2 + c^2 + 2abxy + 2acx + 2bcy \\
L^{-1}Ly &= L^{-1}[a^2x^2] + L^{-1}[b^2y^2] + L^{-1}[c^2] + L^{-1}[2abxy] + L^{-1}[2acx] \\
&\quad + L^{-1}[2bcy]
\end{aligned}
$$

$$y = A + L^{-1}[a^2x^2] + L^{-1}[b^2y^2] + L^{-1}[c^2] + L^{-1}[2abxy] + L^{-1}[2acx] + L^{-1}[2bcy]$$

$$y = A + a^2\frac{x^3}{3} + c^2x + 2ac\frac{x^2}{2} + L^{-1}[2bcy] + L^{-1}[b^2y^2] + L^{-1}[2abxy]$$

elde edilir. Burada

$$y_0 = A + a^2\frac{x^3}{3} + c^2x + 2ac\frac{x^2}{2}$$

dir.

$$y_n = L^{-1}[2bcy_{n-1}] + L^{-1}[2abxy_{n-1}] + L^{-1}[b^2y_{n-1}^2] \tag{4.9}$$

iterasyonu ile teşkil eder. Örnek(1) deki A_n ler Adomian polinomları olmak üzere (4.9) denklemi

$$y_n = L^{-1}[2bcy_{n-1}] + L^{-1}[2abxy_{n-1}] + L^{-1}[b^2A_{n-1}]$$

şeklinde yazılır. Buradan $y_1, y_2, y_3, \ldots$ bulunur. Dolaysıyla (4.8) denkleminin Adomian ayrışım metodu ile çözümünün $(k+1)$. terimi

$$y = \sum_{k=0}^{k} y_k$$

ile verilir. Seri çözüm

$$k \to \infty \qquad y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k$$

Örnek 20 (Ağırağaç, 2017; Tanriverdi ve Ağırağaç, 2018)

$$y' = (x+y)^2\,, \quad y(0) = 1 \tag{4.10}$$

başlangıç değer problemini Adomian ayrışım metodu ile çözelim.

Çözüm 20 Klasik olarak (4.10) denkleminin $y(0) = 1$ şartını sağlayan çözümü

$$y = \frac{1+\tan x}{1-\tan x} - x$$

veya

$$y = 1 + x + 2x^2 + \frac{8x^3}{3}$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi de (4.10) denklemini Adomian ayrışım metodu ile inceleyelim.

$$y' = (x + y)^2$$

denkleminde sağ tarafın karesi alınırsa

$$y' = x^2 + 2xy + y^2 \tag{4.11}$$

elde edilir.(4.11) denklemine önce L ardından L^{-1} uygulanırsa

$$\begin{aligned} Ly &= x^2 + 2xy + y^2 \\ L^{-1}Ly &= L^{-1}[x^2] + L^{-1}[2xy] + L^{-1}[y^2] \\ y &= 1 + \frac{x^3}{3} + 2L^{-1}[xy_{n-1}] + L[y_{n-1}^2] \end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 + \frac{x^3}{3} \\ y_n &= 2L^{-1}[xy_{n-1}] + L^{-1}[y_{n-1}^2] \end{aligned}$$

veya

$$y_n = 2L^{-1}[xy_{n-1}] + L^{-1}[A_{n-1}]$$

ve

$$\begin{aligned} A_0 &= y_0^2 \\ A_1 &= 2y_0y_1 \\ A_2 &= y_1^2 + 2y_0y_2 \\ A_3 &= 2y_1y_2 + 2y_0y_3 \\ A_4 &= 2y_0y_4 + y_2^2 + 2y_0y_3 \end{aligned}$$

Adomian polinomları kullanılırsa

$$A_0 = y_0^2 = \left(1 + \frac{x^3}{3}\right)^2 = 1 + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^6}{9}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
y_1 &= 2L^{-1}[xy_0] + L^{-1}[A_0] \\
y_1 &= 2L^{-1}[x + \frac{x^4}{3}] + L^{-1}[1 + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^6}{9}] \\
y_1 &= 2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{15}\right) + \left(x + \frac{2x^4}{12} + \frac{x^7}{63}\right) = x + x^2 + \frac{x^4}{6} + \frac{2x5}{15} + \frac{x^7}{63} \\
A_1 &= 2y_0y_1 \\
A_1 &= 2x + 2x^2 + x^4 + \frac{14x^5}{15} + \frac{x^7}{7} + \frac{4x^8}{45} + \frac{2x^{10}}{189} \\
y_2 &= 2L^{-1}[xy_1] + L^{-1}[A_1] \\
y_2 &= 2L^{-1}\left[x^2 + x^3 + \frac{x^5}{6} + \frac{2x^6}{15} + \frac{x^8}{63}\right] \\
&\quad + L^{-1}\left[2x + 2x^2 + x^4 + \frac{14x^5}{15} + \frac{x^7}{7} + \frac{4x^8}{45} + \frac{2x^{10}}{2079}\right] \\
y_2 &= \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{18} + \frac{4x^7}{105} + \frac{2x^9}{567} + x^2 + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{14x^6}{90} + \frac{x^8}{56} + \frac{4x^9}{405} + \frac{2x^{11}}{2079} \\
&\vdots \\
y &= y_1 + y_2 + y_3 + \ldots \\
y &= 1 + x + 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + \ldots
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 21

$$u^2u_x - u_y = 0, \quad u(x,0) = x^{1/2}, \quad u(1,0) = 1$$

diferansiyel denklemini Adomian ayrışım metoduyla inceleyelim.

Çözüm 21 Verilen denklemin tam çözümü

$$u = \left(\frac{x}{1-y}\right)^{1/2}$$

dir. Şimdi de bu denklemi Adomian ayrışım metoduyla inceleyim.

$$L_y = \frac{d}{dy} \quad \text{ve} \quad L_y^{-1} = \int_0^y (.)dy$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
u_y &= u^2 u_x \\
L_y u &= u^2 u_x \\
L_y^{-1} L_y u &= L_y^{-1}[u^2 u_x] \\
u &= u(x,0) + L_y^{-1}[u^2 u_x] \\
u_0 &= x^{1/2} \\
u_{m+1} &= L_y^{-1}[u_m^2 u_{m_x}] \\
u_{m+1} &= L_y^{-1}[A_m]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
A_0 &= u_0^2 u_{0_x} \\
A_1 &= u_0^2 u_{1_x} + 2u_0 u_1 u_{0_x} \\
A_2 &= u_0^2 u_{2_x} + 2u_0 u_1 u_{1_x} + 2u_0 u_2 u_{0_x} + u_1^2 u_{0_x} \\
A_3 &= 2u_0 u_1 u_{2_x} + 2u_0 u_2 u_{1_x} + u_1^2 u_{1_x} + 2u_1 u_2 u_{0_x}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{2} x^{1/2} \\
u_1 &= L_y^{-1}[A_0] = L_y^{-1}\left[\frac{1}{2} x^{1/2}\right] = \frac{y}{2} x^{1/2} \\
u_{1_x} &= \frac{y}{4} x^{-1/2} \\
A_1 &= \frac{3}{4} y x^{1/2} \\
u_2 &= L_y^{-1}[A_1] = L_y^{-1}\left[\frac{3}{4} y x^{1/2}\right] = \frac{3}{8} y^2 x^{1/2} \\
u_{2_x} &= \frac{3}{16} y^2 x^{-1/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{15}{16}y^2x^{1/2} \\
u_3 &= L_y^{-1}[A_2] = L_y^{-1}\left[\frac{15}{16}y^2x^{1/2}\right] = \frac{5}{16}y^3x^{1/2} \\
A_3 &= \frac{10}{16}y^3x^{1/2} \\
u_4 &= L_y^{-1}[A_3] = L_y^{-1}\left[\frac{10}{16}y^3x^{1/2}\right] = \frac{5}{32}y^4x^{1/2}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
u &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots \\
u &= x^{1/2} + \frac{y}{2}x^{1/2} + \frac{3y^2}{8}x^{1/2} + \frac{5y^3}{16}x^{1/2} + \frac{5y^4}{32}x^{1/2} + \ldots \\
u &= x^{1/2}\left(1 + \frac{y}{2} + \frac{3y^2}{8} + \frac{5y^3}{16} + \frac{5y^4}{32} + \ldots\right) \\
u &= x^{1/2}(1-y)^{-1/2} = \left(\frac{x}{1-y}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 22

$$u^3u_x - u_y = 0, \quad u(x,0) = x^{1/3}, \quad u(1,0) = 1$$

diferansiyel denklemini Adomian ayrışım metoduyla ele alalım.

Çözüm 22 Verilen denklemin tam çözümü

$$u = \left(\frac{x}{1-y}\right)^{1/3}$$

dir. Şimdi de bu denklemi Adomian ayrışım metoduyla inceleyim.

$$L_y = \frac{d}{dy} \quad \text{ve} \quad L_y^{-1} = \int_0^y (.)dy$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
u_y &= u^3u_x \\
L_yu &= u^3u_x \\
L_y^{-1}L_yu &= L_y^{-1}[u^3u_x]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u &= u(x,0) + L_y^{-1}[u^3 u_x] \\
u_0 &= x^{1/3} \\
u_{m+1} &= L_y^{-1}[u_m^3 u_{m_x}] \\
u_{m+1} &= L_y^{-1}[A_m]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
A_0 &= u_0^3 u_{0_x} \\
A_1 &= u_0^3 u_{1_x} + 3u_0^2 u_1 u_{0_x} \\
A_2 &= u_0^3 u_{2_x} + 3u_0^2 u_1 u_{1_x} + 3u_0 u_1^2 u_{0_x} + 3u_0^2 u_2 u_{0_x} \\
A_3 &= 3u_0^2 u_1 u_{2_x} + 3u_0 u_1^2 u_{1_x} + 3u_0^2 u_2 u_{1_x} + 6u_0 u_1 u_2 u_{0_x}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{3}x^{1/3} \\
u_1 &= L_y^{-1}[A_0] = L_y^{-1}\left[\frac{1}{3}x^{1/3}\right] = \frac{y}{3}x^{1/3} \\
u_{1_x} &= \frac{y}{9}x^{-2/3} \\
A_1 &= \frac{4}{9}yx^{1/3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= L_y^{-1}[A_1] = L_y^{-1}\left[\frac{4}{9}yx^{1/3}\right] = \frac{2}{9}y^2x^{1/3} \\
u_{2_x} &= \frac{2}{27}y^2x^{-2/3} \\
A_2 &= \frac{14}{27}y^2x^{1/3} \\
u_3 &= L_y^{-1}[A_2] = L_y^{-1}\left[\frac{14}{27}y^2x^{1/3}\right] = \frac{14}{81}y^3x^{1/3} \\
A_3 &= \frac{9}{27}y^3x^{1/3} \\
u_4 &= L_y^{-1}[A_3] = L_y^{-1}\left[\frac{9}{27}y^3x^{1/3}\right] = \frac{9}{108}y^4x^{1/3}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots$$
$$u = x^{1/3} + \frac{y}{3}x^{1/3} + \frac{2y^2}{9}x^{1/3} + \frac{14y^3}{81}x^{1/3} + \frac{9y^4}{108}x^{1/3} + \dots$$
$$u = x^{1/3}\left(1 + \frac{y}{3} + \frac{2y^2}{9} + \frac{14y^3}{81} + \frac{9y^4}{108} + \dots\right)$$
$$u = x^{1/3}(1-y)^{-1/2} = \left(\frac{x}{1-y}\right)^{1/3}$$

bulunur.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Lineer olmayan problemlerin nümerik veya tam çözümü için klasik olarak Lineerleştirme, Ayrıklaştırma ve Perturbasyon metotları kullanılır. Lineer olmayan durumun oldukça kuvvetli (strong) olması halinde bu metotlar tatmin edici sonuçlar vermemektedir. Daha tatmin edici sonuçların elde edilmesi için Taylor serisine benzerlikleriyle öne çıkan Homotopi analiz metodu, Homotopi perturbasyon metodu, Diferansiyel dönüşüm metodu, İndirgenmiş diferansiyel dönüşüm metodu, Varyasyonel iterasyon metodu ve Adomian ayrışım metodu gibi benzer metotlar kullanılabilir.

5.1. Sonuçlar

Burada Adomian ayrışım metodu yardımı ile aşağıdaki problemlerle ilgili klasik formüllere benzer yaklaşık çözümler elde edilerek örneklerle sonuçlar test edildi.

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$y' = p(x)y + q(x)y^2 + r(x)$$

$$y' = (ax + by + c)^2$$

$$y'' + p(x)y = q(x)y^n$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

$$u^2u_x - u_y = 0$$

$$u^3u_x - u_y = 0$$

5.2. Öneriler

Burada elde edilen sonuçlar aşağıdaki problemlerden daha farklı problemlere uygulanabilir. Adomian ayrışım metodu yardımıyla elde edilen sonuçlar farklı yöntemlerle örneğin, Diferansiyel dönüşüm metodu, Homotopi analiz metodu, Homotopi pertürbasyon metodu, Varyasyonel iterasyon metodu ile mukayese edilebilir.

$$y' + p(x)y = q(x)$$
$$y' = p(x)y + q(x)y^2 + r(x)$$
$$y' = (ax + by + c)^2$$
$$y'' + p(x)y = q(x)y^n$$
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$
$$u^2u_x - u_y = 0$$
$$u^3u_x - u_y = 0$$

Bu yöntemin dezavantajlarından bir tanesi de bazı fonksiyonların Adomian polinomlarını bulmak oldukça yorucudur.

KAYNAKLAR

ADOMAIN, G. 1986. Nonlinear Stochastic Operator Equations. Academic Press.
ADOMAIN, G., 1988. A review of the decomposition method in applied mathematics. J. Math. Anal. Appl., 135: 501–544.
ADOMAIN, G., 1989. Nonlinear Stochastic Operator Equations. Academic Press, INC., New York, USA.
ADOMAIN, G. and RACH R., 1989. Smooth Polynomial Approximations of Piecewisedifferentiable Functions, Appl. Math. Lett., 2:377-379.
ADOMAIN, G., 1992. Differential coefficients with singular coefficients. Appl. Math. Comput., 47: 179-184.
ADOMAIN, G., 1994. Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,, Boston, USA.
AĞIRAĞAÇ, N., 2017. Diferansiyel Dönüşüm Metodunun Uygulamaları. Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Şanlıurfa, 42s.
CHANDRASEKHAR, S., 1967. Introduction to the Study of Stellar Structure. Dover. New York. USA.
CHERRAULT, Y., 1989. Convergence of Adomian's Method. Kybernetes, 18: 31-38.
GABET, L., 1962. Equisse d'une théorie décompositionelle, Modélisation Mathématique et Analyse Numérique.
DAVIS, H. T., 1962. Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations. Dover. New York. USA.
RICHARDSON. O. U., 1921. The Emission of Electricity from Hot Bodies. London. UK.
SENG, V., ABBAOUI, K., CHERRUAULT, Y., 1996. Math. Comput. Modelling, 24: 59.
TANRIVERDİ, T. and AĞIRAĞAÇ, N., 2018. Differential Transform Applied to Certain ODE. Advances in Differential Equations and Control Processes, 19 (3):213-235.
TANRIVERDİ, T. and MCLEOD, J. B., 2007. Generalization of the eigenvalues by contour integrals. Appl. Math. Comput., 189(2) : 1765-1773.
TANRIVERDİ, T. and MCLEOD, J. B., 2008. The analysis of contour integrals. Abstr. Appl. Anal., Article ID 765920, 12 pages.
TANRIVERDİ, T., 2009. Differential equations with contour integrals. Integral Transforms and Special Functions, 20 (2): 119-125.
TANRIVERDİ, T., 2009. Contour integrals associated differential equations, Mathematical and Computer Modelling, 49 (3-4): 453-462.
TANRIVERDİ, T. and MCLEOD, J. B., 2010. The Fanno model for turbulent compressible flow. Journal of Differential Equations, 249(12): 2955-2963.
TANRIVERDİ, T., 2017. Oscillating Solutions of the Lane-Emden Equation for Polytropic Indices m= 0 and 1. British J. Math. and Compute. Sci., 20(3): 1-5.
TANRIVERDİ, T., 2018. Evaluating Sine and Cosine Type Integrals. IJASM, 5(2): 11-13.
TANRIVERDİ, T., 2019. Classical way of looking at the Lane-Emden equation. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat., 68 (1): 271-276.
TANRIVERDİ, T., 2019. A Specific Sturm-Liouville Differential Equation. Thermal Science, 23(1): S47-S56.

TANRIVERDİ, T., 2019. Schrödinger equation with potential function vanishing exponentially fast. Journal of Taibah University for Science, 13 (1): 639–643.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Esra ÇADIRCI AKSAN
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Şanlıurfa, 1991
Telefon :
e-mail : esraacadirci@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Şanlıurfa Anadolu Lisesi, Şanlıurfa	2009
Üniversite	:	Harran Üni. Matematik Böl., Şanlıurfa	2014
Yüksek Lisans	:	Harran Üni. Matematik Böl., Şanlıurfa	2019

UZMANLIK ALANI : Matematik

YABANCI DİLLER : İngilizce