T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PARASERBEST LIE CEBİRLERİNİN ÇARPIMLARI VE PARASERBEST X- BY -Y LIE CEBİRLERİ

Elif BEŞLİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2022

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PARASERBEST LİE CEBİRLERİNİN ÇARPIMLARI VE PARASERBEST X- BY -Y LİE CEBİRLERİ

Elif BEŞLİ

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Zehra VELİOĞLU

Yıl: 2022, Sayfa: 47

P karakteristiği sıfır olan bir k halkası üzerinde tanımlı bir Lie cebiri ve A boştan farklı bir küme olsun. Eğer P rezidülü nilpotent ve A tarafından üretilen bir serbest Lie cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahip ise P ye A üzerinde paraserbest Lie cebiri denir. Bu tezde paraserbest Lie cebirlerinin çözülebilir, nilpotent, abelyen ve metabelyen çarpımları incelenmiş ve bu çarpımların bazı özellikleri ele alınmıştır.Paraserbest Lie cebirlerinin metabelyen çarpımının verbal alt cebirlerle olan ilişkisi incelenmiştir. Ayrıca paraserbest merkezi-by-metabelyen Lie cebirleri araştırılmış ve bu cebirin alt merkezi serisinin ikinci terimi ile olan bölüm cebirinin paraserbest metabelyen olduğu gösterilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Paraserbest Lie Cebirleri, Lie cebirlerin Çarpımları, X-by-Y Lie Cebirleri

ABSTRACT

MSc Thesis

PRODUCTS OF PARAFREE LIE ALGEBRAS AND PARAFREE X- BY -Y LIE ALGEBRAS

Elif BEŞLİ

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Zehra VELİOĞLU

Year: 2022, Page: 47

Let P be a Lie algebra over a ring k of characteristic zero and A be a nonempty set. The Lie algebra P is called parafree over a set A, if P is residually nilpotent and has the same lower central sequence as a free Lie algebra genereted by the set A. In this thesis, solvable, nilpotent, abelian and metabelian products of parafree Lie algebras are examined and some properties of these products are discussed. The relation of metabelian product of parafree Lie algebras with verbal subalgebras is investigated. Moreover, parafree center-by-metabelian Lie algebras have been investigated and it has been shown that the quotient algebra with the second term of the lower central series of this algebra is parafree metabelian
.

KEY WORDS: Parafree Lie algebras, Products of Lie algebras, X-by-Y Lie algebras

TEŞEKKÜR

İlk olarak üzerime gerçekten emeği geçen, her anımda yanımda olan, bigileriyle önüme ışık tutan çok saygı duyduğum ve onun gibi işine aşık bir öğretici olmak istediğim değerli danışman hocam Doç. Dr. Zehra VELİOĞLU'na sonsuz sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Harran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ndeki diğer tüm hocalarıma bana yardımlarından ve her an bana yol gösterip yanımda oldukları için teşekkürlerimi sunarım. Bu hayattaki en kıymetlilerim annem, babam, ablalarım ve abilerime sonsuz teşekkür ve sevgimi sunarım. Her adımımda emeği geçen bana yol gösteren daha adını sayamadığım tüm arkadaşlarıma ve sevdiklerime teşekkürlerimi sunarım.

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

D	Serbest çarpımın kartezyen alt cebiri
$g\ell(V)$	V den V ye lineer dönüşümlerin kümesi
$gl(n,F)$	$n \times n$ tipindeki matrislerin cebiri
$Ker\varphi$	φ dönüşümünün çekirdeği
L'	L Lie cebirinin komütatör altcebiri
$sl(n,F)$	$n \times n$ tipindeki izleri sıfır olan matrislerin cebiri
$U(M_n)$	M_n metabelyen cebirinin evrensel enveloping cebiri
$\prod_{\alpha\in I}^{*} L_\alpha$	L_α Lie cebirlerinin serbest çarpımı
$\prod_{i=1}^{m} L_i$	L_α Lie cebirlerinin direkt çarpımı
$\gamma_k(L)$	L Lie cebirinin alt merkezi serisinin k.terimi
$\delta_m(L)$	L Lie cebirinin türetilmiş serisinin m.terimi
$\Delta_w(L)$	L/J nilpotent olacak şekilde L'nin J ideallerinin bir kesişimi

1. GİRİŞ

Çalışmamız iki ayrı bölümden oluşmaktadır. Her bir bölümde aşağıdaki çalışmalar yapılmıştır.

Üçüncü bölümde çalışmamızda kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir (Baur, 1978; Bahturin, 1987; Kukin ve Bokut, 1994; Velioğlu, 2013).

Dördüncü bölümde Paraserbest Lie cebirlerinin çözülebilir çarpımı ele alınmış ve rezidülü özellikleri incelenmiştir. Daha paraserbest Lie cebirlerin nilpotent çarpımı ve bu çarpımın bir bazı üzerinde çalışılmıştır. Bu bölümün son kısmında ise bu cebirlerin abelyen ve metabelyen çarpımları incelenmiş ve metabelyen çarpımının 2-simetrik kelimelerle olan ilişkisi incelenmiştir (Velioğlu, 2019; Velioğlu, 2020).

Dördüncü bölümün ikinci kısmında paraserbest merkezi-by-metabelyen Lie cebirlerine yer verilmiştir. Bu cebirler ile ilgili önemli sonuçlar incelenmiş ve özellikle bu cebirin alt merkezi serisinin ikinci terimi ile olan bölüm cebirinin paraserbest metabelyen olduğu sonucu incelenmiştir (Velioğlu, 2019).

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Alt merkezi serilerinin terimleri ile karakterize edilmeye çalışılan serbest gruplar, ek olarak yeni bir tanım olan paraserbest grupların ortaya çıkmasına yol açmıştır. Paraserbestlik kavramı ilk defa Baumslag tarafından (1967) de gündeme getirilmiştir. "Paraserbest gruplar, bir serbest grup ile aynı alt merkezi diziye sahip, rezidülü nilpotent gruplar" (Baumslag, 1967). Sonrasında paraserbest grupların elementer özelikleri incelenerek serbest olma koşulunu sağlamayan paraserbest gruplara örnekler verilmiştir (Baumslag, 1969). Serbest gruplar üzerinde ters limiti incelenerek ele alınan ters limitin ne gibi koşullarda paraserbestlik özelliğini göstereceğini belirlenmiştir (Baumslag ve Stammbach, 1977). Paraserbest gruplar ile serbest grupları karşılaştırılmış, bu iki grubun benzer ve benzer olmayan özellikleri ortaya konmuştur (Baumslag, 2005). Sonrasında Baumslag ve Cleary, (2006) da paraserbest grupları ele alarak elde ettiği bir kısım sonuçları paraserbest grupların tek bağıntılı olma koşulunu sağlayan örneklerine uygulamaya çalışmışlardır. Grup Teorisi'ndeki birçok çalışmanın Lie cebirlerinde çalışıldığı gibi paraserbestlik kavramının da Lie cebirlerinde çalışıldığı görülür. Bu çalışmalar üzerine ilk kez paraserbest Lie cebiri gruplardaki paraserbest grup tanımına benzer şekilde tanımlanmıştır (Baur, 1978). "Paraserbest Lie cebiri, bir serbest Lie cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahip rezidülü nilpotent Lie cebiridir" (Baur, 1978). Buna ek olarak Baur, 1978 yılında paraserbest Lie cebirlerine ilişkin bir kısım ana tanım ve kavramlardan bahsetmiş, paraserbest Lie cebirlerinde evrensel enveloping cebirini ve homolojiyi tanımlamıştır. Sonrasında bunlara ek olarak üç üretece sahip olup serbest olmayan ve tek bağıntılı olan paraserbest Lie cebirine örnekler vermiştir (Baur, 1980).

Paraserbest Lie cebirleri ile ilgili yeterli türkçe kaynak olmayışı bu çalışmanın yapılmasında önemli bir rol oynamıştır. Bunun yanısıra serbest Lie cebirlerinin Çarpımları Lie cebirlerinde önemli bir yere sahip olduğundan bu çalışmada paraserbest Lie cebirinde Çarpımlar ile ilgili farklı çalışmalar derlenip incelenmiştir. Diğer yandan Lie cebirlerinin sahip olduğu birçok özelliğin X-by-Y

Lie cebirlerine taşınabilir olması nedeniyle bu sınıflardaki Lie cebirleri çalışılan önemli bir konu haline gelmiştir. Bu çalışmada paraserbest merkezi-by-metabelyen Lie cebiri ele alınmıştır. Böylece okuyuculara paraserbest Lie cebirleri ile ilgili temel bilgiler veren ve bu Lie cebirinin önemli bazı özelliklerini bir arada inceleme olanağı sunan bir türkçe kaynak sunulmuştur.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

3.1.1. Lie cebirleri

Tanım 3.1.1.1: A, bir F cismi üzerinde tanımlanan bir vektör uzayı olsun.

$$A \times A \rightarrow A \tag{3.1}$$

(3.1) de verilen dönüşüm; F cismi üzerinde bir bilineer dönüşüm olup, $\forall(x, y) \in A \times A$ için $x.y \in A$ şeklinde tanımlansın. A vektör uzayına, bu bilineer dönüşüm ile birlikte F üzerinde bir (asosyatif olmayan) cebir denir.

A bir cebir olsun $\forall x, y, z \in A$ için

$$x.(y.z) = (x.y).z \tag{3.2}$$

(3.2) koşulu sağlanırsa A'ya bir asosyatif cebir denir (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.1.1.2: L, bir F cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. L üzerinde $(x, y) \in L \times L$ için

$$[,]: L \times L \rightarrow L \tag{3.3}$$

(3.3) dönüşümü tanımlansın. Bu dönüşüm bir bilineer dönüşüm olup, aşağıdaki iki koşulu sağlarsa bu dönüşüme braket çarpım denir.

(L_1) Her $x \in L$ için $[x, x] = 0$ (3.4)

(L_2) Her $x, y, z \in L$ için

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \tag{3.5}$$

(3.5) eşitliğine Jacobi özdeşliği denir. L vektör uzayı, (3.4) ve (3.5) koşullarını sağlayan $[,]$ braket çarpımı ile birlikte bir Lie cebiri olarak adlandırılır (Velioğlu, 2013).

$(\boldsymbol{L_1})$ koşulunu ele alalım. Buradan

$$[x+y, x+y] = [x,x] + [x,y] + [y,x] + [y,y] = 0$$
$$\Rightarrow\ [x,y] = -[y,x] \qquad (3.6)$$

(3.6) eşitliği elde edilir. Bu da braket çarpımın antikomütatif olduğu anlamına gelir. Bu koşulu ($L_1{}'$) olarak adlandıralım. Tersine, ($L_1{}'$) koşulunda; $x = y$ alınırsa

$$[x,x] = -[x,x]$$
$$\Rightarrow 2[x,x] = 0 \qquad (3.7)$$

olur. (3.7) eşitliğine göre F cisminin karakteristiği 2'den farklı ise (L_1) sağlanır. O halde (L_1)ve ($L_1{}'$) eşdeğer olması için $KarF \neq 2$ olmalıdır. İkinci koşul (L_2)aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\big[x,[y,z]\big] + \big[y,[z,x]\big] + \big[z,[x,y]\big] = \big[x,[y,z]\big] - \big[[z,x],y\big] - \big[[x,y],z\big] = 0$$
$$\Rightarrow \big[x,[y,z]\big] = \big[[x,y],z\big] + \big[[z,x],y\big] \qquad (3.8)$$

(3.8) eşitliğindeki $\big[[z,x],y\big]$ ifadesi L'nin asosyatif olmasını önler. x, y, z keyfi olduğundan aşağıda verilen önermedeki ifadeyi elde edebiliriz:

Önerme 3.1.1.1: L nin bir asosyatif Lie cebiri olması için gerek ve yeter koşul $\big[[L,L],L\big] = 0$ olmasıdır (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.1.1.3: Bir F cismi üzerinde tanımlı L Lie cebirini ele alalım. L Lie cebirinin bir alt vektör uzayı K ile gösterilsin. Her bir $x, y \in K$ elemanı için $[x,y] \in K$ koşulu sağlanırsa K'ya L'nin bir Lie alt cebiri denir (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.1.1.4: L, bir F cismi üzerinde herhangi bir vektör uzayı olsun. $\forall x, y \in L$ için

$$[x,y] = 0 \qquad (3.9)$$

Yukarıdaki (3.9) koşulunu sağlayan bir Lie cebiri abelyen Lie cebiri olarak adlandırılır (Velioğlu, 2013).

Örnek 3.1.1.2: Kabul edelim ki; V, bir F cismi üzerinde herhangi bir vektör uzayı olsun. $g\ell(V)$'yi V'den V'ye bütün lineer dönüşümlerin kümesi olarak tanımlayalım. $g\ell(V)$; $x, y \in g\ell(V)$ için

$$[x,y] = x.y - y.x \qquad (3.10)$$

(3.10) koşulu ile tanımlanan Lie braket çarpımı ile birlikte $g\ell(V)$ bir Lie cebirdir (Velioğlu, 2013).

Örnek 3.1.1.3: $V = F^n$ vektör uzayı üzerinde $g\ell(V)$ Lie cebiri, $g\ell(n, F)$ şeklinde ifade edilsin. $g\ell(n, F)$ $n \times n$ tipinde bütün matrislerin vektör uzayıdır. Bu vektör uzayı $x, y \in g\ell(n, F)$ ve katsayıları F'den olmak üzere

$$[x, y] = x.y - y.x \qquad (3.11)$$

(3.11) komütatörüyle birlikte Lie braket çarpımı koşullarını sağlar (Velioğlu, 2013).

$\boldsymbol{L_1}$) $x = y\ için\ [x, x] = x.x - x.x = 0$ (3.12)

(3.12) eşitliği ile Lie braket çarpımının ilk koşulu sağlanmış oldu.

$\boldsymbol{L_2}$) $\big[x, [y, z]\big] + \big[y, [z, x]\big] + [z, [x, y]$

$= [x\ , (y.z - z.y)] + [y, (z.x - x.z)] + [z, (x.y - y.x)]$

$= x.(z.y - y.z) - (z.y - y.z).x + y.(z.x - x.z) - (z.x - x.z).y$

$+z.(x.y - y.x) - (x.y - y.x).z$

$= x.z.y - x.y.z - z.y.x + y.z.x + y.z.x - y.x.z - z.x.y + x.z.y + z.x.y -$

$z.y.x - x.y.z + y.x.z$ (3.13)

yapılan işlemlerle (3.13) eşitliği elde edilir. (3.13) eşitliğindeki negatif ve pozitif olan benzer terimler sadeleşince

$$\big[x, [y, z]\big] + \big[y, [z, x]\big] + \big[z, [x, y]\big] = 0 \qquad (3.14)$$

(3.14) eşitliği elde edilir. Yani Jacobi özdeşliği sağlanmış olur.

Böylece verilen $g\ell(n, F)$ vektör uzayı bu braket çarpımı ile birlikte bir Lie cebiridir.

Örnek 3.1.1.4: $S\ell(n, F)$, izi 0 olan $n \times n$ tipindeki bütün matrislerin kümesi ve

$$S\ell(n, F) \subseteq g\ell(n, F) \qquad (3.15)$$

(3.15) koşulu sağlanır. $x, y \in S\ell(n, F)$, olmak üzere x matrisinin izi $Tr(x)$ ile ifade edilsin. Buna göre

1) $Tr([x, y]) = Tr(x.y - y.x) = Tr(x.y) - Tr(y.x) = 0$

2) $Tr(x + y) = Tr(x) + Tr(y) = 0$

3) $Tr(a.x) = a.Tr(x) = 0$.

yukarıdaki 1,2 ve 3. özellikler sağlandığından $S\ell(n, F)$, $g\ell(n, F)$'in bir alt Lie cebiridir (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.1.1.5: F bir cisim ve L bu cisim üzerinde bir Lie cebiri olsun. V, F üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere $L \times V \to V$ fonksiyonu tanımlanmış olsun. Aşağıdakilerin sağlanması durumunda V'ye L üzerinde bir modül ya da L −modül denir (Velioğlu, 2013).

$\forall x, y \in L$ ve

$$L \times V \to V \qquad (3.16)$$
$$(x, v) \longrightarrow x.v$$

(3.16) dönüşümü ele alınsın. V vektör uzayından alınan her v, w elemanları ve $\forall \lambda, \mu \in F$ için

$\boldsymbol{M_1}$)$(\lambda x + \mu y).v = \lambda(x.v) + \mu(y.v)$

$\boldsymbol{M_2}$) $x.(\lambda v + \mu w) = \lambda(x.v) + \mu(x.w)$

$\boldsymbol{M_3}$) $[x, y].v = x(y.v) - y(x.v)$

dir.

Tanım 3.1.1.6: Kabul edelim ki; A, F üzerinde asosyatif olmayan bir cebir olsun.

$$\delta: A \to A \qquad (3.17)$$

(3.17) A üzerinde bir lineer dönüşüm olarak tanımlansın. Her $x, y \in A$ için

$$\delta(x, y) = \delta(x).y + x.\delta(y) \qquad (3.18)$$

(3.18) koşulu sağlanırsa δ'ya derivasyon denir.

A'nın tüm derivasyonlarının kümesi $Der(A)$ ile gösterilir (Velioğlu, 2013).

Önerme 3.1.1.3: $Der(A)$, $g\ell(A)$'nın bir Lie alt cebiridir (Velioğlu, 2013).

İspat: Tanımda $Der(A)$'nın elemanları lineer dönüşüm olduğu için $g\ell(A)$'nın bir alt vekör uzayı olduğu açıktır. Şimdi Lie alt cebiri olma şartını sağladığını gösterelim. Yani;$\forall \delta, \beta \in Der(A)$ için $[\delta, \beta] \in Der(A)$ olduğunu göstermeliyiz. Her $x, y \in A$ için

$$[\delta, \beta](xy) = [\delta, \beta](x)y + x[\delta, \beta](y) \qquad (3.19)$$

(3.19) eşitliği sağlanır mı?

$$[\delta, \beta](xy) = (\delta\beta - \beta\delta)(xy) = \delta\beta(xy) - \beta\delta(xy)$$
$$= \delta\big(\beta(xy)\big) - \beta(\delta(xy))$$
$$= \delta\big(\beta(x)y + x\beta(y)\big) - \beta\big(\delta(x)y + x\delta(y)\big)$$

$$= \delta(\beta(x)y) + \delta(x\beta(y)) \ - \beta(\delta(x)y) - \beta(x\delta(y))$$

$$= \delta(\beta(x))y + \beta(x)\delta(y) + \delta(x)\beta(y) + x\delta(\beta(y)) - \beta(\delta(x))y - \delta(x)\beta(y) - \beta(x)\delta(y) - x\beta(\delta(y)) \quad (3.20)$$

(3.20) eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$= \ \delta(\beta(x))y + x\delta(\beta(y)) - \beta(\delta(x))y - x\beta(\delta(y)) \quad (3.21)$$

(3.21) eşitliği elde edilir. Buradan,

$$= (\delta(\beta(x) - \beta\delta(x))y + \ x(\delta(\beta(y) - \beta(\delta(y)) = [\delta,\beta](x)y + x[\delta,\beta](y) \quad (3.22)$$

(3.22) elde edilir.

Tanım 3.1.1.7: I, bir L Lie cebirinin bir alt vektör uzayı olsun.$[L,I] \subseteq I$ koşulu sağlanırsa I'ya, L'nin bir ideali denir. Diğer bir ifadeyle; $a \in L$ve $x \in I$ için $[a,x] \in I$ oluyorsa I' ya L'nin bir ideali denir. $I \lhd L$ şeklinde gösterilir (Velioğlu, 2013).

Örnek 3.1.1.5: L bir Lie cebiri olsun. 0 ve L, her zaman L'nin idealleridir. Eğer L abelyen bir Lie cebir ise, L'nin her alt vektör uzayı bir idealdir (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.1.1.8: $\varphi: L_1 \ \rightarrow L_2$ lineer bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in L_1$ için

$$\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \quad (3.23)$$

(3.23) koşulunu sağlayan φ dönüşümüne bir Lie cebiri homomorfizmi denir (Akdoğan, 2014).

Tanım 3.1.1.9: L_1 ve L_2 Lie cebirleri üzerinde tanımlı $\varphi: L_1 \rightarrow L_2$ homomorfizmi ele alınsın. φ homomorfizminin çekirdeği

$$Ker\varphi = \{x \ \in \ L : \ \varphi(x) \ = \ 0\} \quad (3.24)$$

(3.24) eşitliği, görüntüsü ise

$$Im\varphi \ = \ \{\varphi(x) \ \in \ L : \ x \ \in \ L\,\} \quad (3.25)$$

(3.25) eşitliği ile tanımlanır (Akdoğan, 2014).

Örnek 3.1.1.6: Her $x, y \in L$ için adjoint homomorfizmi

$$ad: L \rightarrow gl(L) \quad (3.26)$$

$$x \rightarrow adx$$

(3.26) dönüşümü ile ifade edilir ve $(adx)y = [x, y]$ şeklinde tanımlanır (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.1.1.10: L_1 ve L_2 iki Lie cebiri ve $\varphi: L_1 \to L_2$ homomorfizmi ele alınsın. Eğer φ birebir ve örten bir dönüşüm ise φ homomorfizmine izomorfizm denir. Böylece L_1 ve L_2 Lie cebirleri izomorf cebirlerdir ve $L_1 \cong L_2$ şeklinde gösterilir. $L_1 = L_2$ ise φ ye bir otomorfizm denir (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.1.1.11: Bir L Lie cebiri ele alınsın.

$$L' = [L, L] = sp\{[x, y] : x, y \in L\} \tag{3.27}$$

(3.27) eşitliği ile verilen küme tarafından elde edilen alt cebir L Lie cebirinin komütatör alt cebiridir (Velioğlu, 2013).

Önerme 3.1.1.5: $\varphi: L \to L^{'}$ bir Lie cebiri homomorfizmi olsun. Bu Lie cebiri homomorfizminin çekirdeği L'nin bir idealidir. Ayrıca görüntü kümesi $L^{'}$ nün bir alt cebiridir.

Tersine herhangi bir $I \subseteq L$ ideali için ${L}/{I}$ bir Lie cebirdir. I, $L \to {L}/{I}$ bölüm cebirinin çekirdeğidir (Velioğlu, 2013).

İspat: $x \in Ker\varphi$ ve $a \in L$ olsun. O zaman φ homomorfizm olduğundan

$$\varphi([a, x]) = [\varphi(a), \varphi(x)] \tag{3.28}$$

(3.28) eşitliği sağlanır ve $x \in Ker\varphi$ olduğundan $\varphi(x) = 0$ olup

$$[\varphi(a), \varphi(x)] = [\varphi(a), 0] = 0 \tag{3.29}$$

(3.29) eşitliği elde edilir. Bu yüzden $[a, x] \in Ker\varphi$ olur. Tersine, $I \subset L$ bir ideal ve $a \in L$, $x \in I$ alınırsa

$$[(a + I), (x + I)] \subseteq [a, x] + [a, I] + [I, x] + [I, I] \subseteq [a, x] + I \tag{3.30}$$

sağlanmış olur. Böylece, ${L}/{I}$ üzerinde braket çarpımı iyi tanımlı olduğundan

$$[\varphi(a), \varphi(x)] = \varphi([a, x]) \tag{3.31}$$

ve

$$I = Ker\varphi \tag{3.32}$$

(3.31) ve (3.32) eşitlikleri elde edilir.

Örnek 3.1.1.7: L bir Lie cebiri olsun. L üzerinde bir Lie cebiri merkezi,

$$Z(L) = \{x \in L: \forall y \in L \ için [x, y] = 0\} \tag{3.33}$$

(3.33) eşitliği ile tanımlanır. $Z(L)$, L'nin bir idealidir. Ayrıca $Z(L)$,

$$ad: L \to g\ell(L) \tag{3.34}$$

(3.34) şeklindeki adjoint takdiminin çekirdeğidir (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.1.1.11: $I \lhd L$ olsun. $L/I = \{x + I: x \in L\}$ kümesi

$$(x + I) + (y + I) = (x + y) + I \tag{3.35}$$

$$[x + I, y + I] = [x, y] + I \tag{3.36}$$

(3.35) ve (3.36) eşitlikleri ile verilen toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte bir Lie cebirdir. Bu cebire L nin I ile bölüm cebiri denir (Velioğlu, 2013).

Teorem 3.1.1.1: L_1 ve L_2 iki Lie cebiri olmak üzere $\varphi: L_1 \to L_2$ bir Lie cebiri homomorfizmi olsun. O halde $Ker\varphi$ L_1 Lie cebirinin bir ideali ve $Im\varphi$ L_2 Lie cebirinin bir alt cebiri olur. Böylece

$$L_1/Ker\varphi \cong Im\varphi \tag{3.37}$$

(3.37) de verilen izomorf olma durumu elde edilir (Velioğlu, 2013).

Teorem 3.1.1.2: L bir Lie cebiri olmak üzere I ve J bu Lie cebirin idealleri olsun.

$$(I + J)/J \cong I/(I \cap J) \tag{3.38}$$

(3.38) şeklinde izomorf olma durumu elde edilir (Velioğlu, 2013).

Teorem 3.1.1.3: L bir Lie cebiri olmak üzere I ve J bu Lie cebirin idealleri olsun. Ayrıca $I \subseteq J$ olmak üzere J/I bölüm cebiri L/I bölüm cebirinin ideali olsun.

$$(L/I)/(J/I) \cong L/J \tag{3.39}$$

(3.39) izomorfluğu elde edilir (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.1.1.12: $L^{'}$ tarafından üretilen ve abelyen bölüm cebiri olarak bilinen cebir $L^{'}$ cebirinin en küçük idealidir. Bu ideal $L^{'}$'nün türetilmiş cebiri olarak adlandırılır. $L^{(2)}$ şeklinde ifade edilir.

Benzer biçimde devam edilirse $L^{(1)} = L^{'}$ ve $k \geq 2$ için

$$L^{(k)} = \left[L^{(k-1)}, L^{(k-1)}\right] \tag{3.40}$$

(3.40) ta verilen koşul ile oluşan

$$L, L^{(1)}, L^{(2)}, \dots \tag{3.41}$$

(3.41) şeklinde devam eden

$$L \supseteq L^{(1)} \supseteq L^{(2)} \supseteq \cdots \tag{3.42}$$

(3.42) serisi yani L nin türetilmiş serisi elde edilir. Eğer en az bir $m \geq 1$ sayısı için

$$L^{(m)} = 0 \tag{3.43}$$

(3.43) eşitliği sağlanırsa L Lie cebirine çözülebilir Lie cebiri denir. m sayısına L nin türetilme sınıfı denir. Ayrıca bu türetilmiş serinin terimleri

$$\delta_0(L) = L,\ \delta_1(L) = L^{(1)}, \dots, \delta_m(L) = L^{(m)} \tag{3.44}$$

(3.44) de verilen eşitlikler şeklinde de gösterilebilir (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.1.1.13: Bir L Lie cebiri ele alınsın. $L^1 = L'$ ve $k \geq 2$ için

$$L^k = [L, L^{k-1}] \tag{3.45}$$

(3.45) eşitliği ile tanımlansın. Bu durumda L nin alt kümelerinden oluşan

$$L \supseteq L^1 \supseteq L^2 \supseteq \cdots \tag{3.46}$$

(3.46) şeklinde ifade edilen L nin bir serisi elde edilir. Bu seri L nin alt merkezi serisi olarak adlandırılır. En az bir $m \geq 1$ sayısı için

$$L^m = 0 \tag{3.47}$$

(3.47) koşulu sağlanırsa L'ye nilpotent Lie cebiri denir. Buradaki m sayısına L nin nilpotentlik sınıfı denir. Ayrıca bu merkezi serinin elemanları

$$\gamma_0(L) = L,\ \gamma_1(L) = L^1,\ \gamma_2(L) = L^2, \dots\dots, \gamma_m(L) = L^m \tag{3.48}$$

(3.48) de verilen eşitlikler ile de gösterilebilir (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.1.1.14: L Lie cebirinin polisentral serisi, her $i = 1,2,3,\dots,k,..$ tamsayısı için $n_i \geq 1$ koşulunu sağlayan pozitif tamsayıların $\{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$ şeklinde verilen bir dizisine göre aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

L_{n_1} ; L Lie cebirinin alt merkezi serisinin n_1 –inci terimi

L_{n_1,n_2}; L Lie cebirinin alt merkezi serisinin n_2 −inci terimi

… … … … … …

şeklinde devam etmek üzere

$L_{n_1, n_2, \dots, n_i, n_{i+1}} = (L_{n_1, \dots, n_i})_{n_{i+1}}$; $L_{n_1, \dots, n_i}$ L Lie cebirinin alt merkezi serisinin n_{i+1}-inci terimi olsun.

Böylece

$$L \supseteq L_{n_1} \supseteq L_{n_1,n_2} \supseteq \cdots \supseteq L_{n_1,\dots,n_i} \supseteq L_{n_1,\dots,n_i,n_{i+1}} \supseteq \cdots \qquad (3.49)$$

(3.49) daki gibi belirlenen seri L Lie cebirinin polisentral serisi olarak adlandırılır. Eğer $L_{n_1,\dots,n_i,n_{i+1}} = \{0\}$ ve n_i elemanlarının hepsi verilen eşitliğini sağlayacak şekilde en küçük pozitif tam sayılar olarak seçilirse L ye $\{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$ dizisine göre polinilpotent Lie cebiri denir (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.1.1.15: Bir L Lie cebirini ele alalım. Eğer

i. $L/\gamma_2(L), L/\gamma_3(L), L/\gamma_4(L), \dots$ biçiminde verilen faktörler L Lie cebirinin alt merkezi dizisi olarak adlandırılır. L Lie cebirinin her alt merkezi serisine yine L Lie cebirinin bir alt merkezi dizisi karşılık gelir.

ii. L ve F cebirleri şeklinde herhangi iki Lie cebiri ele alınsın. Her $k \geq 1$ için

$$L/\gamma_k(L) \cong F/\gamma_k(F) \qquad (3.50)$$

(3.50) ifadesi L ve F Lie cebirlerinin aynı alt merkezi diziye sahip olduğunu ifade eder (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.1.1.16: L bir Lie cebiri olarak alınsın. Birim elemanlı ve birleşmeli $U(L)$ cebiri aşağıdaki koşuları sağlaması durumunda L cebirinin evrensel enveloping cebiri olarak adlandırılır.

1. L den $U(L)$ ye $\varepsilon: L \to U(L)$ şeklinde tanımlanan bir kanonik homomorfizm vardır.
2. Bir K cismi üzerinde alınan birim elemanlı her birleşmeli B cebiri ve $\Phi: L \to [B]$ olarak verilen homomorfizm için $\psi\varepsilon = \phi$ eşitliğini sağlayan bir tek $\psi: [U(L)] \to B$ homomorfizmi tanımlanabilir.

$KarF \neq 2$ olmak üzere; A, F cismi üzerinde tanımlanmış herhangi bir asosyatif cebir olsun. δ dönüşümü; A cebiri üzerinde tanımlanmış bir derivasyon olsun. Bir k sayısı için $\delta^k = 0$ koşulu sağlanırsa δ nilpotenttir denir. Nilpotent dönüşümler üzerindeki braket çarpımı, $x \; ve \; y$ nilpotent dönüşümler olmak üzere;

$$x.y - y.x \qquad (3.51)$$

şeklinde tanımlanır. $\delta: A \to A$ bir derivasyon (aynı zamanda $Der(A) \subseteq g\ell(A)$olduğundan lineer bir dönüşüm) olsun ve

$$\exp(\delta) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\delta^i}{i!} \tag{3.52}$$

(3.52) eşitliği ile tanımlansın. Biz exp(δ)'nın A da bir otomorfizm olduğunu iddia ediyoruz. expδ'nın lineer olduğu açıktır. $\exp(\delta)$ A üzerinde lineer olup otomorfizm koşullarını sağlar. $\exp(\delta)$ $1+n$ formunda olduğundan n.dereceden nilpotenttir. Böylece, tersine $1-n+n^2-\cdots$ ile birlikte bir sonlu toplamdır (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.1.1.17: Bir Lie cebiri aşağıdaki denk koşulları sağlıyorsa bu Lie cebiri Hopfian olarak adlandırılır (Velioğlu, 2013).

i. Lie cebirinin kendisi ve sıfır tarafından oluşturulan bölüm cebirleri dışındaki bölüm cebirleri öz bölüm cebirleri olmak üzere; bu Lie cebiri bu öz bölüm cebirlerinin hiçbirine izomorf değildir.

ii. Bu Lie cebiri üzerinde tanımlanan her örten endomorfizm aynı zamanda bir otomorfizmdir.

Tanım 3.1.1.18: L, K cismi üzerinde verilmiş olan bir Lie cebiri olsun. I, L nin bir ideali olarak verilsin. $I \cap J = 0$ olup $I \oplus J = L$ ve $J \cong L/I$ koşullarını sağlayan L nin bir J altcebiri varsa L Lie cebiri projektiftir denir (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.1.1.19: $(R_\alpha)_{\alpha\in I}$, boş kümeden farklı olup bir K halkası üzerindeki cebirlerin bir ailesi olsun. Kartezyen çarpım, elemanları, $f(\alpha) \in R_\alpha$ olacak şekilde, $f: I \longrightarrow \cup_{\alpha\in I} R_\alpha$ fonksiyonları olan cebire denir. Kartezyen çarpım, $R = \otimes R_\alpha$ şeklinde gösterilir (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.1.1.20: $(G_{\boldsymbol{\alpha}})_{\boldsymbol{\alpha\in I}}$ ailesi, bir K cebiri üzerinde tanımlı olan Lie cebirlerin bir ailesi olsun. Her $\alpha \in I$ için (X_α/R_α) kümesi, G_α cebirler ailesinin bir sunumu olarak verilsin öyle ki $\alpha \neq \beta$ olmak üzere $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$ eşitliği sağlanır.

$$X = \cup_\alpha X_\alpha \text{ ve } R = \cup_\alpha R_\alpha \tag{3.53}$$

(3.53) eşitlikleri sağlansın. O halde $G = (X/R)$ şeklinde tanımlanan sunum $(G_{\boldsymbol{\alpha}})_{\boldsymbol{\alpha\in I}}$ cebir ailesinin serbest çarpımı olarak adlandırılır ve $G = \prod_{\alpha\in I}{}^{*} G_\alpha$ şeklinde ifade edilir. $I = \{1,2,\dots,n\}$ şeklinde sonlu bir küme olmak üzere

$$G = G_1 * G_2 * \dots * G_n \tag{3.54}$$

(3.54) biçiminde ifade edilir. O zaman herhangi bir $\alpha \in I$ elemanı için bir $I_\alpha: G_\alpha \to G$ homomorfizmi mevcuttur öyle ki yukarıda verilen bu homomorfizm $X_\alpha \to X$ şeklinde tanımlanan birim dönüşümün bir genişlemesini ifade eder (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.1.1.21: $(L_\alpha)_{\alpha\in I}$, Lie cebirlerinin bir ailesi ve $\bigoplus L_\alpha$ bu Lie cebirlerinin direkt toplamı olsun. $e \in L_\alpha$ olmak üzere

$$\chi: \prod^*_{\alpha\in I} L_\alpha \to \bigoplus L_\alpha \qquad (3.55)$$
$$\chi(e) \to e$$

(3.55) şeklinde bir epimorfizm tanımlansın. χ epimorfizminin çekirdeğine $(L_\alpha)_{\alpha\in I}$ ailesinin kartezyen altcebiri denir (Akdoğan, 2014).

Tanım 3.1.1.22: $(R_\alpha)_{\alpha\in I}$, boş kümeden farklı olmak üzere bir K halkası üzerindeki cebirlerin bir ailesi ve $R = \bigotimes R_\alpha$ kartezyen çarpım olsun. $f \in R$ için f fonksiyonunun $suppf$ desteği, $f(\alpha) \neq 0$ koşulunu sağlayan bütün $\alpha \in I$ indislerinin kümesidir. Elemanları sonlu desteğe sahip fonksiyonlar olan S kümesi; R $(R_\alpha)_{\alpha\in I}$ ailesinin kartezyen çarpımı olmak üzere, R nin bir alt cebiridir. Bu alt cebire $(R_\alpha)_{\alpha\in I}$ ailesinin direkt çarpımı denir. $S = \prod_{\alpha\in I} R_\alpha$ şeklinde ifade edilir (Akdoğan, 2014).

Tanım 3.1.1.23: F de L tarafından tanımlann verbal altcebir,

$$V = \{u(x,y): u(g,h) = 0, \forall g,h \in L\} \qquad (3.56)$$

(3.56) da verilen küme tarafından üretilen F'nin altcebirine denir. Bu cebiri $V(L)$ ile göstereceğiz (Velioğlu, 2013).

3.1.2. Serbest lie cebirleri ve hall bazları

Tanım 3.1.2.1: X kümesi boş kümeden farklı olsun ve bir F Lie cebiri için $i: X \to F$ şeklinde bir dönüşüm tanımlansın. Ele alınan her A Lie cebiri ve $f: X \to A$ dönüşümü için $f = g \; o \; i$ olacak şekilde bir tek $g: F \to A$ şeklinde tanımlanan Lie cebiri homomorfizmi varsa F Lie cebiri X üzerinde bir serbest Lie cebiridir veya F ye X tarafından üretilen serbest Lie cebiri denir. Herhangi bir X kümesi sadece bir tek serbest Lie cebir üretebilir ve bu Lie cebir $F(X) = F$ şeklinde ifade edilir.

X kümesi tarafından üretilen bir serbest Lie cebiri $F(X)$ olmak üzere X kümesi $F(X)$ serbest Lie cebirinin serbest üreteç kümesi olarak adlandırılır (Akdoğan, 2014)..

Tanım 3.1.2.2: K cismi üzerinde alınan bir F serbest Lie cebiri ve serbest üreteç kümesi olan X için bu serbest Lie cebirinin Hall kümeleri

1. X kümesine bir tam sıralama verelim ve $H_1 = X$ olsun.
2. $H_2 = \{(xy): x, y \in H_1, x, y \in X, x > y\}$ olsun.
3. $m = 1,2, \dots, n-1$ için H_m kümesi tanımlanmış ve uzunluğu koruma özelliğine sahip bir sıralama verilmiş olsun. Yani u_1, u_2, v_1, v_2 elemanları X üzerinde asosyatif olmayan monomialler olmak üzere $u = (u_1 u_2)$ ve $v = (v_1 v_2)$ için $\ell(u) < \ell(v)$ ise $u < v$ olsun. $\ell(u) = \ell(v)$ iken $u_1 < v_1$ veya $u_1 = u_2$ ve $u_2 < v_2$ ise $u < v$ olsun. $n \geq 3$ için

$$H_n = \{((xy)z): x, y, z, (xy) \in H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_{n-1}, x > y, (xy) > z, y \leq z\} \quad (3.57)$$

(3.57) şeklinde tanımlanır (Akdoğan, 2014).

Teorem 3.1.2.1: Boş olmayan bir X kümesi tarafından üretilen bir F serbest Lie cebiri ve $n \geq 1$ için H_n, bu serbest Lie cebirinin Hall kümesi olarak tanımlansın. O zaman $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ kümesi F serbest Lie cebirinin bir bazıdır. $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ bazına F nin Hall bazı denir (Akdoğan, 2014).

Tanım 3.1.2.3: L, X kümesi tarafından üretilen bir Lie cebiri olsun (Velioğlu, 2013).

a. Eğer $L \cong F/\gamma_n(F)$ ifadesini sağlayacak şekilde X tarafından üretilen bir F serbest Lie cebiri varsa L Lie cebrine $n-$inci dereceden serbest nilpotent Lie cebiri şeklinde adlandırılır. Eğer $L \cong F/\gamma_2(F)$ ise L Lie cebirine serbest abelyen Lie cebiri denir.

b. Eğer $L/F^{(m)}$ olacak şekilde X tarafından üretilen bir F serbest Lie cebiri varsa L Lie cebiri m $-$inci dereceden serbest çözülebilirdir denir.

c. Eğer $L \cong F/F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ ifadesi sağlanacak şekilde X tarafından üretilen serbest bir F Lie cebiri varsa L Lie cebirine $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ dizisine göre serbest polinilpotent Lie cebiri olarak adlandırılır. Eğer $L \cong F/F_{2,2}$ ise L Lie cebirine serbest metabelyen Lie cebiri denir.

3.2. Yöntem

3.2.1. Paraserbest lie cebirleri

Tanım 3.2.1.1: P izomorfizm altında değişmeyen bir Lie cebiri özelliği ve L herhangi bir Lie cebiri olsun. I L'nin herhangi bir ideali olmak üzere her $0 \neq x \in L$ için $x \notin I$ ve L/I bölüm cebiri P özelliğine sahip ise L'ye rezidülü$-P$ dir denir. Örneğin; bir L Lie cebiri ele alınsın. Herhangi bir $0 \neq g \in L$ için L Lie cebirinden bir N nilpotent Lie cebirine $\psi_g(g) \neq 0$ olacak şekilde bir ψ_g homomorfizmi varsa L Lie cebirine rezidülü nilpotent denir. Bu tanıma denk olarak verilen aşağıdaki tanım da kullanılabilir:

Bir L Lie cebirinin alt merkezi serisinin terimlerinin arakesiti sıfıra eşit ise L Lie cebiri rezidülü nilpotent Lie cebiri olarak adlandırılır. Gerçekten $\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(L) = \{0\}$ sağlanıyorsa herhangi bir $0 \neq g \in L$ elemanı için g elemanını içermeyen bir n tamsayısı için $\gamma_n(L)$ terimi bulabiliriz (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.2.1.2: F, X tarafından üretilen serbest bir Lie cebiri olsun. Bir P Lie cebiri için eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa P paraserbest bir Lie cebirdir denir.

i. P rezidülü nilpotenttir.

ii. Her $n \geq 1$ için

$$P/\gamma_n(P) \cong F/\gamma_n(F) \tag{3.58}$$

(3.58) sağlanır. Yani P ile F aynı alt merkezi diziye sahiptir (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.2.1.3: P bir paraserbest Lie cebiri ve bir F serbest Lie cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahip olsun. P paraserbest Lie cebirinin bir Lie alt cebiri H olarak verilsin. Eğer her $n \geq 1$ tam sayısı için,

$$H/\gamma_n(H) \cong K/\gamma_n(K) \tag{3.59}$$

(3.59) ifadesini sağlayan F serbest Lie cebirinin bir K alt cebiri mevcut ise H Lie cebiri paraserbest Lie alt cebiri olarak adlandırılır (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.2.1.4: Bir F serbest Lie cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahip bir P paraserbest Lie cebiri ele alalım. P paraserbest Lie cebirinin bir Lie ideali I olsun. Her n tamsayısı için

$$I/\gamma_n(I) \cong J/\gamma_n(J) \tag{3.60}$$

(3.60) ifadesi sağlanacak şekilde şekilde F serbest Lie cebirinin bir J ideali mevcut ise I ideali paraserbest ideal olarak adlandırılır (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.2.1.5: Y, bir paraserbest L Lie cebirinin alt kümesi olsun. Eğer Y, L'yi $\gamma_2(L)$ modülüne göre serbestçe üretiyorsa, o zaman Y, L'nin paraüreteç kümesidir denir (Velioğlu, 2013).

Not 3.2.1.1:L, bir Lie cebiri olmak üzere $\Delta_w(L)$, L/J nilpotent olacak şekilde L'nin J ideallerinin bir kesişimi olarak tanımlanır (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.2.1.6: P bir paraserbest Lie cebiri olsun.

$$P^{(0)} = P,\ P^{(1)} = [P,P],\ P^{(2)} = \left[P^{(1)},P^{(1)}\right],\ P^{(3)} = \left[P^{(2)},P^{(2)}\right], \dots,$$
$$P^{(k)} = [P^{(k-1)},P^{(k-1)}], \dots \tag{3.61}$$

(3.61) olmak üzere,

$$P = P(0) \supset P(1) \supset P(2) \supset \cdots \supset P(k) \supset \cdots \tag{3.62}$$

(3.62) şeklinde tanımlanan seri P paraserbest Lie cebirinin türetilmiş serisi olmak üzere herhangi bir k tam sayısı için $P^{(k-1)}/P^{(k)}$ şeklinde verilen ifade P paraserbest Lie cebirinin bir faktörüdür (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.2.1.7: Bazı $m \geq 1$ tam sayıları için $P^{(m)} = \{0\}$ eşitliği sağlanırsa P paraserbest Lie cebiri çözülebilir paraserbest Lie cebiri olarak adlandırılır. Buradaki m tam sayısına P paraserbest Lie cebirinin türetilme uzunluğu denir (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.2.1.8: P bir paraserbest Lie cebiri olsun.

$$\gamma_1(P) = P,\ \gamma_2(P) = [P,P],\ \gamma_3(P) = [P,\gamma_2(P)], \dots,\ \gamma_k(P) = [P,\gamma_{k-1}(P)], \dots \tag{3.63}$$

(3.63) olmak üzere,

$$P = \gamma_{1(P)} \supset \gamma_2(P) \supset \gamma_3(P) \supset \cdots \supset \gamma_k(P) \supset \cdots \tag{3.64}$$

(3.64) serisine P paraserbest Lie cebirinin alt merkezi serisi denir. Bu serinin k −yıncı terimi bazen P_k şeklinde de gösterilebilir (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.2.1.9: En az bir k tam sayısı için $\gamma_k(P) = \{0\}$ ise P paraserbest Lie cebirine nilpotent paraserbest Lie cebiri denir. $\gamma_k(P) = \{0\}$ eşitliğini sağlayacak şekilde seçilen en küçük pozitif k tam sayısına P paraserbest Lie cebirinin nilpotentlik derecesi denir (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.2.1.10: $i = 1,2,3, \dots, k, \dots$ için $n \geq 1$ olmak üzere pozitif tamsayıların bir P paraserbest Lie cebirinin polisentral serisi $\{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$ dizisi ile birlikte aşağıdaki gibi ifade edilir:

P_{n_1} ; P paraserbest Lie cebirinin alt merkezi serisinin n_1 –inci terimi

P_{n_1,n_2}; P_{n_1} paraserbest Lie cebirinin alt merkezi serisinin n_2 –inci terimi

$P = (P_{n_1,\dots,n_i})_{n_{i+1}}$; $P_{n_1,\dots,n_i}$ paraserbest Lie cebirinin alt merkezi serisinin n_{i+1}-inci terimi olsun. Böylece

$$P \supseteq P_{n_1} \supseteq P_{n_1,n_2} \supseteq \cdots \supseteq P_{n_1,\dots,n_i} \supseteq P_{n_1,\dots,n_i,n_{i+1}} \supseteq \cdots \qquad (3.65)$$

(3.65) serisine P paraserbest Lie cebirinin polisentral serisi denir. Eğer $P_{n_1,\dots,n_i,n_{i+1}} = \{0\}$ ve $n_1, n_2, \dots, n_k$ sayıları bu eşitlik sağlanacak şekildeki en küçük pozitif tamsayılar ise P paraserbest Lie cebirine $\{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$ dizisine göre bir polinilpotent paraserbest Lie cebiri denir (Velioğlu, 2013).

Tanım 3.2.1.11: P_1 ve P_2 biçiminde iki paraserbest Lie cebiri ele alınsın.

$$P = \{(p_1, p_2): p_1 \in P_1, p_2 \in P_2\} \qquad (3.66)$$

(3.66) kümesi P_1 ve P_2 nin vektör uzayı olarak direkt toplamı olsun. P üzerinde

$$[(p_1, p_2), (t_1, t_2)] = [p_1, t_1], [p_2, t_2] \qquad (3.67)$$

şeklinde ifade edilen çarpım tanımlansın. (3.67) eşitliği ile verilen bu çarpımla birlikte P bir Lie cebiridir. Bu durumda P paraserbest Lie cebirine P_1 ve P_2 paraserbest Lie cebirlerinin direkt toplamı denir. Buna ek olarak $P = P_1 \oplus P_2$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $P = P_1 \oplus P_2$ olması durumunda aşağıdakiler doğrudur (Velioğlu, 2013).

i) $P' = P_1' \oplus P_2'$

ii) $p \in P$ ise $p = p_1 + p_2$, $(p_1 \in P_1 \; ve \; p_2 \in P_2)$ olup $P = P_1 + P_2$ dir.

iii) $P_1 \cap P_2 = \{0\}$ dır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Paraserbest Lie Cebirlerinin Çarpımları

Lie cebirlerinin herhangi bir M varyetesi için $\mathrm{i} = 1,2,\ldots., \mathrm{m}$ olmak üzere L_i Lie cebirlerinin M-çarpımı

$$M\prod_{i=1}^{m} L_i \tag{4.1}$$

(4.1) şeklinde gösterilir. D, L_i Lie cebirlerinin $\prod_{i\in I}^{*} L_i$ serbest çarpımın kartezyen altcebiri yani $\prod_{i\in I}^{*} L_i$ den $\bigoplus L_i$ direkt toplamına olan kanonik homomorfizmin çekirdeği ve V verbal altcebir olmak üzere L_i Lie cebirlerinin M-çarpımı

$$M\prod_{i=1}^{m} L_i = \left(\prod_{i\in I}^{*} L_i\right)/(D\cap V) \tag{4.2}$$

(4.2) olarak tanımlanır (Akdoğan, 2014).

Şimdi M-çarpımın farklı tiplerini inceleyeceğiz.

4.1.1. Paraserbest lie cebirlerinin çözülebilir çarpımı

Tanım 4.1.1.1: $L_1 * L_2$, L_1 ve L_2 Lie cebirlerinin serbest çarpımı ve D , $L_1 * L_2$ nin kartezyen altcebiri olsun. L_1 ve L_2 nin n.sınıftan çözülebilir çarpımı $L_1 *_{sol}^{n} L_2$ ile ifade edilir ve

$$L_1 *_{sol}^{n} L_2 = (L_1 * L_2)/(\delta^n(L_1 * L_2)\cap D) \tag{4.3}$$

(4.3) şeklinde tanımlanır (Velioğlu, 2019).

Teorem 4.1.1.1: P_1 ve P_2 iki paraserbest Lie cebiri olsun. O halde $P_1 * P_2$ de paraserbesttir.

İspat: İspatı için bakınız (Baur, 1978).

Teorem 4.1.1.2: P_1 ve P_2 iki paraserbest Lie cebiri olsun. O zaman $P_1 *_{sol}^{n} P_2$ de paraserbesttir (Velioğlu, 2019).

İspat: $P = P_1 * P_2$ olsun. Teorem 3.1.1 den P paraserbesttir. İlk olarak

$$P_1 *_{sol}^{n} P_2 = (P_1 * P_2)/(\delta^n(P_1 * P_2)\cap D) \tag{4.4}$$

(4.4) ifadesinin rezidülü nilpotent olduğunu göstermek istiyoruz.

$$u \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \gamma_k(P/(\delta^n(P) \cap D))$$

olsun. O zaman her pozitif k tamsayısı için ;

$$u \in \gamma_k(P/(\delta^n(P) \cap D)) = (\gamma_k(P) + (\delta^n(P) \cap D)/(\delta^n(P) \cap D) \quad (4.5)$$

(4.5) eşitliğinin sağlandığı göz önüne alınsın. $\alpha \in (\gamma_k(P) + (\delta^n(P) \cap D)$ olsun. Böylece $u = \alpha + (\delta^n(P) \cap D)$ olur. O halde

$$\alpha \in \cap_{n=1}^{\infty}(\gamma_k(P) + (\delta^n(P) \cap D) \quad (4.6)$$

(4.6) olduğu açıktır. P rezidülü nilpotent olduğundan $\alpha \in \delta^n(P) \cap D$ olur. Bu yüzden $u = \delta^n(P) \cap D$ olur. Bu nedenle

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_k(P/(\delta^n(P) \cap D)) = \{0\}$$

dır. Yani $P_1 *_{sol}^{n} P_2$ rezidülü nilpotenttir. Şimdi $P_1 *_{sol}^{n} P_2$ çözülebilir çarpımı ile aynı alt merkezi diziye sahip bir serbest Lie cebirinin varlığını göstermek istiyoruz.

$$(P/(\delta^n(P) \cap D)/\gamma_k(P/(\delta^n(P) \cap D) \cong (P/(\delta^n(P) \cap D))/(\gamma_k(P)/(\delta^n(P) \cap D))$$

$$(P/(\delta^n(P) \cap D)/\gamma_k(P/(\delta^n(P) \cap D) \cong P/\gamma_k(P) \quad (4.7)$$

(4.7) ifadesinin sağlandığı göz önünde bulundurulsun. P bir paraserbest Lie cebiri olarak seçildiğinden

$$P/\gamma_k(P) \cong F/\gamma_k(F) \quad (4.8)$$

(4.8) koşulunu sağlayan bir F serbest Lie cebiri mevcuttur. Buradan

$$(P/(\delta^n(P) \cap D)/\gamma_k(P/(\delta^n(P) \cap D) \cong F/\gamma_k(F) \quad (4.9)$$

(4.9) elde edilir. Yani $P_1 *_{sol}^{n} P_2$ paraserbesttir.

4.1.1.1. Paraserbest lie cebirlerinin çözülebilir çarpımının rezidülü özellikleri

P_1 ve P_2 n.sınıftan çözülebilir iki paraserbest Lie cebiri olsun. O halde

$$\delta^n(P_1 * P_2) \cap D = \delta^n(P_1 * P_2) \quad (4.10)$$

(4.10) olur.Buradan

$$P_1 *_{sol}^{n} P_2 = (P_1 * P_2)/\delta^n(P_1 * P_2) \quad (4.11)$$

(4.11) ifadesi elde edilir. Teorem 4.1.1.2 den $P_1 *_{sol}^{n} P_2$ paraserbest bir Lie cebirdir. P_1 ve P_2 çözülebilir olduğundan

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \delta^n(P_1 *_{sol}^n \ P_2) = \{0\}$$

olur. Yani $P_1 *_{sol}^n P_2$ rezidülü çözülebilirdir. Diğer yandan Teorem 4.1.1.2 den $P_1 *_{sol}^n P_2$'nin rezidülü nilpotent olduğu görülebilir (Velioğlu, 2019).

Şimdi $P_1 *_{sol}^n P_2$'nin diğer rezidülü özelliğini incelemek istiyoruz.

Lemma 4.1.1.1.1: F serbest Lie cebiri, bir Y kümesi tarafından $\gamma_2(F)$ modülüne göre serbestçe üretilsin. O halde $n = 2,3, \ldots$ için Y F'yi $\gamma_n(F)$ modülüne göre de serbestçe üretir.

İspat: İspatı için bakınız (Bokut ve Kukin, 1994).

Teorem 4.1.1.1.1: Bir paraserbest Lie cebiri sonlu ranklı rezidülü paraserbesttir.

İspat: İspatı için bakınız (Baur, 1978).

Teorem 4.1.1.1.2: P_1 ve P_2 n.sınıftan çözülebilir iki paraserbest Lie cebiri olsun. P_1 ve P_2 nin her biri birden fazla eleman tarafından üretilsin ve $M = P_1 *_{sol}^n P_2$ olsun. O halde M, 2-ranklı rezidülü paraserbesttir (Velioğlu, 2019).

İspat: P_1 ve P_2 çözülebilir iki paraserbest Lie cebiri olduğundan bu iki paraserbest Lie cebirin serbest çarpımı olan M de çözülebilirdir. Bu paraserbest Lie cebirleri birden fazla eleman tarafından üretiliyor olduğundan M serbest çarpımı da birden fazla eleman tarafından üretilir.

Teorem 4.1.1.2'den M paraserbest bir Lie cebirdir. Şimdi M'nin rezidülü paraserbest olduğunu göstermek istiyoruz. Teorem 4.1.1.1.1'den M sonlu n-ranklıdır $(n \geq 2)$. $a \notin M$ olsun. M paraserbest olduğundan bir $k \geq 2$ tamsayısı için $a \notin \gamma_k(M)$ vardır. $M/\gamma_k(M)$'nin serbest çözülebilir ve nilpotent olduğu görülebilir. N, M'nin $a \notin N$ ve $\gamma_k(M) \subseteq N$ özelliklerini sağlayan bir altcebiri olsun. O halde $(M/\gamma_k(M))/(N/\gamma_k(M))$ bölüm cebiri 2-ranklı serbesttir. Serbest Lie cebirlerinin serbest projektif olduğu bilinmektedir. Bu nedenle $M/\gamma_k(M)$'nin bir $N/\gamma_k(M)$ ideali için

$$(M/\gamma_k(M)) \cong (N/\gamma_k(M)) \oplus (L/\gamma_k(M)),$$
$$(N/\gamma_k(M)) \cap (L/\gamma_k(M)) = 0 \qquad (4.12)$$

ve

$$L/\gamma_k(M) \cong (M/\gamma_k(M))/(N/\gamma_k(M)) \tag{4.13}$$

(4.12) ve (4.13) özelliklerini sağlayan $M/\gamma_k(M)$'nin bir $L/\gamma_k(M)$ altcebiri vardır. Şimdi $M/\gamma_2(M)$'yi ele alalım:

$$M/\gamma_2(M) \cong (M/\gamma_k(M))/\gamma_2(M/\gamma_k(M)) \tag{4.14}$$

(4.14) ifadesinin sağlandığı dikkate alınsın.

$$(M/\gamma_k(M)) \cong (N/\gamma_k(M)) \oplus (L/\gamma_k(M)) \tag{4.15}$$

(4.15) olduğundan

$$(M/\gamma_k(M))/\gamma_2(M/\gamma_k(M))$$
$$= ((N/\gamma_k(M)) \oplus (L/\gamma_k(M)))/\gamma_2((N/\gamma_k(M)) \oplus (L/\gamma_k(M))) \tag{4.16}$$

(4.16) eşitliği elde edilir. Şimdi $\gamma_2((N/\gamma_k(M)) \oplus (L/\gamma_k(M)))$ ifadesini incelemek istiyoruz.

$$\begin{aligned} &\gamma_2((N/\gamma_k(M)) \oplus (L/\gamma_k(M))) \\ &= [(N/\gamma_k(M)) \oplus (L/\gamma_k(M)), (N/\gamma_k(M)) \oplus (L/\gamma_k(M))] \\ &= ([N,N] \oplus [N,L] \oplus [L,L])/\gamma_k(M) \\ &= (\gamma_2(N) \oplus [N,L] \oplus \gamma_2(L))/\gamma_k(M) \end{aligned} \tag{4.17}$$

(4.17) elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} &((N/\gamma_k(M)) \oplus (L/\gamma_k(M)))/\gamma_2((N/\gamma_k(M)) \oplus (L/\gamma_k(M))) \\ &= ((N/\gamma_k(M)) \oplus (L/\gamma_k(M)))/((\gamma_2(N) \oplus [N,L] \oplus \gamma_2(L))/\gamma_k(M)) \\ &= ((N/\gamma_k(M))/((\gamma_2(N) \oplus [N,L] \oplus \gamma_k(M))/\gamma_k(M))) \\ &\oplus ((L/\gamma_k(M))/((\gamma_2(L) \oplus \gamma_k(M))/\gamma_k(M))) \\ &= (N/(\gamma_2(N) \oplus [N,L] \oplus \gamma_k(M))) \oplus (L/(\gamma_2(L) \oplus \gamma_k(M))) \end{aligned} \tag{4.18}$$

(4.18) olur. Böylece

$$M/\gamma_2(M) = (N/(\gamma_2(N) \oplus [N,L] \oplus \gamma_k(M))) \oplus (L/(\gamma_2(L) \oplus \gamma_k(M))) \tag{4.19}$$

(4.19) eşitliği elde edilir. $M/\gamma_2(M)$ bölüm cebirinin n-ranklı serbest abelyen olduğu kolayca görülür. Diğer yandan L'nin seçiminden dolayı $L/(\gamma_2(L) \oplus \gamma_k(M))$ bölüm cebiri 2-ranklı serbest abelyen bir cebirdir. Buradan $N/(\gamma_2(N) \oplus [N,L] \oplus \gamma_k(M))$ bölüm cebiri (n-2)-ranklı serbest abelyendir. $a_1, a_2, \dots, a_{n-2} \in N$ ve $a_{n-1}, a_n \in L$ olsun, öyle ki $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ elemanları L'yi $\gamma_2(L) \oplus \gamma_k(M)$ modülüne göre serbestçe üretsin. Hopfianlık dan $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemanlarının M'yi $\gamma_2(M)$ modülüne göre serbestçe ürettiği görülür (Evans, T., 1969).

T, $a_1, a_2, \dots, a_{n-2}$ elemanları tarafından üretilen bir ideal olsun. Yine Hopfianlık dan $N = T + \gamma_k(M)$ eşitliğini elde ederiz. Şimdi

$$J/T = \bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(M/T)$$

eşitliğini ele alalım. Biz $a \notin J$ ve M/J'nin paraserbest olduğunu göstermek istiyoruz. $a \notin N$ olduğundan $a \notin J$ olduğu açıktır. Bu nedenle M/J'nin paraserbest olduğunu göstermek yeterlidir. J nin tanımından M/J cebiri rezidülü nilpotenttir. Lemma 4.1.1.1 den $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemanları $\gamma_2(M)$ modülüne göre M'yi serbestçe üretirse M'yi $\gamma_n(M)$ modülüne göre de serbestçe üretirler. O halde $M/(T + \gamma_k(M))$ cebiri 2-ranklı serbest çözülebilirdir. J , M/J rezidülü nilpotent olacak şekilde T'yi kapsayan M'nin en küçük ideali olarak seçildi. Bu nedenle $J \subseteq (T + \gamma_k(M))$ dır. Buradan

$$M/(T + \gamma_k(M)) = (M/J)/(T + \gamma_k(M)) = (M/J)/\gamma_k(M/J) \qquad (4.20)$$

(4.20) eşitliğini elde ederiz. $M/(T + \gamma_k(M))$ serbest olup böylece $(M/J)/\gamma_k(M/J)$ serbesttir. Bu nedenle M/J paraserbesttir ve M rezidülü paraserbesttir.

4.1.2. Paraserbest lie cebirlerinin nilpotent çarpımı

Tanım 4.1.2.1: L_1 ve L_2 iki Lie cebiri ve D, L_1 ve L_2 nin serbest çarpımının kartezyen altcebiri olsun. L_1 ve L_2 nin n.sınıftan Nilpotent çarpımı $L_1 *_{nil}^{n} L_2$ şeklinde gösterilir ve

$$L_1 *_{nil}^{n} L_2 = (L_1 * L_2)/(\gamma_n(L_1 * L_2) \cap D) \qquad (4.21)$$

(4.21) ile tanımlanır (Velioğlu, 2020).

Önerme 4.1.2.1: P_1 ve P_2 iki paraserbest Lie cebirleri, sırasıyla X ve Y kümeleri tarafından serbestçe üretilen iki serbest Lie cebiriyle aynı alt merkezi diziye sahiptir. O zaman $P_1 * P_2$ bir paraserbest Lie cebirdir ve $X \cup Y$ tarafından serbestçe üretilen bir serbest Lie cebiriyle aynı alt merkezi diziye sahiptir.

İspat: İspatı için bakınız (Baur, 1978).

Lemma 4.1.2.1: P_1 ve P_2 iki paraserbest Lie cebiri olmak üzere P_1 ve P_2 nin n.sınıftan nilpotent çarpımı paraserbesttir (Velioğlu, 2020).

İspat: P_1 ve P_2 paraserbest Lie cebirleri göz önüne alınsın. Önerme 3.1.2.1'den $P = P_1 * P_2$ serbest çarpımı paraserbesttir. Şimdi

$$u \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(P/(\gamma_n(P) \cap D))$$

olsun. O halde her n için,

$u \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(P/(\gamma_n(P) \cap D)) = (\gamma_n(P) + (\gamma_n(P) \cap D))/(\gamma_n(P) \cap D)$ (4.22)

(4.22) eşitliği sağlanır. Varsayalım ki $u = a + (\gamma_n(P) \cap D)$ olacak şekilde $a \in \gamma_n(P) + (\gamma_n(P) \cap D)$ ele alınsın. Böylece

$$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (\gamma_n(P) + (\gamma_n(P) \cap D))$$

dir. P rezidülü nilpotent olduğundan o zaman $a \in (\gamma_n(P) \cap D)$ ve bu yüzden $u = (\gamma_n(P) \cap D)$ dir. Böylece

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(P/(\gamma_n(P) \cap D)) = \{0\}$ (4.23)

(4.23) elde ederiz. Yani $P_1 *_{nil}^{n} P_2$ rezidülü nilpotenttir. Şimdi $P/(\gamma_n(P) \cap D)$ bölüm cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahip bir serbest Lie cebirinin varlığını göstermek istiyoruz. Şimdi;

$(\gamma_n(P) + (\gamma_n(P) \cap D))/\gamma_n(P/(\gamma_n(P) \cap D)) \cong \gamma_n(P)/(\gamma_n(P) \cap D)$ (4.24)

(4.24) ifadesi göz önüne alınsın. Bu nedenle,

$$\begin{aligned} &(P/(\gamma_n(P) \cap D)/\gamma_n(P/(\gamma_n(P) \cap D)) \\ &\cong (P/(\gamma_n(P) \cap D)/((\gamma_n(P) + (\gamma_n(P) \cap D))/(\gamma_n(P) \cap D) \\ &\cong (P/(\gamma_n(P) \cap D))/(\gamma_n(P)/(\gamma_n(P) \cap D)) \cong P/\gamma_n(P) \end{aligned} \quad (4.25)$$

(4.25) ifadesi elde edilir ve P nin bir paraserbest Lie cebiri olduğu bilindiğinden

$$P/\gamma_n(P) \cong F/\gamma_n(F)$$

koşulunu sağlayan F serbest Lie cebiri mevcuttur. Böylelikle

$(P/(\gamma_n(P) \cap D)/\gamma_n(P/(\gamma_n(P) \cap D)) \cong F/\gamma_n(F)$ (4.26)

(4.26) olduğu görülür. Bu nedenle $P_1 *_{nil}^{n} P_2$ nilpotent çarpımı paraserbesttir.

Tanım 4.1.2.2: L bir Lie cebiri olsun. L Lie cebirinin A altcebiri tarafından belirtilen minimal merkezi serisi $L \geq 1$ ve G herhangi bir Lie cebiri olmak üzere

${}_0A = \langle A \rangle, \ldots \quad {}_LA = [G, {}_{L-1}A]$ (4.27)

(4.27) formülüyle verilen ideallerin azalan serisidir. $\langle A \rangle$, L'nin A tarafından üretilen idealidir. Her $k \geq 1$ için ${}_kA$, L'nin A tarafından belirtilen minimal merkezi serisinin

k. terimidir ve L'nin A tarafından belirtilen k. minimal merkezi terimi denir. L'nin alt merkezi serisi, L'nin minimal merkezi serisine bir örnektir (Velioğlu, 2020).

Tanım 4.1.2.3: L_1 ve L_2 iki Lie cebiri, $L = L_1 * L_2$ ve L'nin $[L_1, L_2]$ tarafından belirtilen k.minimal merkezi terimi $min_k[L_1, L_2]_L$ şeklinde gösterilsin. L_1 ve L_2'nin $[L_1, L_2]$ tarafından belirtilen k.minimal nilpotent çarpımı

$$L_1 *_{nil}^{[L_1,L_2]} L_2 = L/(min_k[L_1, L_2]_L) \tag{4.28}$$

(4.28) eşitliği ile tanımlanır (Velioğlu, 2020).

Aşağıda verilen Önerme 4.1.2.2 ve Önerme 4.1.2.3 önermelerinin ispatı için bakınız (Velioğlu, 2013).

Önerme 4.1.2.2: Bir paraserbest Lie cebirinin bölüm cebiri de paraserbesttir.

Önerme 3.1.2.3: Ele alınan herhangi iki paraserbest Lie cebirinin direkt toplamı da paraserbesttir.

4.1.2.1. Paraserbest Lie cebirlerinin nilpotent çarpımının bir bazı

Lemma 4.1.2.1.1: P_1 ve P_2 iki paraserbest Lie cebiri olmak üzere $P_1 *_{nil}^{[P_1,P_2]} P_2$ paraserbesttir (Velioğlu, 2020).

İspat: Varsayalım ki $k = 0$ olsun, o zaman $min_0[P_1, P_2]_P = [P_1, P_2]$ olur. Böylelikle

$$P_1 *_{nil}^{[P_1,P_2]} P_2 = (P_1 * P_2)/\,[P_1, P_2] \cong (P_1 * P_2)/D \cong P_1 \oplus P_2 \tag{4.29}$$

(4.29) elde ederiz. Böylece, Önerme 3.1.2.2' den P_1 ve P_2 nin $[P_1, P_2]$ tarafından belirtilen 0.dereceden minimal nilpotent çarpımı paraserbesttir. Şimdi $k \geq 0$ olsun, o zaman

$$min_k[P_1, P_2]_P = [P_1, [P_1[\dots[P_1, [P_1, P_2]P_2]\dots]P_2]P_2] \tag{4.30}$$

(4.30) olur. Yukarıda elde edilen cebir k.sınıftan nilpotent altcebirdir. $[P_1,\ P_2]^{(k)}$ şeklinde gösterilir. Buradan,

$$P_1 *_{nil}^{[P_1,P_2]} P_2 = (P_1 * P_2)/([P_1, P_2]^{(k)})$$

olur. Önerme 3.1.2.1'den $P_1 * P_2$ paraserbest olup bunun üzerine Önerme 3.1.2.3'ten $P_1 *_{nil}^{[P_1,P_2]} P_2$ paraserbesttir. Eğer P_1 ve P_2 n.sınıftan nilpotent paraserbest abelyen Lie cebirleri ise o zaman

$$D \cap \gamma_n(P_1 * P_2) = \gamma_n(P_1 * P_2) \tag{4.31}$$

ve böylece

$$P_1 *_{nil}^{[P_1,P_2]} P_2 = (P_1 * P_2)/\gamma_n(P_1 * P_2) \tag{4.32}$$

(4.31) ve (4.32) eşitliklerinin sağlandığını not edelim. Şimdi $P_1 *_{nil}^{n} P_2$ çarpımı için bir baz kümesi elde etmek istiyoruz. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ kümeleri göz önüne alnsın. P_1, $F(X)$ serbest Lie cebiri ile P_2, $F(Y)$ serbest Lie cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahip iki paraserbest Lie cebiri olarak alınsın. Diğer taraftan $P_1 * P_2 = L$ ve $F(X \cup Y) = F$ olsun. Önerme 4.1.2.1'den

$$L/\gamma_n(L) \cong F/\gamma_n(F)$$

dir. $x_1 > x_2 > \cdots > x_{2n}$ olmak üzere $y_1 = x_{n+1}, y_2 = x_{n+2}, \dots, y_n = x_{2n}$ indisleriyle birlikte $X \cup Y$ kümesini ele alalım.

$$\hat{\varphi}: X \cup Y \to B \tag{4.33}$$

$$x_i \to \bar{x}_i$$

(4.33) bijeksiyonu göz önüne alındığında B, L nin bir üreteç kümesidir. $\hat{\varphi}$ bijeksiyonunu, iki lineer $\varphi: F \to L$ epimorfizmine genişletelim. O zaman

$$\hat{\varphi}(X \cup Y) = \{\hat{\varphi}(x_1), \hat{\varphi}(x_2), \dots, \hat{\varphi}(x_{2n})\} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{2n}\} = B \tag{4.34}$$

(4.34) elde edilir. Şimdi F serbest Lie cebirinin Hall kümelerini göz önüne alalım.

$$H_1 = X \cup Y$$

$$H_2 = \{xy: x, y \in H_1, x > y\} \ ,$$

$$\dots\dots$$

$$H_n = \{x = (ab)c: a, b, c, ab \in H_1 \cup \dots \cup H_{n-1}, a > b, b \le c, \ell(x) = n\} \tag{4.35}$$

(4.35) şeklindedir. $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$, F serbest Lie cebirinin Hall bazıdır. $\hat{\varphi}$, φ nin $X \cup Y$ kümesine kısıtlanışı olduğundan

$$\varphi(H_1) = \hat{\varphi}(H_1) = B \tag{4.36}$$

(4.36) eşitliği elde edilir. $\varphi(H_1) = {H_1}^*$ şeklinde gösterilsin. Şimdi aşağıdaki kümeleri

$${H_1}^* = B$$

$$\varphi(H_2) = {H_2}^* = \{\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y): \hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(y) \in {H_1}^*, \hat{\varphi}(x) > \hat{\varphi}(y)\} \ ,$$

$$\dots\dots$$

$$\varphi(H_n) = {H_n}^* = \{\bar{x} = \big(\hat{\varphi}(a)\hat{\varphi}(b)\big)\hat{\varphi}(c), \hat{\varphi}(a), \hat{\varphi}(b), \hat{\varphi}(c) \epsilon\, {H_1}^* \cup \dots \cup {H_{n-1}}^*,$$
$$\hat{\varphi}(a) > \hat{\varphi}(b), \hat{\varphi}(b) \le \hat{\varphi}(c), \ell(\bar{x}) = n\}$$

şeklinde tanımlayalım. L paraserbest olduğundan, o zaman

$$\bar{\varphi}_n : F/\gamma_n(F) \to L/\gamma_n(L) \qquad (4.37)$$
$$x + \gamma_n(F) \to \varphi(x) + \gamma_n(L)$$

(4.37) şeklinde tanımlı izomorfizmler vardır. Bu nedenle $n = 2$ ve $i \in \{1,2,\dots,2n\}$ için

$$\bar{\varphi}_2 : F/\gamma_2(F) \to L/\gamma_2(L) \qquad (4.38)$$
$$x + \gamma_2(F) \to \varphi(x) + \gamma_2(L)$$

(4.38) elde ederiz. Varsayalım ki

$$B^* = \{\varphi(x_1) + \gamma_2(L), \varphi(x_2) + \gamma_2(L), \dots, \varphi(x_{2n}) + \gamma_2(L)\}$$
$$= \{\bar{\varphi}\big(x_1 + \gamma_2(F)\big), \bar{\varphi}\big(x_2 + \gamma_2(F)\big), \dots, \bar{\varphi}\big(x_{2n} + \gamma_2(F)\big)\}$$

olsun. Şimdi B^* kümesinin lineer bağımsız olduğunu göstermek istiyoruz. $i \in \{1,2,\dots,2n\}$ ve $a_i \in K$ için

$$\sum_{i=1}^{2n} a_i \bar{\varphi}_2\big(x_i + \gamma_2(F)\big) = \bar{0}$$

olsun. O halde

$$\sum_{i=1}^{2n} \bar{\varphi}_2\big(a_i x_i + \gamma_2(F)\big) = \bar{0} \qquad (4.39)$$

ve

$$\bar{\varphi}_2(\sum_{i=1}^{2n}\big(a_i x_i + \gamma_2(F)\big)) = \bar{0} \qquad (4.40)$$

(4.39) ve (4.40) eşitliklerini elde ederiz. $\bar{\varphi}_2$ bir izomorfizm olduğundan o zaman

$$\sum_{i=1}^{2n}\big(a_i x_i + \gamma_2(F)\big)) = \gamma_2(F)$$

olur. Eğer $a_i \neq 0$ ise, o zaman $a_i x_i \in \gamma_2(F)$ dir. Fakat bu imkansızdır. O zaman $a_i = 0$ ve bu yüzden B^* lineer bağımsızdır. $\bar{\varphi}_n$ lerin her biri bir izomorfizm olduğundan , her n için bir sonuç elde ederiz. Yani,

$$\{\varphi(x_1) + \gamma_n(L), \varphi(x_2) + \gamma_n(L), \dots, \varphi(x_{2n}) + \gamma_n(L)\}$$
$$= \{\bar{\varphi}\big(x_1 + \gamma_n(F)\big), \bar{\varphi}\big(x_2 + \gamma_n(F)\big), \dots, \bar{\varphi}\big(x_{2n} + \gamma_n(F)\big)\} \qquad (4.41)$$

(4.41) kümesi lineer bağımsızdır. Bilinen H kümesi F için bir Hall bazıdır, böylelikle $\{H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_{n-1}\}$ kümesi $F/\gamma_n(F)$ için bir bazdır. Şimdi

$$\bar{\varphi}_n : F/\gamma_n(F) \to L/\gamma_n(L)$$

izomorfizmi göz önüne alınsın. Böylece

$$L/\gamma_n(L) = \bar{\varphi}_n(F/\gamma_n(F)) = \bar{\varphi}_n(sp\{H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_{n-1}\})$$

$$= span\{\bar{\varphi}_n(H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{n-1})\} \quad (4.42)$$

(4.42) olarak alırız. Böylelikle

$$\bar{\varphi}_n(H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{n-1}) = \{{H_1}^* \cup {H_2}^* \cup \ldots \cup {H_{n-1}}^*\}$$

kümesi $L/\gamma_n(L)$ için bir baz kümesidir.

4.1.3. Paraserbest lie cebirlerinin abelyen çarpımı

Tanım 4.1.3.1: L_1 ve L_2 iki Lie cebiri olsun. L_1 ve L_2 nin abelyen çarpımını $L_1 *_{ab} L_2$ ile gösterelim. Buna göre,

$$L_1 *_{ab} L_2 = (L_1 * L_2)/(D \cap (L_1 * L_2)) \quad (4.43)$$

(4.43) şeklinde tanımlanır. Eğer L_1 ve L_2 abelyen Lie cebirleri ise

$$D \cap (L_1 * L_2) = D$$

olup

$$L_1 *_{ab} L_2 = (L_1 * L_2)/D \cong L_1 \oplus L_2 \quad (4.44)$$

(4.44) eşitliği elde edilir (Akdoğan, 2014).

Önerme 4.1.3.1: A ve B iki paraserbest Lie cebiri olmak üzere bu iki cebirin serbest çarpımı P ile gösterilsin. O zaman

$$P/\gamma_2(P) = A/\gamma_2(A) \oplus B/\gamma_2(B) \quad (4.45)$$

(4.45) eşitliği sağlanır.

İspat: Bu önermenin ispatı için bakınız (Velioğlu, 2013).

Önerme 4.1.3.2: İki abelyen paraserbest Lie cebirinin abelyen çarpımı da paraserbesttir.

İspat: P_1 ve P_2 iki paraserbest Lie cebiri olmak üzere $L_1 = P_1/\gamma_2(P_1)$, $L_2 = P_2/\gamma_2(P_2)$ olsun. Şimdi $L_1 *_{ab} L_2$ nin paraserbest olduğunu gösterecez. Tanımdan L_1 ve L_2 abelyen olduğundan

$$L_1 *_{ab} L_2 = L_1 \oplus L_2 = P_1/\gamma_2(P_1) \oplus P_2/\gamma_2(P_2) \quad (4.46)$$

(4.46) olur. P, P_1 ve P_2 nin serbest çarpımı olsun. O halde Önerme 4.1.3.1'den

$$P_1/\gamma_2(P_1) \oplus P_2/\gamma_2(P_2) = P/\gamma_2(P) \quad (4.47)$$

(4.47) elde edilir. Bu durumda $L_1 *_{ab} L_2$ nin paraserbest olabilmesi için $P/\gamma_2(P)$'nin paraserbest olduğunu göstermek yeterlidir.

İki paraserbest Lie cebirinin serbest çarpımı da paraserbest olduğundan (H. Baur'un tezinden) P paraserbest bir Lie cebirdir. Amacımız $P/\gamma_2(P)$'nin paraserbest olduğunu göstermek. P, bir paraserbest Lie cebiri ve $\gamma_2(P)$, P'nin idealidir. Bir

$$u \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(P/\gamma_2(P))$$

alalım. Her n için

$$u \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(P/\gamma_2(P)) = (\gamma_n(P) + \gamma_2(P))/\gamma_2(P) \tag{4.48}$$

(4.48) olur. $a \in (\gamma_n(P) + \gamma_2(P))$ olmak üzere $u = a + \gamma_2(P)$ olsun. Açıktır ki

$$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (\gamma_n(P) + \gamma_2(P))$$

a kesişimin elemanıdır. P bir paraserbest Lie cebiri olup rezidülü nilpotent özelliği sağlandığından $a \in \gamma_2(P)$ olur. Buna göre $u = \gamma_2(P)$ eşitliği sağlanıp

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(P/\gamma_2(P)) = \{0\} \tag{4.49}$$

(4.49) elde edilir. Böylelikle $P/\gamma_2(P)$ bölüm cebirinin rezidülü nilpotent olduğu gösterilmiş olur. Şimdi $P/\gamma_2(P)$ bölüm cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahip bir serbest Lie cebir varlığını göstermek istiyoruz. Bunun için $(P/\gamma_2(P))/\gamma_n(P/\gamma_2(P))$ cebirini ele alalım.

$$(\gamma_n(P) + \gamma_2(P))/\gamma_2(P) \cong \gamma_n(P)/\gamma_2(P) \tag{4.50}$$

(4.50) olduğunu biliyoruz. O halde

$$\begin{aligned}(P/\gamma_2(P))/\gamma_n(P/\gamma_2(P)) &\cong (P/\gamma_2(P))/(\,(\gamma_n(P) + \gamma_2(P))/\gamma_2(P)) \\ &\cong (P/\gamma_2(P))/(\,\gamma_n(P)/\gamma_2(P)) \\ &\cong P/\gamma_n(P) \end{aligned} \tag{4.51}$$

yukarıdaki işlemlerle (4.51) de olduğu gibi ele alınan bölüm cebirinin $P/\gamma_n(P)$ ifadesine izomorf olduğu görülür. P bir paraserbest Lie cebiri olduğundan

$$P/\gamma_n(P) \cong F/\gamma_n(F) \tag{4.52}$$

(4.52) koşulunu sağlayan F serbest Lie cebiri mevcuttur. O halde,

$$(P/\gamma_2(P))/\gamma_n(P/\gamma_2(P)) \cong F/\gamma_n(F) \tag{4.53}$$

(4.53) elde edilir. Böylece $P/\gamma_2(P)$ cebiri paraserbest bir bölüm cebirdir. Yani, $P_1/\gamma_2(P_1) \oplus P_2/\gamma_2(P_2)$ paraserbesttir. O halde $L_1 *_{ab} L_2$ abelyen çarpımının paraserbest olduğu gösterilmiş oldu.

Önerme 4.1.3.3: Serbest abelyen Lie cebirlerinin abelyen çarpımı da paraserbesttir.

İspat: K_1 ve K_2 iki serbest abelyen Lie cebiri olsun. Bu durumda

$$K = K_1 *_{ab} K_2 \tag{4.54}$$

(4.54) ifadesi bir serbest abelyen Lie cebirdir. Şimdi de K'nın paraserbest olduğunu gösterelim.

$$\gamma_2(K) = [K, K] = \{0\} \tag{4.55}$$

(4.55) ifadesi sağlanır.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(K) = \{0\}$$

olur. Böylece K rezidülü nilpotenttir. K serbest abelyen olduğundan

$$K \cong F/\gamma_2(F)$$

ifadesini sağlayan bir F serbest Lie cebiri mevcuttur. Her $n \geq 2$ için $\gamma_n(K) = \{0\}$ olduğundan

$$K/\gamma_n(K) \cong (F/\gamma_2(F))/\gamma_n(F/\gamma_2(F)) \cong F/\gamma_n(F) \tag{4.56}$$

(4.56) elde edilir. O halde K Lie cebiri paraserbesttir.

4.1.4. Paraserbest lie cebirlerin metabelyen çarpımı

Bu bölümde vereceğimiz her cebiri K cismi üzerinde birer cebir olarak düşüneceğiz.

Tanım 4.1.4.1: P_1 ve P_2 iki paraserbest Lie cebiri ve bu paraserbest Lie cebirlerinin serbest çarpımı $P = P_1 * P_2$ şeklinde gösterilsin. D, P'nin kartezyen altcebiri olmak üzere P_1 ve P_2 paraserbest Lie cebirlerinin metabelyen çarpımı

$$P_1 *_{met} P_2 = P/(P'' \cap D) \tag{4.57}$$

(4.57) ifadesi ile tanımlanır (Velioğlu, 2019).

Teorem 4.1.4.1: Sonlu ranka sahip paraserbest Lie cebirlerinin sonlu sayıdaki serbest çarpımının da paraserbesttir.

İspat: İspatı için bakınız (Baur, 1978).

Teorem 4.1.4.2: P_1 ve P_2 iki paraserbest Lie cebiri ve $P = P_1 * P_2$ olsun. D, P'nin bir kartezyen altcebiri olsun. Bu durumda $P/(P'' \cap D)$ cebiri paraserbesttir (Velioğlu, 2019).

İspat: P_1 ve P_2 iki paraserbest Lie cebiri olmak üzere $P = P_1 * P_2$ bu iki Lie cebirin serbest çarpımı olsun. O halde Teorem 3.1.4.1 den P paraserbest bir cebirdir. İlk olarak $P/(P'' \cap D)$ bölüm cebirinin rezidülü nilpotent özelliğini sağladığını gösterelim. Bir $u \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(P/P'' \cap D)$ alalım. Bu durumda her n için

$$u \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(P/(P'' \cap D)) = (\gamma_n(P) + (P'' \cap D))/(P'' \cap D)$$

olur. Her n tamsayısı için $u = a + (P'' \cap D)$ olacak şekilde $a \in \gamma_n(P) + (P'' \cap D)$ elemanı alınsın. Bu durumda

$$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(P) + (P'' \cap D) \tag{4.58}$$

(4.58) olduğu açıktır. P paraserbest olup rezidülü nilpotent olduğundan $a \in (P'' \cap D)$ olduğu görülür. Bu durumda $u = (P'' \cap D)$ eşitliği sağlanıp

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(P/(P'' \cap D)) = \{0\} \tag{4.59}$$

(4.59) ifadesinin sağlandığı rahatça görülür. O zaman $P/(P'' \cap D)$ cebirinin rezidülü nilpotent olduğu gösterilmiş olur. Şimdi $P/(P'' \cap D)$ bölüm cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahip bir serbest Lie cebirinin mevcut olduğunu gösterelim.

$$(\gamma_n(P) + (P'' \cap D))/(P'' \cap D) \cong \gamma_n(P)/(P'' \cap D) \tag{4.60}$$

(4.60) olduğu biliniyor. O halde,

$$(P/(P'' \cap D))/\gamma_n(P/(P'' \cap D)) \cong (P/(P'' \cap D))/((\gamma_n(P) + (P'' \cap D))/(P'' \cap D))$$
$$\cong (P/(P'' \cap D))/(\gamma_n(P)/(P'' \cap D)) \cong P/\gamma_n(P) \tag{4.61}$$

(4.61) olur. P serbest çarpımı paraserbest olma özelliğini sağladığından

$$P/\gamma_n(P) \cong F/\gamma_n(F) \tag{4.62}$$

(4.62) izomorfluğunu sağlayacak şekide bir F serbest Lie cebiri bulunabilir. Bu nedenle,

$$(P/(P'' \cap D))/\gamma_n(P/(P'' \cap D)) \cong F/\gamma_n(F)$$

elde edilir. Sonuç olarak $P/(P'' \cap D)$ bölüm cebirinin paraserbest olduğu görülür.

Tanım 4.1.4.2: $P_1 *_{met} P_2$ metabelyen çarpımı paraserbest olduğundan bu çarpım aynı zamanda paraserbest metabelyen çarpım olarak da adlandırılabilir. $\{x, y\}$ kümesi F serbest Lie cebirini üretsin ve L herhangi bir Lie cebiri olarak verilsin.

$[x,y]$ tarafından üretilen F'/F'', $U(F/F'')$-modül olup $K[x,y]$ polinom halkasının F'/F'' cebiri üzerindeki etkisi

$$x^r y^s[x,y] = [[[x,y]\underbrace{x]\dots]x]}_{r-defa}\underbrace{y]\dots]y]}_{s-defa} \qquad (4.63)$$

(4.63) şeklinde ifade edilir. Buradan F'/F'' bölüm cebirine $[x,y]$ çarpımı tarafından üretilen $K[x,y]$-modül yapısı kazandırılmış olduğu görülür. O zaman her F'/F'' bölüm cebirinin bir u elemanı, $\alpha(x,y) \in K[x,y]$ olmaküzere

$$u = \alpha(x,y)[x,y]$$

Formundadır (Velioğlu, 2019).

Tanım 4.1.4.3: $u(x,y) \in F$ olsun. Eğer $\forall g,h \in L$ için $u(g,h) = u(h,g)$ ise $u(x,y)$ elemanına L'nin F içindeki 2-simetrik kelimesi olarak adlandırılır (Velioğlu, 2019).

Not 4.1.4.1: $F/V(L)$ rankı 2 olan göreceli serbest Lie cebiri olsun. $u(x,y)$, L'nin F deki 2-simetrik kelimesi ise

$$u(x,y) \equiv u(y,x)\ (modV(L)) \qquad (4.64)$$

(4.64) ifadesi sağlanır (Velioğlu, 2019).

Şimdi Fox türevlerini tanımlamak istiyoruz (Fox, 1953).

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesi tarafından üretilen sonlu n ranklı bir serbest Lie cebiri F_n şeklinde gösterilsin. $A_n = F_n/F'_n$ ve $M_n = F_n/F''_n$ olsun. Herhangi bir $v \in F_n$ için $\bar{v}$ ve $\tilde{v}$ ile v nin sırasıyla $F_n \to A_n$ ve $F_n \to M_n$ şeklinde verilen doğal homomorfizmler altındaki görüntülerini gösterelim.

$i = 1,2,\dots,n$ için her $\tilde{u}, \tilde{v} \in U(M_n)$ elemanları ve ∂_i Fox türevi ifade etmek üzere

1. $\partial_i(\tilde{u} + \tilde{v}) = \partial_i(\tilde{u}) + \partial_i(\tilde{v})$,
2. $\partial_i(x_j) = \delta_{ij}$,
3. $\partial_i(\tilde{u}.\tilde{v}) = \bar{u}\partial_i(\tilde{v}) + \epsilon(\tilde{v})\partial_i(\tilde{u})$,

olacak şekilde $U(M_n)$ den $U(A_n)$ e olan lineer bir fonksiyondur. Burada δ_{ij} Kronecker delta ve $\epsilon: U(M_n) \to K$ her $i = 1,2,\dots,n$ için $\epsilon(x_i) = 0$ eşitliğini sağlayan bir homomorfizmdir. $\widetilde{w} \in M_n$ ve $\bar{\lambda} \in U(A_n)$ ise

$$\partial_i(\bar{\lambda}\widetilde{w}) = \bar{\lambda}\partial_i(\widetilde{w})$$

eşitliği elde edilir (Bryant ve Roman'kov, 1999).

Şimdi genelleştirilmiş türevler ve Smel'kin gömmesini incelemek istiyoruz (Smel'kin ve Syrtsov, 2005).

$A_1, A_2, \dots, A_m$ serbest abelyen Lie cebirleri sıfırdan farklı olarak alınsın. $A = A_1 * A_2 * \dots * A_m$, sebest abelyen Lie cebirlerinin serbest çarpımı olmak üzere $H = A/A'$ ve $G = A/A''$ şeklinde iki cebir ifade edilsin.

Her $g \in U(A)$ için $\bar{g}$ ve $\tilde{g}$ ile g nin $U(A) \to U(H)$ ve $U(A) \to U(G)$ kanonik homomorfizmleri altındaki görüntülerini gösterelim. T bir bazı $\{t_1, \dots, t_n\}$ olan matrislerin kümesi olmak üzere $M(H,T)$, yani $\begin{pmatrix} H & 0 \\ T & 0 \end{pmatrix}$ formundaki matrislerin cebiri

$$M(H,T) = \{\begin{pmatrix} \bar{a}_i & 0 \\ \bar{a}_i t_i & 0 \end{pmatrix}: a_i \in A_i, i = 1,2,\dots,n\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu cebir $U(H)$-modül olarak alınsın. Bununla birlikte $i = 1,2,\dots,n$ ve $a_i \in A_i$ olmak üzere

$$a_i \to \begin{pmatrix} \bar{a}_i & 0 \\ \bar{a}_i t_i & 0 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanan bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun çekirdeği A'' olup bir $\sigma: A \to M(H,T)$ homomorfizmini belirler. Böylelikle A/A'' bölüm cebiri, $M(H,T)$ cebiri içine gömülebilir. Bu şekilde verilen gömme Smel'kin gömmesi olarak adlandırılır.

Herhangi bir $\tilde{a} \in A/A''$ elemanı için

$$\sigma(\tilde{a}) = \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ \sum_{i=1}^{n} D_i(\bar{a}) t_i & 0 \end{pmatrix} \tag{4.65}$$

(4.65) eşitliği göz önüne alınsın. (Burada her $i = 1,2,\dots,n$ için D_i şeklinde gösterilen ifade genelleştirilmiş türevlerdir.)

$$D_i: U(G) \to U(H) \tag{4.66}$$

(4.66) dönüşümü ile birlikte genelleştirilmiş türevleri aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyonlardır.

1) $D_i(\tilde{u} + \tilde{v}) = D_i(\tilde{u}) + D_i(\tilde{v}), \quad \tilde{u}, \tilde{v} \in U(G)$

2) $D_i(\tilde{u}.\tilde{v}) = \bar{u} D_i(\tilde{v}) + \epsilon(\tilde{u}) \partial_i(\tilde{v}),$

3)$D_i(\tilde{u}) = \bar{u}, \quad \tilde{u} \in A_i$ ise

4) $D_i(\tilde{u}) = 0, \ \tilde{u} \in A_j \ ve \ i \neq j$ ise

Burada $\epsilon: U(G) \to K$, herhangi bir $g \in G$ elemanı için $\epsilon(g) = 0$ eşitliği sağlanacak şekilde bir homomorfizm belirtir. Fox türevlerinde de olduğu gibi $\widetilde{w} \in G$ ve $\bar{\lambda} \in U(H)$ elemanları için

$$D_i(\bar{\lambda}\widetilde{w}) = \bar{\lambda}D_i(\widetilde{w}) \tag{4.67}$$

(4.67) eşitliği geçerlidir.

4.1.4.1. Verbal altcebir ve 2-simetrik kelimeler

$P_1, \dots, P_n$ paraserbest abelyen Lie cebirleri olsun. $P = P_1 * \dots * P_n$ ise verilen paraserbest Lie cebirlerinin serbest çarpımı şeklinde ifade edilsin.

Teorem 4.1.4.1.1: $L = P/P''$ ise K cismi üzerinde L tarafından tanımlanan verbal altcebiri; F bir serbest Lie cebir olmak üzere, F'' türetilmiş cebirine eşittir. Yani $V(L) = F''$eşitliği elde edilir (Velioğlu, 2019).

İspat: F'' türetilmiş cebirinin $V(L)$ tarafından kapsandığı kolayca görülebilir. Şimdi ise $V(L) \subset F''$ olduğunu göstermemiz gerekiyor. $u(x,y) \in V(L)$ olsun. $F'(modF'')$, $[x,y]$ braket çarpımı tarafından üretilip $U(F/F')$-modül olduğu bilindiğinden her bir $w \in F'(modF'')$ ve $\alpha(x,y) \in U(F/F')$ elemanları için

$$w \equiv \alpha(\bar{x},\bar{y})[x,y](modF'') \tag{4.68}$$

(4.68) formundadır. Bu durumda

$$u(x,y) \equiv ax + by + \alpha(\bar{x},\bar{y})[x,y](modF''),\ a,b \in K$$

olduğunu kabul edebiliriz. Her $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in L$ için $u(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) = 0$ eşitliğinin sağlandığı tanım göz önüne alındığında kolayca görülebilir. Bunun üzerine $\tilde{v}_1 = \tilde{c}_1 \neq 0$ olup $\tilde{v}_2 = 0$ olacak şekilde ele alalım. O halde

$$u(\tilde{c}_1, 0) = a.c_1 = 0 \tag{4.69}$$

(4.69) eşitliği elde edilir ve böylece $a = 0$ olduğu görülür. Buna benzer olarak $\tilde{v}_1 = 0$ ve $\tilde{v}_2 = \tilde{c}_2 \neq 0$ seçilirse

$$u(0, \tilde{c}_2) = b.c_2 = 0 \tag{4.70}$$

(4.70) eşitliği elde edilir ve $b = 0$ bulunur. Buradan

$$u(x,y) \equiv \alpha(\bar{x},\bar{y})[x,y]\ (modF'')$$

yani $u(x,y) \in F'$ bulunur. Şimdi $v_1 = \tilde{c}_1 \in P_1, v_2 = \tilde{c}_2 \in P_2$ alalım. $\tilde{c}_1 \neq 0, \tilde{c}_2 \neq 0$ dır. O zaman

$$u(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) = \alpha(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)[\tilde{c}_1, \tilde{c}_2] = 0 \quad (4.71)$$

olur. (4.71) ifadesinin $\tilde{c}_1$ elemanına göre genelleştirilmiş türev alalım. Bulunan türevin değeri $U(F/F')$ cebirinde olup

$$-\alpha(\bar{c}_1, \bar{c}_2)\bar{c}_2\bar{c}_1 = 0 \quad (4.72)$$

(4.72) eşitliği bulunur. $U(F/F')$ evrenselenveloping cebiri bir tamlık bölgesi olup $\alpha(\bar{c}_1, \bar{c}_2) = 0$ eşitliği elde edilir. Her bir $\tilde{c}_i \in P_i$ ve $\tilde{c}_j \in P_j$ elemanı için $\alpha(\tilde{c}_i, \tilde{c}_j) = 0$ eşitliği sağlanıp $\alpha(x, y) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $u(x, y) \in F''$ elde edilir ve böylece $V(L) = F''$ olduğu görülür.

Sonuç 4.1.4.1.1: $P_1, \dots, P_n$ paraserbest abelyen Lie cebirleri olmak üzere M, bu Lie cebirlerin metabelyen çarpımı ise $V(M) = F''$ eşitliği sağlanır (Velioğlu, 2019).

İspat: $M = P/(P'' \cap D)$ şeklinde tanımlanmak üzere her $i = 1,2, \dots, n$ için P_i paraserbest Lie cebirlerinin abelyen olduğu bilindiğinden

$$P'' \cap D = P''$$

sağlandığı görülebilir. Böylelikle $M = P/P''$ eşitliği elde edilmiş olur. Teorem 3.1.4.1.1 göz önüne alındığında $V(M) = F''$ eşitliğinin sağlandığı görülür.

Şimdi F üzerindeki 2-simetrik kelimelerin $V(M)$ verbal altcebiri tarafından nasıl belirlendiğini görmek istiyoruz.

Teorem 4.1.4.1.2: $u(x, y)$, M cebirinin F üzerindeki 2-simetrik bir kelimesi olarak tanımlansın. O zaman $u(x, y)$,

$$u(x, y) = \lambda x + \lambda y + \alpha(x, y)[x, y] \ (modF'')$$

formundadır. Burada $\alpha(x, y) \in U(F/F')$ ve $\alpha(x, y) = -\alpha(y, x)$ dir (Velioğlu, 2019).

İspat: $u(x, y)$, M'nin F'deki 2-simetrik bir kelimesi ise $u(x, y) = u(y, x)$ dir. $U(F/F')$-modül olan F'/F'' cebiri ele alındığında $u(x, y)$, $v \in F''$ ve $\alpha(x, y) \in U(F/F')$ elemanları göz önünde bulundurulursa

$$u(x, y) \equiv ax + by + \alpha(x, y)[x, y] + v \quad (4.73)$$

(4.73) şeklinde yazılabilir. $\tilde{x} = x + F''$, $\tilde{y} = y + F''$ olduğu göz önüne alınırsa

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}) \equiv a\tilde{x} + b\tilde{y} + \alpha(\tilde{x}, \tilde{y})[\tilde{x}, \tilde{y}] \quad (4.74)$$

(4.74) sağlandığı açıktır. $u(\tilde{x}, \tilde{y}) = u(\tilde{y}, \tilde{x})$ eşitliğini göz önüne alalım. Buradan

$$a\tilde{x} + b\tilde{y} + \alpha(\tilde{x}, \tilde{y})[\tilde{x}, \tilde{y}] = a\tilde{y} + b\tilde{x} + \alpha(\tilde{y}, \tilde{x})[\tilde{y}, \tilde{x}] \quad (4.75)$$

ve

$$a\tilde{x} + b\tilde{y} = a\tilde{y} + b\tilde{x} \tag{4.76}$$

$$\left(\alpha(\tilde{x},\tilde{y}) + \alpha(\tilde{y},\tilde{x})\right) = [\tilde{x},\tilde{y}] \tag{4.77}$$

(4.75), (4.76) ve (4.77) eşitlikleri elde edilir. Verilen (4.76) eşitliğinden $a = b$ olduğu görülür. O halde (4.77) eşitliğinin $\tilde{x}$ elemanına göre genelleştirilmiş türevini almak istiyoruz. Bu türev alındığında

$$-\left(\alpha(\bar{x},\bar{y}) + \alpha(\bar{y},\bar{x})\right)\bar{y}.\bar{x} = 0, \tag{4.78}$$

(4.78) eşitliği bulunur. $U(F/F')$ evrensel enveloping cebiri bir tamlık bölgesi olma özelliğini sağladığından

$$\alpha(\bar{x},\bar{y}) + \alpha(\bar{y},\bar{x}) = 0 \tag{4.79}$$

(4.79) olduğu görülür. $a = b = \lambda$ şeklinde adlandıralım. O halde ele alınan $u(x,y)$ elemanı

$$u(x,y) = \lambda x + \lambda y + \alpha(x,y)[x,y](modF'')$$

$$\alpha(x,y) = -\alpha(y,x) \tag{4.80}$$

(4.80) formundadır.

Sonuç 4.1.4.1.2: $u(x,y)$, M'nin F'deki 2-simetrik kelimesi ise $u(x,y) - u(y,x) \in V(M)$ dir (Velioğlu, 2019).

İspat: $u(x,y)$, M'nin F'deki 2-simetrik kelimesi olsun. Teorem 3.1.4.1.2. den

$$u(x,y) = \lambda x + \lambda y + \alpha(x,y)[x,y] + v$$

$$\alpha(x,y) \in U(F/F'), v \in F''$$

formundadır. $u(x,y)$, 2-simetrik olduğundan $u(x,y) = u(y,x)$ olup

$$u(x,y) - u(y,x) = v(x,y) - v(y,x) = 0 \tag{4.81}$$

(4.81) eşitliğinin sağlandığı görülür. O halde her $g,h \in M$ için

$$u(g,h) - u(h,g) = v(g,h) - v(h,g) = 0 \tag{4.82}$$

(4.82) olur. Yani $u(x,y) - u(y,x) \in V(M)$ dir. $w \in V(M)$ ise her $g,h \in M$ için $w(g,h) = 0$ olup $w(g,h) = w(h,g)$ dir. Yani $w(x,y) \in F''$, M'nin F'deki 2-simetrik bir kelimesidir. Diğer taraftan

$$u(x,y) = ax + by + \alpha(x,y)[x,y]\ (modF'')$$

$\alpha(x,y) \in U(F/F')$ ve $\alpha(x,y) = -\alpha(y,x)$, ise $w \in F''$ herhangi bir eleman olmak üzere

$$u(x,y) = ax + by + \alpha(x,y)[x,y] + w \tag{4.83}$$

(4.83) ifadesinin M'nin F üzerindeki 2-simetrik kelimesi olduğu görülür. Buradan açıkça görülebilir ki 2-simetrik kelimeler $V(M)$ tarafından mükemmel bir şekilde belirlenir.

Örnek 4.1.4.1.1: $\alpha(x,y) = x^2y - y^2x$ polinomunu ele alalım.

$$-\alpha(y,x) = -y^2x + x^2y$$

olup $\alpha(x,y) = -\alpha(y,x)$ dir.

$$u(x,y) = ax + by + \alpha(x,y)[x,y] + w, \;\; w \in F'',$$

M nin F deki 2-simetrik kelimesidir. Gerçekten

$$u(x,y) = x + y + (x^2y - y^2x)[x,y] \;\; (modF'')$$

$$= x + y + \left[\left[[[x,y]x]x\right]y\right] - \left[\left[[[x,y]y]y\right]x\right] (modF'')$$

ve

$$u(y,x) = y + x + \left[\left[[[y,x]y]y\right]x\right] - \left[\left[[[y,x]x]x\right]y\right] (modF'')$$

olup $u(x,y) = u(y,x)$ dir (Velioğlu, 2019).

4.2. Paraserbest X-by-Y Lie Cebirleri

Tanım 4.2.1: Gruplar içinde X ve Y sağlanan iki özellik olsun. Eğer bir G grubu $H \in X$ ve $(G/H) \in Y$ olacak şekilde bir H normal alt grubuna sahip ise G'ye X-by-Y grup denir (Akdoğan, 2014).

X-by-Y Lie cebirleri de gruplarda olduğu gibi tanımlanır.

Tanım 4.2.2: Bir G Lie cebiri, merkezi H ve G/H metabelyen olacak şekilde bir H idealine sahip ise G'ye merkezi-by-metabelyen Lie cebiri denir (Akdoğan, 2014).

Tanım 4.2.3: $Z(L)$, L Lie cebirinin merkezi olsun. Eğer, $L/(Z(L))$ bölüm cebiri metabelyen ise, L merkezi-by-metabelyendir denir. Buna eşdeğer olarak; L'nin ikinci dereceden türetilmiş cebiri L'nin merkezi tarafından kapsanır denir. Yani

$$[L, L''] = 0 \tag{4.84}$$

(4.84) koşulu sağlanırds L merkezi-by-metabelyen dir (Velioğlu, 2019).

4.2.1 Paraserbest merkezi-by-metabelyen lie cebirleri

Bu bölümde, bütün Lie cebirlerini karakteristiği sıfır olan bir cisim üzerinde ele alacağız. P bir paraserbest Lie cebiri olmak üzere, o zaman $P/[P'', P]$ şeklinde tanımlanan cebir bir merkezi-by-metabelyen Lie cebirdir. Bir paraserbest Lie cebirinin bölüm cebiri de paraserbest olduğundan (Velioğlu, 2013), $P/[P'', P]$ cebiride paraserbesttir. $P/[P'', P]$ cebiri paraserbest merkezi-by-metabelyen Lie cebiri olarak adlandırılabilir (Velioğlu, 2019).

Teorem 4.2.1.1: P, paraüreteç kümesi X olan bir paraserbest Lie cebiri olsun. O zaman X kümesi bir serbest Lie cebiri üretir.

İspat: İspatı için bakınız(Velioğlu, 2013).

Lemma 4.2.1.1: Y, F serbest Lie cebirini $\gamma_2(F)$ modülüne göre serbestçe üretsin. O zaman Y, F'yi her $n = 3,4, \ldots$ için γ_n modülüne göre de serbestçe üretir.

İspat: İspatı için bakınız (Kukin ve Bokut, 1994).

Lemma 4.2.1.2: Eğer boş olmayan bir X kümesi bir T paraserbest Lie cebirini $\gamma_2(T)$ modülüne göre serbestçe üretirse, o zaman $\gamma_n(T)$ modülüne göre de serbestçe üretir (Velioğlu, 2019).

İspat: T, boş olmayan bir X kümesi tarafından $\gamma_2(T)$ modülüne göre serbestçe üretilen bir paraserbest Lie cebiri olsun. $T/\gamma_2(T)$ cebiri ele alınırsa;

$$\begin{aligned} T/\gamma_2(T) &\cong (T/\gamma_n(T))/(\gamma_2(T/\gamma_n(T)) \\ &= (T/\gamma_n(T))/((\gamma_2(T)+\gamma_n(T))/\gamma_n(T)) \\ &= (T/\gamma_n(T))/(\gamma_2(T)/\gamma_n(T)) \cong T/\gamma_n(T) \end{aligned} \tag{4.85}$$

(4.85) elde edilir. Hipotezden X, T'yi $T/\gamma_2(T)$ modülüne göre üretir, o zaman X kümesi T'nin türetilmiş cebirini $T/\gamma_n(T)$ modülüne göre serbestçe üretir. Böylece Lemma 4.1.1.1'den X kümesi $T/\gamma_n(T)$'yi serbestçe üretir.

Lemma 4.2.1.3: P, paraüreteç kümesi X olan merkezi-by-metabelyen Lie cebiri ise, o zaman X içinde uzunlukları n den küçük olan sol normlu baz komütatörleri bağımsızdır (Velioğlu, 2019).

İspat: P, paraüreteç kümesi X olan merkezi-by-metabelyen Lie cebiri ve $|X| = |Y|$ olacak şekilde F bir Y kümesi üzerinde serbest Lie cebiri olsun. Böylece Teorem 4.1.1.1'den, X bir serbest merkezi-by-metabelyen Lie cebiri üretir. Bu serbest Lie cebiri H ile gösterilsin. O halde

$$H = F/[F'', F]$$

olur.

$$H/H'' \cong F/F'' \tag{4.86}$$

(4.86) olduğundan H/H'' bir serbest metabelyen Lie cebirdir. $a_i \in H$ olduğunda $\bar{a}_i = a_i + H''$, H/H'' içinde bir baz komütatörü olsun. Varsayalım ki α_i F/F'''nün evrensel enveloping cebiri $U(F/F'')$'nün elemanları olduğunda

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = 0$$

şeklinde bir toplam H içinde mevcuttur. O zaman

$$\overline{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n} = \bar{0}\ , \bar{\alpha}_1 a_1 + \bar{\alpha}_2 a_2 + \cdots + \bar{\alpha}_n a_n = 0$$

olur. Serbest metabelyen Lie cebirlerinin sol normlu baz komütatörlerinin bağımsız olduğu biliniyor. Buradan

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

ve α_i elemanları H içinde bağımsızdır.

X paraüreteç kümesi ile bir paraserbest merkezi-by-metabelyen L Lie cebiri göz önüne alınsın. Teorem 4.1.1.2'nin ispatı aşağıdaki lemmalar kullanılarak elde edilecektir.

Teorem 4.2.1.2: L, bir paraserbest merkezi-by-metabelyen Lie cebiri olsun. O zaman $\Delta_w(L/L'') = \{0\}$ dır (Velioğlu, 2019).

Lemma 4.2.1.4: Bir paraserbest merkezi-by-metabelyen Lie cebirinin merkezi, L'nin ikinci sınıftan türetilmiş cebiri L'' dür (Velioğlu, 2019).

İspat: Lemma 4.2.1.4' ü ispatlamak için ilk olarak $Z(L)$'nin L'' nün bir alt kümesi olduğunu göstermeliyiz. Lemma 4.2.1.3'ten L'nin X içindeki sol normlu baz komüatörleri bağımsızdır. Buna karşın X L için bir üreteç kümesi değildir. X, $n = 1,2,3, \dots$ için $L/\gamma_{n+1}(L)$ cebirini ürettiğinden her $p \in L$ elemanı $\gamma_{n+1}(L)$ modülüne göre X içindeki baz komütatörlerinin bir toplamı şeklinde yazılabilir (Lemma 4.1.2). Buradan, $\gamma_{n+1}(L)$ modülüne göre g_i, $i = 1,2, \dots, n$ için i ağırlığının X içindeki sol normlu baz komütatörlerinin bir toplamı ve h X içindeki L'' den alınan baz komütatörlerinin bir toplamıolmak üzere her $p \in L$ elemanı

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_n + h \qquad (4.87)$$

(4.87) formunda yazılabilir. L rezidülü nilpotent olduğundan $\sum_{n=2}^{\infty}(L/\gamma_n(L))$ şeklindeki sonsuz direkt toplamın içine bir direkt toplam olarak gömülebilir (Paraserbestlik tanımından). Yani; ℓ, $x \notin \gamma_{\ell+1}(L)$ koşulunu sağlayan en küçük tamsayı, g_i X içindeki i ağırlığının sol normlu baz komütatörlerinin bir toplamı ve h_i X içindeki merkezi baz komütatörlerinin bir toplamı olmak üzere $x \in L$ için

$$\begin{aligned} \emptyset : x &\to (x + \gamma_2(L), x + \gamma_3(L), \dots, x + \gamma_n(L), \dots) \\ &= (\bar{0}, \bar{0}, \dots, \bar{0}, \overline{g_\ell + h_\ell}, \overline{g_\ell + g_{\ell+1} + h_{\ell+1}}, \dots) \end{aligned} \qquad (4.88)$$

(4.88) eşitliği elde edilmiş olur. Not edelim ki; eğer her i için $g_i = 0$ olursa o zaman $x \in L''$ dür. Varsayalım ki $c \in Z(L)$ olsun ve $\emptyset(c)$ göz önüne alınsın. Farzedelim ki j, $g_i \neq 0$ koşulunu sağlayan i değerlerinin en küçüğü olmak üzere g_j, bütün ağırlıkları j olan sol normlu baz komütatörlerinin bir toplamı olsun.

$$\emptyset(c) = (\bar{0}, \dots, \bar{0}, \bar{h}_\ell, \bar{h}_{\ell+1}, \dots, \overline{g_j + h_j}, \overline{g_j + g_{j+1} + h_{j+1}}, \dots)$$

olur. $x \in X$ olsun. $[c, x]$'in $\emptyset$ altındaki görüntüsü göz önüne alınsın.

$$0 = [c, x]$$

$$\emptyset(0) = \emptyset([c,x])$$

$$(\bar{0},\bar{0},\dots,\bar{0}) = (\bar{0},\bar{0},\dots,\overline{[h_\ell,x]},\overline{[h_{\ell+1},x]},\dots,\overline{[g_j+h_j,x]},\overline{[g_j+g_{j+1}+h_{j+1},x]},\dots)$$

dır. Her $n = 1,2,3,\dots$ için h_n merkezi olduğundan

$$(\bar{0},\bar{0},\dots,\bar{0},\dots) = (\bar{0},\bar{0},\dots,\overline{[g_j,x]},\overline{[g_j+g_{j+1},x]},\dots) \tag{4.89}$$

(4.89) ifadesini elde ederiz. $[g_j,x] \in \gamma_{j+1}(L)$ gözlemlenirse, böylece j. girdisi

$$\overline{[g_j,x]} = \bar{0} \tag{4.90}$$

(4.90) ifadesindeki gibi olur. Şimdi $(j+1)$. girdi $\overline{[g_j+g_{j+1},x]}$, $L/\gamma_{j+2}(L)$ nin içindedir.

$$\overline{[g_j+g_{j+1},x]} = \overline{[g_j,x]} + \overline{[g_{j+1},x]} = \bar{0} \tag{4.91}$$

(4.91) şeklinde alınsın. Dolayısıyla $\overline{[g_j,x]} \in \gamma_{j+2}(L)$ ve $g_j \in \gamma_{j+1}(L)$ olur. Fakat g_j, uzunlukları j olan bağımsız sol normlu baz komütatörlerinin toplamı olduğundan uzunluğu $j+1$ den büyük sol normlu baz komütatörlerinin bir toplamı olarak yazılamaz (Lemma 4.2.1.3). Bu nedenle

$[g_j,x] = 0$ olur, ki bu da g_j nin paraüreteç kümesinin bütün elemanları ile değişmeli olduğunu ifade eder. Şimdi, L paraserbest olduğundan her $n = 1,2,3,\dots$ için

$$L/\gamma_{n+1}(L) \cong F/\gamma_{n+1}(F)$$

dir. $F/\gamma_{n+1}(F)$, serbest merkezi-by-metabelyen Lie cebirdir ve bu cebirin merkezi $(F'' + \gamma_n(F))/\gamma_{n+1}(F)$ dir. Böylece $L/\gamma_{n+1}(L)$'nin merkezi $(L'' + \gamma_n(L))/\gamma_{n+1}(L)$ dir. g_j sol normlu baz komütatörlerinin bir toplamı ve hiçbiri L'' nün içinde olmamasına rağmen biz $n = 1,2,3,..$ için $g_j \in \gamma_n(L)$ alalım. $n = j+1$ olsun; o zaman $g_j \in \gamma_{j+1}(L)$ olur. Fakat $g_j \notin \gamma_{j+1}(L)$ dir. Bu nedenle $n = 2,3,\dots$ için $g_n = 0$ ve böylece $Z(L) = L''$ olur.

Lemma 4.2.1.5: Eğer bir T Lie cebiri rezidülü nilpotent ise $T/Z(T)$ cebiri de rezidülü nilpotenttir (Velioğlu, 2019).

İspat: T bir rezidülü nilpotent Lie cebiri ve

$$u \in \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(T/Z(T))\right)$$

olsun. O zaman her n tamsayısı için

$$u \in \gamma_n(T/Z(T)) = (\gamma_n(T) + Z(T))/Z(T)$$

dir. $u = a + Z(T)$ olacak şekilde $a \in \gamma_n(T) + Z(T)$ olsun. Açıktır ki

$$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(T) + Z(T)$$

dir. T rezidülü nilpotent olduğundan, o zaman $a \in Z(T)$ ve $u = Z(T)$ olur. Dolayısıyla $T/Z(T)$ cebiri rezidülü nilpotenttir.

Teorem 4.2.1.2'nin İspatı: Lemma 4.2.1.4'ten ;

$$L/Z(L) = L/L'' \tag{4.92}$$

(4.92) ifadesini elde ederiz. Lemma 4.2.1.5'ten, L/L'' rezidülü nilpotenttir. Dolayısıyla

$$\Delta_w(L/L'') = \{0\} \tag{4.93}$$

(4.93) eşitliğini elde ederiz (Velioğlu, 2019).

Teorem 4.2.1.3: P, K cismi üzerinde paraserbest bir Lie cebiri olsun. O zaman $(P/P'')/\Delta_w(P/P'')$ bölüm cebiri paraserbest metabelyen Lie cebirdir.
İspat: İspatı için bakınız (Velioğlu, 2019).

Sonuç 4.2.1.1: L paraserbest merkezi-by-metabelyen Lie cebiri olsun. O halde L/L'' cebiri paraserbest metabelyendir (Velioğlu, 2019).
İspat: L bir paraserbest Lie cebiri olsun. O zaman Teorem 4.1.1.3'ten, $(L/L'')/\Delta_w(L/L'')$ cebiri paraserbest metabelyen Lie cebirdir. Hipotezden L paraserbest merkezi-by-metabelyen Lie cebirdir. Bu yüzden Teorem 4.1.1.2'den $\Delta_w(L/L'') = 0$ elde ederiz. Bu nedenle L/L'' cebiri bir paraserbest metabelyen Lie cebirdir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu tez çalışmasında paraserbest Lie cebirlerinin tanımı ve bazı temel özellikleri verildi. Bu cebirin nilpotent, abelyen, çözülebilir ve metabelyen çarpımları ve bu çarpımların bazı özellikleri üzerine çalışıldı. Ayrıca paraserbest merkezi-by-metabelyen Lie cebirleri ve bu cebirler ile ilgili önemli bazı sonuçlar incelendi. Özellikle bu cebirin alt merkezi serisinin ikinci terimi ile olan bölüm cebirinin paraserbest metabelyen olduğu sonucu incelendi.

5.2. Öneriler

Bu tezde ele alınan çalışmaların ışığında hala paraserbest Lie cebirlerinde çalışılmamış birçok konunun var olduğunu gözlemlemekteyiz. Örneğin Lie cebirlerinde çalışılmış olan nilpotent-by-abelyen özelliği veya gruplarda çalışılmış olan özellikleri paraserbest Lie cebirlerinde çalışılabilir.

KAYNAKLAR

AKDOĞAN, N., 2014. Serbest Lie Cebirlerinin Çarpımı ve Rezidülü-P Özellikleri. Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Adana.79s.

BAHTURIN, Y., 1987. Identical Relations in Lie Algebras. VNU Science Press Utrecht The Netherlands, 309p.

BAUMSLAG, G., 1967. Groups with the same lower central sequence as a relatively free group I. The groups. Trans. Amer. Math. Soc., 129: 308-321.

BAUMSLAG, G., 1969. Groups with the same lower central sequence as a relatively free group. II Properties. Trans. Amer. Math. Soc., 142: 507-538.

BAUMSLAG, G., 2005. Parafreegroups. Progress in Math., Vol. 248: 1-14.

BAUMSLAG, G. and STAMMBACH, U., 1977. On the inverse limit of free nilpotent Groups .Comment. Math. Helvetici, 52: 219-233.

BAUMSLAG, G. and CLEARY, S., 2006. Parafree one-relator groups. Jurnal of group theory, 9:191-201.

BAUR, H., 1978. Parafree Lie algebren und homologie. Diss. Eth. Nr., 6126. Zürich, 60p.

BAUR, H., 1980. A note on parafree Lie algebras.Commun. in Alg., Vol 8, No 10: 953-960.

BOKUT, L.A. and KUKIN, G.P., 1994. Algorithmic and Combinatorial Algebra. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 384p.

BRYANT, R. and ROMAN'KOV, V., 1999. Automorphism groups of relavitely free groups. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 127(3): 411-424.

ERDMANN, K. and WILDON , M., 2006. Introduction to Lie Algebras. Springer-Verland London Limited, 27-35.

EVANS, T., 1969. Finitely Presented Loops, Lattices, Etc. are Hopfian. J. London Math. Soc., 44: 551-552.

FOX, Ralph., 1953. Free Differential Calculation, I: Derivation in Free Group Ring. Yearbooks of Mathematics. 57(3): 547–560.

GROVES, J.R.J.. and BRYANT, R.M., 1999. Finitely Presented Centre-by-Metabelian Lie Algebras. Bull. Austral. Math. Soc., 60: 221-226.

SMELK'İN, A. A., 2005. On embeddings of some factor algebras of free sums of Lie algebras. J. Math. Sci. 13(6): 6148-6152.

STEWART, I., 2006. Lie Algebras and Applications. Springer Berlin Heidelberg, 1-24.

VELİOĞLU, Z., 2013. Paraserbest Lie Cebirleri. Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Adana. 101s.

VELİOĞLU, Z., 2019. Parafree Center -by-Metabelian Lie Algebras. Mat. Sci. And Ap., 11-14.

VELİOĞLU, Z., 2019. Paraserbest Lie Cebirlerinin Metabelyen Çarpımı, 2-Simetrik Kelimeler ve Verbal Altcebir. Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 12(2): 771-777.

VELİOĞLU, Z., 2019. Soluble Product of Parafree Lie Algebras and Its Residual Properties. Applied Mathematics and Nonlinear Sciénses, 4(1): 1-5.

VELİOĞLU, Z., 2020. Nilpotent Product of Lie Algebras and a Basis of This Product. Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 13(2): 917-922.