T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

$[-1,1]\times[-1,1]$ BÖLGESİ ÜZERİNDE İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN-DURRMEYER POLİNOMLARININ YAKLAŞIMI

Ecem ACAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2022

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Doktora Tezi

$[-1, 1] \times [-1, 1]$ BÖLGESİ ÜZERİNDE İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN-DURRMEYER POLİNOMLARININ YAKLAŞIMI

Ecem ACAR

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Aydın İZGİ
Yıl: 2022, sayfa: 66

Bu tezde, genelleştirilmiş Bernstein-Durrmeyer tipi operatörleri tanımlanmıştır ve kompakt bir küme üzerinde iki değişkenli sürekli fonksiyonlar uzayında incelenen bu operatörlerin bazı yaklaşım özellikleri ele alınmıştır. Bu operatörlerin yaklaşım oranı, süreklilik modülü kullanılarak verilmektedir. Lipschitz fonksiyon sınıfları, Peetre K-fonksiyoneli ve Voronovskaya tipi asimptotik teoremi için yaklaşım dereceleri incelenmiştir ve bu operatörlerin bazı diferansiyel özellikleri kanıtlanmıştır. Sürekli fonksiyonlar uzayından daha kapsamlı olan Bögel sürekli fonksiyonlar uzayı yardımıyla genelleştirilmiş Bernstein-Durrmeyer tipi GBS (Genelleştirilmiş Boolean Toplamı) operatörü tanımlanmış ve karışık düzgünlük modülü, karışık K-fonksiyoneli için yaklaşımı değerlendirilmiştir. Son olarak, operatörlerin Maple'daki açıklayıcı grafiklerle iki boyutlu durumlar için belirli fonksiyonlara yaklaşımı ve bazı değerler için nümerik tablosu verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Bernstein-Durrmeyer polinomları, süreklilik modülü, yaklaşım hızı, Bögel sürekli fonksiyon, Bögel diferansiyellenebilir fonksiyon.

ABSTRACT

PhD Thesis

The Approximation of Bivariate Bernstein-Durrmeyer Operators On The Region $[-\mathbf{1}, \mathbf{1}] \times [-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$

Ecem ACAR

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Aydın İZGİ
Year: 2022, page: 66

In this thesis, the generalized Bernstein-Durrmeyer type operators are introduced and some approximation properties of these operators,which are studied in the space of continuous functions of two variables on a compact set, are discussed. The convergence rate of these operators is given using the modulus of continuity. The approximation degree for the Lipschitz class of functions and the Voronovskaja type asymptotic theorem have been investigated and some differential properties of these operators have been proven. The Bernstein-Durrmeyer type GBS (Generalized Boolean Sum) operator is defined in terms of Bögel continuous functions which is more comprehensive than the space of continuous functions. The degree of approximation for GBS operators are obtained by using the mixed modulus of smoothness and mixed K-functional. Lastly, the convergence of the operators by illustrative graphics in Maple to certain functions for two dimensional cases and some numerical values are given.

KEYWORDS: Bernstein-Durrmeyer polynomials, Modulus of continuity, Rate of convergence, Bögel continuous function, Bögel differentiable function.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma boyunca, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve desteklerini esirgemeyerek ilerlememe katkıda bulunan, yönlendirici fikirleri ile bana daima yol gösteren danışman hocam sayın Prof. Dr. Aydın İZGİ'ye teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarımın her aşamasında yanımda olan, bana zaman ayıran, bilgi birikimi ve deneyimleri ile her zaman yanımda olan sayın Prof. Dr. Sevilay KIRCI SERENBAY'a teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her döneminde benden maddi manevi desteklerini esirgemeyen ve daima yanımda olan sevgili aileme ve birçok fedakarlıklar göstererek yanımda olup beni destekleyen değerli eşim Mesut ACAR'a ve kıymetli oğlum Ali Asaf ACAR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, bu çalışmanın oluşturulmasında bana teknik bilgisi ile yardımcı olan Doç. Dr. Haydar ALICI'ya teşekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$:=$	Tanım olarak eşitlik
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonların uzayı
L	Operatör
$\{L_n\}$	Lineer pozitif operatörler dizisi
$B_n f$	f fonksiyonunun n. Bernstein polinomu
$B_{n,m} f$	f fonksiyonu için iki değişkenli Bernstein polinomu
$\binom{n}{k}$	$\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
$f_n \rightrightarrows f$	$\{f_n\}$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır
$\|\cdot\|$	Norm
$C(\mathbb{D})$	$\mathbb{D}$ bölgesi üzerinde sürekli fonksiyonlar
$\{f_{n,m}\}$	$C(\mathbb{D})$ uzayında iki değişkenli fonksiyon dizisi
$\rho(M_k, M_j)$	M_k ve M_j noktaları arasındaki uzaklık
$\omega\left(f;\delta\right)$	f fonksiyonunun tam süreklilik modülü
$\omega^{(1)}\left(f;\delta\right)$	f fonksiyonunun a değişkenine göre kısmi süreklilik modülü
$\omega^{(2)}\left(f;\delta\right)$	f fonksiyonunun b değişkenine göre kısmi süreklilik modülü
$Lip\alpha$	α-ıncı mertebeden Lipschitz sınıfı
$Lip_\zeta\alpha$	ζ değişkenine göre α-ıncı mertebeden Lipschitz sınıfı
$Lip_\eta\alpha$	η değişkenine göre α-ıncı mertebeden Lipschitz sınıfı
M_f	f fonksiyonu bağlı sabit
$B(\mathbb{D})$	$\mathbb{D}$ bölgesi üzerindeki tüm sınırlı fonksiyonların uzayı
$C(\mathbb{D})$	$\mathbb{D}$ bölgesi üzerindeki tüm sürekli fonksiyonların uzayı
$\Delta_{(\zeta,\eta)} f\left[\zeta_0, \eta_0\right]$	f fonksiyonunun (ζ_0, η_0) noktasındaki karışık fark denklemi
$B_b(\mathbb{D})$	$\mathbb{D}$ bölgesi üzerindeki tüm B-sınırlı fonksiyonlar
$C_b(\mathbb{D})$	$\mathbb{D}$ bölgesi üzerindeki tüm B-sürekli fonksiyonlar
$\omega_{mixed}\left(f;\delta_1,\delta_2\right)$	$f \in C_b(\mathbb{D})$ fonksiyonunun karışık düzgünlük modülü
$T_B(\mathbb{D})$	f fonksiyonunun $(\mathbb{D})$ üzerindeki tüm diferansiyellenebilir fonksiyonların uzayı
$D_{n,m}$	Genelleştirilmiş iki değişkenli Bernstein-Durrmeyer operatörü
$\mathbb{D}$	$[-1,1] \times [-1,1]$
B-sürekli	Bögel sürekli
B-sınırlı	Bögel sınırlı
B-diferansiyellenebilir	Bögel diferansiyellenebilir

1. GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisindeki asıl amaç, keyfi bir f fonksiyonunun kendisinden daha iyi özelliklere sahip olan yani polinomlar, tam fonksiyonlar veya sonsuz kez türevlenebilen fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini (normda veya noktada limitini) elde edebilmektir.

1854 yılında, P.L. Chebyshev sürekli fonksiyonlara cebirsel polinomlar ile yaklaşım teorisini aşağıdaki problem ile ortaya koymuştur; ”Kompakt bir aralık olan $[a, b]$ aralığında tanımlı sürekli bir f fonksiyonunu, bu aralıkta herhangi bir noktada maksimum hatası kontrol edilecek şekilde, bir P polinomu (derecesi n'yi geçmeyen) ile gösterilebilir mi? ”. K. Weierstrass 1885'te yaklasım teorisi üzerinde ilk çalışmaları yapıp, kompakt kümeler üzerinde sürekli fonksiyonlara cebirsel polinomlarla yaklaşmanın mümkün olduğunu gösteren bir teorem vermiştir. Başka bir deyişle, yaklaşım teorisinin temel teoremi olarak nitelendirilen Weierstrass Yaklaşım Teoremi;

$$f \in C[a, b] \text{ ve } \epsilon > 0 \text{ için, } \exists\, P(\zeta) \text{ öyle ki } \forall \zeta \in [a, b] \text{ için } |f(\zeta) - P(\zeta)| < \epsilon$$

şeklinde ifade edilmiştir. Bu teoremin çıkış noktası, bir topolojik uzayda herbir elemanın, uzayın yoğun bir alt uzayının elemanlarından oluşan dizinin yakınsadığı nokta olarak ifade edilebileceğinden hareketle ortaya çıkmıştır. Topolojik yöntemlerden faydanılarak ispatlanan bu teorem uzun ve karmaşık bulunduğundan Weierstrass teoreminin üzerine birçok ispat yapılmıştır.

1912 yılında S. N. Bernstein, bu polinomların verilen fonksiyona nasıl bağlı olduğunu belirleyerek, Weierstrass teoreminin daha basit ve kullanışlı bir ispatını vermiştir. Bernstein, $[0, 1]$ kapalı aralığında sürekli $f(\zeta)$ fonksiyonu için bir değişkenli Bernstein polinomlar dizisini

$$B_n(f; \zeta) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \zeta^k (1-\zeta)^{n-k}, \;\; n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

olarak tanımlamıştır. $B_n(f)$ polinomuna f fonksiyonunun n. Bernstein polinomu denir. Weierstrass teoreminin ispatı için, Bernstein $B_n(f; \zeta)$ operatörünü (1.1) tanımlayarak bu operatörler dizisinin $[0, 1]$ aralığında düzgün olarak $f(\zeta)$ ya yaklaştığını ispatlamıştır yani;

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f;\zeta) = f(\zeta) \tag{1.2}$$

olduğunu göstermiştir.

Bernstein'ın bu kullanışlı ispatı 1952'de H. Bohman ve P. P. Korovkin tarafından sadeleştirilerek ve Bernstein polinomlarının özelliklerinden de yararlanarak "Lineer pozitif operatörler ve yaklaşımı" kavramını oluşturmuşlardır. Lineer pozitif operatörlerin yaklaşımı ile ilgili olan Bohman-Korovkin teoremi aşağıda ifade edilmiştir:
f, kompakt $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi altındaki görüntülerden oluşan dizinin bu fonksiyona düzgün yakınsaması için gerek ve yeter koşul $n \to \infty$ iken

$$\begin{aligned} L_n(1;\zeta) &\rightrightarrows 1 \\ L_n(t;\zeta) &\rightrightarrows \zeta \\ L_n(t^2;\zeta) &\rightrightarrows \zeta^2 \end{aligned} \tag{1.3}$$

koşullarını sağlamasıdır. Bohman-Korovkin teoreminden sonra bu teoremin koşullarını sağlayan çok sayıda pozitif lineer operatörler dizisi inşa edilmiş ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Bunlardan bazıları Szasz-Mirakyan operatörü, Baskakov operatörü, Bleiman-Butzer-Hahn operatörü ve Meyer-König ve Zeller operatörüdür. Bohman-Korovkin Teoreminin koşullarını sağlayan ve temel operatörleri belli durumlarda üretebilen genel pozitif lineer operatörler üzerinde de birçok çalışmalar mevcuttur. Örneğin; 1957 de V.A. Baskakov, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde sonsuz mertebeden türevlenebilir f ve φ fonksiyonları için

$$L_n(f;\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\zeta)^k}{k!} \varphi_n^{(k)}(\zeta) f\left(\frac{k}{n}\right),\ \zeta \in [0,\infty),\ n \in \mathbb{N},$$

biçiminde genel lineer pozitif bir operatör dizisi tanımlamıştır. Burada $\zeta \in [0,1]$ için fonksiyon dizisi $\varphi_n(\zeta) = (1-\zeta)^n$ olarak seçilir ise Bernstein polinomları, $\zeta \in [0,b]$ için fonksiyon dizisi $\varphi_n(\zeta) = e^{-n\zeta}$ olarak seçilir ise Szasz-Mirakyan operatörü elde edilebilir.

1957 yılında V. I. Volkov "On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variable" adlı çalışması ile iki değişkenli sürekli fonksiyonlar uzayında yaklaşımı incelemiştir. 1968'de (1.1)'de tanımlanan Bernstein operatörü sabit üçgensel bölgede iki değişkenli Bernstein polinomlarının yaklaşımı D. D. Stancu tarafından incelenmiştir:

$$B_n^*(f;\zeta,\eta)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}f\left(\frac{k}{n},\frac{j}{n}\right)C_n^k C_{n-k}^j\zeta^k\eta^j\left(1-\zeta-\eta\right)^{n-k-j}$$

burada operatör $\Delta=\{(\zeta,\eta):\zeta,\eta\geq 0,\zeta+\eta\leq 1\}$ bölgesi üzerinde incelenmişitir. Abel 1998'de Kantorovich polinomlarının asimptotik yaklaşımlarını incelemiştir.

1988 de F. L. Martinez, $[0,1]\times[0,1]$ karesel bölge üzerinde tanımlı iki değişkenli f fonksiyonu için $B_{n,m}(f)$ polinomlar dizisini aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$B_{n,m}(f;\zeta,\eta)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f\left(\frac{k}{n},\frac{j}{m}\right)\binom{n}{k}\binom{m}{j}\zeta^k(1-\zeta)^{n-k}\eta^j(1-\eta)^{m-j} \tag{1.4}$$

böylece iki değişkenli Bernstein polinomları tanımlanmıştır.

Bernstein-Durrmeyer operatörleri başta Voronovskaya tipi diferansiyellenebilir operatörler arasında geçişme özelliği olmak üzere birçok istenilen özelliğe sahip olduğundan Bernstein operatörlerine göre birçok açıdan daha kullanışlı olmuştur. 1967 de J. L. Durrmeyer bir boyutlu Bernstein-Durrmeyer operatörlerini aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

f, $[0,1]$ aralığı üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere;

$$M_n(f;\zeta)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}r_{n,k}(\zeta)\int_0^1 r_{n,k}(t)f(t)dt \tag{1.5}$$

burada

$$r_{n,k}(\zeta)=\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\zeta^k(1-\zeta)^{n-k} \tag{1.6}$$

dır. 1981 de çok değişkenliler için Bernstein-Durrmeyer operatörleri M.M. Derriennic tarafından çalışılmıştır.

Bernstein operatörleri ve genellemeleri birçok alanda karşımıza çıkmaktadır. Örneğin; geometrik nesnelerin sayısal yönleri ile ilgilenen bir disiplin olan Bilgisayar destekli geometrik tasarımda (Computer Aided Geometric Design CAGD) Bernstein operatörleri eğriler ve yüzeyler oluşturmak için temel olarak alınmıştır. Eğrilerin ve yüzeylerin matematiksel olarak temsil edildiği CAGD alanında ortaya çıkan gereksinimler sebebiyle Bézier eğrilerinin geliştirilmesine ihtiyaç duyulmuştur. Dolayısıyla hemen hemen her türlü geometrik şekli tasarlamak için yeterli esneklik elde edilmiştir. 1959'da Fransız otomobil şirketi Citroen tasarımının bilgisayarda uygulanması sırasında ortaya çıkan teorik problemleri çözmek için matematikçi Paul de Faget de Casteljau ile çalışmaya başlaması ile birlikte Casteljau algoritması olarak bilinen yöntemde eğrilerin ve yüzeylerin tasarımına yönelik yeni sistem için Bernstein polinomları kullanılmıştır. 1960 yıllarında ise Paris'te Renault şirketi de CAGD alanında çalışmalar yürütmekteydi. Geometrik nesnelerin bilgisayar gösterimleri üzerinde çalışan tasarım bölümü başkanı Pierre Bezier şekil modellemede kullandığı polinom formülasyonları geniş çapta bir ilgi ile karşılandı ve günümüze kadar gelen Bézier eğrisi terimine ismi verildi. Sonraki yıllarda, A. R. Forrest, Bézier eğrilerini Bernstein polinomları cinsinden Casteljau'nun kullandığı gibi ifade ederek daha popüler hale getirmiştir.

Bu çalışmada, $[-1,1] \times [-1,1]$ karesel bölgesi üzerinde tanımlı genelleştirilmiş Bernstein-Durrmeyer operatörleri tanımlanıp, bu operatörün yaklaşım özellikleri incelenmiş ve süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı hesaplanmıştır. Lipschitz fonksiyon sınıfları ve Voronovskaya tipi asimptotik teoremi için yaklaşım dereceleri incelenmiştir. Tanımladığımız iki değişkenli Bersntein-Durrmeyer operatörünün yakınsamasının daha iyi olduğunu belirtmek için Maple'daki açıklayıcı grafiklerle operatörün iki boyutlu durumlar için belirli fonksiyonlara yakınsaması gösterilmiştir. Ayrıca, B-sürekli, B-sınırlı fonksiyon ve karışık düzgünlük modülü tanımları operatör için verilerek genelleştirilmiş iki değişkenli Bersntein-Durrmeyer tipi GBS(Generalized Boolean Sum) operatörünün inşaası yapılmış olup, bu operatör için yakınsaması verilmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

1885 yılında K. Weierstrass, polinomlar ile sürekli fonksiyonlara yaklaşmanın mümkün olduğunu ifade eden teoremi ile Yaklaşım teorisine öncülük yapmıştır. Weierstrass teoreminde, $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı ve sürekli bir f fonksiyonu ve $\zeta \in \mathbb{R}$ için

$$W_n\left(f;\zeta\right) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n(t-x)^2}{2}} f(t)dt$$

ile tanımlı $\{W_n\left(f\right)\}$ fonksiyon dizisinin $\mathbb{R}$ üzerinde f fonksiyonuna noktasal, kapalı ve sınırlı aralıklar üzerinde ise düzgün yakınsak olduğunu göstermiştir. Bu yaklaşım teoreminin ilk ispatının uzun ve karmaşık olmasından dolayı birçok araştırmacı daha açık ve kullanışlı bir ispat bulmak için çalışmışlardır. Bunun üzerine 1912'de Bernstein $[0,1]$ aralığı üzerinde sürekli olan bir fonksiyona Bernstein polinomları ile yaklaşılabileceğini göstererek bu teoremin en basit ispatını ortaya koymuştur. Bir değişkenli Bernstein polinomlarının temel yapısı, a ve b pozitif sayılar, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

binom formülü ile bağlıdır. Burada $\zeta \in [0,1]$ olmak üzere $a = \zeta$, $b = 1-\zeta$ alırsak klasik Bernstein polinomunun temelini oluşturan formülü elde ederiz:

$$1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \zeta^k (1-\zeta)^{n-k}.$$

f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sürekli ve bu aralıkta $\zeta_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \cdots, n$ rasyonel noktalardaki değerleri belli olsun. Bundan yararlanarak klasik Bernstein polinomunu yani $B_n(f;\zeta)$'yı elde ederiz. Bernstein (1.1) polinomları ile Weierstrass yaklaşım teoremine $[0,1]$ aralığı için basit ve inşaa edilebilir bir ispat sağlamıştır. Literatürde Weierstrass teoreminin birçok ispatı mevcuttur.

Kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli fonksiyonlara yaklaşımda pozitif lineer operatörlerin birçok çalışması yapılmıştır. L.V. Kantorovich, 1930 yılında Bernstein polinomlarını $x \in [0,1]$ için integrallenebilir fonksiyonlara aşağıdaki gibi genelleştirmiştir:

$$K_n\left(h;\zeta\right) = (n+1) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \zeta^j (1-\zeta)^{n-j} \int_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}} h(t)dt.$$

Burada K_n operatörlerine Kantorovich polinomları denir.

1932 yılında, $[0,1]$ aralığında sabit bir x noktasında ikinci mertebeden sürekli türeve sahip bir f fonksiyonu için asimptotik formül E. Voronovskaya tarafından aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[B_n\left(f;\zeta\right)-f(\zeta)\right]=\frac{\zeta(1-\zeta)}{2}f''(\zeta).$$

Sürekli fonksiyonların bir alt sınıfı olan Lipschitz sınıfında, Bernstein polinomları için $|B_n(f;\zeta)-f(\zeta)|<\epsilon$ eşitsizliğinden daha iyi eşitsizlikler elde edilebilir. Lorentz 1953'de, $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere $f\in Lip\alpha$ olduğunda $[0,1]$ aralığının her bir ζ noktasında

$$|B_n(f;\zeta)-f(\zeta)|\leq M\left(\frac{\zeta(1-\zeta)}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

eşitsizliğini ve bu polinomlara asimptotik yaklaşımı göstermiştir.

Chlodowsky 1937 yılında, sınırsız genişleyen aralık üzerinde Bernstein polinomlarınının yaklaşım özelliklerini aşağıdaki operatör üzerinden ele almıştır: (b_n), pozitif terimli artan bir dizi ve $\zeta\in[0,b_n]$ olmak üzere

$$B_n^*(f;\zeta)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{kb_n}{n}\right)C_n^k\left(\frac{\zeta}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{\zeta}{b_n}\right)^k \tag{2.1}$$

burada

$$\lim_{n\to\infty}(b_n)=\infty \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\frac{(b_n)}{n}=0$$

dır. $B_n^*(f;\zeta)$ polinomlarına Bernstein-Chlodowsky polinomları denir.

1941 yılında, G. M. Mirakyan $[0,\infty)$ aralığı üzerinde sürekli ve $\lim_{n\to\infty}|f(\zeta)|/(1+\zeta^2)<\infty$ koşulunu sağlayan f fonksiyonuna yakınsak olan aşağıdaki $\{S_n\}$ operatörler dizisi tanımlamıştır:

$$S_n(f;\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-n\zeta}(n\zeta)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ve bu operatör dizisinin yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Burada $S_n(f)$ polinomlarına Szász-Mirakyan operatörleri denir.

Sonraki yıllarda genel pozitif operatörler dizisinin yaklaşım özellikleri ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Sonuç olarak da 1950 lerde T. Popoviciu, 1952-54 yıllarında H. Bohman ve 1953 yılında P. P. Korovkin lineer pozitif operatörler dizisi ve sürekli bir fonksiyon verildiğinde operatör dizisi altındaki bu sürekli fonksiyona düzgün yakınsamasını sağlayan şartları araştırmışlardır. 1951 yılında T. Popoviciu araştırmalarını Romen dilinde yayınladığından çalışmaları birçok araştırmacı tarafından bilinmemektedir. Bohman aynı problemi sadece ayrık tipteki pozitif lineer operatörler için ispatlamıştır. Korovkin ise ayrık tipte olan pozitif lineer operatörler için olan çözümü genellemiştir. Ayrıca integral tipli operatörler için de aynı problemi çözerek yaklaşım teorisini geliştiren çalışmalar ortaya koymuştur. Böylece, sürekli fonksiyonlara pozitif lineer operatörler ile yaklaşım teorisinin temel kriteri olan Popoviciu-Bohman-Korovkin teoremi ortaya çıkmıştır. Popoviciu-Bohman-Korovkin Teoremi olarak bilinen bu teoreme göre; kompakt bir aralık üzerindeki sürekli fonksiyon için verilen lineer pozitif operatörler dizisi altındaki görüntülerden oluşan dizinin bu fonksiyona düzgün yakınsaması için gerek ve yeter koşul test fonksiyonları olan 1, t, t^2 nin görüntülerinden oluşan dizinin 1, x, x^2'ye düzgün yakınsamasıdır. Popoviciu-Bohman-Korovkin Teoremi daha yaygın olarak Korovkin teoremi olarak adlandırıldığından ilerleyen bölümlerde bu şekilde kullanılacaktır.

2008 yılında Deo, Noor ve Sıddıquu, Bernstein polinomlarının yeni bir modifikasyonunu tanımlamış ve bundan faydalanarak Kantorovich ve Durrmeyer tipi operatörler şeklinde yeni operatörler tanımlayıp çalışmışlardır. Yaklaşım problemleri ayrıca iki değişkenli ve çok değişkenli fonksiyonlar sınıfı için çalışılmıştır. Yaklaşım teoresinde klasik Bernstein polinomları, iki değişkenli Bernstein polinomları ve genelleştirmeleri ile ilgili birçok incelemeler yapılmıştır.

1999 yılında İbrahim Büyükyazıcı "İki değişkenli fonksiyonların Bernstein polinomları" adlı yüksek lisans tezinde $[0,1] \times [0,1]$ bölgesinde tanımlı aşağıdaki iki değişenli Bernstein polinomlarını tanımlamıştır;

$$B^*_{n,m}(f;\zeta,\eta) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f\left(\frac{k}{n},\frac{j}{m}\right) C_n^k C_m^j \zeta^k (1-\zeta)^{n-k}\eta^j(1-\eta)^{m-j}.$$

Bu operatör için yaklaşım hızını tam ve kısmi süreklilik modülleri yardımıyla hesaplamıştır ve bu operatör dizisinin $f(\zeta,\eta)$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını ispat etmiştir.

2004 yılında Aydın İzgi "İki değişkenli fonksiyonlar sınıfında Bernstein-Chlodowsky tipi lineer pozitif operatörlerin yakınsaklık özellikleri" isimli doktora tezinde genelleştirilmiş Bernstein-Chlodowsky operatörünü aşağıdaki gibi tanımlamıştır;

$$B^*_{n,m}(f;\zeta,\eta)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f\left(\alpha_1\zeta+\beta_1\frac{k}{n}b_n,\alpha_2\eta+\beta_2\frac{j}{m}b_m\right)\phi^{k,j}_{n,m}(x,y).$$

Burada $\phi^{k,j}_{n,m}(\zeta,\eta)=\varphi^k_n(\zeta)\varphi^j_m(\eta)$ olup $0\le t\le b_r$ için $\varphi^i_r(t)=C^i_r\left(\frac{t}{b_r}\right)^i\left(1-\frac{t}{b_r}\right)^{r-i}$ olarak tanımlamıştır ve bu polinomların yakınsaklık hızını hesaplamıştır. İzgi 2013 yılında tanımladığı yeni tip bir ve iki değişkenli Bernstein polinomları için yakınsama hızını hesaplamıştır.

2008'de U. Abel, V. Gupta ve R. N. Mohapatra, Bernstein-Durrmeyer operatörlerinin lokal yaklaşım özelliklerini incelemiştir. 2011 yılında V. Gupta, bir fonksiyonun yakınsamasını daha hızlı hale getirmek için Bernstein-Durrmeyer tipi operatörleri yeniden modifiye ederek kullanmıştır. Kompakt diskdeki analitik fonksiyonlara bağlı kompleks Durrmeyer tipi polinomları için Voronovskaya tipi asimptotik formülü elde etmiştir. Böylece bu tip Durrmeyer polinomları için yakınsama olgusuna katkı sağlamıştır.

2017 yılında Agrawal, Baxhaku ve Chauhan, Charlier polinomlarına bağlı iki değişkenli Szász-Chlodowsky operatörlerinin kombinasyonunun Kantorovich polinomlarını inşaa edip yaklaşım özelliklerini araştırıp, kısmi süreklilik modülü ve Peetre K- fonksiyonu yardımıyla yaklaşımını incelemişlerdir. Ayrıca, bu operatör için GBS (Genelleştirlmiş Boolean Toplamı) operatörünü oluşturup, yaklaşımını değerlendirmişlerdir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, çalışmamız için gerekli temel tanımlar ve teoremler verilecektir.

3.1. Temel Kavramlar

Tanım 3.1 *X kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonlar dizisi $\{h_n\}$ olsun. Her $\zeta \in X$ ve $\epsilon > 0$ için*

$$|h_n(\zeta) - h(\zeta)| < \epsilon, \ (n \geq N)$$

olacak şekilde bir $N = N(\zeta, \epsilon) \in \mathbb{N}$ varsa $\{h_n\}$ fonksiyonlar dizisi h fonksiyonuna noktasal yakınsaktır denir ve $\lim_{n\to\infty} h_n(\zeta) = h(\zeta)$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 3.2 *$\{f_n\}$, X kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonlar dizisi olsun. Her $\zeta \in X$ ve $\epsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda*

$$|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \epsilon$$

olacak şekilde $\exists\ n_0 = n_0(\epsilon)$ doğal sayısı varsa o zaman $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir ve $f_n(\zeta) \rightrightarrows f(\zeta)$ ile gösterilir. Başka bir deyiş ile

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{\zeta\in X} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| = 0$$

dır.

Tanım 3.3 *$f(\zeta, \eta)$ her mertebeden türevlenebilir, gerçel ya da karmaşık bir fonksiyon olsun. f nin tanım kümesindeki gerçel ya da karmaşık bir (a, b) noktası komşuluğunda*

$$\begin{aligned} f(\zeta,\eta) =& f(a,b) + (\zeta - a)\frac{\partial f}{\partial \zeta}(a,b) + (\eta - b)\frac{\partial f}{\partial \eta}(a,b) \\ &+ \frac{1}{2!}\left[(\zeta - a)^2\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}(a,b) + 2(\zeta - a)(\eta - b)\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta \partial \eta} + (\eta - b)^2\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}(a,b)\right] \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

elde edilen seriye iki değişkenli fonksiyonlar için Taylor Serisi veya Taylor Formülü denir.

İngiliz matematikçi Brook Taylor'dan adını alan Taylor serisi sıfır merkezli yani $b = 0$ alınır ise o zaman Taylor serisinin daha basit bir ifadesi olan bu özel formüle İskoç matematikçi Colin Maclaurin'e istinaden Maclaurin serisi denir.

3.2. İki Değişkenli Fonksiyonlar Sınıfı

Tanım 3.4 *X, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer aşağıdaki şartları sağlıyor ise o zaman $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine ise bir normlu uzay denir.*

1. *$\forall \zeta \in X$ için $\|\zeta\| \geq 0$*
2. *$\forall \zeta \in X$ için $\|\zeta\| = 0 \Leftrightarrow \zeta = 0$*
3. *$\forall \zeta \in X$ ve $\alpha \in F$ olmak üzere $\|\alpha\zeta\| = |\alpha| \|\zeta\|$*
4. *$\forall \zeta, \eta \in X$, $\|\zeta + \eta\| \leq \|\zeta\| + \|\eta\|$*

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{E} = [a, b] \times [c, d]$ alalım. Bu bölgede tanımlı tüm sürekli fonksiyonlar uzayını ise $C(\mathbb{E})$ ile gösterlim.

Lemma 3.5 *$C(\mathbb{E})$ uzayı bir lineer normlu uzaydır ve bu uzayda norm aşağıdaki gibi tanımlanır:*

$$\|f\|_{C(\mathbb{E})} = \max_{(\zeta,\eta)\in\mathbb{E}} |f(\zeta, \eta)| . \tag{3.1}$$

İspat. $f_1, f_2 \in C(\mathbb{E})$ olsun. O halde $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $\alpha f_1 + \beta f_2 \in C(\mathbb{E})$ olduğu açık olup $C(\mathbb{E})$ uzayı lineer uzaydır. Öncelikle $\|f\|_{C(\mathbb{E})} = 0 \Leftrightarrow f = 0$ olduğunu göstermeliyiz. (3.1)'dan görüldüğü gibi eşitliğin sağ tarafı pozitiftir. $\max_{(\zeta,\eta)\in\mathbb{E}} |f(\zeta, \eta)| = 0$ ise her $(\zeta, \eta) \in \mathbb{E}$ için $f(\zeta, \eta) = 0$ olduğu açıktır. Ayrıca her $(\zeta, \eta) \in \mathbb{E}$ için $f(\zeta, \eta) = 0$ ise $\max_{(\zeta,\eta)\in\mathbb{E}} |f(\zeta, \eta)| = 0$ dır, dolayısıyla istenilen elde edilir. Ayrıca, $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_{C(\mathbb{E})} &= \max_{(\zeta,\eta)\in\mathbb{E}} |\alpha f(\zeta, \eta)| \\ &= |\alpha| \max_{(\zeta,\eta)\in\mathbb{E}} |f(\zeta, \eta)| = |\alpha| \|f\|_{C(\mathbb{E})} \end{aligned}$$

dır. Son olarak, üçgen eşitsizliğini de göz önüne alırsak

$$
\begin{aligned}
\|f_1 + f_2\|_{C(\mathbb{E})} &= \max_{(\zeta,\eta)\in\mathbb{E}} |f_1(\zeta,\eta) + f_2(\zeta,\eta)| \\
&\leq \max_{(\zeta,\eta)\in\mathbb{E}} |f_1(\zeta,\eta)| + \max_{(\zeta,\eta)\in\mathbb{E}} |f_2(\zeta,\eta)| \\
&= \|f_1\|_{C(\mathbb{E})} + \|f_2\|_{C(\mathbb{E})}
\end{aligned}
$$

olur. Dolayısıyla 3.1 ifadesi bir norm olup, $C(\mathbb{E})$ bir lineer normlu uzaydır. □

Tanım 3.6 *İki indisli bir fonksiyon dizisi olan s aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

$$
\begin{aligned}
s :&\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to C(\mathbb{E}) \\
&(n,m) \to f_{n,m}.
\end{aligned}
$$

Tanım 3.7 *$n,m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(f_{n,m})$, $C(\mathbb{E})$ uzayında tanımlı bir fonksiyon dizisi ve $f \in C(\mathbb{E})$ olsun. Eğer*

$$\lim_{n,m\to\infty} \|f_{n,m} - f\|_{C(\mathbb{E})} = 0 \tag{3.2}$$

ise, bu durumda $(f_{n,m})$ dizisi f fonksiyonuna $C(\mathbb{E})$ uzayı üzerinde yakınsaktır denir.

Tanım 3.8 *Her $\epsilon > 0$ ve her $(\zeta,\eta) \in \mathbb{E}$ için $n,m > N$ iken*

$$|f_{n,m}(\zeta,\eta) - f(\zeta,\eta)| < \epsilon \tag{3.3}$$

olacak şekilde bir $N = N(\epsilon)$ sayısı mevcut ise, $(f_{n,m})$ dizisi $\mathbb{E}$ de f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir ve $f_{n,m} \rightrightarrows f$ ile gösterilir. Ayrıca,

$$\lim_{n,m\to\infty} \|f_{n,m} - f\|_{C(\mathbb{E})} = 0 \;\Leftrightarrow\; f_{n,m} \rightrightarrows f \tag{3.4}$$

olarak yazabiliriz. Bu ise, $C(\mathbb{E})$ uzayında (3.1)'de tanımlanan norma göre yakınsaklığın düzgün yakınsaklık ile denk olduğunu gösterir.

Sonuç 3.9 *$C(\mathbb{E})$ uzayının elemanlarından oluşmuş bir $f_{n,m}$ dizisi $C(\mathbb{E})$ uzayında bir f fonksiyonuna yakınsıyor ise o zaman her $(\zeta_0,\eta_0) \in \mathbb{E}$ için*

$$\lim_{n,m\to\infty} f_{n,m}(\zeta_0,\eta_0) = f(\zeta_0,\eta_0) \tag{3.5}$$

olur.

İspat. Tanım 3.8'e göre (3.2) eşitliği sağlanır. Yani, $n, m \to \infty$ iken

$$\max_{(\zeta,\eta)\in\mathbb{E}} |f_{n,m}(\zeta,\eta) - f(\zeta,\eta)| \to 0$$

dır ve $(\zeta_0, \eta_0) \in \mathbb{E}$ için

$$|f_{n,m}(\zeta_0,\eta_0) - f(\zeta_0,\eta_0)| \leq \max_{(\zeta,\eta)\in\mathbb{E}} |f_{n,m}(\zeta,\eta) - f(\zeta,\eta)|$$

olduğundan istenilen elde edilir. □

3.3. Süreklilik Modülü Tanımı ve Özellikleri

Süreklilik modülü ilk olarak Lorentz tarafından 1953 yılında tanımlanmıştır.

Tanım 3.10 *$I \subset \mathbb{R}$ sınırlı aralığı üzerindeki $f : I \to \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonunu alalım. Herhangi bir $\delta > 0$ için süreklilik modülü*

$$\omega(f;\delta) = \sup_{\substack{|a-b|\leq\delta \\ a,b\in I}} |f(a) - f(b)|$$

olarak tanımlanır.

$\omega(f;\delta)$, $\delta > 0$ için δ değişkenine göre pozitif bir fonksiyon olduğu görülmektedir.

Bu tez boyunca $\mathbb{D} = [-1,1] \times [-1,1]$ olmak üzere bu bölgede tanımlı tüm sürekli fonksiyonlar uzayını $C(\mathbb{D})$ ile gösterlim.

Şimdi iki değişkenli fonksiyonlar için süreklilik modülünü tanımlayacağız. Öncelikle $\mathbb{D} = [-1,1] \times [-1,1]$ karesel bölgesinde ki farklı noktaları $M_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, 2, 3, \cdots$ ve M_k, M_j noktaları arasındaki uzaklığı $\rho(M_k, M_j)$ olarak gösterelim:

$$\rho(M_k, M_j) = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}.$$

Tanım 3.11 *(Martinez,1989) f, $\mathbb{D}$ karesel bölgesi üzerinde tanımlı reel değerli sınırlı bir fonksiyon ve $\delta > 0$ olmak üzere*

$$\omega(f;\delta) = \max_{\substack{\rho(M_1,M_2)\leq\delta \\ M_1,M_2\in\mathbb{D}}} |f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \tag{3.6}$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun tam süreklilik modülü denir.

Lemma 3.12 *Altomare ve Campiti (1994) δ değişkenine göre, $\omega\left(f;\delta\right)$ tam süreklilik modülünün özellikleri aşağıdaki gibidir:*

a) $\omega\left(f;\delta\right)$ *negatif olmayan, monoton artan bir fonksiyondur.*

b) $\omega\left(f;\delta\right)=0$ *olması için gerek ve yeter koşul f nin sabit olmasıdır.*

c) $\lim_{\delta\to 0^{+}}\omega\left(f;\delta\right)=0$ *dır.*

d) $s\in\mathbb{N}$ *için* $\omega\left(f;s\delta\right)\leq s\omega\left(f;\delta\right)$ *olur.*

e) $\beta>0$ *için* $\omega\left(f;\beta\delta\right)\leq(\beta+1)\omega\left(f;\delta\right)$ *olur.*

Tanım 3.13 *f, $\mathbb{D}$ bölgesinde sürekli bir fonksiyon ve $\delta>0$ olsun.*

$$\omega^{(1)}\left(f;\delta\right)=\max_{(a_1,b),(a_2,b)\in\mathbb{D}}\ \max_{|a_1-a_2|\leq\delta}\left|f(a_1,b)-f(a_2,b)\right| \tag{3.7}$$

ve

$$\omega^{(2)}\left(f;\delta\right)=\max_{(a,b_1),(a,b_2)\in\mathbb{D}}\ \max_{|b_1-b_2|\leq\delta}\left|f(a,b_1)-f(a,b_2)\right| \tag{3.8}$$

fonksiyonlarına sırası ile f fonksiyonunun a ve b değişkenlerine göre kısmi süreklilik modülleri denir.

Tam süreklilik modulünde olduğu gibi kısmi süreklilik modülleri de Lemma 3.12 deki özellikleri sağlamaktadır.

3.4. Lipschitz Koşulu

Tanım 3.14 *f, $\mathbb{D}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon ve $M_1, M_2\in\mathbb{D}$ olmak üzere*

$$|f(M_1)-f(M_2)|\leq C\rho^{\alpha}(M_1,M_2),\ 0<\alpha<1 \tag{3.9}$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonu $\mathbb{D}$ bölgesinde C sabiti ile α-ıncı mertebeden Lipschitz koşulunu sağlıyor denir. Bu koşulu sağlayan fonksiyonların sınıfı $Lip\alpha$ ile gösterilir.

Tanım 3.15 *f, $\mathbb{D}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon ve $(\zeta_1,\eta),(\zeta_2,\eta)$ bu bölgede keyfi noktalar olmak üzere*

$$|f(\zeta_1,\eta)-f(\zeta_2,\eta)|\leq C\left|\zeta_1-\zeta_2\right|^{\alpha},\ 0<\alpha<1 \tag{3.10}$$

şartını sağlarsa, o zaman f fonksiyonu $\mathbb{D}$ bölgesinde x değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağlar veya ζ değişkenine göre $Lip\alpha$ sınıfindandır denir ve $f \in Lip_{\zeta}\alpha$ olarak yazılır. Benzer şekilde $\mathbb{D}$ bölgesinde keyfi $(\zeta, \eta_1), (\zeta, \eta_2)$ noktalarını alırsak

$$|f(\zeta, \eta_1) - f(\zeta, \eta_2)| \leq C\,|\eta_1 - \eta_2|^{\alpha}\,,\ 0 < \alpha < 1 \tag{3.11}$$

koşulunu sağlarsa, o zaman f fonksiyonu $\mathbb{D}$ bölgesinde η değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağlar veya η değişkenine göre $Lip\alpha$ sınıfindandır denir ve $f \in Lip_{\eta}\alpha$ olarak yazılır. (3.9) 'deki Lipschitz koşuluna bakılarak

$$\lim_{M_1 \to M_2} |f(M_1) - f(M_2)| = 0$$

olduğu kolayca görülür. Dolayısı ile $\mathbb{D}$ bölgesinde $f \in lip\alpha$ ise her $M_1, M_2 \in \mathbb{D}$ için f fonksiyonu $\mathbb{D}$ bölgesinde süreklidir. Benzer şekilde $f \in Lip_{\eta}\alpha$ veya $f \in Lip_{\zeta}\alpha$ olduğu durumda f sırası ile ζ ve η değişkenine göre süreklidir.

Kabul edelim ki $f \in lip\alpha$ olsun. (3.6) eşitliğinden görüldüğü üzere

$$\begin{aligned}\omega\,(f;\delta) =& \max_{\rho(M_1,M_2)\leq\delta, M_1,M_2\in\mathbb{D}} |f(\zeta_1, \eta_1) - f(\zeta_2, \eta_2)| \\ \leq& C \max_{\rho(M_1,M_2)\leq\delta} \rho^{\alpha}(M_1, M_2) \leq C\delta^{\alpha}\end{aligned} \tag{3.12}$$

ve $f \in lip\alpha$ olduğundan

$$\omega\,(f;\delta) = C\delta^{\alpha} \tag{3.13}$$

dır. Benzer şekilde $f \in Lip_{\eta}\alpha$ iken

$$\omega^{(1)}\,(f;\delta) = C\delta^{\alpha} \tag{3.14}$$

ve $f \in Lip_{x}\alpha$ iken

$$\omega^{(2)}\,(f;\delta) = C\delta^{\alpha} \tag{3.15}$$

olur. Kabul edelim ki $f \in Lip_{y}\alpha$ ve $f \in Lip_{\zeta}\beta$, $0 < \alpha < \beta < 1$ olsun. Bu durumda (3.10) ve (3.11) formüllerine göre

$$\begin{aligned}|f(\zeta_1, \eta) - f(\zeta_2, \eta)| \leq& C_1\,|\zeta_1 - \zeta_2|^{\alpha} \\ |f(\zeta, \eta_1) - f(\zeta, \eta_2)| \leq& C_2\,|\eta_1 - \eta_2|^{\beta}\end{aligned}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}|f(\zeta_1, \eta_1) - f(\zeta_2, \eta_2)| \leq& |f(\zeta_1, \eta_1) - f(\zeta_2, \eta_1)| + |f(\zeta_2, \eta_1) - f(\zeta_2, \eta_2)| \\ \leq& C_1\,|\zeta_1 - \zeta_2|^{\alpha} + C_2\,|\eta_1 - \eta_2|^{\beta}\end{aligned} \tag{3.16}$$

elde edilir. $\rho(M_1, M_2) \leq \delta$ *iken* $|\zeta_1 - \zeta_2| \leq \delta$ *ve* $|\eta_1 - \eta_2| \leq \delta$ *olduğundan (3.16) eşitsizliğinin her iki tarafının maksimumu alınırsa tam süreklilik modülü için*

$$\omega(f;\delta) \leq C_1\delta^{\alpha} + C_2\delta^{\beta} \tag{3.17}$$

elde edilir. Ayrıca süreklilik modülünün tanımından ve (3.6)'de $\delta = \rho(M_1, M_2)$ *alırsak*

$$|f(\zeta_1,\eta_1) - f(\zeta_2,\eta_2)| \leq \omega(f;\rho(M_1,M_2)) \tag{3.18}$$

eşitsizliği sağlanır. Benzer şekilde sırası ile $\delta = |\zeta_1 - \zeta_2|$ *ve* $\delta = |\eta_1 - \eta_2|$ *alırsak aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz:*

$$\begin{aligned} |f(\zeta_1,\eta) - f(\zeta_2,\eta)| &\leq \omega^{(1)}(f;|\zeta_1 - \zeta_2|) \\ |f(\zeta,\eta_1) - f(\zeta,\eta_2)| &\leq \omega^{(2)}(f;|\eta_1 - \eta_2|) . \end{aligned} \tag{3.19}$$

3.5. Lineer Pozitif Operatörler

Tanım 3.16 *(Musayev ve Alp,2007)* X, Y *fonksiyon uzayları ve* $E \subset X$ *olsun.* E*'nin her bir elemanına* Y*'nin bir elemanını karşılık getiren kurala* E*'den* Y*'ye bir operatör veya dönüşüm denir.*

L, E*'den* Y*'ye tanımlanan bir operatör olsun. Bu durumda* $L : E \to Y$ *ile gösterilir. Bu ifade* $x \in E$*'yi* $L(x) \in Y$ *ye götürdüğünü ifade eder ve* E*'ye* L *operatörünün tanım kümesi denir,* $E(L)$ *ile ifade edilir.* $x \in E$ *elemanlarının* $L(x) \in Y$ *operatör altındaki görüntülerinin oluşturdukları kümeye ise* L *operatörünün değer kümesi denir ve*

$$G(E) = \{y \in Y : y = L(x),\ x \in E(L)\}$$

olarak ifade edilir.

Tanım 3.17 *(Musayev ve Alp,2007)* X *ve* Y *aynı* F *cismi üzerinde tanımlanmış iki lineer uzay ve* $L : X \to Y$ *operatörü verilsin. Eğer* $E(L)$*,* X*'in bir alt uzayı*

$$\forall \zeta, \eta \in E(L) \text{ ve } \forall \alpha, \beta \in F \text{ için } L(\alpha\zeta + \beta\eta) = \alpha L(\zeta) + \beta L(\eta)$$

özelliğini sağlıyorsa L *operatörü lineerdir denir.*

X lineer uzayı, tanım kümesi A ve Y lineer uzayı, tanım kümesi B olan fonksiyonların sınıfı ve $L : X \to Y$ bir operatör olsun. $f \in X$ fonksiyonunun L operatörü altındaki görüntüsünün bir $\zeta \in B$ noktasındaki gösterimi

$$L(f(t);\zeta) = g(\zeta)$$

şeklinde kullanılmaktadır. $L(f;\zeta) = g(\zeta)$ olarak da ifade edilebilmektedir.

Tanım 3.18 *(Korovkin,1960) Negatif olmayan her f fonksiyonu için*

$$L(f;\zeta) \geq 0, \zeta \in B$$

koşulunu sağlayan $L : X \to Y$ operatörüne pozitif opertör denir. Yani, L bir pozitif operatör ise

$$X^+ = \{f \in X : \forall v \in A \text{ için } f(v) \geq 0\},$$
$$Y^+ = \{g \in Y : \forall \zeta \in B \text{ için } g(\zeta) \geq 0\}$$

olmak üzere, her $f \in X^+$ için $L(f;\zeta) \in Y^+$ olur. Hem lineer hem pozitif olan operatöre lineer pozitif operatör denir.

Lineer pozitif operatörlerin birçok özelliği olduğundan yaklaşım teorisinde önemli bir yeri vardır. 1995'de Hacısalihoğlu ve Haciyev lineer pozitif operatörlerin monoton artanlık gibi birçok özelliğini ele almıştır. Gerçekten; her $v \in A$ ve $f_1, f_2 \in X$ için $f_1(v) \geq f_2(v)$ olsun. O halde $f_1(v) - f_2(v) \geq 0$ olur. Böylece L lineer pozitif operatör olduğundan

$$L(f_1 - f_2;\zeta) \geq 0 \Rightarrow L(f_1;\zeta) - L(f_2;\zeta) \geq 0$$

olur. Böylece

$$L(f_1;\zeta) \geq L(f_2;\zeta)$$

Şimdi operatörler için norm tanımına bakalım.

Tanım 3.19 *(Lorentz,1966) L, X normlu lineer uzayından Y normlu lineer uzayına tanımlı bir lineer operatör olsun. X ve Y üzerindeki normlar sırası ile $\|\cdot\|_\zeta$ ve $\|\cdot\|_\eta$ ile gösterilsin. Eğer*

$$\|L(f)\|_Y \leq C\|f\|_X$$

olacak şekilde bir C pozitif sayısı bulunuyor ise L operatörüne sınırlı operatör denir. Bu koşulu sağlayan C sayılarının infimumuna L operatörünün normu denir ve kısaca $\|L\|$ ile gösterilir.

Teorem 3.20 *(Bohman,1952)* $\zeta \in [0,1]$, $0 \leq \alpha_{k,n} \leq 1$ *olmak üzere, genel terimi*

$$L_n(f;\zeta) = \sum_{k=0}^{n} f(\alpha_{k,n}) p_{n,k}(\zeta),\ p_{n,k}(\zeta) \geq 0 \tag{3.20}$$

olan dizinin $[0,1]$ *aralığında* $n \to \infty$ *iken* f *fonksiyonuna düzgün olarak yaklaşması için gerek ve yeter koşul*

$$L_n(t^r;\zeta) \to \zeta^r;\ r = 0,1,2 \tag{3.21}$$

olmasıdır. Operatörlerin değeri f *fonksiyonunun* $[0,1]$ *aralığı dışındaki değerlerinden bağımsızdır.*

1953'de Bohman'ın şartlarının genel durumda da geçerli olduğunu Korovkin aşağıdaki teorem ile göstermiştir.

Teorem 3.21 *(P. P. Korovkin,1960)* (L_n) *lineer pozitif operatörler dizisi için 3.21 şartları* $[a,b]$ *aralığında düzgün olarak sağlanıyor ise ozaman* $C[a,b]$ *de olan ve tüm reel eksende sınırlı olan her bir* f *fonksiyonu için*

$$L_n(f;\zeta) \rightrightarrows f(\zeta)$$

olur.

İspat. f reel eksende sınırlı olduğundan her ζ için $|f(\zeta)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. O halde $\forall\, t, \zeta \in [a,b]$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M \tag{3.22}$$

olur. Aynı zamanda $f \in C[a,b]$ olduğundan her $\epsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, $\zeta \in [a,b]$, $t \in \mathbb{R}$ ve $|t - \zeta| < \delta$ olduğunda

$$|f(t) - f(\zeta)| < \epsilon \tag{3.23}$$

olur. $\frac{2M}{\delta^2}(t-\zeta)^2 \geq 0$ olduğundan 3.23 eşitsizliğin sağ tarafına eklenir ise $\zeta \in [a,b]$, $t \in \mathbb{R}$ ve $|t - \zeta| < \delta$ için

$$|f(t) - f(\zeta)| < \epsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-\zeta)^2 \tag{3.24}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Eğer $|t-\zeta| \geq \delta$ ise $\frac{(t-\zeta)^2}{\delta^2} \geq 1$ olacağından $\frac{2M}{\delta^2}(t-\zeta)^2 \geq 2M$ olup $\epsilon > 0$ için 3.22 dan

$$|f(t) - f(\zeta)| \leq 2M \leq \epsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-\zeta)^2$$

olur. Dolayısı ile her $t \in \mathbb{R}$ ve $\zeta \in [a,b]$ için 3.24 eşitsizliği sağlanır.

Lineer pozitif operatörlerin özelliklerinden

$$\begin{aligned}
|L_n(f(t);\zeta) - f(\zeta)| &= |L_n(f(t);\zeta) - L_n(f(\zeta);\zeta) + L_n(f(\zeta);\zeta) - f(\zeta)| \\
&\leq |L_n(f(t) - f(\zeta);\zeta)| + |f(\zeta)(L_n(1;\zeta) - 1)| \\
&\leq L_n(|f(t) - f(\zeta)|;\zeta) + |f(\zeta)|\,|L_n(1;\zeta) - 1| \\
&\leq \epsilon + \frac{2M}{\delta^2} L_n\left((t-\zeta)^2;\zeta\right) + |f(\zeta)|\,|L_n(1;\zeta) - 1|
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
L_n\left((t-\zeta)^2;\zeta\right) &= L_n\left(t^2;\zeta\right) - 2\zeta L_n(t;\zeta) + \zeta^2 L_n(1;\zeta) \\
&= \left(L_n\left(t^2;\zeta\right) - \zeta^2\right) - 2\zeta\left(L_n(t;\zeta) - \zeta\right) + \zeta^2\left(L_n(1;\zeta) - 1\right)
\end{aligned}$$

olup 3.21'den $n \to \infty$ için $[a,b]$ aralığında $L_n((t-\zeta)^2;\zeta) \rightrightarrows 0$ olur ve böylece $|L_n(f(t);\zeta) - f(\zeta)| \rightrightarrows 0$ elde edilir. Böylece istenilen elde edilmiş olur. □

1962 yılında Baskakov, Korovkin teoremindeki f fonksiyonunun tüm reel eksende sınırlı olması koşulu yerine f fonksiyonuna bağlı bir sabit olan M_f ve her $x \in \mathbb{R}$ için

$$|f(\zeta)| \leq M_f\left(1 + \zeta^2\right) \tag{3.25}$$

şartının sağlanması halinde de düzgün yakınsamanın gerçeklendiğini aşağıdaki gibi göstermiştir. 3.25 koşulu sağlandığında

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(\zeta)| &\leq M_f\left(2 + t^2 + \zeta^2\right) \\
&= M_f\left(2 + (t-\zeta)^2 + 2\zeta(t-\zeta) + 2\zeta^2\right)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

yazabiliriz. $f \in C[a,b]$ olduğundan 3.23 sağlanır. Eğer $|t-\zeta| \geq \delta$ ise, $\frac{(t-\zeta)^2}{\delta^2} \geq 1$ olup 3.26 ten

$$|f(t) - f(\zeta)| \leq M_f\left(\frac{2}{\delta^2} + 1 + \frac{2\zeta}{\delta} + \frac{2\zeta^2}{\delta^2}\right)(t-\zeta)^2$$

elde edilir. $C = \left(\frac{2}{\delta^2} + 1 + \frac{2b}{\delta} + \frac{2b^2}{\delta^2}\right) M_f$ olmak üzere her $t \in \mathbb{R}$ ve $\zeta \in [a,b]$ için

$$|f(t) - f(\zeta)| \leq \epsilon + C(t-\zeta)^2 \tag{3.27}$$

elde edilir. 3.24 de olduğu gibi lineer pozitif operatörlerin özellikleri kullanılarak $[a, b]$ aralığı üzerinde

$$L_n(f; \zeta) \rightrightarrows f(\zeta)$$

elde edilir.

1995 yılında, Hacıyev ve Hacısalihoğlu Korovkin teoremini m- boyutlu uzaylar için aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

Teorem 3.22 *(Hacıyev ve Hacısalihoğlu,1995) $X \subset \mathbb{R}^m$ sınırlı bir bölge olmak üzere $C(X)$, X bölgesinde sürekli ve tüm $\mathbb{R}^m$ de sınırlı reel değerli fonksiyonların uzayı gösterilsin. Eğer (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi, $K \subset X$ kompakt bölgesinde $n \to \infty$ için*

$$\begin{aligned} L_n(1; \zeta) &\rightrightarrows 1 \\ L_n(t_i; \zeta) &\rightrightarrows \zeta_i \\ L_n\left(|t|^2; \zeta\right) &\rightrightarrows |\zeta|^2 \end{aligned} \tag{3.28}$$

şeklindeki $(m+2)$ tane şartı sağlıyorsa, o zaman keyfi $f \in C(X)$ için K üzerinde $n \to \infty$ iken

$$L_n(f; \zeta) \rightrightarrows f(\zeta)$$

olur. Burada $|\zeta|^2 = \sum_{k=1}^{m} \zeta_k^2$ dir.

İspat. Her $\epsilon > 0$, her $t \in \mathbb{R}^m$ ve her $\zeta \in K$ için 3.24 eşitsizliği burada da geçerlidir. Lineer pozitif operatörlerin özelliğinden

$$\begin{aligned} |L_n(f(t); \zeta) - f(\zeta)| \leq& |L_n(f(t) - f(\zeta); \zeta)| + |f(\zeta)(L_n(1; \zeta) - 1)| \\ \leq& L_n(|f(t) - f(\zeta)|; \zeta) + |f(\zeta)|\,|L_n(1; \zeta) - 1| \\ \leq& \epsilon + \frac{2M}{\delta^2} L_n\left(|t-\zeta|^2; \zeta\right) + |f(\zeta)|\,|L_n(1; \zeta) - 1| \\ \leq& \epsilon + \frac{2M}{\delta^2}\left\{L_n\left(|t|^2; \zeta\right) - 2\sum_{k=1}^{m} \zeta_k L_n(t_k; \zeta) + |\zeta|^2 L_n(1; \zeta)\right\} \\ &+ |f(\zeta)|\,|L_n(1; \zeta) - 1| \\ \leq& \epsilon + \frac{2M}{\delta^2}\left\{\left[L_n\left(|t|^2; \zeta\right) - |\zeta|^2\right] - 2\sum_{k=1}^{m} \zeta_k\left[L_n(t_k; \zeta) - \zeta^k\right]\right. \\ &\left. + |\zeta|^2\left[L_n(1; \zeta) - 1\right]\right\} + |f(\zeta)|\,|L_n(1; \zeta) - 1| \end{aligned}$$

(3.28)'de verilen koşullardan $n \to \infty$ ve her $\zeta \in K$ için $L_n(f(t); \zeta) \rightrightarrows f(\zeta)$ olur. $\square$

Şimdi, yukarıdaki teorem için f fonksiyonunun tüm $\mathbb{R}^m$ de sınırlı olması koşulu yerine f fonksiyonuna bağlı bir sabit olan M_f alırsak

$$|f(\zeta)| \leq M_f \left(1 + |\zeta|^2\right) \tag{3.29}$$

koşulu sağlandığında da düzgün yakınsamanın sağlanacağını ifade eden teoremi verelim.

Teorem 3.23 *$X \subset \mathbb{R}^m$ sınırlı bir bölge olmak üzere X bölgesinde sürekli ve tüm $\mathbb{R}^m$ de (3.29) koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfını $C_o(X)$ ile gösterelim. Eğer (L_n) lineer operatörler dizisi, $K \subset X$ kompakt bölgesinde $n \to \infty$ için*

$$L_n(1;\zeta) \rightrightarrows 1$$
$$L_n(t_i;\zeta) \rightrightarrows \zeta_i$$
$$L_n\left(|t|^2;\zeta\right) \rightrightarrows |\zeta|^2$$

şeklindeki $(m+2)$ tane şartı sağlıyorsa, o halde keyfi $f \in C_o(X)$ için K üzerinde $n \to \infty$ iken

$$L_n(f;\zeta) \rightrightarrows f(\zeta)$$

olur.

Teorem 3.24 *(Volkov,1957) T_{nm} lineer pozitif operatörler dizisi için*

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|T_{nm}(1;\zeta,\eta) - 1\|_{C(X)} = 0$$
$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|T_{nm}(t_1;\zeta,\eta) - \zeta\|_{C(X)} = 0$$
$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|T_{nm}(t_2;\zeta,\eta) - \eta\|_{C(X)} = 0$$
$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \left\|T_{nm}(t_1^2+t_2^2;\zeta,\eta) - (\zeta^2+\eta^2)\right\|_{C(X)} = 0$$

koşulları sağlandığında herhengi bir $f \in C_b(X)$ için

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|T_{nm}(f;\zeta,\eta) - f(\zeta+\eta)\|_{C(X)} = 0$$

dır.

3.6. Genelleştirilmiş Boolean Toplamı (GBS)

Bu bölümde, sürekli fonksiyonlar uzayından daha kapsamlı olan 1934 yılında Bögel tarafından tanımlanan Bögel sürekli fonksiyonlar uzayınının tanımlarını vereceğiz.

Tanım 3.25 *(Bögel (1934)) X ve Y kompakt reel aralıklar ve $\Delta_{(\zeta,\eta)} f\left[\zeta_0,\eta_0;\zeta,\eta\right]$ karışık fark denklemi $(\zeta,\eta),(\zeta_0,\eta_0) \in X\times Y$ için*

$$\Delta_{(\zeta,\eta)} f\left[\zeta_0,\eta_0;\zeta,\eta\right] = f(\zeta,\eta) - f(\zeta,\eta_0) - f(\zeta_0,\eta) + f(\zeta_0,\eta_0) \tag{3.30}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.26 *(Bögel (1934)) $f : X\times Y \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu alalım. Eğer herhangi $(\zeta,\eta) \in X\times Y$ için*

$$\lim_{(\zeta,\eta)\to(\zeta_0,\eta_0)} \Delta_{(\zeta,\eta)} f\left[\zeta_0,\eta_0;x,y\right] = 0 \tag{3.31}$$

ise o zaman f fonksiyonuna $(\zeta_0,\eta_0) \in X\times Y$ noktasında B-sürekli (Bögel sürekli) denir. Başka bir ifade ile; her $\epsilon > 0$ için $|\zeta-\zeta_0| < \delta$ ve $|\eta-\eta_0| < \delta$ olduğunda

$$\left|\Delta_{(\zeta,\eta)} f\left[\zeta_0,\eta_0;\zeta,\eta\right]\right| < \epsilon$$

olacak şekilde enaz bir $\delta > 0$ varsa o halde f fonksiyonuna $(\zeta_0,\eta_0) \in X\times Y$ noktasında B-süreklidir denir.

Tanım 3.27 *(Bögel (1934)) $f : X\times Y \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu alalım. Eğer her $(\zeta,\eta),(\zeta_0,\eta_0) \in X\times Y$ için*

$$\left|\Delta_{(\zeta,\eta)} f\left[\zeta_0,\eta_0;\zeta,\eta\right]\right| \le M \tag{3.32}$$

olacak şekilde bir $M > 0$ varsa ozaman f fonksiyonuna $X\times Y$ üzerinde B-sınırlı (Bögel sınırlı) denir.

Teorem 3.28 *Eğer $X\times Y$ kompakt bir küme ise o zaman her sürekli fonksiyon $X\times Y$ üzerinde B-sürekli bir fonksiyondur.*

İspat. f fonksiyonu $X \times Y$ de sürekli olsun. O halde her $\epsilon > 0$ için $|\zeta - \zeta_0| < \delta$ ve $|\eta - \eta_0| < \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır öyle ki tüm $(\zeta, \eta), (\zeta_0, \eta_0) \in X \times Y$ için $|f(\zeta, \eta) - f(\zeta_0, \eta_0)| < \epsilon$ olur.

$$\begin{aligned} \left|\Delta_{(\zeta,\eta)} f\left[\zeta_0, \eta_0; \zeta, \eta\right]\right| &= |f(\zeta, \eta) - f(\zeta, \eta_0) - f(\zeta_0, \eta) + f(\zeta_0, \eta_0)| \\ &\leq |f(\zeta, \eta) - f(\zeta_0, \eta)| + |f(\zeta, \eta_0) - f(\zeta_0, \eta_0)| \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

olur. Böylece her sürekli fonksiyon B-süreklidir. □

Dikkat edilirse; eğer $X \times Y$, $\mathbb{R}^2$ nin kompakt bir alt kümesi ise o zaman her B-sürekli fonksiyon $X \times Y \to \mathbb{R}$ üzerinde B-sınırlı bir fonksiyondur.

$X \times Y$ üzerindeki tüm B-sınırlı fonksiyonları $B_b(X \times Y)$, $X \times Y$ üzerindeki tüm B-sürekli fonksiyonların uzayını $C_b(X \times Y)$, $B(X \times Y)$ tüm sınırlı fonksiyonların uzayını, $C(X \times Y)$ ile de $X \times Y$ üzerindeki tüm sürekli fonksiyonların uzayını gösterelim. $B(X \times Y)$ ve $C(X \times Y)$ $\|f\|_\infty = \sup\{f(\zeta, \eta) : (\zeta, \eta) \in X \times Y\}$ normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 3.29 *Her* $(\zeta, \eta), (\zeta_0, \eta_0) \in X \times Y$ *ve herhangi* $(\delta_1, \delta_2) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ *için*

$$\omega_{kark}(f; \delta_1, \delta_2) := \sup\left\{\left|\Delta_{(\zeta,\eta)} f\left[\zeta_0, \eta_0; \zeta, \eta\right]\right| : |\zeta - \zeta_0| < \delta_1, |\eta - \eta_0| < \delta_2\right\} \tag{3.33}$$

$\omega_{kark} : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$*'ye* $f \in C_b(X \times Y)$ *fonksiyonunun karışık düzgünlük modülü denir.*

1988-90 yıllarında karışık düzgünlük modülü ω_{kark}'nın temel özellikleri Badea tafından verilmiştir. Bu özellikler bilinen klasik süreklilik modülünün özelliklerine benzerdir. Ayrıca; karışık düzgünlük modülü $\delta_1, \delta_2 > 0$ için

$$\omega_{kark}(f; \lambda_1\delta_1, \lambda_2\delta_2) \leq (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)\omega_{kark}(f; \delta_1, \delta_2) \tag{3.34}$$

eşitsizliğini sağlar.

Şimdi Bögel diferansiyellenebilir fonksiyon kavramını verelim.

Tanım 3.30 $f : X \times Y \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *bir fonksiyon olsun. Eğer*

$$\lim_{(\zeta,\eta)\to(\zeta_0,\eta_0)} \frac{\Delta_{(\zeta,\eta)} f\left[\zeta_0, \eta_0; \zeta, \eta\right]}{(\zeta - \zeta_0)(\eta - \eta_0)}$$

limiti var ve sonlu ise f fonksiyonuna $(\zeta_0, \eta_0) \in X \times Y$ noktasında Bögel diferansiyellenebilir (B-diferansiyellenebilir) denir.

Bu limite f fonksiyonunun (ζ_0, η_0) noktasındaki B-diferansiyelidir denir ve $T_{\zeta\eta} f(\zeta_0, \eta_0) := T_B(f; \zeta_0, \eta_0)$ ile gösterilir. $T_B(X \times Y)$ ile tüm diferansiyellenebilir fonksiyonların uzayını gösterelim.

Şimdi bir sonraki bölümde düzgünlük ölçümünü geliştirmek için kullanacağımız karışık K-fonksiyonelininin tanımını verelim.

Tanım 3.31 *$f \in C_b(\mathbb{D})$ olsun. $g_1 \in C_B^{2,0}$, $g_2 \in C_B^{0,2}$ ve $h \in C_B^{2,2}$ için karışık K-fonksiyoneli*

$$\mathcal{K}_{kark}\left(f; t_1, t_2\right) = \inf_{g_1, g_2, h} \left\{ \left\| f - g_1 - g_2 - h \right\|_\infty + t_1 \left\| T_B^{2,0} g_1 \right\|_\infty + t_2 \left\| T_B^{0,2} g_2 \right\|_\infty + t_1 t_2 \left\| T_B^{2,2} h \right\|_\infty \right\} \tag{3.35}$$

olarak tanımlıdır. Burada $C_B^{p,q}$; sürekli karışık kısmi türevlere sahip yani $0 \leq a \leq p$, $0 \leq b \leq q$ için $T_B^{a,b} f$ olacak şekildeki $f \in C_b(\mathbb{D})$ fonksiyonların uzayını gösterir.

$\Delta_\zeta f\left([\zeta_0, \zeta]; \eta_0\right) = f(\zeta, \eta_0) - f(\zeta_0, \eta_0)$ ve $\Delta_\eta f\left(\zeta_0; [\eta_0, \eta]\right) = f(\zeta_0, \eta) - f(\zeta_0, \eta_0)$ olmak üzere kısmi türevler aşağıdaki gibidir;

$$T_\zeta f(\zeta_0, \eta_0) := T_B^{1,0}(f; \zeta_0, \eta_0) = \lim_{\zeta \to \zeta_0} \frac{\Delta_\zeta f\left([\zeta_0, \zeta]; \eta_0\right)}{(\zeta - \zeta_0)}$$

ve

$$T_\eta f(\zeta_0, \eta_0) := T_B^{0,1}(f; \zeta_0, \eta_0) = \lim_{\eta \to \eta_0} \frac{\Delta_\eta f\left(\zeta_0; [\eta_0, \eta]\right)}{(\eta - \eta_0)}$$

dır. İkinci dereceden kısmi türevler de benzer şekildedir. Örneğin; $T_\zeta f(\zeta_0, \eta_0)$ ın (ζ_0, η_0) noktasındaki η değişkenine göre türevi

$$T_\eta T_\zeta f(\zeta_0, \eta_0) := T_B^{0,1} T_B^{1,0}(f; \zeta_0, \eta_0) = \lim_{\eta \to \eta_0} \frac{\Delta_\eta (T_\zeta f)\left(\zeta_0; [\eta_0, \eta]\right)}{(\eta - \eta_0)}$$

olarak tanımlanır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde genelleştirilmiş iki değişkenli Bernstein-Durrmeyer operatörleri tanımlanmıştır ve kompakt bir küme üzerinde sürekli fonksiyonlar uzayında süreklilik modülü yardımı ile yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Ayrıca Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlar ve Peetre K-fonksiyoneli için yaklaşımın derecesi hesaplanmış ve Voronovskaya tipi teoremi ispat edilmiştir. Ayrıca, Bernstein-Durrmeyer tipi GBS operatörü tanımlanarak elde edilen bu operatör için yakınsaklık hızı hesaplanmıştır. Maple programı kullanarak operatörün yakınsaklığı grafik üzerinde gösterilmiş ve Bernstein-Durrmeyer tipi GBS operatörü ile karşılaştırması yapılmıştır. Grafik üzerindeki maksimum değerler için nümerik değerler tablosu verilmiştir.

4.1. Genel Operatörün İnşaası

Tanım 4.1 $\mathbb{D} = [-1,1] \times [-1,1]$ *karesel bölgesini alalım.* $r, s \in \mathbb{N}$ *için* $(\zeta, \eta) \in \mathbb{D}$*, ve* f*,* $C(\mathbb{D})$ *de tanımlı bir fonksiyon olsun. Lineer pozitif* $D_{r,s}(f;\zeta,\eta)$ *operatörlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:*

$$D_{r,s}(f;\zeta,\eta) = \frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)f(t,u)dtdu \tag{4.1}$$

burada

$$\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta) = \varphi_r^k(\zeta)\varphi_s^j(\eta) \tag{4.2}$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi_r^k(\zeta) =& \frac{1}{2^r}\binom{r}{k}(1+\zeta)^k(1-\zeta)^{r-k} \\ \varphi_s^j(\eta) =& \frac{1}{2^s}\binom{s}{j}(1+\eta)^j(1-\eta)^{s-j} \end{aligned} \tag{4.3}$$

dir.

Şimdi $D_{r,s}$ operatörümüzün pozitif lineer bir operatör olduğunu gösterelim. Her $f, g \in C(D)$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} D_{r,s}(\alpha f(t,u) + \beta g(t,u); \zeta, \eta) =& \frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{r,s}^{k,j}(t,u) \\ & \times (\alpha f(t,u) + \beta g(t,u))\,dtdu \\ =& \alpha\frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{r,s}^{k,j}(t,u) \\ & \times f(t,u)dtdu \\ & + \beta\frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{r,s}^{k,j}(t,u) \\ & \times g(t,u)dtdu \\ =& \alpha D_{r,s}(f;\zeta,\eta) + \beta D_{r,s}(g;\zeta,\eta) \end{aligned}$$

olduğundan $D_{r,s}$ operatörü lineerdir. Ayrıca, her $(\zeta, \eta) \in \mathbb{D}$ için

$$\varphi_r^k(\zeta) = \frac{1}{2^r}\binom{r}{k}(1+\zeta)^k(1-\zeta)^{r-k} \geq 0$$

ve

$$\varphi_s^j(\eta) = \frac{1}{2^s}\binom{s}{j}(1+\eta)^j(1-\eta)^{s-j} \geq 0$$

olup $\phi_{r,s}^{k,j} = \varphi_r^k(\zeta)\varphi_s^j(\eta) \geq 0$ olur. Dolayısıyla eğer $f \geq 0$ ise

$$D_{r,s}(f;\zeta,\eta) \geq 0$$

elde ederiz. Böylece $D_{r,s}$ operatörü lineer pozitif bir operatördür.

4.2. Genelleştirilmiş Bernstein-Durrmeyer $D_{r,s}$ Operatörünün Momentleri

Lemma 4.2 *$\forall(\zeta, \eta) \in \mathbb{D}$ ve $\forall r, s \in \mathbb{N}$ için Bernstein-Durrmeyer operatörleri (4.1) aşağıdaki eşitlikleri sağlar:*

$$D_{r,s}(1;\zeta,\eta) = 1 \tag{4.4}$$

$$D_{r,s}(t;\zeta,\eta) = \zeta - \frac{2\zeta}{r+2} \tag{4.5}$$

$$D_{r,s}(u;\zeta,\eta) = \eta - \frac{2\eta}{s+2} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} D_{r,s}(t^2+u^2;\zeta,\eta) =& x^2 - \frac{(6r+6)\zeta^2 - 4r\zeta}{(r+2)(r+3)} + \frac{2-2r}{(r+2)(r+3)} \\ & + \eta^2 - \frac{(6s+6)\eta^2 - 4s\eta}{(s+2)(s+3)} + \frac{2-2s}{(s+2)(s+3)} \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}D_{r,s}(t^3+u^3;\zeta,\eta) =&\zeta^3 - \frac{12r^2+24r+24}{(r+2)(r+3)(r+4)}\zeta^3 + \frac{6r^2+6r}{(r+2)(r+3)(r+4)}\zeta \\ &+\frac{12r+48}{(r+2)(r+3)(r+4)} + \eta^3 - \frac{12s^2+24s+24}{(s+2)(s+3)(s+4)}\eta^3 \\ &+\frac{6s^2+6s}{(s+2)(s+3)(s+4)}\eta + \frac{12s+48}{(s+2)(s+3)(s+4)}\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}D_{r,s}(t^4+u^4;\zeta,\eta) =&\zeta^4 - \frac{20r^3+60r^2+160r+120}{(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}\zeta^4 \\ &+\frac{12r^3-16r^2+4r}{(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}\zeta^2 \\ &+\frac{-4r^3-16r^2+32r}{(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}\zeta + \eta^4 \\ &-\frac{20s^3+60s^2+160s+120}{(s+2)(s+3)(s+4)(s+5)}\eta^4 \\ &+\frac{12s^3-16s^2+4s}{(s+2)(s+3)(s+4)(s+5)}\eta^2 \\ &+\frac{-4s^3-16s^2+32s}{(s+2)(s+3)(s+4)(s+5)}\eta\end{aligned} \tag{4.9}$$

İspat. $D_{r,s}(1;\zeta,\eta) = 1$ eşitliği ispatlayalım. Öncelikle operatörün içindeki $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)f(t,u)dtdu$ integralini hesaplayalım. Ayrı ayrı incelersek

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\varphi_r^k(\zeta)d\zeta =&\int_{-1}^{1}\frac{1}{2^r}\binom{r}{k}(1+\zeta)^k(1-\zeta)^{r-k}d\zeta \\ =&\int_{-1}^{1}\binom{r}{k}\left(\frac{1}{2}+\frac{\zeta}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}-\frac{\zeta}{2}\right)^{r-k}d\zeta \\ =&2\int_{0}^{1}\binom{r}{k}u^k(1-u)^{r-k}du = \frac{2}{r+1}\end{aligned} \tag{4.10}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\varphi_s^j(\eta)d\eta =&\int_{-1}^{1}\frac{1}{2^s}\binom{s}{j}(1+\eta)^j(1-\eta)^{s-j}d\eta \\ =&\int_{-1}^{1}\binom{s}{j}\left(\frac{1}{2}+\frac{\eta}{2}\right)^j\left(\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}\right)^{s-j}d\eta \\ =&2\int_{0}^{1}\binom{s}{j}u^j(1-u)^{s-j}du = \frac{2}{s+1}\end{aligned} \tag{4.11}$$

olur. 4.10 ve 4.11 den yararlanarak

$$
\begin{aligned}
D_{r,s}(1;\zeta,\eta) =& \frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(x,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)dtdu \\
=& \frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(x,\eta)\frac{2}{r+1}\frac{2}{s+1} \\
=& \sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta) \\
=& \frac{1}{2^r}\left(1+\zeta+1-\zeta\right)^r\frac{1}{2^s}\left(1+\eta+1-\eta\right)^s \\
=& 1
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Şimdi $D_{r,s}(t;\zeta,\eta)=\zeta-\frac{2\zeta}{n+2}$ eşitliğini gösterelim.

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\varphi_r^k(\zeta)\zeta d\zeta =& \int_{-1}^{1}\frac{1}{2^r}\binom{r}{k}(1+\zeta)^k(1-\zeta)^{r-k}\zeta d\zeta \\
=& \int_{-1}^{1}\binom{r}{k}\left(\frac{1}{2}+\frac{\zeta}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}-\frac{\zeta}{2}\right)^{r-k}\zeta d\zeta \\
=& 2\int_{0}^{1}\binom{r}{k}u^k(1-u)^{n-k}(2u-1)du \\
=& 2\left(\int_{0}^{1}\binom{r}{k}2u^{k+1}(1-u)^{r-k}du-\int_{0}^{1}\binom{r}{k}u^k(1-u)^{r-k}du\right) \\
=& 2\left(\frac{2(k+1)}{(r+1)(r+2)}-\frac{1}{r+1}\right)
\end{aligned}
$$

olduğunu gözönüne alırsak

$$
\begin{aligned}
D_{r,s}(t;\zeta,\eta) =& \frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)tdtdu \\
=& \sum_{k=0}^{r}\frac{2k}{r+2}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)+\frac{2}{r+2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)-\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta) \\
=& \frac{2}{r+2}\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{2^r}\frac{r(r-1)!k}{k(k-1)!(r-k)!}(1+\zeta)^k(1-\zeta)^{r-k}\sum_{j=0}^{s}\varphi_s^j(\eta) \\
&+\frac{2}{r+2}-1 \\
=& \frac{r}{r+2}\frac{1}{2^{r-1}}\sum_{k=0}^{r-1}\binom{r-1}{k}(1+\zeta)^{k+1}(1-\zeta)^{n-k-1}\sum_{j=0}^{s}\varphi_s^j(\eta)+\frac{2}{r+2}-1 \\
=& \frac{r(1+\zeta)}{(r+2)2^{r-1}}(1+\zeta+1-\zeta)^{r-1}+\frac{2}{r+2}-1 \\
=& \frac{r(1+\zeta)}{(r+2)2^{r-1}}+\frac{2}{r+2}-1 \\
=& \zeta-\frac{2\zeta}{r+2}
\end{aligned}
$$

buluruz. Gerçekten $r \to \infty$ iken $D_{r,s}(t;\zeta,\eta) \rightrightarrows \zeta$ olur. Şimdi $D_{r,s}(u;\zeta,\eta) = \eta - \frac{2\eta}{s+2}$ eşitliğini gösterelim.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \varphi_s^j(\eta)\eta d\eta &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2^s}\binom{s}{j}(1+\eta)^j(1-\eta)^{s-j}\eta d\eta \\
&= \int_{-1}^{1}\binom{s}{j}\left(\frac{1}{2}+\frac{\eta}{2}\right)^j\left(\frac{1}{2}-\frac{\eta}{2}\right)^{s-j}\eta d\eta \\
&=2\int_{0}^{1}\binom{s}{j}u^j(1-u)^{s-j}(2u-1)du \\
&=2\left(\int_0^1\binom{s}{k}2u^{k+1}(1-u)^{s-j}du-\int_0^1\binom{s}{j}u^j(1-u)^{s-j}du\right) \\
&=2\left(\frac{2(j+1)}{(s+1)(s+2)}-\frac{1}{r+1}\right)
\end{aligned}$$

olduğunu gözönüne alırsak

$$\begin{aligned}
D_{r,s}(u;\zeta,\eta) =&\frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)udtdu \\
=&\sum_{k=0}^{r}\varphi_r^k(\zeta)\sum_{j=0}^{s}\frac{2j}{s+2}+\frac{2}{s+2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)-\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta) \\
=&\frac{s(1+\eta)}{(s+2)2^{s-1}}(1+\eta+1-\eta)^{s-1}+\frac{2}{s+2}-1 \\
=&\frac{s(1+\eta)}{(s+2)2^{s-1}}+\frac{2}{s+2}-1 \\
=&\eta-\frac{2\eta}{s+2}
\end{aligned}$$

buluruz. Böylece

$$D_{r,s}(u;\zeta,\eta) = \eta - \frac{2\eta}{s+2}$$

buluruz. Gerçekten $m \to \infty$ iken $D_{r,s}(u;\zeta,\eta) \rightrightarrows \eta$ olur. Şimdi

$$\begin{aligned}
D_{r,s}(t^2+u^2;\zeta,\eta) =&\zeta^2-\frac{(6r+6)\zeta^2-4r\zeta}{(r+2)(r+3)}+\frac{2-2r}{(r+2)(r+3)} \\
&+\eta^2-\frac{(6s+6)\eta^2-4s\eta}{(s+2)(s+3)}+\frac{2-2s}{(s+2)(s+3)}
\end{aligned}$$

eşitliğinin ispatı için $D_{r,s}(t^2;\zeta,\eta)$ ü ve $D_{r,s}(u^2;\zeta,\eta)$ yi hesaplayalım. Öncelikle

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\varphi_r^k(\zeta)\zeta^2 d\zeta =&\int_{-1}^{1}\frac{1}{2^r}\binom{r}{k}(1+\zeta)^k(1-\zeta)^{r-k}\zeta^2 d\zeta\\
=&2\int_0^1\binom{r}{k}u^k(1-u)^{r-k}(2u-1)^2du\\
=&2\left(\int_0^1\binom{r}{k}4u^{k+2}(1-u)^{r-k}du-\int_0^1\binom{r}{k}4u^{k+1}(1-u)^{n-k}du\right.\\
&\left.+\int_0^1\binom{r}{k}u^k(1-u)^{r-k}du\right)\\
=&2\left(\frac{4(k+1)(k+2)}{(r+1)(r+2)(r+3)}-\frac{4(k+1)}{(r+1)(r+2)}+\frac{1}{r+1}\right)\\
=&\frac{8k^2-8rk+2r^2+2r+4}{(r+1)(r+2)(r+3)}
\end{aligned}
$$

elde ederiz ve operatörde yerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
D_{r,s}(t^2;\zeta,\eta)=&\frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)t^2dtdu\\
=&\frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\frac{8k^2-8rk+2r^2+2r+4}{(r+1)(r+2)(r+3)}\frac{2}{s+1}\\
=&\frac{4}{(r+2)(r+3)}\sum_{k=0}^{r}k^2\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)-\frac{4r}{(r+2)(r+3)}\sum_{k=0}^{r}k\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\\
&+\frac{r^2+r+2}{(r+2)(r+3)}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\\
=&\frac{4}{(r+2)(r+3)}\sum_{k=0}^{r}(k(k-1)+k)\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)-\frac{4r}{(r+2)(r+3)}\\
&\times\sum_{k=0}^{r}k\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)+\frac{r^2+r+2}{(r+2)(r+3)}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\\
=&\frac{r(r-1)}{(r+2)(r+3)}(1+\zeta)^2-\frac{2r+2r^2}{(r+2)(r+3)}(1+\zeta)+\frac{r^2+r+2}{(r+2)(r+3)}\\
=&\zeta^2+\frac{(6r+6)\zeta^2-4r\zeta}{(r+2)(r+3)}+\frac{2-2r}{(r+2)(r+3)}
\end{aligned}
$$

elde ederiz. $r \to \infty$ iken $D_{r,s}(t^2;\zeta,\eta) \rightrightarrows \zeta^2$ olur. Benzer işlemler yapılarak

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\varphi_s^j(\eta)\eta^2 d\zeta =& \int_{-1}^{1}\frac{1}{2^s}\binom{s}{j}(1+\eta)^j(1-\eta)^{s-j}\eta^2 d\eta\\ =&2\int_0^1\binom{s}{j}u^j(1-u)^{s-j}(2u-1)^2du\\ =&2\left(\int_0^1\binom{s}{j}4u^{j+2}(1-u)^{s-j}du-\int_0^1\binom{s}{j}4u^{j+1}(1-u)^{s-j}du\right.\\ &\left.+\int_0^1\binom{s}{j}u^j(1-u)^{s-j}du\right)\\ =&2\left(\frac{4(j+1)(j+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)}-\frac{4(j+1)}{(s+1)(s+2)}+\frac{1}{s+1}\right)\\ =&\frac{8j^2-8sj+2s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)}\end{aligned}$$

elde ederiz ve $D_{r,s}(t^2;\zeta,\eta)$ deki gibi yerine yazıp devam edersek

$$\begin{aligned}D_{r,s}(u^2;\zeta,\eta) =&\frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)u^2dtdu\\ =&\frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\frac{8j^2-8sj+2s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)}\frac{2}{r+1}\\ =&\frac{s(s-1)}{(s+2)(s+3)}(1+\eta)^2-\frac{2s+2s^2}{(s+2)(s+3)}(1+\eta)+\frac{s^2+s+2}{(s+2)(s+3)}\\ =&\eta^2+\frac{(6s+6)\eta^2-4s\eta}{(s+2)(s+3)}+\frac{2-2s}{(s+2)(s+3)}\end{aligned}$$

elde ederiz ve $s \to \infty$ iken $D_{r,s}(u^2;\zeta,\eta) \rightrightarrows \eta^2$ olur. (4.8) eşitliğini göstermek için öncelikle $D_{r,s}(t^3;\zeta,\eta)$ ü ve $D_{r,s}(u^3;\zeta,\eta)$ ü hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
D_{r,s}(t^3;\zeta,\eta) =& \frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)t^3dtdu \\
=& \sum_{k=0}^{r}\frac{8k^3}{(r+2)(r+3)(r+4)}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta) - \sum_{k=0}^{r}\frac{12rk^2}{(r+2)(r+3)(r+4)} \\
& \times\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta) + \sum_{k=0}^{r}\frac{(16+6r+6r^2)k}{(r+2)(r+3)(r+4)}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta) \\
& + \frac{4r-3r^2-r^3+48}{(r+2)(r+3)(r+4)}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta) \\
=& \frac{8}{(r+2)(r+3)(r+4)}\sum_{k=0}^{r}\Big(k(k-1)(k-2)+3k^2-2k\Big)\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta) \\
& - \frac{12r}{(r+2)(r+3)(r+4)}\sum_{k=0}^{r}(k(k-1)+k)\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta) \\
& + \frac{(16+6r+6r^2)k}{(r+2)(r+3)(r+4)}\sum_{k=0}^{r}k\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta) \\
& + \frac{4r-3r^2-r^3+48}{(r+2)(r+3)(r+4)}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta) \\
=& \frac{8}{(r+2)(r+3)(r+4)}\left(\sum_{k=3}^{r}\frac{1}{2^r}\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)!}{k(k-1)(k-2)(k-3)!(r-k)!}\right. \\
& \times k(k-1)(k-2)(1+x)^k(1-x)^{r-k}\sum_{j=0}^{s}\varphi_s^j(\eta) \\
& + 3\sum_{k=2}^{r}\frac{1}{2^r}\frac{r(r-1)(r-2)!}{k(k-1)(k-2)!(r-k)!}k(k-1)(1+\zeta)^k(1-\zeta)^{r-k}\sum_{j=0}^{s}\phi_s^j(\eta) \\
& + 3\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{2^r}\frac{r(r-1)!}{k(k-1)!(r-k)!}k(1+\zeta)^k(1-\zeta)^{r-k}\sum_{j=0}^{s}\varphi_s^j(\eta) \\
& \left. - 2\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{2^r}\frac{r(r-1)!}{k(k-1)!(r-k)!}k(1+\zeta)^k(1-\zeta)^{r-k}\sum_{j=0}^{s}\varphi_s^j(\eta)\right) \\
& - \frac{12r}{(r+2)(r+3)(r+4)}\left(\sum_{k=2}^{r}\frac{1}{2^r}\frac{r(r-1)(r-2)!}{k(k-1)(k-2)!(r-k)!}k(k-1)(1+\zeta)^k\right. \\
& \times(1-\zeta)^{r-k}\sum_{j=0}^{s}\varphi_s^j(\eta) \\
& \left. + \sum_{k=1}^{r}\frac{1}{2^r}\frac{r(r-1)!}{k(k-1)!(n-k)!}k(1+\zeta)^k(1-\zeta)^{r-k}\sum_{j=0}^{s}\varphi_s^j(\eta)\right) \\
& + \frac{(16+6r+6r^2)}{(r+2)(r+3)(r+4)}\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{2^r}\frac{r(r-1)!}{k(k-1)!(r-k)!}k(1+\zeta)^k(1-\zeta)^{r-k} \\
& \times\sum_{j=0}^{s}\varphi_s^j(\eta) + \frac{4r-3r^2-r^3+48}{(r+2)(r+3)(r+4)}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \zeta^3 - \frac{12r^2+24r+24}{(r+2)(r+3)(r+4)}\zeta^3 + \frac{6r^2+6r}{(r+2)(r+3)(r+4)}\zeta \\
&+ \frac{12r+48}{(r+2)(r+3)(r+4)}
\end{aligned}
$$

elde edilir ve gerçekten $r \to \infty$ iken $D_{r,s}(t^3;\zeta,\eta) \rightrightarrows x^3$ olur. Benzer işlemler $D_{r,s}(u^3;\zeta,\eta)$ için uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
D_{r,s}(u^3;\zeta,\eta) =& y^3 - \frac{12s^2+24s+24}{(s+2)(s+3)(s+4)}\eta^3 + \frac{6s^2+6s}{(s+2)(s+3)(s+4)}\eta \\
&+ \frac{12s+48}{(s+2)(s+3)(s+4)}
\end{aligned}
$$

elde edilip $s \to \infty$ iken $D_{r,s}(u^3;\zeta,\eta) \rightrightarrows \eta^3$ olur. Dolayısı ile

$$
\begin{aligned}
D_{r,s}(t^3+u^3;\zeta,\eta) ==& \zeta^3 - \frac{12r^2+24r+24}{(r+2)(r+3)(r+4)}\zeta^3 + \frac{6r^2+6r}{(r+2)(r+3)(r+4)}\zeta \\
&+ \frac{12r+48}{(r+2)(r+3)(r+4)} + \eta^3 - \frac{12s^2+24s+24}{(s+2)(s+3)(s+4)}\eta^3 \\
&+ \frac{6s^2+6s}{(s+2)(s+3)(s+4)}\eta + \frac{12m+48}{(s+2)(s+3)(s+4)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. 4.9 eşitliği de önceki eşitliklere benzer ekilde yapılır. □

Lemma 4.2 den , aşağıdaki lemmayı elde ederiz.

Lemma 4.3 *$\forall(\zeta,\eta) \in \mathbb{D}$ ve $r,s \in \mathbb{N}$ için (4.1) de tanımlanan $D_{r,s}$ operatörünün merkezi momentleri aşağıdaki gibidir:*

$$
D_{r,s}((t-\zeta)^2;\zeta,\eta) = \frac{(-2r+6)\zeta^2+4r\zeta+2-2r}{(r+2)(r+3)} \tag{4.12}
$$

$$
D_{r,s}((u-\eta)^2;\zeta,\eta) = \frac{(-2s+6)\eta^2+4s\eta+2-2s}{(s+2)(s+3)} \tag{4.13}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{r,s}((t-\zeta)^4;\zeta,\eta) =& \frac{72r^3+852r^2+1916r+1680}{(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}x^4 + \frac{24r}{(r+2)(r+3)}\zeta^3 \\
&+ \frac{-24r^3-272r^2-830r+840}{(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}\zeta^2 \\
&+ \frac{-4r^3-64r^2-464r-960}{(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}\zeta
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{r,s}((u-\eta)^4;\zeta,\eta) =& \frac{72s^3+852s^2+1916s+1680}{(s+2)(s+3)(s+4)(s+5)}\eta^4 + \frac{24s}{(s+2)(s+3)}\eta^3 \\
&+ \frac{-24s^3-272s^2-830s+840}{(s+2)(s+3)(s+4)(s+5)}\eta^2 \\
&+ \frac{-4s^3-64s^2-464s-960}{(s+2)(s+3)(s+4)(m+5)}\eta
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

dir.

İspat. (4.12) eşitliği için (4.7) eşitliğini göz önüne alırsak

$$
\begin{aligned}
D_{r,s}((t-\zeta)^2;\zeta,\eta) =& \frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{r,s}^{k,j}(t,u) \\
&\times\left(t^2-2t\zeta+\zeta^2\right)dtdu \\
=& \frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}t^2\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)dtdu \\
&-2\zeta\frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}t\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)dtdu \\
&+\zeta^2\frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)dtdu \\
=& \frac{(-2r+6)\zeta^2+4r\zeta+2-2r}{(r+2)(r+3)}
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Benzer şekilde (4.7) denklemini göz önüne aldığımızda

$$
\begin{aligned}
D_{r,s}((u-\eta)^2;\zeta,\eta) =& \frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{r,s}^{k,j}(t,u) \\
&\times\left(u^2-2u\eta+\eta^2\right)dtdu \\
=& \frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}u^2\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)dtdu \\
&-2\eta\frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}u\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)dtdu \\
&+\eta^2\frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)dtdu \\
=& \frac{(-2s+6)\eta^2+4s\eta+2-2s}{(s+2)(s+3)}
\end{aligned}
$$

istenilen elde edilir. Şimdi (4.14) denklemini gösterelim. (4.9), (4.8) ve (4.7) denklemlerini göz önüne alırsak

$$
\begin{aligned}
D_{r,s}((t-\zeta)^4;\zeta,\eta) =& \frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{r,s}^{k,j}(t,u) \\
&\times\left(t^4-4\zeta t^3+6\zeta^2t^2-4\zeta^3t+\zeta^4\right)dtdu \\
=& D_{r,s}(t^4;\zeta,y)-4xD_{r,s}(t^3;\zeta,\eta)+6x^2D_{r,s}(t^2;\zeta,\eta) \\
& -4\zeta^3D_{r,s}(t;\zeta,\eta)+\zeta^4 \\
& \frac{72r^3+852r^2+1916r+1680}{(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}\zeta^4+\frac{24r}{(r+2)(r+3)}\zeta^3 \\
& +\frac{-24r^3-272r^2-830r+840}{(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}\zeta^2 \\
& +\frac{-4r^3-64r^2-464r-960}{(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}\zeta
\end{aligned}
$$

elde ederiz. (4.15) denklemi için (4.9), (4.8) ve (4.7) denklemlerini göz önüne alırsak

$$
\begin{aligned}
D_{r,s}((u-\eta)^4;\zeta,\eta) =& \frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{r,s}^{k,j}(t,u) \\
&\times\left(t^4-4\zeta t^3+6\zeta^2t^2-4\zeta^3t+\zeta^4\right)dtdu \\
=& D_{r,s}(t^4;\zeta,\eta)-4\zeta D_{r,s}(t^3;\zeta,\eta)+6\zeta^2D_{r,s}(t^2;\zeta,\eta) \\
& -4\zeta^3D_{r,s}(t;\zeta,\eta)+\zeta^4
\end{aligned}
$$

istenilen elde edilir. □

Lemma 4.4 *$r\in\mathbb{N}$ ve her $x_0\in[-1,1]$ ve $y_0\in[-1,1]$ alalım. O halde*

$$
D_{r,r}\left((t-\zeta_0)^4;\zeta_0,\eta\right)\le M_1(\zeta_0)r^{-1}
$$

ve

$$
D_{r,r}\left((u-\eta_0)^4;\zeta,\eta_0\right)\le M_2(\eta_0)r^{-1}
$$

olacak şekilde $M_1(\zeta_0)$ ve $M_2(\eta_0)$ pozitif sabiti vardır.

İspat. Lemma 4.3 den yararlanarak

$$
\begin{aligned}
&D_{r,s}((t-\zeta)^4;\zeta,\eta)\\
=&\frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)\\
&\times\left(t^4-4\zeta t^3+6\zeta^2t^2-4\zeta^3t+\zeta^4\right)dtdu\\
=&D_{r,s}(t^4;\zeta,\eta)-4\zeta D_{r,s}(t^3;\zeta,\eta)+6\zeta^2D_{r,s}(t^2;\zeta,\eta)\\
&-4\zeta^3D_{r,s}(t;\zeta,\eta)+\zeta^4\\
=&\frac{72r^3+852r^2+1916r+1680}{(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}\zeta^4+\frac{24r}{(r+2)(r+3)}\zeta^3\\
+&\frac{-24r^3-272r^2-830r+840}{(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}\zeta^2\\
+&\frac{-4r^3-64r^2-464r-960}{(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}\zeta
\end{aligned}
$$

olduğunu biliyoruz. Burada $\zeta_0\in[-1,1]$ alırsak $D_{r,s}((t-\zeta)^4;\zeta,\eta)\leq\frac{M_1(\zeta_0)}{r}$ olduğu açıktır. Benzer işlemler ile $D_{r,s}((u-\eta)^4;\zeta,\eta)\leq\frac{M_2(\eta_0)}{r}$ olacak şekilde $M_2(\eta_0)$ pozitif sabiti vardır. □

4.3. Genelleştirilmiş Bernstein-Durrmeyer $D_{r,s}$ Operatörünün Yaklaşımı

Bu bölümde, D_{rs} operatörlerinin sürekli bir f fonksiyonuna düzgün yakınsadığı Korovkin teoremi yardımıyla verilmiştir. Yaklaşım hızı ise süreklilik modülü, Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar ve Peetre K-fonksiyoneli yardımıyla incelenmiştir.

Teorem 4.5 *$f\in C(\mathbb{D})$ ve bütün düzlemde sınırlı olsun. $r,s\to\infty$ iken, $D_{r,s}$ operatörü (4.1) f fonksiyonuna $\mathbb{D}\subset\mathbb{R}^2$ bölgesi üzerinde düzgün yakınsaktır. Yani;*

$$\lim_{r,s\to\infty}\|D_{r,s}(f;\zeta,\eta)-f\|_{C(\mathbb{D})}=0$$

dır.

İspat. $D_{r,s}$ operatörünün $r,s\to\infty$ iken $C(\mathbb{D})$ normuna göre sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsadığını göstermek için Korovkin teoreminin şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir. Daha önce gösterilen $D_{r,s}(1;\zeta,\eta)=1$ ve 4.7 deki eşitlik kullanılarak

$$\lim_{r,s\to\infty}\|D_{r,s}(1;\zeta,\eta)-1\|_{C(\mathbb{D})}=0$$

olduğu açıktır. Yani $r,s \to \infty$ iken $D_{r,s}(1;\zeta,\eta) \rightrightarrows 1$ dir. Şimdi (4.5) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\|D_{r,s}(t;\zeta,\eta)-\zeta\|_{C(\mathbb{D})} &= \max_{\zeta,\eta\in[-1,1]}\left|\zeta-\frac{2\zeta}{r+2}-\zeta\right| \\ &= \max_{\zeta,\eta\in[-1,1]}\left|-\frac{2\zeta}{r+2}\right| \\ &\leq \frac{2}{r+2}\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\lim_{n,m\to\infty}\|D_{r,s}(t;\zeta,\eta)-\zeta\|_{C(\mathbb{D})}=0$$

elde edilir. Yani $r,s \to \infty$ iken $D_{r,s}(t;\zeta,\eta) \rightrightarrows \zeta$ olur. Benzer şekilde (4.6) eşitliğinden $D_{r,s}(u;\zeta,\eta) \rightrightarrows y$ olduğu açıktır. Şimdi (4.7) eşitliğinden

$$\begin{aligned}&\left\|D_{r,s}\ (t^2+u^2;\zeta,\eta)-(\zeta^2+\eta^2)\right\|_{C(\mathbb{D})} \\ &= \max_{\zeta,\eta\in[-1,1]}\left|-\frac{(6r+6)\zeta^2-4r\zeta+2-2r}{(r+2)(r+3)}-\frac{(6s+6)\eta^2-4s\eta+2-2s}{(s+2)(s+3)}\right| \\ &\leq \frac{2-2r}{(r+2)(r+3)}+\frac{2-2s}{(s+2)(s+3)}\end{aligned}$$

elde edilir. $r,s \to \infty$ iken

$$\lim_{r,s\to\infty}\left\|D_{r,s}(t^2+u^2;\zeta,\eta)-(\zeta^2+\eta^2)\right\|_{C(\mathbb{D})}=0$$

olur. Yani, $D_{r,s}(t^2+u^2;\zeta,\eta) \rightrightarrows \zeta^2+\eta^2$ elde edilir. Böylece Korovkin teoreminin tüm şartların sağladığı gösterilip teoremin ispatı tamamlanmış olur. □

Teorem 4.6 *$f \in C(\mathbb{D})$ olsun. $\{D_{r,s}f\}$, f fonksiyonunun Bernstein-Durrmeyer polinomlar dizisi ve $\omega,\omega^{(1)},\omega^{(2)}$ f fonksiyonunun tam ve kısmi süreklilik modülleri ve her $(x,y)\in\mathbb{D}$ için*

$$\|D_{r,s}(f;\zeta,\eta)-f\|_{C(\mathbb{D})} \leq 3\left(\omega^{(1)}\left(f;\frac{1}{\sqrt{r}}\right)+\omega^{(2)}\left(f;\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\right) \quad (4.16)$$

$$\|D_{r,s}(f;\zeta,\eta)-f\|_{C(\mathbb{D})} \leq 3\omega\left(f;\sqrt{\frac{1}{r}+\frac{1}{s}}\right) \quad (4.17)$$

dir.

İspat. Bu teoremin ispatı için süreklilik modülünün özellikleri ve (4.1), (4.4) kullanılacaktır. Şimdi (4.16) nın nın ispatına bakalım.

$$\begin{aligned}D_{r,s}\left(f;\zeta,\eta\right)-f(\zeta,\eta) =& D_{r,s}\left(f(t,u)-f(\zeta,\eta);\zeta,\eta\right) \\ =& D_{r,s}(f(t,u)-f(t,\eta)+f(t,\eta)-f(\zeta,\eta);\zeta,\eta)\end{aligned}$$

olup eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınır ve üçgen eşitsizliğini uygulanırsa

$$\begin{aligned}|D_{r,s}(f;\zeta,\eta)-f(\zeta,\eta)| \leq &|D_{r,s}\left(f(t,u)-f(t,\eta);\zeta,\eta\right)| \\ &+|D_{r,s}(f(t,\eta)-f(\zeta,\eta);\zeta,\eta)| \\ \leq &D_{r,s}\left(|f(t,u)-f(t,\eta)|\right)+D_{r,s}\left(|f(t,\eta)-f(\zeta,\eta)|\right)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$I_1=\frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|f(t,u)-f(t,\eta)|\,\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)dtdu$$

ve

$$I_2=\frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|f(t,\eta)-f(\zeta,\eta)|\,\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)dtdu$$

olarak alırsak $|D_{r,s}(f;\zeta,\eta)-f(\zeta,\eta)| \leq I_1+I_2$ yazabiliriz. 3.19 den $|f(t,u)-f(t,\eta)|\leq\omega^{(2)}\left(f;|u-\eta|\right)$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{aligned}I_1 \leq &\frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\omega^{(2)}\left(f;|u-\eta|\right)\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)dtdu \\ =&\frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\varphi_r^k(\zeta)\sum_{j=0}^{s}\varphi_s^j(\eta)\int_{-1}^{1}\omega^{(2)}\left(f;|u-\eta|\right)\varphi_s^j(u)\frac{2}{r+1}du \qquad (4.18)\\ =&\frac{s+1}{2}\sum_{j=0}^{s}\varphi_s^j(\eta)\int_{-1}^{1}\omega^{(2)}\left(f;|u-\eta|\right)\varphi_s^j(u)du\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Süreklilik modülünün özelliklerine göre keyfi pozitif δ_s dizisi için

$$\begin{aligned}\omega^{(2)}\left(f;|u-\eta|\right)=&\omega^{(2)}\left(f;\frac{|u-\eta|}{\delta_s}\delta_s\right) \\ \leq&\left\{1+\frac{|u-\eta|}{\delta_s}\right\}\omega^{(2)}\left(f;\delta_s\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada δ_s $s\to\infty$ iken sıfıra yaklaşan dizidir. Bu ifadeyi 4.18 da yerine yazarsak

$$\begin{aligned}I_1 \leq&\frac{s+1}{2}\sum_{j=0}^{s}\varphi_s^j(\eta)\int_{-1}^{1}\left\{1+\frac{|u-\eta|}{\delta_s}\right\}\omega^{(2)}\left(f;\delta_s\right)\varphi_s^j(u)du \\ =&\omega^{(2)}\left(f;\delta_s\right)\left(1+\frac{1}{\delta_s}\frac{s+1}{2}\sum_{j=0}^{s}\varphi_s^j(\eta)\int_{-1}^{1}|u-\eta|\,\varphi_s^j(u)du\right)\end{aligned}$$

olur. Cauchy-Schwartz eşitsizliğini kullanırsak

$$
\begin{aligned}
I_1 \leq & \omega^{(2)}(f;\delta_s)\left(1+\frac{1}{\delta_s}\frac{s+1}{2}\sum_{j=0}^{s}\varphi_s^j(\eta)\left(\int_{-1}^{1}(u-\eta)^2\varphi_s^j(\eta)du\right)^{1/2}\right. \\
& \left.\times\left(\int_{-1}^{1}\varphi_s^j(u)du\right)^{1/2}\right) \\
= & \omega^{(2)}(f;\delta_s)\left(1+\frac{1}{\delta_s}\left(\frac{s+1}{2}\right)^{1/2}\left(\sum_{j=0}^{s}\varphi_s^j(\eta)\right)^{1/2}\right. \\
& \left.\times\left(\sum_{j=0}^{s}\varphi_s^j(\eta)\int_{-1}^{1}(u-\eta)^2\varphi_s^j(u)du\right)^{1/2}\right) \\
= & \omega^{(2)}(f;\delta_s)\left(1+\frac{1}{\delta_s}\left(\frac{s+1}{2}\sum_{j=0}^{s}\varphi_s^j(\eta)\int_{-1}^{1}(u-\eta)^2\varphi_s^j(u)du\right)^{1/2}\right) \\
= & \omega^{(2)}(f;\delta_s)\left(1+\frac{1}{\delta_s}\left(D_{r,s}((u-\eta)^2;\zeta,\eta)\right)^{1/2}\right)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Burada (4.15) den $y \in [-1,1]$ için $D_{r,s}((u-\eta)^2;\zeta,\eta) \leq \frac{4}{s}$ olduğu görülür. O halde

$$
I_1 \leq \omega^{(2)}(f;\delta_s)\left(1+\frac{1}{\delta_s}\frac{2}{\sqrt{s}}\right)
$$

olarak bulunur. Burada $\delta_s = \frac{1}{\sqrt{s}}$ olarak seçersek

$$
I_1 \leq 3\omega^{(2)}\left(f;\frac{1}{\sqrt{s}}\right)
$$

elde ederiz. Şimdi I_2 için benzer işlemleri yapalım. (3.19) eşitsizliğini kullanarak

$$
\begin{aligned}
I_2 = & \frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|f(t,\eta)-f(\zeta,\eta)|\,\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)dtdu \\
\leq & \frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\varphi_r^k(\zeta)\sum_{j=0}^{s}\varphi_s^j(\eta)\int_{-1}^{1}\omega^{(1)}(f;|t-\zeta|)\,\varphi_r^k(t)\frac{2}{s+1}du \qquad (4.19) \\
= & \frac{r+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\varphi_r^k(\zeta)\int_{-1}^{1}\omega^{(1)}(f;|t-\zeta|)\,\varphi_r^k(t)dt
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Süreklilik modülünün özelliklerine göre keyfi pozitif δ_n dizisi için

$$
\begin{aligned}
\omega^{(1)}(f;|t-\zeta|) = & \omega^{(1)}\left(f;\frac{|t-\zeta|}{\delta_r}\delta_r\right) \\
\leq & \left\{1+\frac{|t-\zeta|}{\delta_r}\right\}\omega^{(1)}(f;\delta_r)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada δ_r, $r \to \infty$ iken sıfıra yaklaşan dizidir. Bu ifadeyi (4.19) da yerine yazarsak

$$\begin{aligned} I_2 \leq& \frac{r+1}{2} \sum_{k=0}^{r} \varphi_r^k(\zeta) \int_{-1}^{1} \left\{ 1 + \frac{|t-\zeta|}{\delta_r} \right\} \omega^{(1)}\left(f;\delta_r\right) \varphi_r^k(t)dt \\ =& \omega^{(1)}\left(f;\delta_r\right) \left(1 + \frac{1}{\delta_r} \frac{r+1}{2} \sum_{k=0}^{r} \varphi_r^k(\zeta) \int_{-1}^{1} |t-\zeta| \, \varphi_r^k(t)dt \right) \end{aligned}$$

olur. Cauchy-Schwartz eşitsizliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} I_2 \leq& \omega^{(1)}\left(f;\delta_r\right) \left(1 + \frac{1}{\delta_r} \frac{r+1}{2} \sum_{k=0}^{r} \varphi_r^k(\zeta) \left(\frac{r+1}{2} \sum_{k=0}^{r} \varphi_r^k(\zeta) \right)^{1/2} \right. \\ & \left. \times \left(\int_{-1}^{1} \varphi_r^k(t)dt \right)^{1/2} \right) \\ =& \omega^{(1)}\left(f;\delta_r\right) \left(1 + \frac{1}{\delta_r} \left(\frac{r+1}{2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{r} \varphi_r^k(\zeta) \right)^{1/2} \right. \\ & \left. \times \left(\sum_{k=0}^{r} \varphi_r^k(\zeta) \int_{-1}^{1} (t-\zeta)^2 \varphi_r^k(t)dt \right)^{1/2} \right) \\ =& \omega^{(1)}\left(f;\delta_r\right) \left(1 + \frac{1}{\delta_r} \left(\frac{r+1}{2} \sum_{k=0}^{r} \varphi_r^k(\zeta) \int_{-1}^{1} (t-\zeta)^2 \varphi_r^k(t)dt \right)^{1/2} \right) \\ =& \omega^{(1)}\left(f;\delta_r\right) \left(1 + \frac{1}{\delta_r} \left(D_{r,s}((t-\zeta)^2;\zeta,\eta) \right)^{1/2} \right) \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada (4.14) den $\zeta \in [-1,1]$ için $D_{r,s}((t-\zeta)^2;\zeta,\eta) \leq \frac{4}{r}$ olduğu görülür. O halde

$$I_2 \leq \omega^{(1)}\left(f;\delta_r\right) \left(1 + \frac{1}{\delta_r} \frac{2}{\sqrt{r}} \right)$$

olarak bulunur. Burada $\delta_r = \frac{1}{\sqrt{r}}$ olarak seçersek

$$I_2 \leq 3\omega^{(1)} \left(f; \frac{1}{\sqrt{r}} \right)$$

elde ederiz. O halde

$$\begin{aligned} \|D_{r,s}(f;\zeta,\eta) - f\|_{C(\mathbb{D})} \leq& \omega^{(1)}\left(f;\delta_r\right) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_r} \frac{r+1}{2} \sum_{k=0}^{r} \varphi_r^k(\zeta) \int_{-1}^{1} |t-\zeta| \, \varphi_r^k(t)dt \right\} \\ &+ \omega^{(2)}\left(f;\delta_s\right) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_s} \frac{s+1}{2} \sum_{j=0}^{s} \varphi_s^j(y) \int_{-1}^{1} |u-\eta| \, \varphi_s^j(u)du \right\} \\ \leq& 3 \left(\omega^{(1)} \left(f; \frac{1}{\sqrt{r}} \right) + \omega^{(2)} \left(f; \frac{1}{\sqrt{s}} \right) \right) \end{aligned}$$

olarak buluruz. Şimdi (4.17) nin ispatını inceleyelim. (4.1) ve (4.4) den

$$\begin{aligned} D_{r,s}(f;\zeta,\eta) - f(\zeta,\eta) =& D_{r,s}(f;\zeta,\eta) - f(\zeta,\eta) D_{r,s}(1;\zeta,\eta) \\ =& D_{r,s}(f(t,u) - f(\zeta,\eta);\zeta,\eta) \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} |D_{r,s}(f;\zeta,\eta)-f(\zeta,\eta)| &\leq |D_{r,s}(f(t,u)-f(\zeta,\eta);\zeta,\eta)| \\ &\leq D_{r,s}\left(|f(t,u)-f(\zeta,\eta)|;\zeta,\eta\right) \end{aligned} \tag{4.20}$$

dır. $\delta=\sqrt{(t-\zeta)^2+(u-\eta)^2}$ alalım,

$$|f(t,u)-f(\zeta,\eta)| \leq \omega\left(f;\delta_{rs}\right)\left(\frac{\sqrt{(t-\zeta)^2+(u-\eta)^2}}{\delta_{rs}}+1\right)$$

olup 4.20 da yerine yazarsak

$$\begin{aligned} |D_{r,s}(f;\zeta,\eta)-f(\zeta,\eta)| \leq & D_{r,s}(|f(t,u)-f(\zeta,\eta)|;\zeta,\eta) \\ \leq & D_{r,s}\left(\omega\left(f;\delta_{rs}\right)\left(\frac{\sqrt{(t-\zeta)^2+(u-\eta)^2}}{\delta_{rs}}+1\right);\zeta,\eta\right) \\ \leq & \omega\left(f;\delta_{rs}\right)\left\{1+\frac{1}{\delta_{rs}}D_{r,s}\left(\sqrt{(t-\zeta)^2+(u-\eta)^2};\zeta,\eta\right)\right\} \\ \leq & \omega\left(f;\delta_{rs}\right)\left\{1+\frac{1}{\delta_{rs}}\frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\right. \\ & \left.\times\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{(t-\zeta)^2+(u-\eta)^2}\right)\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)dtdu\right\} \end{aligned} \tag{4.21}$$

burada

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{(t-\zeta)^2+(u-\eta)^2}\right)\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)dtdu$$

integraline Cauchy-Schwartz eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{(t-\zeta)^2+(u-y)^2}\right)\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)dtdu \\ &\quad\leq\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left((t-\zeta)^2+(u-\eta)^2\right)\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)dtdu\right)^{1/2}\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)dtdu\right)^{1/2} \\ &\quad=\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left((t-\zeta)^2+(u-\eta)^2\right)\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)dtdu\right)^{1/2}\left(\frac{2}{r+1}\cdot\frac{2}{s+1}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

olur. (4.21) da yerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
&|D_{r,s}(f;\zeta,\eta) - f(\zeta,\eta)| \\
&\quad \leq \omega(f;\delta_{rs}) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_{rs}} \left(\frac{r+1}{2} \cdot \frac{s+1}{2} \right)^{1/2} \sum_{k=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} \phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta) \right. \\
&\qquad \left. \times \left(\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left((t-x)^2 + (u-y)^2 \right) \phi_{r,s}^{k,j}(t,u) dtdu \right)^{1/2} \right\} \\
&\quad = \omega(f;\delta_{rs}) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_{rs}} \left(\frac{r+1}{2} \cdot \frac{s+1}{2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} \phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta) \right)^{1/2} \right. \\
&\qquad \left. \times \left(\sum_{k=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} \phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta) \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left((t-\zeta)^2 + (u-\eta)^2 \right) \phi_{r,s}^{k,j}(t,u) dtdu \right)^{1/2} \right\} \\
&\quad = \omega(f;\delta_{rs}) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_{rs}} \left(\frac{r+1}{2} \cdot \frac{s+1}{2} \right)^{1/2} \right. \\
&\qquad \left. \times \left(\sum_{k=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} \phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta) \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left((t-\zeta)^2 + (u-\eta)^2 \right) \phi_{r,s}^{k,j}(t,u) dtdu \right)^{1/2} \right\} \\
&\quad = \omega(f;\delta_{rs}) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_{rs}} \left(D_{r,s} \left((t-\zeta)^2 + (u-\eta)^2 \right); \zeta,\eta \right)^{1/2} \right\}
\end{aligned}
$$

elde ederiz.$\zeta,\eta \in [-1,1] \times [-1,1]$ve (4.12), (4.13) deki eşitlikleri de kullanırsak

$$|D_{r,s}(f;\zeta,\eta) - f(\zeta,\eta)| \leq \omega(f;\delta_{rs}) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta_{rs}} \cdot \sqrt{\frac{4}{r} + \frac{4}{s}} \right\}$$

olur. Burada $\delta_{rs} = 2\sqrt{\frac{1}{r} + \frac{1}{s}}$ olarak seçersek

$$\|D_{r,s}(f;\zeta,\eta) - f\|_{C(\mathbb{D})} \leq 3\omega \left(f; \sqrt{\frac{1}{r} + \frac{1}{s}} \right)$$

elde ederiz. □

Sonuç 4.7 *Eğer f aşağıdaki Lipschitz koşulunu sağlarsa yani;*

$$|f(\zeta_1,\eta_1) - f(\zeta_2,\eta_2)| \leq K \left((\zeta_1-\zeta_2)^2 + (\eta_1-\eta_2)^2 \right)^{\alpha/2}, 0 < \alpha \leq 1 \qquad (4.22)$$

ise, o halde

$$|D_{r,r}(f;\zeta,\eta) - f(\zeta,\eta)| \leq K' \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right)^{\alpha/2}, \qquad (4.23)$$

dir. Burada $K' = 3K$ dır.

Gerçekten de (4.17) eşitsizliğinden de görüldüğü üzere

$$\begin{aligned}\|D_{r,s}(f;\zeta,\eta)-f\|_{C(\mathbb{D})} \leq & 3\omega\left(f;\sqrt{\frac{1}{r}+\frac{1}{s}}\right)\\ \leq & 3K\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right)^{\alpha/2}\\ \leq & K'\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right)^{\alpha/2}\end{aligned}$$

olur.

Sonuç 4.8 *Eğer f aşağıdaki Lipschitz koşulunu sağlarsa yani;*

$$|f(\zeta_1,\eta)-f(\zeta_2,\eta)| \leq K_1\,|\zeta_1-\zeta_2|^{\alpha/2} \tag{4.24}$$

and

$$|f(\zeta,\eta_1)-f(\zeta,\eta_2)| \leq K_2\,|\eta_1-\eta_2|^{\gamma/2} \tag{4.25}$$

ise, o halde

$$|D_{r,r}(f;\zeta,\eta)-f(\zeta,\eta)| \leq K_1'\left(\frac{1}{r}\right)^{\alpha/2}+K_2'\left(\frac{1}{s}\right)^{\alpha/2}, \tag{4.26}$$

dır. Burada $K_1'=3K_1$, $K_2'=3K_2$ dır.

Şimdi, Peetre K-fonksiyonelini kullanarak yaklaşımın hızını hesaplayalım. Öncelikle Peetre K-fonksiyonel tanımını verelim.

$C^2(\mathbb{D})$, $i=1,2$ için $C(\mathbb{D})$ uzayına ait $\frac{\partial^i f}{\partial\zeta^i}, \frac{\partial^i f}{\partial\eta^i}$ koşulunu sağlayan $f\in C(\mathbb{D})$ fonksiyonlarının uzayı olarak tanımlayalım. $C^2(\mathbb{D})$ uzayında norm

$$\|f\|_{C^2(\mathbb{D})}=\|f\|_{C(\mathbb{D})}+\sum_{i=1}^{2}\left(\left\|\frac{\partial^i f}{\partial\zeta^i}\right\|_{C(\mathbb{D})}+\left\|\frac{\partial^i f}{\partial\eta^i}\right\|_{C(\mathbb{D})}\right)$$

diğer bir deyişle

$$\|f\|_{C^2(\mathbb{D})}=\|f\|_{C(\mathbb{D})}+\|f'\|_{C(\mathbb{D})}+\|f''\|_{C(\mathbb{D})}$$

olarak tanımlıdır.

$f\in C(\mathbb{D})$için

$$\mathcal{K}(f;\delta)=\inf_{g\in C^2(\mathbb{D})}\left\{\|f-g\|_{C(\mathbb{D})}+\delta\left\|g''\right\|_{C^2(\mathbb{D})},\ \delta>0\right\} \tag{4.27}$$

olarak tanımlanan eşitliğe Peetre's K-fonksiyoneli denir (Bleimann ve ark (1980)).

Teorem 4.9 *$f \in C(\mathbb{D})$ fonksiyonu için*

$$|D_{r,s}(f;\zeta,\eta) - f(\zeta,\eta)| \leq 2\mathcal{K}(f;\delta_{r,s}(\zeta,\eta)) \tag{4.28}$$

dir. Burada $\delta_{r,s}(\zeta,\eta) = \max\left(\frac{2}{r+2}, \frac{2}{s+2}\right)$ dir.

İspat. $g \in C^2(\mathbb{D})$ ve $a, b \in [-1,1]$ olsun. $g(a,b)$ fonksiyonu (ζ,η) noktasında Taylor serisine açılırsa

$$\begin{aligned} g(a,b) - g(\zeta,\eta) =& \frac{\partial g(\zeta,\eta)}{\partial \zeta}(a-\zeta) + \int_\zeta^a (a-u)\frac{\partial^2 g(u,\eta)}{\partial u^2}du + \frac{\partial g(\zeta,\eta)}{\partial \eta}(b-\eta) \\ &+ \int_\eta^b (b-v)\frac{\partial^2 g(\zeta,v)}{\partial v^2}dv \end{aligned}$$

yazabiliriz. (4.5) ve (4.6) eşitliklerini göz önüne alırsak $D_{r,s}(a-\zeta;\zeta,\eta) = -\frac{2\zeta}{r+2}$ ve $D_{r,s}(u-\eta;\zeta,\eta) = -\frac{2\eta}{s+2}$ eşitliklerini elde ederiz. Ayrıca yukarıdaki eşitliğin her iki tarafına $D_{r,s}$ operatörünü uygularsak

$$\begin{aligned} D_{r,s}(g;\zeta,\eta) - g(\zeta,\eta) =& -\frac{2\zeta}{r+2}g_\zeta + D_{r,s}\left(\int_\zeta^a (a-u)\frac{\partial^2 g(u,\eta)}{\partial u^2}du;\zeta,\eta\right) \\ & -\frac{2\eta}{s+2}g_\eta + D_{r,s}\left(\int_\eta^b (b-v)\frac{\partial^2 g(\zeta,v)}{\partial v^2}dv;\zeta,\eta\right) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} |D_{r,s}(g;\zeta,\eta) - g(\zeta,\eta)| \leq& \left|\frac{2\zeta}{r+2}g_\zeta + \frac{2\eta}{s+2}g_\eta\right| \\ & + D_{r,s}\left(\left|\int_\zeta^a |a-u|\left|\frac{\partial^2 g(u,\eta)}{\partial u^2}\right|du\right|;\zeta,\eta\right) \\ & + D_{r,s}\left(\left|\int_\eta^b |b-v|\left|\frac{\partial^2 g(\zeta,v)}{\partial v^2}\right|dv\right|;\zeta,\eta\right) \\ \leq& \left|\frac{2\zeta}{r+2}g_\zeta + \frac{2\eta}{s+2}g_\eta\right| \\ & + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 g}{\partial \zeta^2}\right|\left|D_{r,s}\left((a-\zeta)^2;\zeta,\eta\right)\right| \\ & + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2}\right|\left|D_{r,s}\left((u-\eta)^2;\zeta,\eta\right)\right| \end{aligned}$$

olur. Norm uygulanırsa $\forall \zeta, \eta \in (D)$ için

$$\begin{aligned}\left\|D_{r,s}\left(g;\zeta,\eta\right)-g(\zeta,\eta)\right\|_{C(\mathbb{D})} \leq & \frac{2}{r+2}\left\|g_{\zeta}\right\|_{C(\mathbb{D})}+\frac{2}{s+2}\left\|g_{\eta}\right\|_{C(\mathbb{D})} \\ & +\frac{1}{r+2}\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial \zeta^2}\right\|_{C(\mathbb{D})}+\frac{1}{s+2}\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2}\right\|_{C(\mathbb{D})} \\ \leq & \max\left(\frac{1}{r+2},\frac{1}{s+2}\right)\Big(\left\|g_{\zeta}\right\|_{C(\mathbb{D})}+\left\|g_{\eta}\right\|_{C(\mathbb{D})} \\ & +\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial \zeta^2}\right\|_{C(\mathbb{D})}+\left\|\frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2}\right\|_{C(\mathbb{D})}\Big) \\ \leq & \delta_{r,s}\left\|g\right\|_{C^2(\mathbb{D})}\end{aligned}$$

olur. Burada $\delta_{r,s} = \max\left(\frac{2}{r+2},\frac{2}{s+2}\right)$ dir. Dolayısı ile $D_{r,s}$ operatörü lineer olduğundan ve $\forall\ f \in C(\mathbb{D})$, $g \in C^2(\mathbb{D})$ için

$$\begin{aligned}\left\|D_{r,s}\left(f;\zeta,\eta\right)-f(\zeta,\eta)\right\|_{C(\mathbb{D})} \leq & \left\|D_{r,s}\left(f-g;\zeta,\eta\right)\right\|_{C(\mathbb{D})} \\ & +\left\|D_{r,s}\left(g;\zeta,\eta\right)-g(\zeta,\eta)\right\|_{C(\mathbb{D})}+\left\|f-g\right\|_{C(\mathbb{D})} \\ \leq & \left\|f-g\right\|_{C(\mathbb{D})}\left|D_{r,s}\left(1;\zeta,\eta\right)\right| \\ & +\left\|D_{r,s}\left(g;\zeta,\eta\right)-g(\zeta,\eta)\right\|_{C(\mathbb{D})}+\left\|f-g\right\|_{C(\mathbb{D})}\end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\left\|D_{r,s}\left(f;\zeta,\eta\right)-f(\zeta,\eta)\right\|_{C(\mathbb{D})} \leq 2\left(\left\|f-g\right\|_{C(\mathbb{D})}+\delta_{r,s}\left\|g\right\|_{C^2(\mathbb{D})}\right)$$

eşitisizliği yazılır. Burada eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadenin infimumu alırsa

$$\left|D_{r,s}\left(f;\zeta,\eta\right)-f(\zeta,\eta)\right| \leq 2\mathcal{K}\left(f;\delta_{r,s}(\zeta,\eta)\right)$$

elde edilir. □

4.4. Voronovskaya Tipi Teorem

Bu bölümde, D_{rs} operatörleri için Voronoskaya tipi teorem ispatlanacak ve kısmi türevleri hesaplanacaktır.

Teorem 4.10 *Her $f \in C^2(\mathbb{D})$, yani f fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden ζ ve η ya göre türevleri var ve bu bölgede sürekli olsun. O halde*

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to\infty} r\left\{D_{r,r}(f;\zeta,\eta)-f(\zeta,\eta)\right\} \\ &=-2\zeta f_{\zeta}(\zeta,\eta)-2\eta f_{\eta}(\zeta,\eta)+(\zeta-1)^2 f_{\zeta\zeta}(\zeta,\eta)+(\eta-1)^2 f_{\eta\eta}(\zeta,\eta)-4\zeta\eta f_{\zeta\eta}(\zeta,\eta).\end{aligned} \tag{4.29}$$

eşitliğini elde ederiz.

İspat. $(\zeta,\eta)\in\mathbb{D}$, $f\in C^2(\mathbb{D})$ alalım. ψ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\begin{aligned}\psi(t,u;\zeta,\eta)=&\frac{f(t,u)-f(\zeta,\eta)-f'_{\zeta}(\zeta,\eta)(t-\zeta)-f'_{\eta}(\zeta,\eta)(u-\eta)}{\sqrt{(t-\zeta)^4+(u-\eta)^4}}\\ &\frac{-\frac{1}{2}\left\{f''_{\zeta\zeta}(\zeta,\eta)(t-\zeta)^2+2f''_{\zeta\eta}(\zeta,\eta)(t-\zeta)(u-\eta)+f''_{\eta\eta}(\zeta,\eta)(u-\eta^2)\right\}}{\sqrt{(t-\zeta)^4+(u-\eta)^4}}\end{aligned}$$

ve $\psi(\zeta,\eta)=0$. Bundan sonraki ifadelerde $\psi(.,.;\zeta,\eta)=\psi(.,.)\in C(\mathbb{D})$ olarak kullanalım. $f\in C^2(\mathbb{D})$ için Taylor formülünden yaralanarak ve $(t,u)\in\mathbb{D}$ için aşağıdaki eşitliği elde ederiz;

$$\begin{aligned}f(t,u)=&f(\zeta,\eta)+f'_{\zeta}(\zeta,\eta)(t-\zeta)+f'_{\eta}(\zeta,\eta)(u-\eta)\\ &+\frac{1}{2}\left\{f''_{\zeta\zeta}(\zeta,\eta)(t-\zeta)^2+2f''_{\zeta\eta}(\zeta,\eta)(t-\zeta)(u-\eta)+f''_{\eta\eta}(\zeta,\eta)(u-\eta^2)\right\}\\ &+\psi(t,u)\sqrt{(t-\zeta)^4+(u-\eta)^4}\end{aligned}$$

burada $\psi(.,.;\zeta,\eta)=\psi(.,.)\in C(\mathbb{D})$ ve $\psi(\zeta,\eta)=0$ dır. Böylece, $D_{r,r}$ operatörünün lineerliğinden

$$\begin{aligned}D_{r,r}(f(t,u);\zeta,\eta)=&f(\zeta,\eta)+f'_{\zeta}(\zeta,\eta)D_{r,r}((t-\zeta);\zeta,\eta)+f'_{\eta}(\zeta,\eta)D_{r,r}((u-\eta);\zeta,\eta)\\ &+\frac{1}{2}\left\{f''_{\zeta\zeta}(\zeta,\eta)D_{r,r}((t-\zeta)^2;\zeta,\eta)+2f''_{\zeta\eta}(\zeta,\eta)D_{r,r}((t-\zeta);\zeta,\eta)\right.\\ &\left.\times\ D_{r,r}((u-\eta);\zeta,\eta)+f''_{\eta\eta}(\zeta,\eta)D_{r,r}((u-\eta^2);\zeta,\eta)\right\}\\ &+D_{r,r}\left(\psi(t,u)\sqrt{(t-\zeta)^4+(u-\eta)^4};\zeta,\eta\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Son terime Cauchy-Schwartz eşitsizliği uygularsak

$$\begin{aligned}&D_{r,r}\left(\psi(t,u)\sqrt{(t-\zeta)^4+(u-\eta)^4};\zeta,\eta\right)\\ &\le\left\{D_{r,r}\left(\psi^2(t,u);\zeta,\eta\right)\right\}^{1/2}\left\{D_{r,r}\left((t-\zeta)^4+(u-\eta)^4;\zeta,\eta\right)\right\}^{1/2}\\ &=\left\{D_{r,r}\left(\psi^2(t,u);\zeta,\eta\right)\right\}^{1/2}\left\{D_{r,r}\left((t-\zeta)^4;\zeta,\eta\right)+D_{r,r}\left((u-\eta)^4;\zeta,\eta\right)\right\}^{1/2}\end{aligned}\tag{4.30}$$

elde ederiz. $\psi\in C(\mathbb{D})$ ve Teorem 4.5 den

$$\lim_{r\to\infty}D_{r,r}\left(\psi^2(t,u);\zeta,\eta\right)=\psi^2(\zeta,\eta)=0\tag{4.31}$$

(4.31) ve $D_{r,r}\left((t-\zeta)^4;\zeta,\eta\right)\le M_0r^{-1}$ kullanarak (4.30) den

$$\lim_{r\to\infty}rD_{r,r}\left(\psi(t,u)\sqrt{(t-\zeta)^4+(u-\eta)^4};\zeta,\eta\right)=\psi^2(\zeta,\eta)=0\tag{4.32}$$

elde ederiz. (4.32) ve Lemma4.3 yı kullanarak, (4.29) den (4.30) yi elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 4.11 *$f \in C^1(\mathbb{D})$ alalım öyle ki $f_\zeta, f_\eta \in C(\mathbb{D})$ olsun. O halde $\zeta, \eta \neq -1, 1$ için*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\partial}{\partial\zeta} D_{r,r}(f;\zeta,\eta) = \frac{\partial f}{\partial\zeta}(\zeta,\eta) \tag{4.33}$$

ve

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\partial}{\partial\eta} D_{r,r}(f;\zeta,\eta) = \frac{\partial f}{\partial\eta}(\zeta,\eta) \tag{4.34}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. Önce (4.33) ü göstermeye çalışalım. $(\zeta,\eta) \in \mathbb{D}$ olsun. (4.1) de verilen $D_{r,r}$ operatörü ζ değişkenine göre türevi alınır ise

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\zeta} D_{r,r}(f(t,u);\zeta,\eta) =& -r(1-\zeta)^{-1} D_{r,r}(f(t,u);\zeta,\eta) \\ &+ \frac{2}{(1+\zeta)(1-\zeta)} D_{r,r}(kf(t,u);\zeta,\eta), \quad \forall r \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{4.35}$$

olur. $f \in C^1(\mathbb{D})$ için Taylor formülünden

$$\begin{aligned} f(t,u) =& f(\zeta,\eta) + f_\zeta(\zeta,\eta)(t-\zeta) + f_\eta(\zeta,\eta)(u-y) \\ &+ \chi(t,u;\zeta,\eta)\sqrt{(t-\zeta)^2+(u-\eta)^2}, \quad (t,u) \in \mathbb{D} \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada $\chi(.,.;\zeta,\eta) = \chi(.,.) \in C$ ve $\chi(\zeta,\eta) = 0$ dır. Ayrıca (4.4) ve (4.12) den dolayı

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\zeta} D_{r,r}(f(t,u);\zeta,\eta) =& f(\zeta,\eta)\left\{-\frac{r}{1-\zeta} D_{r,r}(1;\zeta,\eta) + \frac{2}{(1+\zeta)(1-\zeta)} D_{r,r}(k;\zeta,\eta)\right\} \\ &+ f_\zeta(\zeta,\eta)\left\{-\frac{r}{1-\zeta} D_{r,r}(t-\zeta;\zeta,\eta) + \frac{2}{(1+\zeta)(1-\zeta)}\right. \\ &\left.\times\ D_{r,r}(k(t-\zeta);\zeta,\eta)\right\} \\ &+ f_\eta(\zeta,\eta)\left\{-\frac{r}{1-\zeta} D_{r,r}(u-\eta;\zeta,\eta) + \frac{2}{(1+\zeta)(1-\zeta)}\right. \\ &\left.\times\ D_{r,r}(k(u-\eta);\zeta,\eta)\right\} \\ &+ -\frac{r}{1-\zeta} D_{r,r}\left(\chi(t,u)\sqrt{(t-\zeta)^2+(u-\eta)^2};\zeta,\eta\right) \\ &+ \frac{2}{(1+\zeta)(1-\zeta)} D_{r,r}\left(k\chi(t,u)\sqrt{(t-\zeta)^2+(u-\eta)^2};\zeta,\eta\right) \end{aligned}$$

olur. Lemma 4.3 den

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\zeta}D_{r,r}\left(f(t,u);\zeta,\eta\right)=&\frac{-r\zeta+(-r^3+3r^2-r)}{(1-\zeta)(r+2)}f_{\zeta}^{'}(\zeta,\eta)\\&+-\frac{r}{1-\zeta}D_{r,r}\left(\chi(t,u)\sqrt{(t-\zeta)^2+(u-\eta)^2};\zeta,\eta\right)\\&+\frac{2}{(1+\zeta)(1-\zeta)}D_{r,r}\left(k\chi(t,u)\sqrt{(t-\zeta)^2+(u-\eta)^2};\zeta,\eta\right)\end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi Hölder eşitsizliğinden, Lemma 4.3, Lemma 4.4 ve Teorem 4.41 i kullanarak

$$\lim_{r\to\infty}D_{r,r}\left(\psi^2(t,u);\zeta,\eta\right)=\psi^2(\zeta,\eta)=0$$

elde ederiz. Böylece

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\partial}{\partial\zeta}D_{r,r}\left(f;\zeta,\eta\right)=\frac{\partial f}{\partial\zeta}\left(\zeta,\eta\right) \tag{4.36}$$

olup istenilen elde edilir.

Şimdi (5.1.) ü gösterelim. $(x,y)\in\mathbb{D}$ olsun. (4.1) eşitliğinin her iki tarafı η değişkenine göre türevi alınır ise

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\eta}D_{r,r}\left(f(t,u);\zeta,\eta\right)=&-r(1-\eta)^{-1}D_{r,r}\left(f(t,u);\zeta,\eta\right)\\&+\frac{2}{(1+\eta)(1-\eta)}D_{r,r}\left(kf(t,u);\zeta,\eta\right),\quad\forall r\in\mathbb{N}\end{aligned} \tag{4.37}$$

olur. $f\in C^1(\mathbb{D})$ için Taylor formülünden

$$\begin{aligned}f(t,u)=&f(\zeta,\eta)+f_{\zeta}(\zeta,\eta)(t-\zeta)+f_{\eta}(\zeta,\eta)(u-\eta)\\&+\chi(t,u;\zeta,\eta)\sqrt{(t-\zeta)^2+(u-\eta)^2},\quad(t,u)\in\mathbb{D}\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada $\chi(.,.;\zeta,\eta)=\chi(.,.)\in C$ ve $\chi(\zeta,\eta)=0$ dır. Ayrıca (4.4) ve (4.12) den dolayı

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\eta}D_{r,r}\left(f(t,u);\zeta,\eta\right)=&f(\zeta,\eta)\left\{-\frac{r}{1-\eta}D_{r,r}\left(1;\zeta,\eta\right)+\frac{2}{(1+\eta)(1-\eta)}D_{r,r}\left(j;\zeta,\eta\right)\right\}\\&+f_{\zeta}(\zeta,\eta)\left\{-\frac{r}{1-\eta}D_{r,r}\left(t-\zeta;\zeta,\eta\right)+\frac{2}{(1+\eta)(1-\eta)}\right.\\&\left.\times\ D_{r,r}\left(j(t-\zeta);\zeta,\eta\right)\right\}\\&+f_{\eta}(\zeta,\eta)\left\{-\frac{r}{1-\eta}D_{r,r}\left(u-\eta;\zeta,\eta\right)+\frac{2}{(1+\eta)(1-\eta)}\right.\\&\left.\times\ D_{r,r}\left(j(u-\eta);\zeta,\eta\right)\right\}\\&+-\frac{n}{1-\eta}D_{r,r}\left(\chi(t,u)\sqrt{(t-\zeta)^2+(u-\eta)^2};\zeta,\eta\right)\\&+\frac{2}{(1+\eta)(1-\eta)}D_{r,r}\left(j\chi(t,u)\sqrt{(t-\zeta)^4+(u-\eta)^4};\zeta,\eta\right)\end{aligned}$$

olur. Lemma 4.3 den

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \eta} D_{r,r}\left(f(t,u);\zeta,\eta\right) =& \frac{-r\zeta+(-r^3+3r^2-r)}{(1-\eta)(r+2)} f_\zeta(\zeta,\eta)\\ &+-\frac{r}{1-\eta} D_{r,r}\left(\chi(t,u)\sqrt{(t-\zeta)^2+(u-\eta)^2};\zeta,\eta\right)\\ &+\frac{2}{(1+\eta)(1-\eta)} D_{r,r}\left(j\chi(t,u)\sqrt{(t-\zeta)^2+(u-\eta)^2};\zeta,\eta\right)\end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi Hölder eşitsizliğinden, Lemma 4.3, Lemma 4.4 ve Teorem 4.41 i kullanarak

$$\lim_{r\to\infty} D_{r,r}\left(\psi^2(t,u);\zeta,\eta\right) = \psi^2(\zeta,\eta) = 0$$

elde ederiz. Böylece

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} D_{r,r}\left(f;\zeta,\eta\right) = \frac{\partial f}{\partial \eta}(\zeta,\eta)$$

olup istenilen elde edilir. □

4.5. Genelleştirilmiş $D_{r,s}$ Bernstein-Durrmeyer tipi GBS Operatörünün İnşaası

Bu bölümde, 1934 yılında Bögel tarafından kurulan genelleştirilmiş Boolean toplamını kullanarak iki değişkenli Bernstein-Durrmeyer operatörleri yeniden oluşturulmuştur. Bu operatörlerin yaklaşımı Bögel sürekli fonksiyonlar için tanımlı hem karışık düzgünlük modülü hem de Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla hesaplanmıştır.

Tanım 4.12 *$f \in C(\mathbb{D})$ ve $m,n \in \mathbb{N}$ için genelleştirilmiş iki değişkenli Bernstein-Durrmeyer tipi $D_{r,s}$ operatörün GBS (Generalized Boolean Sum) operatörünü tüm $(\zeta,\eta) \in \mathbb{D}$ için aşağıdaki gibi tanımlayalım:*

$$\begin{aligned}S_{n,m}\left(f(t,s);\zeta,\eta\right) =& \frac{n+1}{2}\frac{m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{n,m}^{k,j}(t,s)\\ &\times\left(f(t,\eta)+f(\zeta,s)-f(t,s)\right)dtds,\end{aligned} \tag{4.38}$$

burada $S_{n,m}$ operatörü $C_b(\mathbb{D})$ uzayında iyi tanımlıdır ve $f \in C_b(\mathbb{D})$ dir.

4.6. Genelleştirilmiş $D_{r,s}$ Bernstein-Durrmeyer tipi GBS Operatörünün Yaklaşım Hızı

Şimdi (4.38) de verdiğimiz $S_{n,m}$ operatör dizisinin yakınsaklık hızını $f \in C_b(\mathbb{D})$ için karışık düzgünlük modülünü (3.33) kullanarak hesaplayalım.

Teorem 4.13 *Her $f \in C_b(\mathbb{D})$ için $(\zeta, \eta) \in \mathbb{D}$ noktasında (4.38) de tanımlanan $S_{n,m}$ operatörü için*

$$|S_{n,m}(f;\zeta,\eta) - f(\zeta,\eta)| \leq 9\omega_{kark}\left(f; n^{-1/2}, m^{-1/2}\right) \tag{4.39}$$

olur.

İspat. $\omega_{mixed}(f;\delta_1,\delta_2)$ karışık düzgünlük modülününün tanımı ve (3.34)'den $\delta_1, \delta_2 > 0$ için

$$\omega_{mixed}(f;\beta_1\delta_1,\beta_2\delta_2) \leq (1+\beta_1)(1+\beta_2)\omega_{mixed}(f;\delta_1,\delta_2)$$

eşitsizliğini kullanırsak her $(\zeta,\eta),(t,s) \in \mathbb{D}$ ve herhangi $(\delta_1,\delta_2) > 0$ için

$$\begin{aligned}\left|\Delta_{(\zeta,\eta)} f[t,s;\zeta,\eta]\right| \leq& \omega_{mixed}(f;|t-\zeta|,|s-\eta|)\\ \leq& \left(1+\frac{|t-\zeta|}{\delta_1}\right)\left(1+\frac{|s-\eta|}{\delta_2}\right)\omega_{mixed}(f;\delta_1,\delta_2)\end{aligned} \tag{4.40}$$

yazabiliriz. $\Delta_{(\zeta,\eta)} f[t,s;\zeta,\eta]$ tanımından

$$f(\zeta,s) + f(t,\eta) - f(t,s) = f(\zeta,\eta) - \Delta_{(\zeta,\eta)} f[t,s;\zeta,\eta] \tag{4.41}$$

elde ederiz. Bu eşitliğe $D_{r,s}$ operatörünü uygularsak ve $S_{n,m}$ yani GBS operatörünün tanımından

$$S_{n,m}(f;\zeta,\eta) = f(\zeta,\eta)D_{r,s}(1;\zeta,\eta) - D_{r,s}\left(\Delta_{(\zeta,\eta)} f[t,s;\zeta,\eta];\zeta,\eta\right)$$

yazabiliriz. $D_{r,s}(1;\zeta,\eta) = 1$ olduğunu (4.4) den biliyoruz. (4.40) deki eşitsizliği göz önüne alarak Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned}|S_{n,m}(f;\zeta,\eta) - f(\zeta,\eta)| \leq& D_{r,s}\left(\Delta_{(\zeta,\eta)} f[t,s;\zeta,\eta];\zeta,\eta\right)\\ \leq& \Big(D_{r,s}(1;\zeta,\eta) + \delta_1^{-1}\sqrt{D_{r,s}((t-\zeta)^2;\zeta,\eta)}\\ &+\delta_2^{-1}\sqrt{D_{r,s}((s-\eta)^2;\zeta,\eta)}\\ &+\delta_1^{-1}\delta_2^{-1}\sqrt{D_{r,s}((t-\zeta)^2;\zeta,\eta)\,D_{r,s}((s-\eta)^2;\zeta,\eta)}\Big)\\ &\times\omega_{mixed}(f;\delta_1,\delta_2)\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Her $(\zeta,\eta)\in\mathbb{D}$ için Lemma 4.3 den

$$D_{r,s}((t-\zeta)^2;\zeta,\eta)\leq\frac{4}{n}$$

ve

$$D_{r,s}((u-\eta)^2;\zeta,\eta)\leq\frac{4}{m}$$

olur. Dolayısı ile $\delta_1=n^{-1/2}$ ve $\delta_2=m^{-1/2}$ olarak seçersek

$$|S_{n,m}(f;\zeta,\eta)-f(\zeta,\eta)|\leq 9\omega_{mixed}\left(f;n^{-1/2},m^{-1/2}\right)$$

elde ederiz. □

Teorem 4.14 *$T_Bf\in B(\mathbb{D})$ ile $f\in T_B(\mathbb{D})$ fonksiyonunu alalım. O halde her $(\zeta,\eta)\in\mathbb{D}$ için*

$$|S_{n,m}(f;\zeta,\eta)-f(\zeta,\eta)|\leq M.\left[\|T_Bf\|_\infty+\omega_{mixed}\left(T_Bf;n^{-1/2},m^{-1/2}\right)\right](nm)^{-1/2} \tag{4.42}$$

olur, burada M herhangi pozitif bir sabittir.

İspat. $f\in T_B(\mathbb{D})$ fonksiyonunu alalım. O halde Bögel'in tanımladığı (Bögel (1962–1963),syf. 62)

$$\Delta_{(\zeta,\eta)}f\,[t,s;\zeta,\eta]=(t-\zeta)(s-\eta)T_Bf\,(\varsigma,\rho)\,,\ \zeta<\varsigma<t,\eta<\rho<s \tag{4.43}$$

özdeşliği elde ederiz. $\Delta_{(\zeta,\eta)}f\,[t,s;\zeta,\eta]$ tanımınında (4.41) eşitliğinin her iki tarafına T_Bf'i uygularsak

$$T_Bf\,(\varsigma,\rho)=\Delta_{(\zeta,\eta)}T_Bf\,(\varsigma,\rho)+T_Bf\,(\varsigma,\eta)+T_Bf\,(\zeta,\rho)-T_Bf\,(\zeta,\eta)$$

olduğu açıktır. $T_Bf\in B(\mathbb{D})$ olduğundan ve yukarıdaki bağıntıdan

$$\begin{aligned}
&|D_{r,s}\left(\Delta_{(\zeta,\eta)}f\,[t,s;\zeta,\eta]\,;\zeta,\eta\right)\Big|\\
&\quad=|D_{r,s}\left((t-\zeta)(s-\eta)T_Bf\,(\varsigma,\rho)\,;\zeta,\eta\right)|\\
&\quad\leq D_{r,s}\left(|t-\zeta||s-\eta|\left|\Delta_{(\zeta,\eta)}T_Bf\,(\varsigma,\rho)\right|;\zeta,\eta\right)\\
&\qquad+D_{r,s}\left(|t-\zeta||s-\eta|\left(|T_Bf\,(\varsigma,\eta)|+|T_Bf\,(\zeta,\rho)|+|T_Bf\,(\zeta,\eta)|\right);\zeta,\eta\right)\\
&\quad\leq D_{r,s}\left(|t-\zeta||s-\eta|\omega_{mixed}\left(T_Bf;|\varsigma-\zeta|,|\rho-\eta|\right);\zeta,\eta\right)\\
&\qquad+3\,\|T_Bf\|_\infty\,D_{r,s}\left(|t-\zeta||s-\eta|;\zeta,\eta\right)
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Karışık düzgünlük modülü ω_{mixed} azalan olmadığından

$$\begin{aligned}\omega_{mixed}\left(T_B f;|\varsigma-\zeta|,|\rho-\eta|\right) \leq & \omega_{mixed}\left(T_B f;|t-\zeta|,|s-\eta|\right)\\ & \leq \left(1+\delta_1^{-1}|t-\zeta|\right)\left(1+\delta_2^{-1}|s-\eta|\right)\omega_{mixed}\left(f;\delta_1,\delta_2\right)\end{aligned}$$

elde ederiz. Karışık düzgünlük modülü için bulduğumuz bu eşitsizliği yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazarsak ve $D_{r,s}$ operatörlerinin lineerliği ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned}\left|S_{n,m}\left(f;\zeta,\eta\right)-f(\zeta,\eta)\right| = & \left|D_{r,s}\left(\Delta_{(\zeta,\eta)}f\left[t,s;\zeta,\eta\right];\zeta,\eta\right)\right|\\ \leq & 3\left\|T_B f\right\|_{\infty}\sqrt{D_{r,s}\left((t-\zeta)^2(s-\eta)^2;\zeta,\eta\right)}\\ & +\left[D_{r,s}\left(|t-\zeta||s-\eta|;\zeta,\eta\right)\right.\\ & +\delta_1^{-1}D_{r,s}\left((t-\zeta)^2|s-\eta|;\zeta,\eta\right)\\ & +\delta_2^{-1}D_{r,s}\left(|t-\zeta|(s-\eta)^2;\zeta,\eta\right)\\ & \left.+\delta_1^{-1}\delta_2^{-1}D_{r,s}\left((t-\zeta)^2(s-\eta)^2;\zeta,\eta\right)\right]\omega_{mixed}\left(f;\delta_1,\delta_2\right)\\ \leq & 3\left\|T_B f\right\|_{\infty}\sqrt{D_{r,s}\left((t-\zeta)^2(s-\eta)^2;\zeta,\eta\right)}\\ & +\left[\sqrt{D_{r,s}\left((t-\zeta)^2(s-\eta)^2;\zeta,\eta\right)}\right.\\ & +\delta_1^{-1}\sqrt{D_{r,s}\left((t-\zeta)^4(s-\eta)^2;\zeta,\eta\right)}\\ & +\delta_2^{-1}\sqrt{D_{r,s}\left((t-\zeta)^2(s-\eta)^4;\zeta,\eta\right)}\\ & \left.+\delta_1^{-1}\delta_2^{-1}D_{r,s}\left((t-\zeta)^2(s-\eta)^2;\zeta,\eta\right)\right]\omega_{mixed}\left(f;\delta_1,\delta_2\right)\end{aligned}$$

Lemma 4.3 den

$$D_{r,s}((t-\zeta)^2;\zeta,\eta)\leq\frac{4}{n}$$

ve

$$D_{r,s}((u-\eta)^2;\zeta,\eta)\leq\frac{4}{m}$$

olduğunu ve $(\zeta,\eta),(t,s)\in\mathbb{D}$, $p,q\in 1,2$ için

$$D_{r,s}\left((t-\zeta)^{2p}(s-\eta)^{2q};\zeta,\eta\right)=D_{r,s}\left((t-\zeta)^{2p};\zeta,\eta\right)D_{r,s}\left((s-\eta)^{2q};\zeta,\eta\right)$$

eitsizliğini dikkate alırsak, $\delta_1=n^{-1/2}$ ve $\delta_2=m^{-1/2}$ seçilirse istenilen (4.42) eşitsizliği elde edilir. □

Bir sonraki teoremde, $\{S_{n,m}(f)\}$ dizisinin $f\in C_b(\mathbb{D})$ fonksiyonuna yaklaşımının derecesini Tanım (3.31) da verilen karışık K-fonksiyoneli açısından değerlendirelim.

Teorem 4.15 *$D_{r,s}$ (4.1) operatörünün GBS operatörü $S_{n,m}$ (4.38) ele alalım. O halde her $f \in C_b(\mathbb{D})$ için*

$$|S_{n,m}(f;\zeta,\eta) - f(\zeta,\eta)| \leq 2\mathcal{K}_{mixed}\left(f;\frac{2}{n},\frac{2}{m}\right) \tag{4.44}$$

dir.

İspat. $g_1 \in C_B^{2,0}(\mathbb{D})$ fonksiyonu için Taylor formülünden

$$g_1(t,s) = g_1(\zeta,\eta) + (t-\zeta)T_B^{1,0}g_1(\zeta,\eta) + \int_\zeta^t (t-u)T_B^{2,0}g_1(u,\eta)du$$

eşitliğini elde ederiz, (Bögel (1934)). $S_{n,m}$ operatörü lineer olduğundan

$$S_{n,m}(g_1;\zeta,\eta) = g_1(\zeta,\eta) + S_{n,m}\left(\int_\zeta^t (t-u)T_B^{2,0}g_1(u,\eta)du;\zeta,\eta\right)$$

yazabiliriz. $g_1 \in C_B^{2,0}(\mathbb{D})$ için $S_{n,m}$ operatörünün tanımından

$$\begin{aligned}
|S_{n,m}(g_1;\zeta,\eta) - g_1(\zeta,\eta)| =& \left|D_{r,s}\left(\int_\zeta^t (t-u)\left[T_B^{2,0}g_1(u,\eta) - T_B^{2,0}g_1(u,s)\right]du;\zeta,\eta\right)\right| \\
\leq& D_{r,s}\left(\left|\int_\zeta^t |t-u|\left|T_B^{2,0}g_1(u,\eta) - T_B^{2,0}g_1(u,s)\right|du;\zeta,\eta\right|\right) \\
\leq& \left\|T_B^{2,0}g_1\right\|_\infty D_{r,s}\left((t-\zeta)^2;\zeta,\eta\right) \\
<& \left\|T_B^{2,0}g_1\right\|_\infty \cdot \frac{4}{n}
\end{aligned}$$

ve $g_2 \in C_B^{0,2}(\mathbb{D})$ için

$$\begin{aligned}
|S_{n,m}(g_2;\zeta,\eta) - g_2(\zeta,\eta)| =& \left|D_{r,s}\left(\int_\eta^s (s-v)\left[T_B^{0,2}g_2(v,\eta) - T_B^{0,2}g_2(v,s)\right]dv;\zeta,\eta\right)\right| \\
\leq& D_{r,s}\left(\left|\int_\eta^s |s-v|\left|T_B^{0,2}g_2(v,\eta) - T_B^{0,2}g_2(v,s)\right|dv;\zeta,\eta\right|\right) \\
\leq& \left\|T_B^{0,2}g_2\right\|_\infty D_{r,s}\left((s-\eta)^2;\zeta,\eta\right) \\
<& \left\|T_B^{0,2}g_2\right\|_\infty \cdot \frac{4}{m}
\end{aligned}$$

elde ederiz. $h \in C_B^{2,2}(\mathbb{D})$ için,

$$\begin{aligned}
h(t,s) =& h(\zeta,\eta) + (t-\zeta)T_B^{1,0}h(\zeta,\eta) + (s-\eta)T_B^{0,1}h(\zeta,\eta) + (t-\zeta)(s-\eta)T_B^{1,1}h(\zeta,\eta) \\
&+ \int_\zeta^t (t-u)T_B^{2,0}h(u,\eta)du + \int_\eta^s (s-v)T_B^{0,2}h(\zeta,v)dv \\
&+ \int_\zeta^t (s-\eta)(t-u)T_B^{2,1}h(u,\eta)du + \int_\eta^s (t-\zeta)(s-v)T_B^{1,2}h(\zeta,v)dv \\
&+ \int_\zeta^t \int_\eta^s (t-u)(s-v)T_B^{2,2}h(u,v)dvdu
\end{aligned}$$

olur. $S_{n,m}\left((t-\zeta);\zeta,\eta\right) = 0$, $S_{n,m}\left((s-\eta);\zeta,\eta\right) = 0$ olduğundan ve $S_{n,m}$ operatörünün tanımını da dikkate aldığımızda

$$\begin{aligned}
\left|S_{n,m}\left(h;\zeta,\eta\right)-h(\zeta,\eta)\right| \leq & \left|D_{r,s}\left(\int_{\zeta}^{t}\int_{\eta}^{s}(t-u)(s-v)T_B^{2,2}h(u,v)dvdu;\zeta,\eta\right)\right| \\
\leq & D_{r,s}\left(\left|\int_{\zeta}^{t}\int_{\eta}^{s}(t-u)(s-v)T_B^{2,2}h(u,v)dvdu\right|;\zeta,\eta\right) \\
\leq & D_{r,s}\left(\int_{\zeta}^{t}\int_{\eta}^{s}|t-u||s-v|\left|T_B^{2,2}h(u,v)\right|dvdu;\zeta,\eta\right) \\
\leq & \frac{1}{4}\left\|T_B^{2,2}h\right\|_{\infty}D_{r,s}\left((t-\zeta)^2(s-\eta)^2;\zeta,\eta\right) \\
\leq & 4\left\|T_B^{2,2}h\right\|_{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{m}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla $f \in C_b(\mathbb{D})$ için

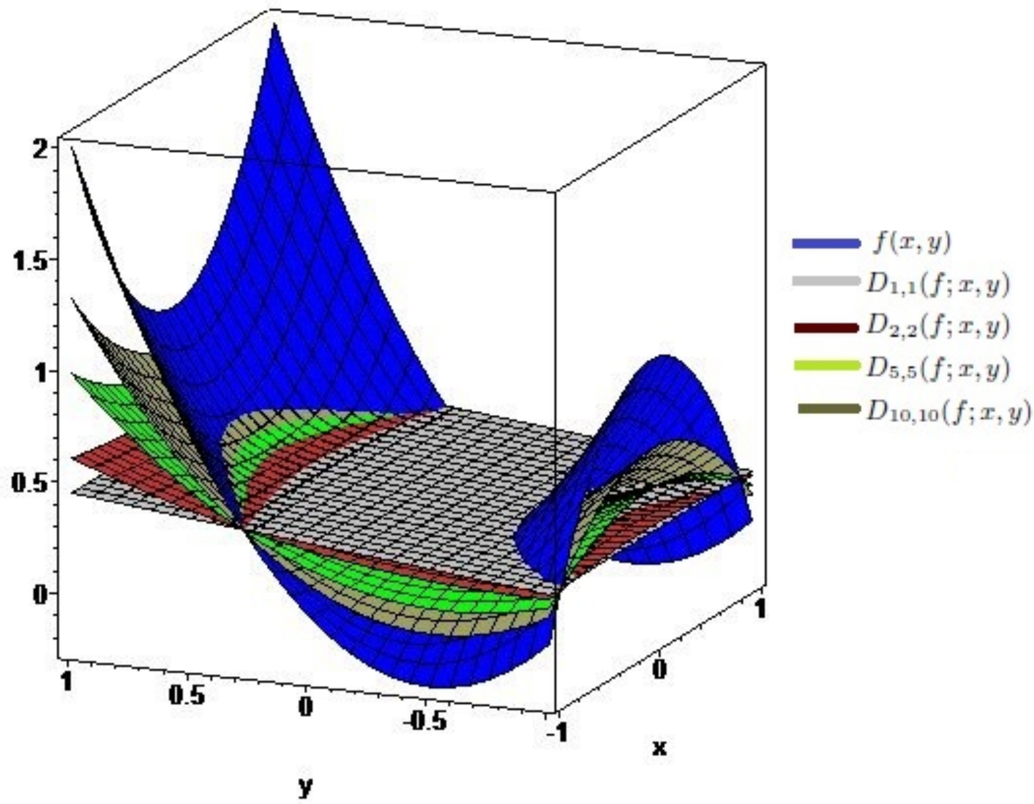
$$\begin{aligned}
\left|S_{n,m}\left(f;\zeta,\eta\right)-f(\zeta,\eta)\right| \leq & \left|\left(f-g_1-g_2-h\right)(\zeta,\eta)\right| + \left|\left(g_1-S_{n,m}g_1\right)(\zeta,\eta)\right| \\
& + \left|\left(g_2-S_{n,m}g_2\right)(\zeta,\eta)\right| + \left|\left(h-S_{n,m}h\right)(\zeta,\eta)\right| \\
& + \left|S_{n,m}\left((f-g_1-g_2-h);\zeta,\eta\right)\right| \\
\leq & 2\left\|f-g_1-g_2-h\right\|_{\infty} + 4\left\|T_B^{2,0}g_1\right\|_{\infty}\frac{1}{n} \\
& + 4\left\|T_B^{0,2}g_2\right\|_{\infty}\frac{1}{m} + 4\left\|T_B^{2,2}h\right\|_{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{m}
\end{aligned}$$

olur. Karışık K-fonksiyonelinin tanımından, $g_1 \in C_B^{2,0}(\mathbb{D})$, $g_2 \in C_B^{0,2}(\mathbb{D})$ ve $h \in C_B^{2,2}(\mathbb{D})$ için infimumu alınırsa istenilen (4.44) sonucu elde edilir. $\square$

4.7. Genelleştirlmiş Bernstein-Durrmeyer $D_{r,s}$ Operatörü için Nümerik Örnekler

Bu bölümde, genelleştirilmiş iki değişkenli Bernstein-Durrmeyer operatörlerinin Maple programı ile elde edilen grafiklerini incelenmiştir ve bu grafiklerden yola çıkılarak bazı değerler için nümerik değerler tablosu oluşturulmuştur. Ayrıca, Bernstein-Durrmeyer tipi GBS operatörü $S_{n,m}$ ile $D_{r,s}$ operatörünün f fonksiyonuna yaklaşma oranları incelenmiştir.

Örnek 4.16 *$f(x,y) = x^2y + y^2$ fonksiyonuna $r,s = 1,2,5,10$ değerlerinde $D_{r,s}$ operatörlerinin yaklaşımı aşağıdaki grafikte verilmiş olup, Çizelge 4.1. de nümerik değerleri incelenmiştir. Şekil 4.1. de $D_{r,s}$ operatörünün r,s değerleri büyüdükçe mavi renk ile gösterilen f fonksiyonuna yaklaştığı gözlenmektedir.*



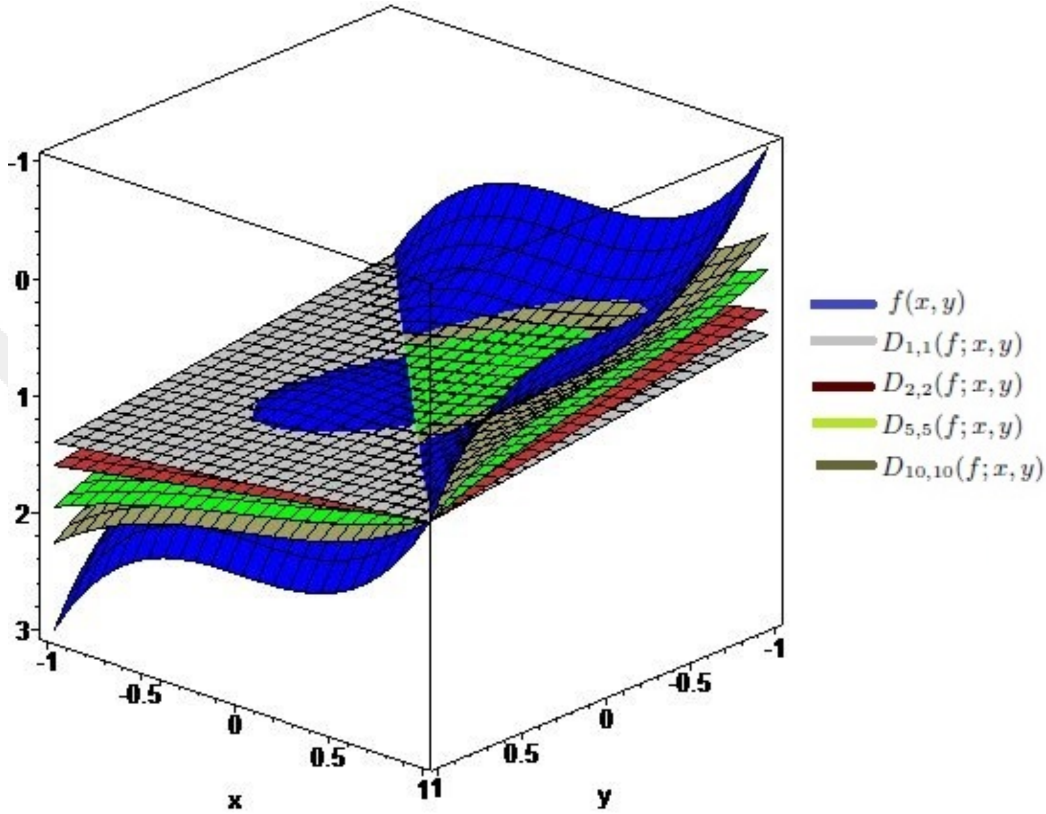
Şekil 4.1. $r,s = 1,2,5,10$ iken $f(x,y) = x^2y + y^2$ fonksiyonu için $D_{r,s}$ operatörlerinin yaklaşımı.

Şimdi $D_{r,s}$ operatörünün $f(x,y) = x^2y + y^2$ fonksiyonu için $maksimize\,|D_{r,s}(x,y) - f(x,y)|$ değerlerini hesaplayalım.

Çizelge 4.1. Şekil 4.1. için nümerik hata değerleri

(r,s)	$maksimize\,\lvert D_{r,s}(x,y) - f(x,y)\rvert$
r,s =5	1,0204
r,s =15	0,5113
r,s =25	0,3390
r,s =50	0,1836
r,s =100	0,0957
r,s =150	0,0647

Örnek 4.17 *$f(x, y) = 1 - x^3 + y^3$ fonksiyonuna $r, s = 1, 2, 5, 10$ değerlerinde $D_{r,s}$ operatörlerinin yaklaşımı aşağıdaki grafikte verilmiş olup, Çizelge 4.2. de nümerik değerleri incelenmiştir. Şekil 4.2. de $D_{r,s}$ operatörünün r, s değerleri büyüdükçe mavi renk ile gösterilen f fonksiyonuna yaklaştığı gözlenmektedir.*

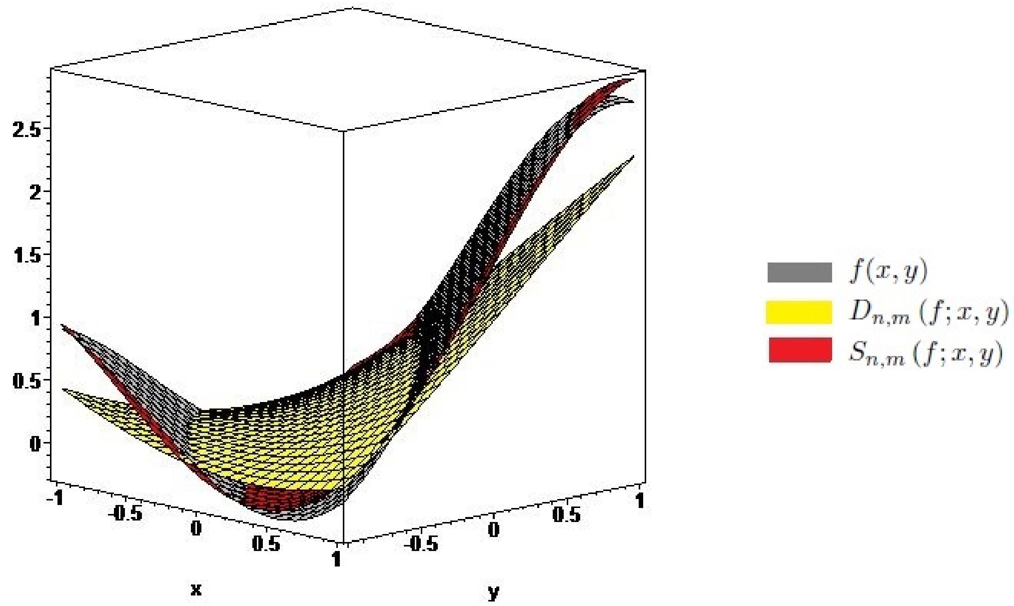


Şekil 4.2. $r, s = 1, 2, 5, 10$ iken $f(x, y) = 1 - x^3 + y^3$ fonksiyonu için $D_{r,s}$ operatörlerinin yaklaşımı.

Çizelge 4.2. Şekil 4.2. için nümerik hata değerleri

(r, s)	$maksimize\,\|D_{r,s}(x, y) - f(x, y)\|$
r,s =5	1,0476
r,s =10	0,7362
r,s =50	0,2139
r,s =100	0,1131
r,s =500	0,0066

Örnek 4.18 *$f(x,y) = xy(x+y)$ fonksiyonuna genelleştirilmiş Bernstein-Durrmeyer operatörü $D_{r,s}$ ve GBS operatörü $S_{n,m}$ ile yaklaşım grafikleri ve nümerik değerler tablosu aşağıdaki verilmiştir. Şekil 4.3. de görüldüğü gibi GBS operatörü $S_{n,m}$ f fonksiyonuna genelleştirilmiş Bernstein-Durrmeyer operatörü $D_{r,s}$ den daha iyi yaklaşmaktadır.*



Şekil 4.3. $f(x,y) = xy(x+y)$ fonksiyonu için $D_{r,s}$ ve $S_{n,m}$ operatörlerinin yaklaşımı.

GBS operatörü $S_{n,m}$ nin f fonksiyonuna $D_{r,s}$ operatörüne göre daha hızlı yaklaştığı aşağıda verilen Çizelge 4.3. den görülmektedir. Başka bir ifade ile

$$\lim_{n,m,r,s\to\infty} \frac{|S_{nm}(f;x,y) - f(x,y)|}{|D_{rs}(f;x,y) - f(x,y)|} = 0$$

dır.

Çizelge 4.3. de $\frac{|S_{nm}(f;x,y)-f(x,y)|}{|D_{rs}(f;x,y)-f(x,y)|}$ oranı için nümerik değerler verilmiştir.

Çizelge 4.3. $f(x,y) = xy(x+y)$ fonksiyonu için nümerik hata değerleri

$n = m = r = s$	$\frac{\lvert S_{nm}(f;x,y)-f(x,y)\rvert}{\lvert D_{rs}(f;x,y)-f(x,y)\rvert}$	
	$x = y = -0.9$	$x = y = 0.9.$
n,m,r,s =10	0.1109074244	0.1109074244.
n,m,r,s =20	0.059438227243	0.05943827604.
n,m,r,s =30	0.04057182903	0.04057182903.
n,m,r,s =40	0.03079258957	0.03079257850.
n,m,r,s =50	0.02481093442	0.02481093408.
n,m,r,s =100	0.01258493091	0.01258493075.
n,m,r,s =200	0.006337972145	0.006337971824.
n,m,r,s =400	0.003180493934	0.003180493934.
n,m,r,s =500	0.002546195548	0.002546195548.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada $[-1,1] \times [-1,1]$ karesel bölgesi üzerinde aşağıdaki gibi tanımladığımız $D_{r,s}(f;\zeta,\eta)$ operatörünün

$$D_{r,s}(f;\zeta,\eta) = \frac{r+1}{2}\frac{s+1}{2}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\phi_{r,s}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{r,s}^{k,j}(t,u)f(t,u)dtdu$$

bir lineer pozitif operatör olduğu, Korovkin teoreminin şartlarını sağladığı ve f fonksiyonuna düzgün yakınsadığı

$$\lim_{r,s\to\infty}\left\|D_{r,s}\left(f;\zeta,\eta\right)-f(\zeta,\eta)\right\|_{C(\mathbb{D})}=0$$

gösterilmiş olup merkezi momentleri hesaplanmıştır. Elde edilen merkezi momentler yardımıyla $D_{r,s}(f;\zeta,\eta)$ operatörünün asimptotik yaklaşımı incelenmişitir. Daha sonra süreklilik modülü tanımlanmıştır ve $D_{r,s}$ operatörü için elde edilen tam ve kısmi süreklilik modülleri yardımıyla yaklaşım hızı aşağıdaki gibi hesaplanmıştır. $\omega, \omega^{(1)}, \omega^{(2)}$ f fonksiyonunun tam ve kısmi süreklilik modülleri olmak üzere her $(x,y)\in\mathbb{D}$ için

$$\|D_{r,s}(f;\zeta,\eta)-f\|_{C(\mathbb{D})}\leq 3\left(\omega^{(1)}\left(f;\frac{1}{\sqrt{r}}\right)+\omega^{(2)}\left(f;\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\right),$$

$$\|D_{r,s}(f;\zeta,\eta)-f\|_{C(\mathbb{D})}\leq 3\omega\left(f;\sqrt{\frac{1}{r}+\frac{1}{s}}\right)$$

sonuçları elde edilmiştir. Ayrıca f fonksiyonunun Lipschitz koşulunu sağlaması durumunda $D_{r,s}(f;\zeta,\eta)$ operatörü için bir eşitlik elde edilimitir. $D_{r,s}$ operatörü için Peetre K-fonksiyonelini kullanarak yaklaşımın hızı aşağıdaki gibi hesaplanmıştır;

$$\left|D_{r,s}\left(f;\zeta,\eta\right)-f(\zeta,\eta)\right|\leq 2\mathcal{K}\left(f;\delta_{r,s}(\zeta,\eta)\right).$$

$D_{r,s}(f;\zeta,\eta)$ operatörü için Voronovkaya teoremi her $f\in C^2(\mathbb{D})$, $f', f''\in C(\mathbb{D})$ için

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to\infty} r\left\{D_{r,r}(f;\zeta,\eta)-f(\zeta,\eta)\right\}\\&=-2\zeta f'_{\zeta}(\zeta,\eta)-2\eta f'_{\eta}(\zeta,\eta)+(\zeta-1)^2 f''_{\zeta\zeta}(\zeta,\eta)+(\eta-1)^2 f''_{\eta\eta}(\zeta,\eta)-4\zeta\eta f''_{\zeta\eta}(\zeta,\eta)\end{aligned}$$

olarak ispat edilmiş ve kısmi türevleri

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\partial}{\partial\zeta}D_{r,r}\left(f;\zeta,\eta\right)=\frac{\partial f}{\partial\zeta}\left(\zeta,\eta\right)$$

ve

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\partial}{\partial\eta}D_{r,r}\left(f;\zeta,\eta\right)=\frac{\partial f}{\partial\eta}\left(\zeta,\eta\right).$$

olarak hesaplanmıştır. $D_{r,s}$ operatörümüzün Mapple yazılım programı ile farklı değerler için herhangi sürekli bir fonksiyonuna ($f(x,y)=x^2y+y^2$ ve $f(x,y)=1-x^3+y^3$) yaklaşımları arasındaki fark grafik üzerinde gösterilmiş ve nümerik değerleri tablo üzerinde ifade edilmiştir. Bögel sürekli ve Bögel sınırlı fonksiyonların tanımı verilerek sürekli fonksiyonlar uzayından daha kapsamlı olan fonksiyonlar uzayı tanımlanmıştır. Karışık düzgünlük modülü verilerek Genelleştirilmiş Boolean Toplamı altında yeniden inşaa edilen $S_{n,m}$ operatörü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned}S_{n,m}\left(f(t,s);\zeta,\eta\right)=&\frac{n+1}{2}\frac{m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\phi_{n,m}^{k,j}(\zeta,\eta)\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_{n,m}^{k,j}(t,u)\\&\times\left(f(t,\eta)+f(\zeta,s)-f(t,s)\right)dtdu.\end{aligned}$$

Ayrıca, $\{S_{n,m}(f)\}$ dizisinin $f\in C_b(\mathbb{D})$ fonksiyonuna yaklaşımının derecesi karışık düzgünlük modülü yardımıyla incelenmiştir ve buna ek olarak karışık K-fonksiyoneli açısından da değerlendirilmiştir. Son olarak iki değişkenli Bernstein-Durrmeyer tipi $D_{r,s}$ operatörün GBS (Generalized Boolean Sum) $S_{n,m}$ operatörünün daha iyi yaklaşım sonuçlarını verdiği Maple programı ile elde edilen grafikler de ve nümerik değerler tablosunda ifade edilmiştir.

5.2. Öneriler

Bu tezde, karesel bölge üzerinde iki değişkenli lineer pozitif genelleştirilmiş Bernstein-Durrmeyer operatörleri tanımlanıp, bu operatör üzerinde yakınsaklık durumları süreklilik modülü, Peetre K-fonksiyoneli açısından değerlendirilmiştir. Ayrıca daha iyi yaklaşım özelliklerinin Maple programı ile de grafik üzerinde gösterilen GBS operatörü tanımlanmıştır ve bu operatörün sürekli herhangi bir fonksiyona yaklaşımı karışık düzgünlük modülü ve karışık K-fonksiyoneli açısından değerlendirilmiştir.

Yaklaşım teorisinin günümüzde biyomedikal, sağlık ve mühendislik gibi birçok alanda uygulamaları mevcut olup, bu alanda yeni çalışmalara devam edilmektedir. İleriki çalışmalarda karesel simetrik bölge üzerinde çalışılan genelleştirilmiş Bernstein-Durrmeyer operatörü düzgün yüzeyler üzerinde çalışılıp geometri için yeni sonuçlar elde edilebilir. Yaklaşım teorisinin birçok uygulamasında iyi bilinen Korovkin tip teoremler lineer pozitif yaklaşım operatörleri üzerine inşaa edilmiştir. Genelleştirlmiş Bernstein-Durrmeyer operatörleri, özellikle otomotiv sektöründe de karşımıza çıkan, genellikle lineer olmayan operatörler üzerindeki maksimum çarpım operatörleri için genellemesi tanımlanabilir. Böylece kurulacak olan operatör üzerindeki yaklaşım dercesinin lineer operatörlerle verilenler kadar iyi olabileceği görülebilir. Ayrıca $D_{r,s}$ operatörü için q ve (p,q)- analiz tanımları verilerk bu operatörler üzerinde yaklaşımları incelenebilir.

KAYNAKLAR

ABEL, U., 1998. Asymptotic approximation with Kantorovich polynomial. Approx. Theory and Its Appl., 14: 106.

ABEL, U., GUPTA, V. and MOHAPATRA, R. N., 2008. Local approximation by a variant of Bernstein–Durrmeyer operators. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 68(11): 3372-338.

AGRAWAL, P. N., BAXHAKU, B. and CHAUHAN, R.,2017. The approximation of bivariate Chlodowsky-Szász-Kantorovich-Charlier-type operators. Journal of Inequalities and Applications, 195.

ALTOMARE, F., and CAMPITI, M., 1994. Korovkin-Type approximation theory and its applications. De Gruyter Series Studies in Mathematics, Vol. 17, Walter De Gruyter Berlin- New York, 627s.

ATAKUT. Ç., BÜYÜKYAZICI, İ. and KIRCI SERENBAY, S., 2015. Approximation properties of Baskakov-Balazs type operators for functions of two variables. Miskolc Math. Notes 16(2): 667–678.

BADEA, C., BADEA, I., COTTIN, C. and GONSKA, H.H., 1988. Notes on the degree of approximation of B-continuous and B-differentiable functions. Approx. Theory Appl. 4: 95–108.

BADEA, C. and COTTIN, C., 1988. Korovkin-type theorems for generalized Boolean sum operators. Approximation Theory . 58: 51–68.

BASKAKOV, V. A., 1957. An example of sequence of linear positive operators in the space of continuous functions. Doklady Akademii Nauk SSSR, 113: 259-251.

BERNSTEIN, S. N., 1912-1913. Demonstration du theoreme de weierstrass fondee sur le calcul des probabilites. Commun. Soc. Math. Kharkow, 13(2): 1-2.

BLEIMANN, G., BUTZER, P.L. and HAHN, L., 1980. A Bernstein-type operator approximating continuous functions on the semi-axis. Indag. Math., 42: 255-262.

BOHMAN. H., 1952. On approximation of continuous and analytic functions. Ark. Mat., 2: 43-56.

BÉZIER, P. E., 1972. Numerical Control-Mathematics and applications, John Wiley and Sons, London.

BOGEL, K., 1934. Mehrdimensionale differentiation von funktionen mehrerer veranderlicher. J. Reine Angew. Math. 170: 197-217.

BOGEL, K., 1962–1963. Uber die mehrdimensionale differentiation. Jber. Deutsch. Math-Verein. 65: 45–71.

BÜYÜKYAZICI, İ., 2003. İki değişkenli fonksiyonların Bernstein polinomları. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 56s.

CHEBYSHEV, P. L., 1854. Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes. Mémories des Savants étrangers á l'Ácadémie de Saint-Pétersbourg, 7: 539-586.

CHLODOVSKY, I., 1937. Sur le developpment des fonctions definies dans un interval infini en series de polynomes de M. S. Bernstein. Compositio Math., 4: 380-393.

DEO, N., NOOR, M. A. and SIDDIQUU, M. A., 2008. On approximation by a class of

new Bernstein type operators. Applied Math. And Comp. 201: 604-612.
DERRIENNIC, M. M., 1981. Sur l'approximation de fonctions intégrables sur $[0, 1]$ par des polynômes de Bernstein modifies. J. Approx. Theory, 31: 325–343.
DURRMEYER, J. L., 1967. Une formule d'inversion de la transformee de Laplace. application a la théorie des moments. Faculte des Sciences de l'Universite de Paris.
FORREST, A. R., 1972. Interactive Interpolation and Approximation by Bézier Polynomials. The Computer Journal, 15(1):71–79.
GUPTA, V., 2011. Approximation properties by Bernstein–Durrmeyer type operators. Complex Anal. Oper. Theory, 7: 363–374.
HACISALİHOĞLU, H., ve HACIYEV, A., 1995. Lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklığı, A.Ü.F.F Döner Sermaye İşletme Yayınları, Ankara, 94s.
İZGİ, A., 2004. İki değişkenli fonksiyonlar sınıfında Bernstein-Chlodowsky tipi lineer pozitif operatörler dizisinin yakınsaklık özellikleri. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 74s.
İZGİ, A., 2013. Approximation by a composition of Chlodowsky operators and Szazs–Durrmeyer operators on weighted spaces. LMS Journal of Computation and Mathematics, 16:388-397.
İZGİ, A., 2013. Approximation by a Class of New Type Bernstein Polynomials of one and two Variables. Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 9(1): 55-72.
İZGİ, A., 2014. Rate of approximation by modified Gamma-Taylor operators. Eurasian Mathematical Journal, 5(3): 46-57.
İZGİ, A., ACAR, E., 2017. Approximation by Composition of q-Szasz-Mirakyan and q- Durrmeyer-Chlodowsky Operators. Turk. J. Math. Comput. Sci, 83-89.
KANTOROVICH L.V., 1930. Sur certains developpements suivant les polynomes de la forme de S. Bernstein I, II. C.R. Acad. Sci. URSSS, 563-568.
KIVINUKK, A. and METSMAGI, T., 2011. Approximation in variation by the Kantorovich Operators. Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, 60(4): 201-209.
KOROVKIN, P.P., 1953. On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. (Russian), Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.)MR 15,236.Sc. 1.2. 90: 961-964.
LORENTZ, G.G., 1953. Bernstein polynomials. University of Toronto Press, Toronto.
MARTINEZ, F. L., 1989. Some Properties of Two- Dimensional Bernstein Polynomials. Jaurnal of Approximation Theory, 59: 300-306.
MEYER-KONIG, W., ZELLER, K., 1960. Bernsteinsche potenzreihen. Studia Math., 19:89-94.
MIRAKYAN, G.M., 1941. Approximation of continuous functions with the aid of polynomials of the form $e^{-nx}\sum_{k=0}^{m_n} C_{k,n}x^k$. Comptes rendus de l'Académie des sciences de l'URSS (in French), 31: 201–205.
POPOVICIU, T., 1935. Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur. Mathematica, 10: 49-54.
POPOVICIU, T., 1951. Asupra demonstraţiei teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare. Lucrările Sesiunii Gen. Şt. Acad. Române, 2-12 iunie 1950, Editura Academiei Republicii Populare Române. 1951, 1664-1667.
STANCU, D. D., 1968. Approximation of function by a new class of polynomial operators. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 13(8): 1173–1194.

SZASZ O., 1950. Generalization of Bernstein's polynomials to the infinite interval. J. Res. Nat.Bureau of St. 45:239-245.

VORONOVSKJA, E., 1932. Determination de la forme asymplotique d' approximation des fonctions par les polynomes de M. Bernstein. C. R. Acad. Sci. URSS, 4: 79- 85.

VOLKOV , V. I., 1957. On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variable. Math. Sb. N.S. 43(85):504 (in Russian).

WEIERSTRASS, K., 1885. Über die analytische darstellbarkeit sogenannter willküricher 55 funktionen einer reellen veranderlichen. Sitzungsberichte Der Akademie zu Berlin, 2(1): 633-639, 789-805.