T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ATANGANA BALEANU KESİRLİ TÜREV OPERATÖRÜYLE TANIMLI KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİTİK VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Sümeyye EKER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2020

Doç. Dr. Mahmut MODANLI danışmanlığında, Sümeyye EKER'in hazırladığı "Atangana Baleanu Kesirli Türev Operatörüyle Tanımlı Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Analitik ve Nümerik Çözümleri" konulu bu çalışma 09/09/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman : Doç. Dr. Mahmut MODANLI..

Üye : Doç. Dr. Ali AKGÜL...

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Fatih ÖZBAĞ..

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Doç. Dr. İsmail HİLALİ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ATANGANA BALEANU KESİRLİ TÜREV OPERATÖRÜYLE TANIMLI KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİTİK VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Sümeyye EKER

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mahmut MODANLI
Yıl: 2020, Sayfa: 38

Bu çalışmada uygulamalı bilimler içerisinde önemli bir role sahip olan ve gerçek hayat problemlerini en doğru şekilde modelleyebilen kesirli türev operatörlerinin temel tanımları verildi. Verilen kesirli türev operatörlerinin en önemlilerinden biri olan yerel ve tekil çekirdeğe sahip olmaksızın Mittag-Leffler fonksiyonu ile tanımlı Atangana- Baleanu Caputo kesirli türev operatörünün tanımı ve bu türev operatörü kullanılarak yapılan çalışmalar verildi. Atangana Baleanu Caputo (ABC) kesirli türev operatörüyle verilen üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemin kararlılık kestirimi yapıldı. Başlangıç ve sınır değer koşulları ile verilen denklemin analitik çözümü Laplace dönüşümü ile yapıldı. Daha sonra denklemin Crank-Nicholson fark şeması yöntemi ile yaklaşık çözümü verilip Von Neumann metodu ile denklemin kararlılığı ispatlandı. Nümerik çözüm için kesirli türev operatörünün $\alpha \epsilon (0, 1]$ aralığındaki farklı değerleri için Matlab programı kullanılarak hata analizi tablosu verildi. Bu tablodan bu metodun bu denklem için geçerli ve elverişli olduğu gösterildi.

ANAHTAR KELİMELER: Atangan Baleanu Caputo (ABC) türev operatörüyle tanımlı üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklem, Laplace dönüşümü, analitik çözüm, Cranck- Nicholson fark şeması metodu, yaklaşık çözümler.

ABSTRACT

MSc Thesis

ANALYTICAL AND NUMERICAL SOLUTIONS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS DEFINED BY ATANGANA BALEANU FRACTIONAL DERIVATIVE OPERATOR

Sümeyye EKER

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Departmens

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mahmut MODANLI
Year: 2020, Page: 38

In this study, basic definitions of fractional derivative operators that have an important role in applied sciences and can modal real-life problems in the most accurate way are given. The definition of Atangana Baleanu Caputo fractional derivative operator defined with the Mittag-Leffler function, which is one of the most important fractional derivative operators, without local and singular kernels and studying using this derivative operator are given. Atangana- Baleanu Caputo (ABC) fractional derivative was used for the differential estimation of the third order partial differential equation. The analytical solution of the equation given with initial and boundary value conditions was made by Laplace transform method. Then the approximate solution of the equation with the Cranck-Nicholson difference scheme method was given and the stability of this equation was examined with the Von Neumann method for the numerical solution. For the analytical solutions, the error analysis table was given using the Matlab program for the different values of the fractional derivative operator in the interval $\alpha \epsilon (0,1]$. It is shown from this method is valid and convenient for this equation.

KEY WORDS: the third order partial differential eqauation with Atangana Baleanu Caputo (ABC), Laplace transform, analytical solutions, Cranck- Nicholson difference scheme method, approximation solutions.

TEŞEKKÜR

"Atangana Baleanu Kesirli Türev Operatörüyle Tanımlı Diferansiyel Denklemlerin Analitik ve Nümerik Çözümleri" konulu bu tez çalışması süresince bilgi, birikim ve yardımlarıyla bana destek olan danışman hocam Sayın Doç. Dr. Mahmut MODANLI'ya ve bu süreçte desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

ÇİZELGELER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ ve KISALTMALAR DİZİNİ

ABC	Atangana- Baleanu Caputo
$B(x,y)$	Beta Fonksiyonu
CF	Caputo- Fabrizio
${}_{0}^{ABC}D_t^{\alpha}$	Atangana- Baleanu Caputo Kesirli Türev Operatörü
$E_{\alpha}(.)$	Tek Parametreli Mittag- Leffler Fonksiyonu
$E_{\alpha,b}(.)$	İki Parametreli Mittag- Leffler Fonksiyonu
$\mathcal{L}$	Laplace Dönüşüm Metodu
$\mathcal{L}^{-1}$	Ters Laplace Dönüşüm Metodu
RL	Riemann- Liouville
$\Gamma(.)$	Gamma Fonksiyonu

1.GİRİŞ

Tam sayı olmayan mertebeye sahip türev ve integralle ilgili en ünlü tanımlar Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ve Caputo tanımlarıdır. Caputo, kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri çözerken tamsayı mertebeden başlangıç şartlarını kullanmak için Riemann-Liouville kesirli türevin tanımını yeniden formüle etmiştir (Podlubny, 1999). Bu konu son üç yüz yılda büyük bir önem ve halkça tutulma kazanmış, fen ve mühendisliğin çeşitli alanlarında kullanılmıştır (Hilfe o tarihten bu yana birçok ünlü teorik ve uygulamalı matematikçi kesirli türev hesabıyla ilgilenmiş ve kesirli türev hesabını geliştirmiştir. Riemann, Grünwald-Letnikov, Liouville, Caputo, Lacroix, Euler, Abel, Fourier, Kobel, Erdelyi, Hadamard, Riesz ve Laplace kesirli türeve katkı sağlayan başlıca matematikçilerdir. Kesirli türev; elektrokimya, biyoloji, biyomühendislik, biyofizik, fizik, mekanik-mekatronik, sismoloji gibi mühendisliğin ve matematiğin birçok alanında uygulanmaktadır. Birçok araştırmacı kesirli operatör üzerinde çalıştı. Kesirli operatörler üzerinde büyük işleve sahip olan gamma ve beta fonksiyonlarının tanımı şu şekildedir:

1.1.Temel Kavramlar

Tanım 1.1.1. (Gamma fonksiyonu): $\Gamma(x)$ ile gösterilen gamma fonsiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Gamma fonksiyonu

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$

$\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)! = n\Gamma(n),$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

eşitliklerini sağlar.

Tanım 1.1.2. (Beta fonksiyonu): Matematikte beta fonksiyonu Euler integralinin ilk türüdür. $R(x), R(y) > 0$ için

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{1.2}$$

olarak tanımlanır. Beta fonksiyonu

- $B(x,y) = B(y,x)$
- $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

şeklinde verilen özelliklere sahiptir.

Grünwald-Letnikow, Riemann Liouville, Caputo, Riesz, Hadamard vb. gibi kesirli türev ve integral tanımlarını araştırdılar (Miller, Ross,1993; Samko, Kilbas, Marichev ve ark.,1993; Kilbas, Srivastava, Trujillo ,2006). Bu tanımların kesirli analiz alanında önemli bir yeri olmasına karşın sınırlamaları da mevcuttur.

Taşdan, 2019'da yaptığı tez çalışmasında aşağıda verilen bazı kesirli integraller tanımına yer vermiştir.

Tanım 1.1.3. (Abel' e Göre İntegral Tanımı) Kesirli operatörlerin ilk kullanımı 1823 yılında Abel tarafından verilmiştir. Abel Tautochrone probleminin formulasyonundan ortaya çıkan bir integral denkleminin çözümünde kesirli hesaplamaları uygulamıştır.

Bu problem sürtünmesiz bir eğri üzerinde kayan bir cismin iniş süresinin o cismin başlangıç noktasından bağımsız olduğunu belirtir.

Abel'in birinci ve n. tip integral denklemleri sırasıyla

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{x-t}}dt \tag{1.3}$$

ve

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{x-t}}dt \tag{1.4}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $f(x)$ sürekli bir fonksiyon ve T sabit olmak üzere $0 \leq x,t \leq T$ dir.Bununla birlikte Abel'in $0 < a < 1$ olmak üzere genelleştirilmiş birinci ve n. tip integral denklemleri sırasıyla

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^a}dt \tag{1.5}$$

ve

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^a} dt \tag{1.6}$$

şeklinde ifade edilir. Bu genelleştirilmiş denklemler ise kesirli integraller olarak göz önüne alınabilir (Ross, 1977).

Tanım 1.1.4.(Liouville'ye Göre Kesirli İntegal Tanımı) Kesirli analiz konusunda ilk çalışmaları yapan Liouville'dir. İki tanım üzerinden gitmiştir. Bu tanımlar;

1. tanım bazı γ lar için yakınsak olması gereken sonsuz serileri içermektedir. Bu tanımda Liouville keyfi γ mertebeden türevleri yorumlamış fakat serilerin yakınsak olması koşulu bu tanımı kısıtlamıştır.

2. tanımda ise Liouville, gamma integralinden yararlanarak x ve a sayılarının pozitif olması koşulu ile x^{-a} fonksiyonunun kesirli türevini almayı başarmıştır. Bu tanımda

$$\int_0^\infty (u)^{-a} e^{-xu} du \tag{1.7}$$

integralinde $t = xu$ değişken dönüşümü yapıldığında

$$\int_0^\infty (u)^{-a} e^{-xu} du = \int_0^\infty (\frac{t}{x})^{a-1} e^{-t} \frac{1}{x} dt = \frac{1}{x^a} \int_0^\infty t^{-a} e^{-t} dt \tag{1.8}$$

integrali elde edilir. $\Gamma(\alpha)$ integrali uyarınca bu denklem

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty (u)^{-a} e^{-xu} du \tag{1.9}$$

şeklinde yazılabilir (El Nabulsi ve Torres, 2007).

Tanım 1.1.5. (Cauchy' e Göre Kesirli İntegral) Cauchy'nin kesirli kesirli integral tanımı

$$f_+^{(a)} = \int f(x) \frac{(t-x)^{-a-1}}{\Gamma(-\alpha)} dx = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int (t-x)^{-a-1} f(x) dx \tag{1.10}$$

şeklindedir (Baeumer ve Meerschaert,2001).

Tanım 1.1.6. (Yerel Kesirli İntegraller) $f(x) \in C_a(a,b)$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun α. Mertebeden [a,b] aralığında yerel kesirli integrali $n-1 \leq a \leq n$ için

$$I_{\boldsymbol{b}}^{(\boldsymbol{a})} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b f(t)(dt)^a = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \lim_{\Delta t \to 0} f(t_j)(\Delta t_j)^a \,, \tag{1.11}$$

şeklindedir (Yang, 2011).

Tanım 1.1.7. (Uyumlu (Conformable) Kesirli İntegral) $a \in (n, n+1]$, $n = 0,1,...$, $\beta = \alpha - n$, $a, b \epsilon R$ ve $a < b$ ve $f \in L[a,b]$ olsun. $a > 0$ için α. mertebeden sol uyumlu kesirli integral

$$(I_\alpha^a f)(t) = \frac{1}{n!}\int_t^b (x-t)^n (b-x)^{\beta-1} f(x)dx, \tag{1.12}$$

şeklinde tanımlanır (Abdeljawad, 2015).

Tanım 1.1.8. (Üstel Çekirdekli Kesirli İntegraller) $a, b \in R, a < b$ ve $f \in L[a,b]$ olsun. $a \in (0,1)$ için a. mertebeden sol ve sağ üstel çekirdekli integralleri sırasıyla

$$I_a^a f(x) = \frac{1}{a}\int_a^x \exp\left\{-\frac{1-a}{a}(x-s)\right\} f(s)ds, \quad x > a \tag{1.13}$$

ve

$$I_b^a f(x) = \frac{1}{a}\int_x^b \exp\left\{-\frac{1-a}{a}(s-x)\right\} f(s)ds, \quad x < b \tag{1.14}$$

şeklinde tanımlanır (Kirane ve Torabek, 2016).

Tanım 1.1.9. (Hadamard Kesirli İntegrali) Hadamard kesirli integralinin $\alpha \in R^+$ için sağ ve sol taraflı tanımları sırasıyla

$$H_{a+\varphi}^a = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(\iota n\frac{x}{t})^{1-a} t}, \; x > a > 0, \tag{1.15}$$

$$H_{b-\varphi}^a = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\varphi(t)dt}{(\iota n\frac{t}{x})^{1-a} t}, \; 0 < x < b \tag{1.16}$$

şeklindedir. Burada Γ gamma fonksiyonudur (Killbas et all., 2006).

Tanım 1.1.10. (Katugampola Kesirli İntegrali) $[a,b] \subset R$ sonlu aralık, $a > 0$ ve $f \in X_c^p(a,b)$ olsun. Sağ ve sol taraflı Katugampola kesirli integral operatörleri $a < x < b$ ve $\rho > 0$ için sırasıyla

$${}^\rho I_{\boldsymbol{a}+}^a f(x) = \frac{\rho^{1-a}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{t^{\rho-1}}{(t^\rho - x^\rho)^{1-a}} f(t)dt \tag{1.17}$$

ve

$${}^\rho I_{\boldsymbol{b}-}^a f(x) = \frac{\rho^{1-a}}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{t^{\rho-1}}{(t^\rho - x^\rho)^{1-a}} f(t)dt \tag{1.18}$$

şeklindedir (Katugampola, 2011; Katugampola, 2014). Katugampola 2014'te yapmış olduğu çalışmasında aşağıda verilen teoremi elde etti.

Tanım 1.1.11. $a > 0$ ve $\rho > 0$ ise $x > a$ için,

$$\lim_{\rho\to 1} {}^{\rho}I^{a}_{\boldsymbol{a}+}f(x) = J^{a}_{a+}\, f(x), \tag{1.19}$$

$$\lim_{\rho\to 0} {}^{\rho}I^{a}_{\boldsymbol{a}+}f(x) = H^{a}_{a+}\, f(x). \tag{1.20}$$

Benzer sonuçlar sağ taraflı operatörler için de geçerlidir (Katugampola,2014).

Tanım1.1.12. a katlı Weyl kesirli integrali

$${}_{x}W^{a}_{\infty}\, f(x) = {}_{X}I^{a}_{\infty}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\mathrm{a})}\int_{x}^{\infty}(x-t)^{a-1}\, f(t)dt, \tag{1.21}$$

$${}_{x}W^{a}_{\infty}\, f(x) = {}_{X}I^{a}_{\infty}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\mathrm{a})}\int_{x}^{\infty}(x-t)^{a-1}\, f(t)dt \tag{1.22}$$

şeklinde tanımlanır (Ünal,2011).

Tanım 1.1.13. m en küçük doğal sayı olmak üzere $|p| \leq m$ için Grünwald-Letnikov türevi

$$D^{p}f(t) = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{m}\frac{(-1)^{r}\binom{p}{r}f(t+(p-r)h)}{h^{n}}, p\epsilon R \tag{1.23}$$

şeklinde tanımlanır. (1.23) denkleminde $n = p$ ve h yerine $-h$ alınırsa

$${}_{a}D^{P}_{t}\, f(t) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ mh=t-a}} h^{-p}\sum_{r=0}^{m}(-1)^{r}\binom{p}{r}f(t-rh)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{t-a}{m}\right)^{-p}\sum_{r=0}^{m}(-1)^{r}\binom{p}{r}f\left(t-r\left(\frac{t-a}{m}\right)\right) \tag{1.24}$$

elde edilir. $f^{(k)}(t)$ $[a,t]$ aralığında m>*p-1* için sürekli $k = 1,2\ldots m+1$ olmak üzere Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville kesirli türevleri arasındaki ilişki

$${}_{a}D^{P}_{t}\, f(t) = \sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)}{\Gamma(-\mathrm{p}+\mathrm{k}+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\mathrm{p}+\mathrm{m}+1)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{m-p}\, f^{m+1}(\tau)d\tau \tag{1.25}$$

şeklinde bulunabilir.

Sonuç: $p = n$ ise bu bize bir fonksiyonun n. türevini, $p = -n$ ise bu bir fonksyonun art arda n defa integralini verir.

Kesirli analiz kavramına diğer bazı yaklaşımlar Caputo tarafından önerilen ve genelleştirilmiş fonksiyonların temeline dayalı yaklaşımlara uygulanan problemlerin ve problemlerin analitik çözümleri ve formülasyonları için olası faydalarından dolayı dikkatte değer görüldü.

Tanım 1.1.14. Zamana bağlı α ıncı mertebeden $D_t^\alpha u(t,x)$ Caputo kesirli türevi $n-1<\alpha<n$ için

$$D_t^\alpha u(t,x) = \frac{\partial^\alpha u(t,x)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t \frac{1}{(t-p)^{\alpha-n+1}}\frac{\partial^\alpha u(p,x)}{\partial p^\alpha}dp \qquad (1.26)$$

ve $\alpha = n \in N$ için

$$D_t^\alpha u(t,x) = \frac{\partial^\alpha u(t,x)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} \qquad (1.27)$$

olarak tanımlanır (Karabacak, 2015).

Kesirli türevler ve integraller teorisinin genelleştirilmesi ve uygulamalı matematikteki uygulamaları için Riemann-Liouville tipinde kesirli türevinin tanımı önemli rol oynamıştır

Tanım 1.1.15. (Karabacak, 2015) p. Mertebeden Riemann- Liouville kesirli türev tanımı ise $m \leq p \leq m+1$ olmak üzere,

$$D_t^P f(t)=\left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1}\frac{1}{\Gamma(m-p+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau)d\tau \qquad (1.28)$$

olarak tanımlanmıştır.

Caputo türevi yerine Riemann-Liouville türev yöntemi tercih edilmesinin bir sebebi Caputo türevinde sabitin türevinin sıfır olmasına karşın Riemann-Liouville türevinde sabitin türevinin sıfır olmamasıdır

Tanım 1.1.16. (Karabacak, 2015) Riemann-Liouville integralinin $n-1<a<n$ olmak üzere a. mertebeden tanımı

$$I^a\, f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{f(s)ds}{(x-s)^{1-a}} \qquad (1.29)$$

olarak verilmiştir.

Riemann-Liouville kesirli operatörlerinin birçok fiziksel olay için tamsayı sırasından daha gerçekçi olması kesirli analizin en başta gelen önemli özelliğidir. Bu operatörlerin singüler olmayan bilgiler dahilinde yerel olmayan bir açıklamaya sahip oldukları bilinmektedir. Ne yazık ki, Riemann-Liouville kesirli türevi $t = a$ alt sınır değerlerini içeren başlangıç koşullarından dolayı problemlere yol açar. Çünkü bu türler için bilinen bir fiziksel yorum yoktur. Fakat Caputo kesirli türevinin temel avantajı diferansiyel denklemlerin başlangıç koşulları Caputo türevlerinin tamsayı mertebeli diferansiyel denklemleri ile aynı şekilde ele alınmasının $t = a$ alt sınırda bilinmeyen fonksiyonların limit değerlerini içermesidir.

RL ve Caputo türevleri her ne kadar avantajlı olsa da gerçek hayat problemlerinde tekil güç nedeniyle analitik çözümler elde etmek genellikle zordur. Bu türevde birçok dağıtıcı fiziksel süreç gibi difüzyon, ısı transferi ve gerilme gerinim ilişkilerine doğru şekilde uyulmaz. Tüm bu yetersizlikler yeni kesirli türevlerin ortaya çıkmasına yol açmıştır. Bu anlamda Caputo ve Fabrizio enerji tüketen bir sistemde gevşeme olaylarının modellenmesi ile alakalı üstel çekirdeğe sahip kesirli türev önerdi. Sonra Losada ve Nieto bu yeni türevin kesirli integralini tanımlamıştır.

RL ve Caputo kesirli türev tanımlarında çekirdek kuvvet fonksiyonundan kaynaklanan singüler yapı nümerik hesaplamalarda zorluk çıkarmaktadır. Yine kuvvet fonksiyonu doğadaki bir sayının kuvveti şeklinde davranış gösteren olayların yetersizliğidir.

Visikoelastik malzemenin, elektromanyetik sistemlerin vb. davranışlarının modellenmesinde kısıtlama olan tekil ve yerel çekirdeği içerirler. Bu tür zorlukların üstesinden gelmek için Caputo ve Fabrizio 2015 yılında üstel çekirdeğe dayanan yeni bir kesirli türev tanımı önermiştir. Caputo kesirli türevinin çekirdek fonksiyonu olan $(t-\tau)^{-\alpha}$ ifadesini $\exp\left(-\frac{a}{1-a}t\right)$ ifadesi ile $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$ katsayısını $\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}$ katsayısı ile değiştirerek aşağıdaki tanımı elde etmişlerdir (Yetim, 2019).

Tanım 1.1.17. (a, b) aralığında Sobolev uzayı

$$H^{\mathbf{1}}\,(a, b) = \{u \mid u \text{ mutlak sürekli ve } u' \in L^2(A, B)\}$$

olarak tanımlanır (Atangana ve ark., 2016).

Tanım 1.1.18. (Caputo- Fabrizio Türevi): $f \in H^1(a,b),\ b > a$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$ {}_{a}^{CF}C_t^{\alpha} f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\int_a^t f'(\tau)\exp\left(-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right)d\tau \qquad (1.30)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $M(\alpha)$, $M(0) = M(1) = 1$ şartını sağlayan normalleştirme fonksiyonudur. Caputo- Fabrizio (CF) türev tanımına göre yine Caputo türev tanımında olduğu gibi sabitin türevi sıfır olup $t = \tau$ noktasında singülerite yoktur.

Bu türev üstel bozunum yasasının kullanıldığı bir türevdir. Bu türevin mevcut olanlara göre sağladığı bazı faydalar, türevin üstel yasayı göz önüne alındığında kullanılabilmesi, üstel fonksiyona dayandığı için tekillikten arındırılmış olmasıdır. Ancak bu bulguda bazı ciddi sorunlar vardı. İlki kullanılan çekirdek yerel değil, ikincisi ilişkili antitürev sadece fonksiyonun ve integralin ortalamasıydı. Bu nedenle operatörün kesirli türevden çok bir filtre olduğu sonucuna varıldı. Ancak şuna da işaret edilmelidir ki bu yeni bulgunun etrafında büyük başarı ile birçok çalışma yapıldı. Bu türev makine mühendisliğinde, yeraltı suyu çalışmalarında, termal bilimlerde, difüzyon modelinde ve diğerlerinde kullanıldı.

Atangana ve Baleanu ise Caputo-Fabrizio’nun belirttiği sorunları gidererek tekil bir çekirdeğe sahip olamadan bir türevin çok daha iyi versiyonunu önerdi. Bu türev genelleştirilmiş Mittag Leffler fonksiyonuna dayanmaktadır. Mittag Lefler fonksiyonunun karmaşık analiz sorusuna cevap vermesi, analitik devam prosedürünü tasvir etmek için tanımlandığı hatırlatılır (Atangana, Koca,2016; Atangana, Baleanu, 2016).

Caputo ve Riemann-Liouville kesirli türevlerine bağlı olarak Atangana-Baleanu kesirli türevi ve integrali günümüzde matematiksel modelleme konusunda önemli rol oynamıştır.

Tanım 1.1.19. (RL anlamında Atangana- Baleanu Türevi): $f \in H^1(a,b)$, $b > a$ ve $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere RL anlamında Atangana- Baleanu türevi

$${}_{b}^{ABR}D_t^{\alpha}\big(f(t)\big) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_b^t f'(x)E_\alpha\left[-\alpha\frac{(t-x)^\alpha}{1-\alpha}\right]dx \tag{1.31}$$

olarak tanımlanır (Yetim,2019).

Tanım 1.1.20. $f\epsilon H^1(a,b), b > a$ ve $\alpha\epsilon[0,1]$ olsun. Bu durumda Caputo türevine bağlı Atangana-Baleanu yeni kesirli türevi

$${}_{a}^{ABC}D_t^{\alpha}(f(t)) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\int_a^t f'(x)E_\alpha[-\alpha\frac{(t-x)^\alpha}{1-\alpha}]\,dx \tag{1.32}$$

olarak tanımlanır.

Burada,

$$E_\alpha\left[-\alpha\frac{(t-x)^\alpha}{1-\alpha}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\alpha\frac{(t-x)^\alpha}{1-\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \tag{1.33}$$

Mittag-Leffller fonksiyonu ve $B(\alpha) = 1-\alpha+\frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ dır (Atangana, Baleanu, 2016).

RL anlamındaki Atangana-Baleanu türevi, Caputo anlamındaki Atangana Baleanu türevli fonksiyonu $\alpha \to 0$ durumundaki türevi hesaplandığında fonksiyonun kendisi elde edilemediği içim önerilmiştir.

Teorem 1.1.21. $f\epsilon H^1(a,b), b > a$ ve $\alpha\epsilon[0,1]$ olsun. İki türev arasındaki ilişki

$${}_{0}^{ABC}D_t^{\alpha}(f(t)) = {}_{0}^{ABR}D_t^{\alpha}\big(f(t)\big) - \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}f(0)\,E_\alpha\left[-\alpha\frac{(t-x)^\alpha}{1-\alpha}\right] \tag{1.34}$$

bağıntısı ile açıklanır (Yetim, 2019).

$f,\ n \in N$ olmak üzere n. mertebeden diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise $f^{(k)}(0)$ $(k = 1,2,3,\dots,n)$ koşulları altında

$${}_{0}^{ABC}D_t^{\alpha}(\frac{d^n f(t)}{dt^n}) = \frac{d^n}{dt^n}({}_{0}^{ABR}D_t^{\alpha}\big(f(t)\big)) \tag{1.35}$$

bağıntısı geçerlidir

Tanım 1.1.21. (Atangana- Baleanu İntegrali): Atangana- Baleanu integrali

$${}_{a}^{AB}I_t^{\alpha}\{f(t)\} = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)}f(t) + \frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_a^t f(y)(t-y)^{1-\alpha}\,dy \tag{1.36}$$

$\alpha = 0$ olduğunda başlangıç fonksiyonu, $\alpha = 1$ olduğunda klasik integral elde edilir (Yetim,2019).

Tanım 1.1.22. Mittag Leffler Fonksiyonu Kesirli analizde çok yaygın kullanım alanı bulan önemli bir fonksiyondur. e^z üstel fonksiyonu tamsayı mertebeli diferansiyel denklemlerin teorisinde önemli rol oynar. Bu fonksiyonun bir parametreli genellemesi Mittag Leffler tarafından verildi.

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \tag{1.37}$$

Mittag Leffler fonksiyonunun iki parametreli hali kesirli analizde çok önemli olup bu Agarwal tarafından tanımlanmıştır. Humbert ve Agarwal Laplace transformasyonunu kullanarak bu fonksiyonla ilgili bir dizi ilişki elde etmiştir.

İki parametreli Mittag Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha.\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \quad , \ (\alpha > 0, \beta > 0) \tag{1.38}$$

şeklindedir. Bu tanımın bazı özel değerleri

$\alpha = 1,\ \beta = 2$ için

$$E_{1.1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \ (\alpha > 0,\ \beta > 0),$$

$\alpha = 1,\ \beta = 2$ için

$$E_{1.2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z}\sum_{K=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)} = \frac{e^z-1}{z}, \ (\alpha > 0,\ \beta > 0)$$

$\alpha = 1,\ \beta = 3$ için

$$E_{1.3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2}\sum_{K=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)} = \frac{e^z-1-z}{z^2}, \ (\alpha > 0,\ \beta > 0)$$

elde edilir.

Tanım 1.1.23. (Laplace Dönüşümü) s karmaşık sayısının temel Laplace dönüşümü

$$F(s) = L\{f(t); s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \tag{1.39}$$

şeklinde verilir. (1.39) denklemi $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümüdür. $f(t)$ fonksiyonunun varlığı için α mertbeli üstel fonksiyonun $f(t)$ ile çarpımının her $t > T$ ve $T > 0$ için

$$e^{-at}\,|f(t)| \le M \tag{1.40}$$

olacak şekilde bir M pozitif sayısından küçük kalmasıdır.

Başka bir deyişle $f(t)$ fonksiyonu $t \to \infty$ için exponansiyel fonksiyondan daha hızlı büyük olmamasıdır. $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü altından dönüşümü sonucu $F(s)$ fonksiyonu elde edilir. Tekrar $f(t)$ fonksiyonunu elde etmek için $F(s)$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümünü alınırsa

$$f(t) = L^{-1}\{F(s); t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, \; c = Re(s) > c_0 \tag{1.41}$$

olur. Burada c_0 Laplace integralinin mutlak yakınsak olması için sağ yarı düzlem üzerinde bulunmasıdır. (1.40) formülü kullanılarak ters Laplace dönüşümünün değerlendirilmesi genellikle karmaşıktır. Ancak bazen aradığımız bilinmeyen $f(t)$ fonksiyonunun davranışı hakkında faydalı bilgiler verir.

Konvulasyonun Laplace dönüşümü

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_0^t f(t) g(t-\tau) d\tau \tag{1.42}$$

şeklinde verilir.

Caputo ve RL anlamında Atangana- Baleanu türevlerinin Laplace Dönüşümleri sırasıyla

$$\mathcal{L}\{{}^{ABC}_{\ 0}D_t^{\alpha}(f(t))(s)\} = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \frac{s^{\alpha}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - s^{\alpha-1}f(0)}{s^{\alpha} + \frac{\alpha}{1-\alpha}}, \tag{1.43}$$

$$\mathcal{L}\{{}^{ABR}_{\ 0}D_t^{\alpha}(f(t))(s)\} = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \frac{s^{\alpha}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)}{s^{\alpha} + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{1.44}$$

şeklindedir.

2.ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Mertebesi tamsayı olan integral ve türev alma kavramlarını temel matematik bilgisine sahip olan herkes bilebilir "Ancak tamsayı olmayan ve rasyonel sayı olan $\frac{1}{2}$ mertebeden gibi bir sayı için fonksiyonun integrali veya türevi nasıl alınır?" sorusu ilk olarak 30 Eylül 1695 tarihinde gündeme getirilmiştir Leibniz'in L'Hospital'a tam sayı mertebeden türevler, kesirli mertebeden türevlere genişletilebilir mi? şeklindeki sorusu kesirli türev kavramının ortaya çıkmasına ve birçok ünlü matematikçinin ilgisini çekmesine neden olmuştur. Leibniz ise buna yanıt olarak bir gün faydalı sonuçların çıkarılacağı ve belirgin bir uygulamasının olacağını söyledi. Ayrıca bu konunun yani tamsayı olmayan mertebeden türevin çıkışında, Johann Bernoulli (1667-1748) ve Leibniz'in aralarındaki yazışmaların da çok büyük önemi olmuştur.

1667' de Leibniz, J. Wallis ve J. Bernoulli' ye yazdığı mektupta,

$$\frac{d^n e^{mx}}{dx^n} = m^n e^{mx} \tag{2.1}$$

Bu tanımda n'nin tamsayı olmayan değerleri için de yapılabileceğine değinerek böylece kesirli mertebeden türev için mümkün bir yaklaşımdan bahsetmiştir. 1716'da Leibniz'in ölümüyle tamsayı olmayan mertebeden türev konusu sonlanmamış, Leonhard Euler (1707-1783), 1729'da kesirli türev ve integral konusunda oldukça önemli bir yeri olan Gamma fonksiyonunu tanıtmış, daha sonra Joseph Louis Lagrange (1736-1813) kesirli hesap konusuna dolaylı olarak katkıda bulunmuştur. 1772'de J.L. Lagrange, tamsayı mertebeden türev operatörü için üs kuralını geliştirmiş ve bunu, Leonhard Euler (1707-1783), 1729'da kesirli türev ve integral konusunda oldukça önemli bir yeri olan Gamma fonksiyonunu tanıtmış,

$$\frac{d^m}{dx^m}\frac{d^n}{dx^n} = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}, (m, n \in N) \tag{2.2}$$

şeklinde yazmıştır. Daha sonra kesirli hesap teorisi geliştiği zaman, m ve n keyfi sayılar ise bu kuralın doğru olup olmayacağını bilmek matematikçiler için önemli olmuştur.

Matematiğin gerçek hayat ile iç içe olan önemli uygulamalarında yer alan kesirli türev ve bunu içeren kısmi diferansiyel denklemlerden özellikle kesirli mertebeden türevli olanlarının kullanımı yaygın hale gelmiştir. Son zamanlarda birçok bilim adamı ve uzman, çalışmalarını gerçek hayat problemlerine yöneltmiştir. Bu eğilim yeni model yapılarından gerçek hayat problemlerine ve kesirli türevli diferansiyel denklemlerin uygulanmasına kadar gelmektedir. Fiziksel olayları belirten diferansiyel denklemlerin mertebeleri, söz konusu fiziksel olayın değişim hızını belirlemektedir. Tamsayı mertebeli diferansiyel denklemleri bazı fiziksel olayları açıklama konusundaki birtakım eksiklikleri kapatmak ve fiziksel olayların karakterinin anlaşılmasında önemli rol oynar (Podlubny,1998; Diethelm, 2010; Aguilar, Baleanu, 2014; Gómez-Aguilar, Razo-Hernández, Granados-Lieberman, 2014; Baleanu, Caponetto, Machado, 2016; Zhang, Meerschaert, Neupauer,2016). Bundan dolayı olağan operatörleri kesirli operatörlerle değiştirmek birçok fiziksel problemi daha doğru şekilde modelledi. Bunun için kesirli türev ve kesirli integral kavramları uygulamalı bilimler, mühendislik, finans, jeoloji, termal bilimler, sismoloji, sıvı akışkanları, elastik teorisi, termodinamik ve hidrodinamik gibi bilim dallarında pek çok uygulamalara sahiptir (Celik ve Duman, 2012; Gorial, 2011; Jafari ve Gejii, 2006).

Bu çalışmada uygulamalı bilimler, mühendislik, finans, jeoloji, termal bilimler ve sismoloji gibi pek çok bilim dallarında kullanılan kesirli türev ve kesirli integral kavramları incelendi (Laskin, 2002; Magin, 2006; Caputo, Cametti, 2008; Baleanu, Golmankhaneh,2009; Caputo, Fabrizio, 2015; Atangana, Gomez-Aguilar, 2018).

Bu operatörleri içeren denklemlerin analitik ve yaklaşık çözümü için de en çok kullanılan metodlar Laplace metodu, Fourier dönüşüm ve Fourier seri çözümü metodu kullanıldı. Kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için birçok metot mevcuttur. Bu metotlar; homotopi analiz metodu, Adomian'ın ayrışma metodu, varyasyonel iterasyon metodu, (G^/G^{2}) genel metodu, spectral metodu olarak bilinir (Mohyud-Din ve ark., 2012; Ghaneai, Hosseini, Mohyud-Din,2012; Ahmad and Mohyud-Din,2015; Baskonus, Mekkaoui, Hammouch, and Bulut, 2015; Ravichandran, Jothimani, Baskonus and Valliammal, N. 2018; Esen, Sulaiman, Bulut and Baskonus, 2018; Sulaiman, Baskonus, and Bulut, 2018; Sulaiman, Subashini, Ravichandran, Jothimani, Baskonus, 2018; Bulut, Kumar, Singh, Swroop ve Baskonus, 2018; , Mohyud-Din, Sadaf, 2018). Ashyralyev ve Dal, 2012' de sonlu fark ve iterasyon metotlarını kullanarak $\alpha = 1/2$ için kesirli hiperbolik kısmi diferansiyel denkleminin Neumann koşuluna bağlı yaklaşık çözümü çalışıldı. Aslefallah, Davood ve Khadijeh 2014' de zamana bağlı kesirli diferansiyel difüzyon denklemin yaklaşık çözümü theta metodu yardımıyla hesaplandı. Modanli ve Akgül, 2017'de kesirli telegraf diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini hesaplamak için Theta metodunu kullandı. Akgül ve Modanli, 2018'de İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri sonlu fark şeması ve reproducing kernel metotlarıyla yapıldı. Akgül ve Modanli, 2019'da üçüncü mertebeden kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümler Crank-Nicholson fark şeması metoduyla yapıldı. Salman, Yousef, 2017; Liang, Yan, Cai, 2014' de lokal ve lokal olmayan sigara içenlerin modeli dinamikleri için bir kesirli türev modeli ve enfekte hücrelerde bir kesirli mertebeden HBV modeli önerildi. Adveksiyon difüzyon için temel çözümler denklemi integral dönüşümü ile farklı alanlarda elde edilmiş teknikler Povstenko ve Klekot,2014; Povstenko, Generalized, 2015; Povstenko and Klekot,2016; Povstenko ve Klekot,2016' de detaylı olarak verilmiştir. Araştırma adım adım ilerledikçe integral denklemlerinin çalışmasına yönelik teorik uygulamalar ve standart olmayan süreçlerin modellenmesine yönelik daha pratik uygulamalar oluşturulmuştur. Mittag Leffler fonksiyonunun önemi, kesirli matematikle olan ilişkisi tamamen anlaşılırken yeniden keşfedildi. Bu fonksiyonun karmaşık problemleri modellemeye etkisi nedeniyle Atangana ve Baleanu türevin tanımlanmamış bir akifer içinde akan yer altı suyu modelinde uygulanmıştır. Yer altı suyu çalışmalarının günümüzde çok daha karmaşık olduğu belirtilmiştir. Daha sağlıklı sonuçlar vermesi için Atangana Baleanu kesirli türevi bu modele uygulanmıştır. (R. T. Alqahtani, Atangana-Baleanu,2016). AB kesirli denklemleri basit doğrusal olmayan sistemlerde de uygulanmıştır. Bu uygulama yapılırken integral dönüşüm operatörleri arasındaki ilişki sunulmuştur. Atangana Baleanu kesirli türev operatörünün çekirdeği yerel ve tekil olmadığından problemlerin çözümü için büyük avantaj sağlamıştır. Kesirli sistemin çözümlenmesinin varlığı ve benzersizliği ayrıntılı olarak gösterilmiştir. Yerel türevden elde edilemeyen kaotik davranışlar görülmüştür. (Atangana and Koca,2016). Fizikte Kirchhoff'un devre yasalarını kullanan ve aynı zamanda Chua devresinin dinamikleri olarak da bilinen devrenin analizi yeni kurulan kesirli türev kullanılarak genişletilmiştir. Genişletilmiş modeli çözmek için yeni bir sayısal analiz sunulur ve kullanılır. Atangana-Baleanu kesirli türevi kullanılarak sayısal simülasyonlar yapılmış ve yeni kaotik davranışlar elde edilmiştir (Alkahtani, 2016). Atmosfer gibi insanlar ve çevre üzerinde birçok zararlı etki kirlilikler, yer altı suyu akiferlerindeki kirlenmiş akışlar, deniz suyu ve nehir sistemlerindeki kirlilikler bu tip denklemler ile modellenir. Ayrıca son yıllarda camsı ve gözenekli ortamlarda dialektrik malzemeler, polimerler gibi kompleks dinamiklerde, biyolojik sistemlerde kesirli analiz kullanmak mümkündür. Nadeem, Farhad, Saqib, Khan, Jan, Ali Saleh Alshomrani, Alghamdi, 2017'de AB kesirli türevi kimya mühendisliğinde kullanılan Casson sıvısının viskozitesindeki değişimleri modellerken de kullanılmıştır. Endüstri ve kimya mühendisliğinde önemli yeri olan bu tip Newtonsal olmayan sıvıların akış hızlarını ölçmek önemlidir. Çünkü bu sıvılara uygulanan kayma gerilimi ile verilir. Avcı ve Yetim, 2018 'de difüzyon ve adveksiyon kombine etkileri altında çözünen dipersiyon heterojen gözenekli ortam parabolik adveksiyon difüzyon denklemleri ile modellenmiştir. 2018 yılında AB türevi kullanılarak enfeksiyon hastalıkları için birkaç matematik model geliştirildi. Taneco-Hernandez, Escobar-Jimenez, Olivares-Peregrino, Morales-Delgado, J Gomez-Aguilar, 2018 'de AB türeviyle tanımlı Ebola virüsü modeli verildi. Owolabi, Atangana, 2018' de ekolojide iki yırtıcı ile av bağımlı besin zinciri sistemi arasındaki spesifik ilişki ele alınmıştır. Bu sistemin dinamik zenginliğini keşfetmek için klasik zaman türevini Caputo veya Atangana-Baleanu kesirli türev operatörleriyle değiştirildi. Bu tür türevlerin yaklaşımı için iki önemli sayısal şema formüle edilmiştir. Hopf bifürkasyonunun da ortaya çıkma durumu gözlenir ve Lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemlere uygulandığında mutlak hatalarını bildirerek şemaların kararlılığını ölçer. Farklı α değerleri ve deney parametre değerleri ile nümerik ve analitik sonuçlar kesirli türevle modellemede daha zengin dinamik kaotik davranışlara yol açabileceğini teyit etmektedir.

Baskonus ve ark., 2020'de COVID-19 koronavirüs için altı adet doğrusal olamayan adi diferansiyel denklem modeli oluşturmuş, çözüm için homotopi analiz metodunu kullanmış ve bu çözümü etkin hale getirebilmek için ABC kesirli türevini kullanmıştır. Jarad ve ark.2020'de, Caputo anlamında ABC türevli operatörlü kuadratik ve kübik modellerin kararlılığını inceledi.

Bu çalışmada Atangana Baleanu Caputo kesirli türev oparetörüyle tanımlanan üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemler incelenmiştir. Önce birinci mertebeden diferansiyel denklem sistem halinde yazılıp denklemin tam çözümü bulundu. Tam çözüm için kararlılık kestirimleri yapılmıştır. Bu denklemin yaklaşık çözümü için Crank-Nicholson fark şeması metodu kullanılmıştır. Bu problem için fark şemalarının kararlılığı Von Neuman metodu ile gösterilmiştir.

3.MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

Bu çalışmada konuyla ilgili yayınlanmış makalelere, dergilere, daha önceden yapılan yüksek lisans ve doktora tezlerine hem internet üzerinden hem de kütüphaneler aracılığıyla ulaşılmıştır, gerekli literatür taramaları yapılmıştır.

3.2. Yöntem

Ulusal ve uluslararası kaynaklardaki veriler incelenmiştir. İlgili konunun tarihçesi ve konuyla ilgili daha önceden yapılan çalışmalar farklı makale ve tezlerden araştırılmıştır. Araştırmalar sonucu elde edilen bulgular ışığında çalışmalar sürdürülmüştür. Çalışmaların neticesinde elde edilen veriler Matlab yazılım programı kullanılarak çizelgeler hazırlanmıştır.

Bu çalışmada

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t^3} + k\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + {}^{ABC}_{0}D_t^{\alpha} u(t,x) \\ +u(t,x) - \lambda \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = f(t,x), \\ 0 < x < L \ , \ \ 0 < t < T, \\ u(0,x) = g_1(x)\ , u_t(0,x) = g_2(x), \quad u_{tt}(0,x) = g_3(x), 0 \le t \le T \\ u(t,x_L) = r_1(t); \quad u(t,x_R) = r_2(t), \ x_L < x < x_R \\ 0 \le \alpha \le 1\ , k > 0\ , \lambda > 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

şeklinde verilen Atangana – Baleanu kesirli türev operatörü ile tanımlanan üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemi ele alınacaktır. Bu denklemde $g_1,\ g_2, g_3, r_1, r_2$ ve f bilinen fonksiyonlardır. $u(t,x)$ ise bilinmeyen fonksiyondur (Akgül ve Modanli, 2019). (3.1) denkleminin tam çözümü ve kararlılık kestirimleri yapılacaktır. Bu denklemi sağlayan örnek problemlerin analitik çözümü Laplace dönüşüm metoduyla verilmiştir. Cranck- Nicholson metodu ile denklemin fark şeması oluşturulup Von Neumann metodu ile bu denklemin kararlılığı gösterilecektir.

3.2.1 Kararlılık Kestirimleri ve Laplace Dönüşüm Yöntemi ile Analitik Çözüm

Bu Atangana–Baleanu kesirli türev operatörü ile tanımlanan üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemi kararlılık kestirimi yapılacak ve Laplace dönüşüm metodu ile analitik çözümü verilecektir.

$G(t) = g(t) - {}^{ABC}_{a}D^{\alpha}_{t}\big(u(t)\big) - k\frac{d^2u(t,x)}{dt^2}$ şeklinde alınıp (3.1) denklemi adi diferansiyel denklem şekline dönüştürülürse

$$\begin{cases} \frac{d^3u(t)}{dt^3} + Ku(t) = G(t), \ \ (0 < t < T) \\ u(0) = g_1, \ \ u'(0) = g_2, \ \ u''(0) = g_3, \ \ 0 < \alpha \le 1, \end{cases} \tag{3.2}$$

denklemi elde edilir (Akgül ve Modanli, 2019). (3.1) problemini (3.2) şeklinde yazmak için aşağıdai koşulların sağlanması gereklidir.

Hilbert uzayında $H = L_2[0, L]$, burada $f(t) = f(t,x)$ abstract (soyut) fonksiyonu $[0,T]$ aralığında verilir. $u(t) = u(t,x)$, $H = L_2[0,L]$'deki değerlerle $[0,T]$ de tanımlanan bilinmeyen fonksiyondur.

$K: D(K) \to H$ operatörü

$Ku(x) = -\lambda u''(x) + u(x)$

bölgesinde

$D(K) = \{u: u,\ u', u'' \in\ L_2[0,L];\ u(0) = u(L)\}$

ile tanımlanan diferansiyel operatördür (Akgül ve Modanli, 2019).

Hilbert uzayında tanımlı $L_2[0,L]$ kare integrallenebilir fonksiyonunun normu

$$\|\varphi\|_H = \left(\int_{x\epsilon L_2} |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.3}$$

şeklindedir.

Burada

$\langle Ku, v\rangle = \langle u, Kv\rangle \ \big(u, v \in D(K)\big)$,

$\langle Ku, u\rangle > \delta\langle u, u\rangle,\ \delta > 0,\ \delta \ge 0$

şeklindedir (Akgül ve Modanli, 2019). Şimdi (3.2) denkleminin birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemleri formunda yeniden düzenlersek

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} - aLu(t) = w(t) \\ \frac{dw(t)}{dt} - \bar{\alpha}Lw(t) = v(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} + Lv(t) = F(t) \end{cases} \tag{3.4}$$

formülü elde edilir. Burada, $L = K^3$ şeklindedir. (3.2) denklemi ve (3.4) formülünün başlangıç koşullarını kullanarak formül (3.3)'ün yeni başlangıç koşullarını aaşağıdaki şekilde olduğu gibi yazılabilir (Akgül ve Modanli, 2019).

(3.2) denklemindeki başlangıç koşulları yerine yazılırsa

$$w(0) = u'(0) - aLu(0), \tag{3.5}$$

$$v(0) = w'(0) - \bar{\alpha}Lw(0)$$

$$v(0) = u'(0) - aLu(0) - \bar{\alpha}L(u'(0) - aLu(0))$$

$$v(0) = u'(0) - aLu(0) - \bar{\alpha}Lu'(0) + \bar{\alpha}aL^2u(0) \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.4) ve (3.5) denklemlerinden

$$\begin{cases} w(0) = u'(0) - aLu(0) \\ v(0) = u''(0) - Lu'(0) + L^2u(0) \end{cases} \tag{3.7}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi (3.2) denkleminin tam çözümünü yapalım.

(3.4) denklem sisteminin birinci denklemini çözmek için denklemin her tarafı e^{-aLt} ile çarpılırsa,

$$e^{-aLt}u'(t) - e^{-aLt}aLu(t) = e^{-aLt}w(t)$$

olur. Bu denklemin de çözümü

$$u(t) = e^{aLt}u(0) + \int_0^t (e^{-aL(s-t)}w(s))ds \tag{3.8}$$

olarak elde edilir. Aynı şekilde (3.3) denklem sisteminin de çözümü

$$w(t) = e^{\bar{\alpha}Lt}w(0) + \int_0^t e^{-\bar{\alpha}L(z-t)}v(z)dz \tag{3.9}$$

şeklinde elde edilir. Aynı yöntemle (3.3) denklem sisteminin üçüncü denkleminin çözümü

$$v(t) = e^{-Lt}v(0) + \int_0^t (e^{-L(t-p)}F(p))dp \tag{3.10}$$

olur.

$$u(t) = e^{aLt}u(0) + \int_0^t e^{-aL(s-t)}[e^{\bar{\alpha}Ls}w(0) + \int_0^s e^{-\bar{\alpha}L(z-s])}v(z)dz]\, ds$$

$$u(t) = e^{aLt}u(0) \ + \int_0^t e^{-aL(s-t)}e^{\bar{\alpha}Ls}w(0)ds +$$

$$\int_0^t e^{-aL(s-t)} \int_0^s e^{-\bar{\alpha}L(z-s])}v(z)dz\, ds$$

$$u(t) = e^{aLt}u(0) +$$
$$\int_0^t e^{-aLs}e^{aLt}e^{\tilde{a}Ls}w(0)ds \int_0^t \int_0^s e^{-aL(s-t)}\ e^{-\tilde{a}L(z-s])}v(z)dzds$$
$$u(t) = e^{aLt}u(0) +$$
$$\int_0^t e^{aLt}e^{(\tilde{a}-a)Ls}w(0)ds + \int_0^t \int_0^s e^{-aLs}e^{aLt}e^{-\tilde{a}Lz}e^{\tilde{a}Ls}v(z)dzds$$
$$u(t) = e^{aLt}u(0) + (\frac{e^{aLt}}{(\tilde{a}-a)L}e^{(\tilde{a}-a)Ls}w(0))|_0^t +$$
$$\int_0^t \int_0^s e^{-aLs}e^{aLt}e^{-\tilde{a}Lz}e^{\tilde{a}Ls}v(z)dzds$$
$$u(t) = e^{aLt}u(0) + \frac{e^{aLt}}{(\tilde{a}-a)L}e^{(\tilde{a}-a)Lt}w(0) - \frac{e^{aLt}}{(\tilde{a}-a)L}w(0) +$$
$$\int_0^t \int_0^s e^{(\tilde{a}-a)Ls}e^{aLt}e^{-\tilde{a}Lz}v(z)dzds$$
$$u(t) = e^{aLt}u(0) + \left(\frac{e^{\tilde{a}Lt}}{(\tilde{a}-a)L} - \frac{e^{aLt}}{(\tilde{a}-a)L}\right)w(0) +$$
$$\int_0^t \int_0^s e^{(\tilde{a}-a)Ls}e^{aLt}e^{-\tilde{a}Lz}v(z)dzds$$
$$w(0) = u'(0) - aLu(0)$$
olduğundan
$$u(t) = e^{aLt}u(0) + \left(\frac{e^{\tilde{a}Lt}-e^{aLt}}{(\tilde{a}-a)L}\right)\left(u'^{(0)} - aLu(0)\right) +$$
$$\int_0^t \int_0^s e^{(\tilde{a}-a)Ls}e^{aLt}e^{-\tilde{a}Lz}v(z)dzds$$
$$u(t) = e^{aLt}u(0) + \left(\frac{e^{\tilde{a}Lt}-e^{aLt}}{(\tilde{a}-a)L}\right)u'(0) - \left(\frac{e^{\tilde{a}Lt}-e^{aLt}}{(\tilde{a}-a)L}\right)\ aLu(0) +$$
$$\int_0^t \int_0^s e^{(\tilde{a}-a)Ls}e^{aLt}e^{-\tilde{a}Lz}v(z)dzds$$
$$u(t) = e^{aLt}u(0) + \left(\frac{e^{\tilde{a}Lt}-e^{aLt}}{(\tilde{a}-a)L}\right)u'(0) - \left(\frac{ae^{\tilde{a}Lt}-ae^{aLt}}{(\tilde{a}-a)}\right)u(0) +$$
$$\int_0^t \int_0^s e^{(\tilde{a}-a)Ls}e^{aLt}e^{-\tilde{a}Lz}v(z)dzds$$
$$u(t) = (e^{aLt} - \frac{ae^{\tilde{a}Lt}-ae^{aLt}}{(\tilde{a}-a)})u(0) + \left(\frac{e^{\tilde{a}Lt}-e^{aLt}}{(\tilde{a}-a)L}\right)u'(0) +$$
$$\int_0^t \int_t^z e^{(\tilde{a}-a)Ls}e^{aLt}e^{-\tilde{a}Lz}v(z)dsdz$$
$$u(t) = \left(\frac{\tilde{a}e^{aLt}-ae^{\tilde{a}Lt}}{(\tilde{a}-a)}\right)u(0) + \left(\frac{e^{\tilde{a}Lt}-e^{aLt}}{(\tilde{a}-a)L}\right)u'(0) +$$
$$\int_0^t (\frac{e^{aLt}e^{-\tilde{a}Lz}}{(\tilde{a}-a)L}e^{(\tilde{a}-a)Ls}v(z)|_t^z dz$$
$$u(t) = (\frac{\tilde{a}e^{aLt}-ae^{\tilde{a}Lt}}{(\tilde{a}-a)})u(0) + \left(\frac{e^{\tilde{a}Lt}-e^{aLt}}{(\tilde{a}-a)L}\right)u'(0) + \int_0^t \left(\frac{e^{aLt}e^{-\tilde{a}Lz}}{(\tilde{a}-a)L}e^{(\tilde{a}-a)Lz} -\right.$$
$$\left.\frac{e^{aLt}e^{-\tilde{a}Lz}}{(\tilde{a}-a)L}e^{(\tilde{a}-a)Lt}\right)v(z)dz \tag{3.11}$$

denklemi elde edilir. (3.10) denklemi (3.11) denkleminde yerine yazılırsa

$$u(t) = (\frac{\tilde{\alpha} e^{aLt} - a e^{\tilde{\alpha}Lt}}{(\tilde{\alpha}-a)}) u(0) + \left(\frac{e^{\tilde{\alpha}Lt} - e^{aLt}}{(\tilde{\alpha}-a)L}\right) u'(0) +$$
$$\int_0^t \left(\frac{e^{aLt} e^{-aLz} - e^{-\tilde{\alpha}Lz} e^{\tilde{\alpha}Lt}}{(\tilde{\alpha}-a)L}\right) \left(e^{-Lz} v(0) + \int_0^z e^{-L(z-p)} F(p) dp\right) dz$$

$$u(t) = (\frac{\tilde{\alpha} e^{aLt} - a e^{\tilde{\alpha}Lt}}{(\tilde{\alpha}-a)}) u(0) + \left(\frac{e^{\tilde{\alpha}Lt} - e^{aLt}}{(\tilde{\alpha}-a)L}\right) u'(0) +$$
$$\int_0^t \left(\frac{e^{aLt} e^{-(a+1)Lz} - e^{-(\tilde{\alpha}+1)Lz} e^{\tilde{\alpha}Lt}}{(\tilde{\alpha}-a)L}\right) v(0) dz +$$
$$\int_0^t \int_0^z \left(\frac{e^{aLt} e^{-aLz} - e^{-\tilde{\alpha}Lz} e^{\tilde{\alpha}Lt}}{(\tilde{\alpha}-a)L}\right) e^{-L(z-p)} F(p) dp dz$$

yukarıdaki denklemde

$$v(0) = u''(0) - Lu'(0) + L^2 u(0)$$

alınıp denklem yeniden düzenlenirse

$$u(t) = \left(\frac{\tilde{\alpha} e^{aLt} - a e^{\tilde{\alpha}Lt}}{(\tilde{\alpha}-a)}\right) u(0) + \left(\frac{e^{\tilde{\alpha}Lt} - e^{aLt}}{(\tilde{\alpha}-a)L}\right) u'(0) + \left(\frac{e^{aLt} e^{-(a+1)Lz}}{(a-\tilde{\alpha})(a+1)L^2} -\right.$$
$$\left.\frac{e^{\tilde{\alpha}Lt} e^{-(\tilde{\alpha}+1)Lz}}{(a-\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha}+1)L^2}\right) \Big|_0^t (u''(0) - Lu'(0) + L^2 u(0)) +$$
$$\int_0^t \int_0^z \left(\frac{e^{aLt} e^{-aLz} - e^{-\tilde{\alpha}Lz} e^{\tilde{\alpha}Lt}}{(\tilde{\alpha}-a)L}\right) e^{-L(z-p)} F(p) dp dz$$

$$u(t) = \left(\frac{\tilde{\alpha} e^{aLt} - a e^{\tilde{\alpha}Lt}}{(\tilde{\alpha}-a)}\right) u(0) + \left(\frac{e^{\tilde{\alpha}Lt} - e^{aLt}}{(\tilde{\alpha}-a)L}\right) u'(0) + \left(\frac{e^{-Lt} - e^{aLt}}{(a-\tilde{\alpha})(a+1)L^2} +\right.$$
$$\left.\frac{e^{\tilde{\alpha}Lt} - e^{-Lt}}{(a-\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha}+1)L^2}\right) \left(u''(0) - Lu'(0) + L^2 u(0)\right) +$$
$$\int_0^t \int_0^z \left(\frac{e^{aLt} e^{-aLz} - e^{-\tilde{\alpha}Lz} e^{\tilde{\alpha}Lt}}{(\tilde{\alpha}-a)L}\right) e^{-L(z-p)} F(p) dp dz$$

$$u(t) = \left(\frac{\tilde{\alpha} e^{aLt} - a e^{\tilde{\alpha}Lt}}{(\tilde{\alpha}-a)} + \frac{e^{-Lt} - e^{aLt}}{(a-\tilde{\alpha})(a+1)} + \frac{e^{\tilde{\alpha}Lt} - e^{-Lt}}{(a-\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha}+1)}\right) u(0) + \left(\frac{e^{\tilde{\alpha}Lt} - e^{aLt}}{(\tilde{\alpha}-a)L} -\right.$$
$$\left.\frac{e^{-Lt} - e^{aLt}}{(a-\tilde{\alpha})(a+1)L} - \frac{e^{\tilde{\alpha}Lt} - e^{-Lt}}{(a-\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha}+1)L}\right) u'(0) + \left(\frac{e^{-Lt} - e^{aLt}}{(a-\tilde{\alpha})(a+1)L^2} + \frac{e^{\tilde{\alpha}Lt} - e^{-Lt}}{(a-\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha}+1)L^2}\right) u''(0) +$$
$$\int_0^t \int_t^z \left(\frac{e^{aLt} e^{-aLz} - e^{-\tilde{\alpha}Lz} e^{\tilde{\alpha}Lt}}{(\tilde{\alpha}-a)L}\right) e^{-L(z-p)} F(p) dz dp$$

$$u(t) = \left(\frac{\tilde{\alpha} e^{aLt} - a e^{\tilde{\alpha}Lt}}{(\tilde{\alpha}-a)} + \frac{e^{-Lt} - e^{aLt}}{(a-\tilde{\alpha})(a+1)} + \frac{e^{\tilde{\alpha}Lt} - e^{-Lt}}{(a-\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha}+1)}\right) u(0) + \left(\frac{e^{\tilde{\alpha}Lt} - e^{aLt}}{(\tilde{\alpha}-a)L} -\right.$$
$$\left.\frac{e^{-Lt} - e^{aLt}}{(a-\tilde{\alpha})(a+1)L} - \frac{e^{\tilde{\alpha}Lt} - e^{-Lt}}{(a-\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha}+1)L}\right) u'(0) + \left(\frac{e^{-Lt} - e^{aLt}}{(a-\tilde{\alpha})(a+1)L^2} + \frac{e^{\tilde{\alpha}Lt} - e^{-Lt}}{(a-\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha}+1)L^2}\right) u''(0) +$$
$$\int_0^t (\frac{e^{aLt} e^{-(a+1)Lz}}{(a-\tilde{\alpha})(a+1)L^2} - \frac{e^{\tilde{\alpha}Lt} e^{-(\tilde{\alpha}+1)Lz}}{(a-\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha}+1)L^2}) \Big|_t^z e^{Lp} F(p) dp$$

$$u(t)=\left(\frac{\tilde{\alpha}e^{aLt}-ae^{\tilde{\alpha}Lt}}{(\tilde{\alpha}-a)}+\frac{e^{-Lt}-e^{aLt}}{(a-\tilde{\alpha})(a+1)}+\frac{e^{\tilde{\alpha}Lt}-e^{-Lt}}{(a-\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha}+1)}\right)u(0)+\left(\frac{e^{\tilde{\alpha}Lt}-e^{aLt}}{(\tilde{\alpha}-a)L}-\right.$$
$$\left.\frac{e^{-Lt}-e^{aLt}}{(a-\tilde{\alpha})(a+1)L}-\frac{e^{\tilde{\alpha}Lt}-e^{-Lt}}{(a-\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha}+1)L}\right)u'(0)+\left(\frac{e^{-Lt}-e^{aLt}}{(a-\tilde{\alpha})(a+1)L^2}+\frac{e^{\tilde{\alpha}Lt}-e^{-Lt}}{(a-\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha}+1)L^2}\right)u''(0)+$$
$$\int_0^t\left(\frac{e^{aLt}e^{-(a+1)Lz}-e^{-Lt}}{(a-\tilde{\alpha})(a+1)L^2}+\frac{e^{-Lt}-e^{\tilde{\alpha}Lt}e^{-(\tilde{\alpha}+1)Lz}}{(a-\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha}+1)L^2}\right)e^{Lp}F(p)dp$$

$$F(p)=g(p)-{}^{ABC}_{a}D_p^{\alpha}\big(u(p)\big)-k\frac{d^2u(p,x)}{dp^2}$$

alınırsa

$$u(t)=\left(\frac{\tilde{\alpha}e^{aLt}-ae^{\tilde{\alpha}Lt}}{(\tilde{\alpha}-a)}+\frac{e^{-Lt}-e^{aLt}}{(a-\tilde{\alpha})(a+1)}+\frac{e^{\tilde{\alpha}Lt}-e^{-Lt}}{(a-\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha}+1)}\right)u(0)+\left(\frac{e^{\tilde{\alpha}Lt}-e^{aLt}}{(\tilde{\alpha}-a)L}-\right.$$
$$\left.\frac{e^{-Lt}-e^{aLt}}{(a-\tilde{\alpha})(a+1)L}-\frac{e^{\tilde{\alpha}Lt}-e^{-Lt}}{(a-\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha}+1)L}\right)u'(0)+\left(\frac{e^{-Lt}-e^{aLt}}{(a-\tilde{\alpha})(a+1)L^2}+\frac{e^{\tilde{\alpha}Lt}-e^{-Lt}}{(a-\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha}+1)L^2}\right)u''(0)+$$
$$\int_0^t\left(\frac{e^{aLt}e^{-(a+1)Lz}-e^{-Lt}}{(a-\tilde{\alpha})(a+1)L^2}+\frac{e^{-Lt}-e^{\tilde{\alpha}Lt}e^{-(\tilde{\alpha}+1)Lz}}{(a-\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha}+1)L^2}g(p)dp-\right.$$
$$\int_0^t\left(\frac{e^{aLt}e^{-(a+1)Lz}-e^{-Lt}}{(a-\tilde{\alpha})(a+1)L^2}+\frac{e^{-Lt}-e^{\tilde{\alpha}Lt}e^{-(\tilde{\alpha}+1)Lz}}{(a-\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha}+1)L^2}\right){}^{ABC}_{0}D_p^{\alpha}\big(u(p)\big)dp-$$
$$\int_0^t\left(\frac{e^{aLt}e^{-(a+1)Lz}-e^{-Lt}}{(a-\tilde{\alpha})(a+1)L^2}+\frac{e^{-Lt}-e^{\tilde{\alpha}Lt}e^{-(\tilde{\alpha}+1)Lz}}{(a-\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha}+1)L^2}\right)k\frac{d^2u(p,x)}{dp^2}dp \tag{3.12}$$

çözümü elde edilir. $u(t)$'yi elde edebilmek için (3.12) denklemi yeniden düzenlenirse

$$u(t)= R_1u(0)+R_{\mathbf{2}}u'(0)+R_3u''(0)+\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}}R_4f(s)ds-$$
$$\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}}R_4\,{}^{ABC}_{0}D_s^{\alpha}(u(s))ds-k\int_0^t u''(s)ds$$

$$u(t)= R_1u(0)+R_{\mathbf{2}}u'(0)+R_3u''(0)+\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}}R_4f(s)ds-$$
$$\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}}R_4\,{}^{ABC}_{0}D_s^{\alpha}(u(s))ds-kR_4\big(u'(t)-u(0)\big). \tag{3.13}$$

elde edilir. Buradan gerekli işlemlere devam edilirse

$$u(t)= R_1u(0)+R_{\mathbf{2}}u'(0)+R_3u''(0)+\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}}R_4f(s)ds-$$
$$\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}}R_4\,{}^{ABC}_{0}D_s^{\alpha}(u(s))ds-kR_4u'(t)-kR_4u'(0).$$

$$u(t)+kR_4u'(t)= R_1u(0)+R_{\mathbf{2}}u'(0)+R_3u''(0)+\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}}R_4f(s)ds-$$
$$\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}}R_4\,{}^{ABC}_{0}D_s^{\alpha}(u(s))ds-kR_4u'(0) \tag{3.14}$$

(3.14) denkleminin her iki tarafı $\frac{1}{kR_4}$ ile çarpılırsa

$$u'(t)+\frac{1}{kR_4}u(t)=\frac{1}{kR_4}(R_1u(0)+(R_{\mathbf{2}}-kR_4)u'(0)+R_3u''(0)+$$
$$\int_0^t R_4f(s)ds-\int_0^t R_4\,{}^{ABC}_{0}D_s^{\alpha}(u(s))ds) \tag{3.15}$$

denklemi elde edilir. Şimdi bu denklemin her iki tarafını $e^{\frac{1}{kR_4}t}$ ile çarpalım.

$$e^{\frac{1}{kR_4}t}u'(t)+\frac{1}{kR_4}\,u(t)e^{\frac{1}{kR_4}}=e^{\frac{1}{kR_4}t}\,\frac{1}{kR_4}(R_1u(0)+(R_2-kR_4)u'(0)+$$

$$R_3u''(0))+\frac{1}{kR_4}\int_0^t e^{\frac{1}{kR_4}s}R_4f(s)ds-\frac{1}{kR_4}\int_0^t e^{\frac{1}{kR_4}s}R_4\,{}^{ABC}_{\ \ 0}D_s^{\alpha}(u(s))ds$$

$$(e^{\frac{1}{kR_4}t}\,u(t))'=\ e^{\frac{1}{kR_4}t}\,\frac{1}{kR_4}(R_1u(0)+(R_2-kR_4)u'(0)+R_3u''(0))+$$

$$\int_0^t R_4f(s)ds-\int_0^t R_4\,{}^{ABC}_{\ \ 0}D_s^{\alpha}\big(u(s)\big)ds \tag{3.16}$$

(3.16) denkleminin integrali alınırsa

$$\int_0^t(e^{\frac{1}{kR_4}s}\,u(s))ds=\frac{1}{kR_4}\int_0^t e^{\frac{1}{kR_4}s}(R_1u(0)+(R_2-kR_4)u'(0)+R_3u''(0)+$$

$$\int_0^s R_4f(z)dz-\int_0^s R_4\,{}^{ABC}_{\ \ 0}D_z^{\alpha}\big(u(z)\big)dz)\,ds$$

$$(e^{\frac{1}{kR_4}s}\,u(s)|_0^t=\frac{1}{kR_4}\int_0^t e^{\frac{1}{kR_4}s}(R_1u(0)+(R_2-kR_4)u'(0)+R_3u''(0)+$$

$$\int_0^s R_4f(z)dz-\int_0^s R_4\,{}^{ABC}_{\ \ 0}D_z^{\alpha}\big(u(z)\big)dz)$$

$$(e^{\frac{1}{kR_4}t}\,u(t)-\ u(0))=\frac{1}{kR_4}\int_0^t e^{\frac{1}{kR_4}s}(R_1u(0)+(R_2-kR_4)u'(0)+R_3u''(0)+$$

$$\int_0^s R_4f(z)dz-\int_0^s R_4\,{}^{ABC}_{\ \ 0}D_z^{\alpha}\big(u(z)\big)dz)$$

$$(e^{\frac{1}{kR_4}t}\,u(t)=u(0)+\frac{1}{kR_4}\int_0^t e^{\frac{1}{kR_4}s}(R_1u(0)+(R_2-kR_4)u'(0)+R_3u''(0)+$$

$$\int_0^s R_4f(z)dz-\int_0^s R_4\,{}^{ABC}_{\ \ 0}D_z^{\alpha}\big(u(z)\big)dz)$$

$$u(t)=e^{-\frac{1}{kR_4}t}u(0)+\frac{1}{kR_4}\int_0^t e^{-\frac{1}{kR_4}(t-s)}(R_1u(0)+(R_2-kR_4)u'(0)+$$

$$R_3u''(0)+\int_0^s R_4f(z)dz-\int_0^s R_4\,{}^{ABC}_{\ \ 0}D_z^{\alpha}\big(u(z)\big)dz) \tag{3.17}$$

çözümü elde edilir. Burada

$$R_1=\frac{\tilde{\alpha}e^{aLt}-ae^{\tilde{\alpha}Lt}}{(\tilde{\alpha}-a)}+\frac{e^{-Lt}-e^{aLt}}{(a-\tilde{\alpha})(a+1)}+\frac{e^{\tilde{\alpha}Lt}-e^{-Lt}}{(a-\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha}+1)} \tag{3.18}$$

$$R_2=\frac{e^{\tilde{\alpha}Lt}-e^{aLt}}{(\tilde{\alpha}-a)L}-\frac{e^{-Lt}-e^{aLt}}{(a-\tilde{\alpha})(a+1)L}-\frac{e^{\tilde{\alpha}Lt}-e^{-Lt}}{(a-\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha}+1)L} \tag{3.19}$$

$$R_3=\frac{e^{-Lt}-e^{aLt}}{(a-\tilde{\alpha})(a+1)L^2}+\frac{e^{\tilde{\alpha}Lt}-e^{-Lt}}{(a-\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha}+1)L^2} \tag{3.20}$$

$$R_4=\frac{e^{aLt}e^{-(a+1)Lz}-e^{-Lt}}{(a-\tilde{\alpha})(a+1)L^2}+\frac{e^{-Lt}-e^{\tilde{\alpha}Lt}e^{-(\tilde{\alpha}+1)Lz}}{(a-\tilde{\alpha})(\tilde{\alpha}+1)L^2} \tag{3.21}$$

Şimdi elde ettiğimi çözümün için kararlılık tahmininde bulunalım. Bunun için (Akgül ve Modanlı, 2019)' da verilen lemmayı kullanacağız.

Lemma 3.2.1.1.

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}) \left\| e^{-\frac{1}{kR_4}t} + R_1\left(1 - e^{-\frac{1}{kR_4}t}\right) \right\|_{H\to H} \le M \\ \boldsymbol{ii}) \left\| (\left(1 - e^{-\frac{1}{kR_4}t}\right)\left(R_2 K^{\frac{1}{3}} + kR_4 K^{\frac{1}{3}}\right)) \right\|_{H\to H} \le M \\ \boldsymbol{iii}) \left\| R_3 K^{\frac{2}{3}}\left(1 - e^{-\frac{1}{kR_4}t}\right) \right\|_{H\to H} \le M \\ \boldsymbol{iv}) \left\| R_4 K^{\frac{2}{3}}(1 - e^{-\frac{1}{kR_4}t}) \right\|_{H\to H} \le M \end{cases} \tag{3.22}$$

İspat:

$a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\bar{\alpha} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $L = K^{\frac{1}{3}}$ olarak alınırsa,

$$R_{\mathbf{1}} = \frac{\bar{\alpha}e^{aLt} - ae^{\bar{\alpha}Lt}}{(\bar{\alpha}-a)} + \frac{e^{-Lt} - e^{aLt}}{(a-\bar{\alpha})(a+1)} + \frac{e^{\bar{\alpha}Lt} - e^{-Lt}}{(a-\bar{\alpha})(\bar{\alpha}+1)}$$

$$= \frac{\bar{\alpha}e^{aK^{\frac{1}{3}}t} - ae^{\bar{\alpha}K^{\frac{1}{3}}t}}{(\bar{\alpha}-a)} + \frac{e^{-K^{\frac{1}{3}}t} - e^{aK^{\frac{1}{3}}t}}{(a-\bar{\alpha})(a+1)} + \frac{e^{\bar{\alpha}K^{\frac{1}{3}}t} - e^{-K^{\frac{1}{3}}t}}{(a-\bar{\alpha})(\bar{\alpha}+1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}e^{(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})K^{\frac{1}{3}}t} - i\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)K^{\frac{1}{3}}t} - \frac{1}{2}e^{\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)K^{\frac{1}{3}}t} - i\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)K^{\frac{1}{3}}t}}{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{e^{-K^{\frac{1}{3}}t} - e^{(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})K^{\frac{1}{3}}t}}{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)} +$$

$$\frac{e^{(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})K^{\frac{1}{3}}t} - e^{-K^{\frac{1}{3}}t}}{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)}$$

Paydalar eşitlenip gerekli işlemler yapılırsa

$$= \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\left(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t} - e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\left(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t} + e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\right)}{-\sqrt{3}i} +$$

$$\frac{-\sqrt{3}ie^{-K^{\frac{1}{3}}t} - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\left(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t} - e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\left(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t} + e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\right) - e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t} - e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t})}{3\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{2}}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t\right) + e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t\right) - \frac{1}{3}e^{-K^{\frac{1}{3}}t} -$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{2}}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t\right) + \frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t\right)$$

$$= \frac{4}{3}e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t\right) - \frac{1}{3}e^{-K^{\frac{1}{3}}t} \le e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t} \tag{3.23}$$

Aynı şekilde $K^{\frac{1}{3}}R_2$ için devam edilirse

$$K^{\frac{1}{3}}R_2 = K^{\frac{1}{3}}\left(\frac{e^{\bar{\alpha}Lt} - e^{aLt}}{(\bar{\alpha}-a)L} - \frac{e^{-Lt} - e^{aLt}}{(a-\bar{\alpha})(a+1)L} - \frac{e^{\bar{\alpha}Lt} - e^{-Lt}}{(a-\bar{\alpha})(\bar{\alpha}+1)L}\right)$$

$$= K^{\frac{1}{3}}\left(\frac{e^{\bar{\alpha}K^{\frac{1}{3}}t}-e^{aK^{\frac{1}{3}}t}}{(\bar{\alpha}-a)K^{\frac{1}{3}}}-\frac{e^{-K^{\frac{1}{3}}t}-e^{aK^{\frac{1}{3}}t}}{(a-\bar{\alpha})(a+1)K^{\frac{1}{3}}}-\frac{e^{\bar{\alpha}K^{\frac{1}{3}}t}-e^{-K^{\frac{1}{3}}t}}{(a-\bar{\alpha})(\bar{\alpha}+1)K^{\frac{1}{3}}}\right)$$

Payda eşitlenir ve gerekli sadeleştirmeler yapılır ve gerekli değerler yerine yazılırsa

$$K^{\frac{1}{3}}R_2 \quad = \frac{e^{\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)K^{\frac{1}{3}}t}-e^{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)K^{\frac{1}{3}}t}}{-\sqrt{3}i}+$$

$$\frac{i\sqrt{3}e^{-K^{\frac{1}{3}}t}+\frac{1}{2}e^{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)K^{\frac{1}{3}}t}-\frac{\sqrt{3}}{2}ie^{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)K^{\frac{1}{3}}t}+e^{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)K^{\frac{1}{3}}t}-\frac{1}{2}e^{\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)K^{\frac{1}{3}}t}-i\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)K^{\frac{1}{3}}t}-e^{\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)K^{\frac{1}{3}}t}}{-3\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}}\left(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t}-e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\right)}{\sqrt{3}i}+$$

$$\frac{i\sqrt{3}e^{-K^{\frac{1}{3}}t}+\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\left(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t}-e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}ie^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\left(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t}+e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\right)+e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\left(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t}-e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\right)}{-3\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t\right)+$$

$$\frac{i\sqrt{3}e^{-K^{\frac{1}{3}}t}+e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}isin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t\right)-\sqrt{3}ie^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t\right)+2ie^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t\right)}{-3\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t\right)-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t\right)+$$

$$\frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t\right)$$

$$K^{\frac{1}{3}}R_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t\right)+\frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t\right)-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}$$

$$\leq \frac{4}{3}e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t} \tag{3.24}$$

elde edilir. $K^{\frac{2}{3}}R_3$ için de benzer işlemler yapılırsa

$$K^{\frac{2}{3}}R_{3=}K^{\frac{2}{3}}\left(\frac{e^{-Lt}-e^{aLt}}{(a-\bar{\alpha})(a+1)L^2}+\frac{e^{\bar{\alpha}Lt}-e^{-Lt}}{(a-\bar{\alpha})(\bar{\alpha}+1)L^2}\right)$$

$$K^{\frac{2}{3}}R_{3=} = K^{\frac{2}{3}}\left(\frac{e^{-K^{\frac{1}{3}}t}-e^{aK^{\frac{1}{3}}t}}{(a-\bar{\alpha})(a+1)K^{\frac{2}{3}}}+\frac{e^{\bar{\alpha}K^{\frac{1}{3}}t}-e^{-K^{\frac{1}{3}}t}}{(a-\bar{\alpha})(\bar{\alpha}+1)K^{\frac{2}{3}}}\right)$$

Payda eşitlenir ve gerekli sadeleştirmeler yapılır, gerekli değerler yerine yazılırsa

$$K^{\frac{2}{3}}R_{3=}\frac{-\sqrt{3}ie^{-K^{\frac{1}{3}}t}-e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}isin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t\right)+\sqrt{3}e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}icos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t\right)-2ie^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t\right)}{3\sqrt{3}i}$$

$$K^{\frac{2}{3}}R_{3=} = \frac{-\sqrt{3}ie^{-K^{\frac{1}{3}}t}-e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}isin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t\right)+\sqrt{3}e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}icos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t\right)-2ie^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t\right)}{3\sqrt{3}i}$$

$$K^{\frac{2}{3}}R_{3=} = -\frac{1}{3}e^{-K^{\frac{1}{3}}t} - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t\right) + \frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t\right)$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t} + \frac{1}{3} \tag{3.25}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$K^{\frac{2}{3}}R_4 = K^{\frac{2}{3}}\frac{e^{aK^{\frac{1}{3}}(t-s)}-e^{-K^{\frac{1}{3}}(t-s)}}{(a+1)(\bar{a}+1)K^{\frac{2}{3}}} + \frac{e^{-K^{\frac{1}{3}}(t-s)}-e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}(t-s)+i\frac{\sqrt{3}}{2}K^{\frac{1}{3}}t}}{3}$$

$$\leq \frac{e^{-K^{\frac{1}{3}}(t-s)}}{3} \leq \frac{1}{3} \tag{3.26}$$

elde edilir.

i) Üçgen eşitsizliği kullanılarak formül (3.22)

$$\left\|e^{-\frac{1}{kR_4}t} + R_1\left(1 - e^{-\frac{1}{kR_4}t}\right)\right\|_{H\to H} \leq \left\|e^{-\frac{1}{kR_4}t}\right\|_{H\to H} + \left\|R_1\left(1 - e^{-\frac{1}{kR_4}t}\right)\right\|_{H\to H} \leq$$

$$1 + \|R_1\|_{H\to H} \leq 1 + e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}t}$$

şeklinde yazılabilir. $0 \leq t \leq T$, $K \geq \delta$ ve K self – adjoint pozitif vektör olduğundan

$$\left\|e^{-\frac{1}{kR_4}t} + R_1\left(1 - e^{-\frac{1}{kR_4}t}\right)\right\|_{H\to H} \leq M,$$

olacak şekilde denklemi sağlayan bir M sayısı vardır.

ii) Üçgen eşitsizliği kullanılarak (3.22) eşitsizliği

$$\left\|(\left(1 - e^{-\frac{1}{kR_4}t}\right)\left(R_2K^{\frac{1}{3}} + kR_4K^{\frac{1}{3}}\right))\right\|_{H\to H} \leq \|(R_2 + kR_4))\|_{H\to H} \leq \|R_2\|_{H\to H} +$$

$$|k|\|R_4\|_{H\to H} \leq \frac{4}{3}\left\|e^{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{3}}}\right\|_{H\to H} + \frac{|k|}{3}$$

şeklinde yazılır. $0 \leq t \leq T,$ k katsayısı pozitif, $K \geq \delta,$ K self – adjoint pozitif operatör olduğundan

$$\left\|(\left(1 - e^{-\frac{1}{kR_4}t}\right)\left(R_2K^{\frac{1}{3}} + kR_4K^{\frac{1}{3}}\right))\right\|_{H\to H} \leq M$$

olur.

iii) (3.22)′ den aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\left\|R_3K^{\frac{2}{3}}\left(1 - e^{-\frac{1}{kR_4}t}\right)\right\|_{H\to H} \leq M.$$

ıv) (3.22)’ den aşağıda verilen eşitsizlik doğrudur.

$$\left\| R_4 K^{\frac{2}{3}}(1-e^{-\frac{1}{kR_4}t}) \right\|_{H\to H} \le M.$$

Lemma 3.2.1.2. ABC türevi için kararlılık eşitsizliği aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\| {}^{ABC}_{\ 0}D_t^{\alpha}(u(t))\|_H \le M\big||u(t)|\big| \tag{3.27}$$

(Akgül ve Modanli, 2019).

İspat: Kısmi integrasyon ve Mittag- Leffler fonksiyonunu kullanarak

$$\left\| {}^{ABC}_{\ 0}D_t^{\alpha}\big(u(t)\big)\right\|_H = \left|\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\right| || - u(t)E_\alpha\left[-\alpha\frac{t^\alpha}{1-\alpha}\right] +$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\frac{\alpha}{1-\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k+1)}\alpha k\int_0^t u(p)(t-p)^{\alpha k-1}dp||_H \le \left|\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\right| \left\|E_\alpha\left[-\alpha\frac{t^\alpha}{1-\alpha}\right]\right\|_{H\to H} ||u(t)||_H +$$

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^k}{\Gamma(\alpha k+1)}\alpha k|\left[\frac{(t-p)^{\alpha k}}{\alpha k}\big||u(p)|\big|\right]_{p=0}^{p=t} \le [\left|\frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\right| |E_\alpha\left[-\alpha\frac{t^\alpha}{1-\alpha}\right]\right| +$$

$$|E_\alpha\left[-\alpha\frac{t^\alpha}{1-\alpha}\right]|]||u(t)||_H \le M\big||u(t)|\big|_H \tag{3.28}$$

Denklemin kararlılık tahmini için aşağıdaki teorem verilir:

Teorem 3.2.1.1. $g_1 \in D(K)$, $g_2 \in D(K^{\frac{2}{3}})$, $g_2 \in D(K^{\frac{1}{3}})$ ve $f(t)$ $[0,T]$ aralığında diferansiyellenebilir sürekli fonksiyonlar olsun. (2.22) denkleminin kararlılığı aşağıdaki gibi yazılır:

$$\max_{0\le t\le T}\big||u(t)|\big|_H \le M\{\|g_1\|_H + \left\|K^{-\frac{1}{3}}g_2\right\|_H + \left\|K^{-\frac{2}{3}}g_3\right\|_H$$

$$+\max_{0\le t\le T}\left\|K^{-\frac{2}{3}}f(t)\right\|_H\} \tag{3.29}$$

(Akgül ve Modanli, 2019).

İspat: (3.28) ve (3.29)' dan norm aşağıdaki gibi yazılır:

$$||u(t)||_H = \left\|e^{-\frac{1}{kR_4}t} + R_1\left(1-e^{-\frac{1}{kR_4}t}\right)\right\|_{H\to H} ||u(0)||_H + \Big\|(\Big(1-$$

$$e^{-\frac{1}{kR_4}t}\Big)(R_2+kR_4))\Big\|_{H\to H} ||u'(0)||_H + \left\|\left(1-e^{-\frac{1}{kR_4}t}\right)R_3\right\|_{H\to H} ||u''(0)||_H +$$

$\int_0^t \left\| \left(1 - e^{-\frac{1}{kR_4}(t-s)}\right) R_4 \right\|_{H\to H} ||f(s)||_H ds - \int_0^t \left\| \left(1 - e^{-\frac{1}{kR_4}(t-s)}\right) R_4 \right\|_{H\to H} \left\| {}^{ABC}_{\ 0}D_s^{\alpha}\big(u(s)\big) \right\|_H ds.$ (3.30)

Üçgen eşitsizliğini kullanarak (3.28), (3.29) ve (3.30) denklemlerinin başlangıç koşulları

$$||u(t)||_H \le M\{\|g_1\|_H + \left\|K^{-\frac{1}{3}} g_2\right\|_H + \left\|K^{-\frac{2}{3}} g_3\right\|_H + \max_{0\le t\le T} \left\|K^{-\frac{2}{3}} f(t)\right\|_H\} \tag{3.31}$$

şeklinde verilir.

Şimdi (3.1) denklemini örneklendiren ABC kesirli türev operatörüyle tanımlanan üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümü Laplace dönüşümü ile verilecektir.

Örnek 3.2.1.1. Aşağıdaki üçüncü mertebeden Atangana- Baleanu kesirli türev operatörlü kısmi diferansiyel denklemini

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + {}^{ABC}_{\ 0}D_t^{\alpha} u(t,x) + u(t,x) - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = f(t,x), \\ f(t,x) = ((\frac{6(1-\alpha)}{B(\alpha)}\left(1 + t + \frac{t^3}{3}\right) + \frac{6}{B(\alpha)}(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1} \\ \quad +2\frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+4)} t^{\alpha+3}) + t^3) sinx \\ 0 \le x \le \pi, \ 0 < t < 1, \\ u(0,x) = u_t(0,x) = u_{tt}(0,x) = 0, \ 0 \le t \le 1, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \ 0 \le x \le \pi, \\ 0 < \alpha \le 1 \end{cases} \tag{3.32}$$

inceleyelim. Bu denklemin analitik çözümü için Laplace dönüşümü uygulanırsa:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + {}^{ABC}_{\ 0}D_t^{\alpha} u(t,x) + u(t,x) - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right\} = \mathcal{L}\{(\frac{6(1-\alpha)}{B(\alpha)}\left(1 + t + \frac{t^3}{3}\right) + \frac{6}{B(\alpha)}(\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1} + 2\frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+4)} t^{\alpha+3}) + t^3) sinx\}$$

$$s^3 u(s,x) - s^2 u(0,x) - s u_t(0,x) - u_{tt}(0,x) + s^2 u(s,x) - s u(0,x) + \frac{B(\alpha)}{1-\alpha}\frac{s^{\alpha}u(s,x) - s^{\alpha-1}u(0,x)}{s^{\alpha} + \frac{\alpha}{1-\alpha}} + u(s,x) - \frac{\partial^2 u(s,x)}{\partial x^2} = (\frac{6(1-\alpha)}{B(\alpha)}(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^4}) + \frac{6}{B(\alpha)}\left(\frac{\alpha}{s^{\alpha+1}} + \frac{\alpha}{s^{\alpha+2}} + \frac{2\alpha}{s^{\alpha+4}}\right) + \frac{6}{s^4}) sinx$$

olur. Başlangıç koşulları yerine yazılıp tekrar düzenlenirse

$$(s^3+s^2+\frac{s^\alpha B(\alpha)}{s^\alpha(1-\alpha)+\alpha}+1)u(s,x)-\frac{\partial^2 u(s,x)}{\partial x^2}=(\left(\frac{s^3+s^2+2}{s^4}\right)\left(\frac{6(s^\alpha(1-\alpha)+\alpha)}{s^\alpha B(\alpha)}\right)+\frac{6}{s^4})sinx \quad (3.33)$$

ikinci mertebeden kesirli diferansiyel denklem elde edilir. (3.37) denkleminin homojen ve homojen olmayan çözümleri

$$u(s,x)=u^h(s,x)+u^p(s,x) \quad (3.34)$$

olarak ayrı ayrı bulunursa

$$N=s^3+s^2+\frac{s^\alpha B(\alpha)}{s^\alpha(1-\alpha)+\alpha} \quad (3.35)$$

olmak üzere

$$-\frac{\partial^2 u(s,x)}{\partial x^2}+(N+1)u(s,x)=0 \quad (3.36)$$

(3.36) denkleminin karakteristik denklemi

$$-y^2+(N+1)=0 \quad (3.37)$$

denkleminin çözümü

$$y=\pm\sqrt{N+1} \quad (3.38)$$

ve buradan homojen kısmın çözümü

$$u^h(s,x)=c_1e^{-\sqrt{N+1}\,x}+c_2e^{\sqrt{N+1}\,x} \quad (3.39)$$

olarak elde edilir. (3.37) denkleminin homojen olmayan kısmının çözümü için

$$u^p(s,x)=Ccosx+Dsinx \quad (3.40)$$

olarak alınıp türevleriyle beraber (3.33) denkleminde yerine yazılıp çözülürse

$$(s^3+s^2+\frac{s^\alpha B(\alpha)}{s^\alpha(1-\alpha)+\alpha}+1)(Ccosx+Dsinx)+\ Ccosx+Dsinx=(\left(\frac{s^3+s^2+2}{s^4}\right)\left(\frac{6(s^\alpha(1-\alpha)+\alpha)}{s^\alpha B(\alpha)}\right)+\frac{6}{s^4})sinx$$

$$(s^3+s^2+\frac{s^\alpha B(\alpha)}{s^\alpha(1-\alpha)+\alpha}+2)Ccosx+(s^3+s^2+\frac{s^\alpha B(\alpha)}{s^\alpha(1-\alpha)+\alpha}+2)\ Dsinx=(\left(\frac{s^3+s^2+2}{s^4}\right)\left(\frac{6(s^\alpha(1-\alpha)+\alpha)}{s^\alpha B(\alpha)}\right)+\frac{6}{s^4})sinx$$

Buradan $C=0$ bulunur. Çözüme devam edilirse

$$\frac{(s^3+s^2+2)(s^\alpha(1-\alpha)+\alpha)+s^\alpha B(\alpha)}{s^\alpha(1-\alpha)+\alpha}\ Dsinx=\frac{6}{s^4}(\frac{(s^3+s^2+2)(s^\alpha(1-\alpha)+\alpha)+s^\alpha B(\alpha)}{s^\alpha B(\alpha)})sinx$$

$$D=\frac{6}{s^4}(\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}+\frac{\alpha}{s^\alpha B(\alpha)})$$

elde edilir ve buradan homojen olmayan kısmın çözümü

$$u^p(s,x)=\frac{6}{s^4}(\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}+\frac{\alpha}{s^\alpha B(\alpha)})sinx \quad (3.41)$$

olarak bulunur. Homojen ve homojen olmayan kısımların çözümü (3.34) denkleminde yerine yazılırsa

$$u(s,x) = c_1 e^{-\sqrt{N+1}\,x} + c_2 e^{\sqrt{N+1}\,x} + \frac{6}{s^4}\left(\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} + \frac{\alpha}{s^{\alpha}B(\alpha)}\right)sinx \quad (3.42)$$

(3.36) denklemindeki sınır değerleri kullanılırsa $c_1 = c_2 = 0$ elde edilir. Böylece

$$u(s,x) = \frac{6}{s^4}\left(\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} + \frac{\alpha}{s^{\alpha}B(\alpha)}\right)sinx \quad (3.43)$$

olarak elde edilir. (3.47) denkleminin ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$\mathcal{L}^{-1}\{u(s,x)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{6}{s^4}\left(\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} + \frac{\alpha}{s^{\alpha}B(\alpha)}\right)sinx\}$$

$$u(t,x) = \left(\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}t^3 + \frac{6\alpha}{\Gamma(\alpha+4)B(\alpha)}t^{\alpha+3}\right)sinx \quad (3.44)$$

tam çözümü elde edilir.

3.2.2 Cranck- Nicholson Fark Şeması Yöntemi

Bu bölümde üçüncü mertebedeb Atangana- Baleanu kesirli türevli kısmi diferansiyel denkleminin Cranck- Nicholson yöntemi ile fark şeması oluşturulacak ve Von Neuman yöntemi ile kararlılığı gösterilecektir.

$h = \frac{x_R - x_L}{M}$ ve $\tau = \frac{T}{N}$ olduğunu kabul edelim. Burada h, x ekseninde ve τ, t eksenindedir. Buradan

$$x_{\boldsymbol{n}} = x_l + nh;\ n = 1,2,\ldots M\ , t_k = k\tau\ ,\ k = 1,2,\ldots N$$

şeklinde yazılabilir.

(3.1) denkleminde ABC Kesirli türevli üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklem için Crank-Nicholson fark metodu inşa edilir. Bunun için aşağıdaki formüller verilir:

$$u_{xx}(t_k, x_n) \cong \frac{u_{n+1}^{k+1} - 2u_n^{k+1} + u_{n-1}^{k}}{2h^2} - \frac{u_{n+1}^{k} - 2u_n^{k} + u_{n-1}^{k}}{2h^2} \quad (3.45)$$

$$u_{tt}(t_k, x_n) \cong \frac{u_n^{k+1} - 2u_n^{k} + u_n^{k-1}}{\tau^2} \quad (3.46)$$

$$u_{ttt}(t_k, x_n) \cong \frac{u_n^{k+2} - 3u_n^{k+1} + 3u_n^{k} - u_n^{k-1}}{\tau^3} \quad (3.47)$$

ABC türev operatörüne ait fark şeması

$${}^{ABC}_{0}D_t^{\alpha} u(t_k, x_n) \cong \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=0}^{k} \frac{u_n^{k+1} - u_n^{k}}{\tau} d_{j,k} \quad (3.48)$$

şeklinde yazılır (Atangana ve Koca,2016). Burada $d_{j,k} = (t_j - t_{k+1})^{1-\alpha} - (t_j - t_k)^{1-\alpha}$ şeklindedir. (3.45) formülü sonlu fark şeması metotlarından Crank-Nicholson fark şeması formülü olarak bilinir. (3.45)- (3.48) formüllerinden üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denkleminin fark şeması

$$\begin{cases} \frac{u_n^{k+2}-3u_n^{k+1}+3u_n^k-u_n^{k-1}}{\tau^3} + k\frac{u_n^{k+1}-2u_n^k+u_n^{k-1}}{\tau^2} + \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{j=0}^{k}\frac{u_n^{k+1}-u_n^k}{\tau}d_{j,k} - \\ \lambda\left(\frac{u_{n+1}^{k+1}-2u_n^{k+1}+u_{n-1}^{k+1}}{2h^2} - \frac{u_{n+1}^k-2u_n^k+u_{n-1}^k}{2h^2}\right) + \frac{u_n^{k+1}-u_n^k}{2} = f_n^k, \\ f_n^k = f(t_k, x_n). \\ u_n^0 = g_1(x_n), \quad \frac{u_n^1-u_n^0}{\tau} = g_2(x_n), \\ \frac{u_n^2-2u_n^1+u_n^0}{\tau^2} = g_3\,(x_n), \ 0 \le n \le M \\ u_0^k = u_M^k = 0, \ 0 \le k \le N. \end{cases} \tag{3.49}$$

şeklinde olur. Von Neumann metodu kullanılarak kararlılık koşulları:

$$u_n^k = r^k e^{in\theta} \tag{3.50}$$

formülü ile verilir. (3.50) formülü problem (3.49) denklemine uygulanırsa

$$\frac{r^{k+2}e^{in\theta}-3r^{k+1}e^{in\theta}+3r^ke^{in\theta}-r^{k-1}e^{in\theta}}{\tau^3} + k\frac{r^{k+1}e^{in\theta}-2r^ke^{in\theta}+r^{k-1}e^{in\theta}}{\tau^2} +$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{j=0}^{k}\frac{r^{k+1}e^{in\theta}-r^ke^{in\theta}}{\tau}d_{j,k} - \lambda(\frac{r^{k+1}e^{i(n+1)\theta}-2r^ke^{in\theta}+r^{k+1}e^{in\theta}}{2h^2} -$$

$$\frac{r^ke^{i(n+1)\theta}-2r^ke^{in\theta}+r^ke^{i(n-1)\theta}}{2h^2}) + \frac{r^{k+1}e^{in\theta}-r^ke^{in\theta}}{2} = f_n^k$$

elde edilir.

Burada $f_n^k = (\tau, 0)$, $n = 0, k = 1$ için

$$\frac{r^3-3r^2+3r-1}{\tau^3} + k\frac{r^2-2r+1}{\tau^2} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{j=0}^{1}\frac{r^2-r}{\tau}d_{j,k} - \lambda\left(\frac{r^2e^{i\theta}-2r^2+r^2e^{-i\theta}}{2h^2} -\right.$$

$$\left.\frac{re^{i\theta}-2r+re^{-i\theta}}{2h^2}\right) + \frac{r^2-r}{2} - f_n^k = 0$$

olup buradan

$$\frac{r^3-3r^2+3r-1}{\tau^3} + k\frac{r^2-2r+1}{\tau^2} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{r^2-r}{\tau}(d_{0,1} + d_{1,1}) - \lambda(\frac{r^2e^{i\theta}-2r^2+r^2e^{-i\theta}}{2h^2} -$$

$$\frac{re^{i\theta}-2r+re^{-i\theta}}{2h^2}) + \frac{r^2-r}{2} - f_n^k = 0$$

$$\frac{r^3-3r^2+3r-1}{\tau^3} + k\frac{r^2-2r+1}{\tau^2} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{r^2-r}{\tau}[((t_0 - t_2)^{1-\alpha} - (t_0 - t_1)^{1-\alpha}) +$$

$$((t_1 - t_2)^{1-\alpha} - (t_1 - t_1)^{1-\alpha})] - \lambda\left(\frac{r^2e^{i\theta}-2r^2+r^2e^{-i\theta}}{2h^2} - \frac{re^{i\theta}-2r+re^{-i\theta}}{2h^2}\right) + \frac{r^2-r}{2} -$$

$$f_n^k = 0$$

elde edilir. Burada $f_n^k \to 0\,, t_k = k\tau$ alınırsa

$$\frac{r^3-3r^2+3r-1}{\tau^3} + k\frac{r^2-2r+1}{\tau^2} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{r^2-r}{\tau}[((0-2\tau)^{1-\alpha} - (0-\tau)^{1-\alpha}) +$$

$$((\tau-2\tau)^{1-\alpha} - (\tau-\tau)^{1-\alpha})] - \lambda\left(\frac{r^2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{2h^2} - \frac{r^2}{h^2} - \frac{r(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{2h^2} + \frac{r}{h^2}\right) + \frac{r^2-r}{2} = 0$$

$$\frac{r^3-3r^2+3r-1}{\tau^3} + k\frac{r^2-2r+1}{\tau^2} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{r^2-r}{\tau}((2\tau)^{1-\alpha}) - \lambda(\frac{r^2cos\theta}{h^2} - \frac{r^2}{h^2} - \frac{rcos\theta}{h^2} + \frac{r}{h^2}) +$$

$$\frac{r^2-r}{2} = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklem τ^3 ile çarpılırsa

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 + k\tau(r^2 - 2r + 1) + \frac{\tau^2}{\Gamma(\alpha)}(r^2 - r)((2\tau)^{1-\alpha}) -$$

$$\lambda\tau^3(\frac{r^2cos\theta}{h^2} - \frac{r^2}{h^2} - \frac{rcos\theta}{h^2} + \frac{r}{h^2}) + \frac{\tau^3(r^2-r)}{2} = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemi r' ye bağlı üçüncü dereceden polinomsal denklem olarak yazarsak

$$P(r) = r^3 + (-3 + k\tau + \frac{\tau^2}{\Gamma(\alpha)}((2\tau)^{1-\alpha}) - \lambda\tau^3\frac{cos\theta-1}{h^2} + \frac{\tau^3}{2})r^2 + (3-2k\tau-$$

$$\frac{\tau^2}{\Gamma(\alpha)}(2\tau)^{1-\alpha} + \lambda\tau^3\frac{cos\theta-1}{h^2} - \frac{\tau^3}{2})r - 1 + k\tau = 0 \tag{3.51}$$

elde edilir. Burada $P(r)$ polinomunun katsayıları olan $a_0 = -1 + k\tau$, a_1 =3-2kτ-$\frac{\tau^2}{\Gamma(\alpha)}(2\tau)^{1-\alpha} + \lambda\tau^3\frac{cos\theta-1}{h^2} - \frac{\tau^3}{2}$, $a_2 = -3 + k\tau + \frac{\tau^2}{\Gamma(\alpha)}((2\tau)^{1-\alpha}) - \lambda\tau^3\frac{cos\theta-1}{h^2} + \frac{\tau^3}{2}$ ve $a_3 = 1$ dir.

Polinomsal denklemin köklerini veren lemma aşağıdaki gibidir:

Lemma: Eğer $p = \frac{3a_1 - a_2^2}{9}$ ve $q = \frac{9a_1a_2 - 27a_0 - 2a_2^2}{54}$ olarak alınırsa (3.51) denkleminin kökleri

- $r_1 = \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}}$
- $r_2 = \sqrt[3]{q - \sqrt{p^3 + q^2}}$
- $r_3 = -r_1 - r_2 - a_2$

formülleri ile verilir (Akgül ve Modanlı, 2019).

Bu formüllerden yola çıkarak (3.51) denklemi için kararlılık tahmininde bulunalım. Eğer $|r| < 1$ ise bu denklem kararlıdır.

4.ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde 3. Bölümde tam çözümü elde edilen (3.32) probleminin nümerik çözümünü bulmaya çalışacağız. Bunun için Sonlu fark metotlarından Crank-Nicholson Fark şeması metodunu bir örnek problem üzerinde kullanacağız. Bu metot (3.49) denklemi ile verilmiştir.

(3.32) fark denklemi için Modifiye Gauss Eliminasyon metodu kullanılır.

$$\varepsilon = \max\ ||u(t,x) - u(t_k, x_n)||,\ n = 0,1, \dots M,\ k = 0,1,2, \dots N$$

formülü kullanılarak yaklaşık çözümün hata payı maksimum norm yardımıyla elde edilir. Burada $u_n^k = u(t_k, x_n)$ yaklaşık çözüm ve $u(t,x)$ tam çözümdür. Crank-Nicholson Fark şeması metodu kullanılarak (3.32) problemin yaklaşık çözümü aşağıdaki tabladaki gibi elde edilir.

Çizelge 4.1. Örnek 3.32 için hata analiz tablosu

α	N=M=20	N=M=80	N=10, M=100
0.001	0.312670659474578	0.002586288076514	0.183435044577390
0.01	0.316417368682664	0.487508672577419	0.187188217472297
0.37	0.334981685094574	0.529939808763533	0.199005054427636
0.50	0.279273735484124	0.4604 92617848428	0.136152776780066
0.69	0.162639876741267	0.310451668381897	0.024016586806580
0.81	0.089140237979957	0.213389947812387	0.036977819112441
0.99	0.001420279481709	0.089828130903143	0.098729260126171
0.999	0.002189298564374	0.084419821469902	0.100928692809684
1	0.002586288076514	0.083823195898842	0.101168650405526

Tüm α değerlerine karşılık belirli N ve M değerleri için sonuçlar kararlı çıkmıştır (Akgül ve Modanlı, 2019).

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada kesirli türev ve integrallerin ortaya çıkış nedenleri, nerelerde kullanıldığı, tarihçesi ve genel tanımları verildi. Atangana Baleanu kesirli türev operatörü ile tanımlı üçüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü elde edildi. Bu deklemi için Crank-Nicholson fark şeması oluşturuldu. Von Neuman metodu ile denklemin kararlılığı gösterildi. Kesirli türevin $\alpha \epsilon (0,1]$ için farklı değerlerine göre nümerik sonuçları Matlab programı kullanılarak hata analizi tablosu halinde verildi.

5.2. Öneriler

Atangana Baleanu kesirli türev operatörü kullanılarak farklı türde lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri sonlu fark şeması metodu kullanılarak elde edilebilir.

KAYNAKLAR

ABDELJAWAD, T., 2015. On conformable fractional calculus. Journal of Computation and Applied Mathematics, 279 (2015): 57-66.

AGUILAR, J.G., BALEANU, D., 2014. Solutions of the telegraph equations using a fractional calculus approach. Proc Romanian Acad, 15 (1): 27–34.

AHMAD, J., MOHYUD-DIN, S.T., 2015. Solving fractional-vibrational problem using restarted fractional Adomian’s decomposition method, Science Journal of Nonlinear Science, 19 (1): 3-8.

AKGÜL, A., ve MODANLI, M., 2017. Numerical solution of fractional telegraph differential equations by theta-method: The European Physical Journal Special Topics, 226 (16-18): 3693-3703.

AKGÜL, A., ve MODANLI, M., 2018. On solutions to the second-order partial differential equations by two accurate methods: Numerical Methods for Partial Differential Equations, 34 (5): 1678-1692.

AKGÜL, A., ve MODANLI, M., 2019. Crank–Nicholson difference method and reproducing kernel function for third order fractional differential equations in the sense of Atangana–Baleanu Caputo derivative. Chaos, Solitons and Fractals, 127: 10- 16.

ASHRALYEV, A., and DAL, F., 2012. Finite difference and iteration methods for fractional hyperbolic partial differential equationswith the Neumann condition. Discrete Dynamics in Nature and Society. 2012: 1- 15.

ASLEFALLAH, M., DAVOOD, R., and KHADIJEH, H., 2014. Solving time-fractional differential diffusion equation by theta-method. International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics, 2 (1): 1-8.

ATANGAN, A., BALEANU, D., 2016. New fractional derivatives with nonlocal and nonsingular kernel: Theory and application to heat transfer model. Thermal Science, 20 (2): 763- 769.

ATANGANA, A., KOCA, I., 2016. Chaos in a simple nonlineaer system with Atangana- Baleanu derivatives with fractional order. Chaos, Solitons and Fractal, 89 (2016): 447- 454.

ATANGANA, A., GOMEZ-AGUILAR, J., 2018. Decolonisation of fractional calculus rules: breaking commutativity and associativity to capture more natural phenomena. European Physical Journal Plus, 133 (4): 1–22.

BAEUMER, B. and MEERSCHAERT, M., 2001. Stochastic solutions for fractional Cauchy problems. Fractional Calculus and Applied Analysis, 4 (4): 481-500.

BALEANU, D., GOLMANKHANEH, A.K., GOLMANKHANEH, A.K., 2009. The dual action of fractional multi time hamilton equations. International Journal of Theoretical Physics, 48 (9): 2558–2569.

BALEANU, D., CAPONETTO, R., MACHADO, J.T., 2016. Challenges in fractional dynamics and control theory. Journal of Vibration and Control, 22 (9): 2151- 2152.

BASKONUS, H.M., MEKKAOUI, T., HAMMOUCH, Z. ve BULUT, H., 2015. Active Control of a Chaotic Fractional Order Economic System. Entropy, 17 (8): 5771-5783.

BULUT, H., KUMAR, D., SING, J., SWROOP, R., and BASKONUS, H.M., 2018. Analytic study for a fractional model of HIV infection of CD4+TCD4+T lymphocytecells. Mathematics in Natural Science, 2 (1): 33-43.

CAPUTO, M., CAMETTI, C., 2008. Diffusion with memory in two cases of biological interest. Journal of Theoretical Biology, 254 (3): 697–703.

CAPUTO, M., FABRIZIO M., 2015 Damage and fatigue described by a fractional derivative model. Jounal of Computational Physics, 29 3(2015): 400–408.

CELİK, C. ve DUMAN M., 2012. Crank-Nicholson method for the fractional equation with the Riezs fractional derivative. Journal of computationalphysics, 231 (4): 1743-1750.

DIETHELM, K., 2010. The analysis of fractional differential equations: an application-oriented exposition using differential operators of caputo type. Springer Science & Business Media, New York, 247s.

EL-NALBUSI, R., and TORRES, D., 2007. Necessary optimality conditions for fractional actionlike integrals of variational calculus with Riemann–Liouville derivatives of order (, β). Mathematical Methods in the Applied Sciences, 30 (15): 1931- 1939.

ESEN, A., SULAIMAN, T.A., BULUT, H., ve BASKONUS, H.M., 2018. Optical solitons to the space-time fractional (1+1)-dimensional coupled nonlinear Schrödinger equation, Optik: International Journal for Lightand Electron Optics, 167: 150-156.

GOMEZ-AGUILAR, J., RAZO-HERNANDEZ R., GRANADOS-LIEBERMAN, D. A., 2014. Physical in- terpretation of fractional calculus in observables terms: analysis of the fractional time constant and the transitory response. Revista mexicana de física, 60 (1): 32–8.

GHANEAI, H., HOSSEINI, M.M., MOHYUD-DIN, S.T., 2012. Modified variational iteration method for solving a neutral functional-differential equation with proportional delays. International Journal of Numerical Methods Heat & Fluid Flow, 22 (8): 1086-1095.

GORIAL, I., 2011. Numerical methods for fractional reaction-dispersion equation with Riesz space fractional derivative. Eng. And Tech. Journal, 29 (4) :709-715.

JAFARI, H. ve GEJII, V. D., 2006. Solving linear and nonlinear fractional diffusion and wave equations by a domain decomposition. Applied Mathematics and Computation, 180 (2): 488-497.

KARABACAK, M., 2015. KesirliMertebeli Diferansiyel-Cebirse Denklemlerin Haar Dalgacık Fonksiyonları ile Nümerik Çözümleri, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü, Doktora Tezi, Erzurum,72s.

KATUGAMPOLA, U., 2011. New approach to a generalized fractional integral. Applied Mathematics and Computation, 218 (3): 860-865.

KATUGAMPOLA, N., 2014. A new approach to generalized fractional derivatives. Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 6 (4): 1-15.

KILBASS, A., SRIVASTAVA, H., and TRUJILLO, J., 2006. Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies 204, North- Holland, 521 pp.

KIRANE, M., and TORABEK, B., 2019. Hermite-Hadamard, Hermite-Hadamard-Fejer, Dragomir-Agarwal and Pachpatte Type Inequalities for Convex

Functions via Fractional Integrals. Journal of Computational and Applied Mathematics, 353: 120- 129.
LASKIN, N., 2002. Fractional schrödinger equation. Physical Review E, 66 (5): 1-7.
MAGIN, R.L., 2006. Fractional calculus in bioengineering. Begell House Redding, Chicago, 684s.
MOHYUD-DIN, S.T. ve ark., 2012. Homotopy analysis method for solving the space andtime fractional KdV equations. International Journal of Numerical Methods Heat & Fluid Flow, 22 (7): 928-941.
MOHYUD-DIN, S.T., BIBI, S., 2018. exact solution for nonlinear fractional differential equations using (G'/G^ {2})-EXPANSİON METHOD. Alexandra Engineering Journal, 57 (2): 1003-1008.
PODLUBNY, I., 1998. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Elsevier, United States of Amerika, 340s.
RAVICHANDRAN, C., JOTHIMANI, K., BASKONUS, H.M. and VALLIAMMAL, N., 2018. New results on non densely characterized integro differential equations with fractional order. European Physical Journal Plus, 133 (109): 1-10.
ROSS, B., 1977. Fractional calculus. Mathematics Magazine, 50 (3): 115-122.
SAMKO, S.G., KILBASS A.A., and MARCHIEV, O.I, 1993. Fractional integrals and derivatives. Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon, 973s.
SUBASHINI, R., RAVICHANDRA, C., JOTHIMANI, K., and BASKONUS, HM., 2020. Existence results of Hilfer integro-differential equations with fractional order. American Institue of Mathematical Sciences, 13(3): 911- 923.
SULAIMAN, T.A., BASKONUS, H.M., ve BULUT, H., 2018. Optical solitons and other solutions to the conformable space-time fractional complex Ginzburg-Landau Equation under the Kerrlaw nonlinearity: Pramana-Journal of Physic, 91 (58): 1-8.
TAŞDAN, Y., 2019. Katugampola Kesirli İntegrali ile Elde Edilen Bazı Bulgular, İbrahim Çeçen Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik, Yüksek Lisans Tezi, Ağrı, 45s.
ÜNAL, B., 2011. Kesirli türevlerin hipergeometrik fonksiyonlara uygulamaları, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Ankara, 79s.
YANG, X., 2011. Local Fractional Functional Analysis and Its Applications. Asian Academic Publisher Limited, Hong Kong, 234 pp.
ZHANG, Y., MEERSCHAERT, M.M., NEUPAUER, RM., 2016. Backward fractional advection dispersion model for contaminant source prediction. Water Resources Research, 52(4):2462–2473.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Sümeyye EKER
Uyruğu :T.C
Doğum Yeri ve Tarihi: İstanbul – 28.12.1992
Telefon : 0538 720 23 48
e-mail : sumeyyeeker34@hotmail.com

EĞİTİM

Derece	**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	: Pendik Fatih Anadolu Lisesi, Pendik, İstanbul	2011
Üniversite	:Gazi Üniversitesi , Yenimahalle, Ankara	2017
Yüksek Lisans:	:Gazi Üniversitesi (Tezsiz), Yenimalle, Ankara	2017

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
(2017-2018)	Sultanbeyli Gençlik Merkezleri	Matematik Öğretmeni
(2018 -)	Milli Eğitim Bakanlığı	Matematik Öğretmeni

YABANCI DİLLER

İngilizce

YAYINLAR

Eker, S., and Modanli, M., 2020. Finite Difference Method for Fractional Partial Differential Equation Defined by Atangana- Baleanu Caputo (ABC). Inyernational Conference on Mathematics and ist Applications in Sciencence and Engineering (ICMASE 2020), 9- 10 July, Ankara, p.163.