T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

ÜÇGENSEL BÖLGEDE İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEİN-DURRMEYER TİPİNDEKİ OPERATÖRÜN YAKLAŞIMI

Harun ÇİÇEK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2022

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Doktora Tezi

ÜÇGENSEL BÖLGEDE İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEİN-DURRMEYER TİPİNDEKİ OPERATÖRÜN YAKLAŞIMI

Harun ÇİÇEK

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Aydın İZGİ
Yıl: 2022, sayfa: 66

Bu tezde, üçgensel bölgede iki değişkenli Bernstein-Durrmeyer tipli polinomlarının yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızları incelenecektir. Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, yaklaşım teorisi tanıtılıp, temel tanım ve teoremler incelenecektir. İkinci bölümde, yapılan literatür çalışmasıyla tezimize ışık tutan önceki çalışmalar araştırılacaktır. Üçüncü bölümde, materyal olarak kullandığımız Bernstein polinomlarının özellikleri incelenecek ve yapılan işlemlerin doğruluğunu araştırmak için kullandığımız Mathematica kodları tanıtılacaktır. Dördüncü bölümde , tanımladığımız

$$H_n(h;u.v)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\varphi_{n,k,l}(u,v)\frac{(n+1)(n+2)}{16}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{-t}\varphi_{n,k,l}(s,t)h(s,t)dsdt$$

Burada

$$\varphi_{n,k,l}(u,v)=\binom{n}{k}\binom{n-k}{l}\left(\frac{1+u}{2}\right)^k\left(\frac{1+v}{2}\right)^l\left(1-\frac{1+u}{2}-\frac{1+v}{2}\right)^{n-k-l}$$

üçgensel bölgede iki değişkenli Bernstein-Durrmeyer tipli operatörün yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızı incelenecektir. Ayrıca nümerik örnekler verilip grafikler çizilecektir. Son bölümde ise; elde edilen sonuçlar yorumlanacak ve ileriki çalışmalar için yol göstermeler yer alacaktır.

ANAHTAR KELİMELER: Yaklaşım Teorisi, Yakınsaklık Modülü, Yakınsaklık Oranı, Berstein Operatörleri, Bernstein-Durrmeyer Operatörleri

ABSTRACT

PhD Thesis

APPROXIMATION BY MODIFIED BIVARIATE BERNSTEIN-DURRMAYER OPERATORS ON A TRIANGULAR REGION

Harun ÇİÇEK

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Aydın İZGİ

Year: 2022, page: 66

In this thesis, the approximation properties and the speed of approximation of modified bivariate Bernstein-Durrmeyer operators on a triangular region will be examined. This thesis consists of five chapters. In the first chapter, approximation theory will be introduced and basic definitions and theorems will be given. In the second part, previous literature studies that shed light on our thesis will be investigated . In the third section, the properties of the Bernstein polynomials that we use as materials will be examined and the Mathematica codes that we use to study the correctness of the operations performed will be introduced. In the fourth chapter, the approximation properties and the speed of approximation of the two variable Bernstein-Durrmeyer operators

$$H_n(h;u.v)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\varphi_{n,k,l}(u,v)\frac{(n+1)(n+2)}{16}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{-t}\varphi_{n,k,l}(s,t)h(s,t)dsdt$$

in which

$$\varphi_{n,k,l}(u,v)=\binom{n}{k}\binom{n-k}{l}\left(\frac{1+u}{2}\right)^{k}\left(\frac{1+v}{2}\right)^{l}\left(1-\frac{1+u}{2}-\frac{1+v}{2}\right)^{n-k-l}$$

that we define on a triangular region will be examined. Moreover, some numerical examples will be given and the related graphics will be plotted. In the last chapter, we will conclude the thesis with some comments on the results and provide guidance for future studies.

KEYWORDS: Approximation Theory, Modulus of Continuity, Rate of Convergence, Bernstein Operators, Bernstein-Durrmeyer Operators.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımız boyunca desteklerini esirgemeyen, engin bilgileriyle beni bilgilendiren çok kıymetli ve saygıdeğer hocam Prof. Dr. Aydın İZGİ'ye teşekkür ederim.

Ayrıca, tezin son halini almasında önemli katkıları bulunan Prof.Dr. Haydar ALICI hocama ve tez jürisinde bulunan Prof. Dr. Sevilay KIRCI SERENBAY, Prof. Dr. Kudusi KAYADUMAN ve Prof. Dr. Ahmet YILDIZ hocalarıma da teşekkürü borç bilirim.

Son olarak bana her koşulda ve her durumda destek olan çok değerli ÇİÇEK aileme; annem Mecbure, babam Halit, kardeşlerim Tuba, Zana, Muhammed , eşim Şeyma ve çocuklarım Evren ve Havin Beren'e çok teşekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

α	Alfa
β	Beta
δ	Delta
η	Eta
λ	Lamda
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\Vert . \Vert$	Norm
$C[a,b]$	$[a,b]$ kapalı aralığı üzerindeki sürekli fonksiyonların uzayı
$\frac{\partial h}{\partial u}$	h fonksiyonunun u değişkenine göre (a,b) noktasındaki kısmi türevi
B	Operatör
(L_n)	Lineer Pozitif Operatör
$B_n\left(h;u\right)$	Berntein Operatörü
$Lip_M\left(\alpha\right)$	Lipschitz sınıfından fonksiyonlar
$B_n\left(h;u\right) \rightrightarrows h$	B_n operatörünün h fonksiyonuna düzgün yakınması.
l_p	p. mertebeden Lebesque uzayı.
GBS operatör	Genelleştirilmiş Bloom Toplam operatörü
$H_n\left(h;u,v\right)$	İki Değişkenli Bernstein- Durrmeyer Operatörlerinin Bir Genelleştirmesi (Tanımlamış Olduğumuz Operatör)
$E_n\left(h;u,v\right)$	İki Değişkenli GBS Bernstein- Durrmeyer Operatörlerinin Bir Genelleştirmesi (Tanımlamış Olduğumuz Operatör)
$\omega\left(h;\delta\right)$	h fonksiyonunun süreklilik modülü
$B-$Sürekli	Bögel süreklilik
$B-$Sınırlı	Bögel sınırlı
$B-$Diferansiyellenebilir	Bögel Diferansiyellenebilirlik

1. GİRİŞ

Polinom yaklaşımını içeren klasik yaklaşım teorisi, uygulamalı matematikte temel bir araştırma alanıdır. Yaklaşım teorisindeki gelişme, kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde, görüntü işlemede olduğu gibi veri bilimlerinde ve diğer birçok disiplinde önemli bir rol oynar. Örneğin, spline, radyal temel fonksiyonlar ile yaklaşık değer ve enterpolasyonda, havacılık ve otomotiv endüstrilerinde geometrik modelleme için yaygın olarak uygulanır;18. yüzyıldan bu yana çalışmaların yapıldığı ve halen devam eden bu alanın bilimsel hesaplamalarda çok güçlü araçlar olduğu kanıtlanmıştır. Ayrıca termografi (kızılötesi görüntüleme) hesaplamalarında ve deprem mühendisliği alanlarında, farklı tipteki binaların enerji verimliliğini ve depreme dayanıklılık verilerini analiz etmek için inşaat mühendisliği projelerindede kullanılmıştır.

Yaklaşımlar teorisi; fonksiyonlar teorisinin çok uygulaması olan dallarından biridir. Bu dalın amacı, fonksiyonlar uzayındaki elemanları belirli bir noktada veya normda bu uzayın bir alt uzayının veya başka bir uzayın elemanlarından oluşturulmuş dizilerin limitleri şeklinde gösterimlerini bulmaktır. Yani bu diziler, verilen uzayın elemanlarını yaklaştırır yada bu elemanlarla yaklaşır denir. Dolayısıyla yaklaşım problemi çözülmüş olur. Ancak bu yaklaşım yapılırken şuna dikkat edilmelidir ;keyfi bir h fonksiyonunun kendisinden daha iyi özelliklere sahip olan fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmek amaçlanır. Bahsettiğimiz iyi özellikteki fonksiyonlara örnek olarak ; trigonometrik polinomları, cebirsel polinomları, tam fonksiyonları ve sonsuz basamaktan diferensiyellenebilen fonksiyonları gösterebiliriz. Fakat genel olarak fonksiyonları yaklaştırmak için en basit yapılar olan lineer pozitif operatörler kullanılır. Buda lineer pozitif operatörleri yaklaşımlar teorisinin vazgeçilmezi haline getirir. Pozitif operatörler monotondurlar ve bu özellikleri pozitif operatörler için birçok eşitsizliği ispatlamaya imkan tanır.

Lineer pozitif operatörler geçmişten günümüze bir çok matematikçi tarafından birçok matematik dalıyla ilişkilendirilerek birçok kez çalışılmıştır. Weierstrass 1885 yılında sonlu bir aralıktaki her fonksiyona yine bu aralıkta yakınsayan bir polinom olduğunu ispatlamıştır, ancak bu polinomun nasıl özellikte olacağı hakkında bilgi vermemiştir. 1912 yılında ünlü matematikçi Bernstein, Weierstrass'ın ispatı olarak ;

kapalı aralıkta fonksiyona yaklaşan polinomun kendi adıyla isimlendirilen Bernstein polinomunu ;

$$B_n(h,u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} h(\frac{k}{n})$$

burada $h \in C\left[0,1\right]$, $u \in \left[0,1\right]$, $n \in \mathbb{N}$ olduğunu ispatlamıştır.

Bersntein'ın çalışmasından sonra farklı yer ve zamanda ; 1952 yılında Bohman ve ardından 1953 yılında Korovkin Pozitif Operatörlerin sonsuz olmayan aralıkta $C\left[a,b\right]$'nin elemanı olan bir fonksiyona yaklaşımıyla alakalı bu alana öncülük eden ve sadece üç şartı sağlayarak bu yaklaşımın mümkün olduğunu ispatlayan önemli teoremler ortaya koymuşlardır. Bu teoremler genel olarak Korovkin şartları olarak bilinmektedir. Bu şartlar şu şekildedir;

$h \in C\left[a,b\right]$ fonksiyonu bütün reel sayılarda sürekli bir fonksiyon ve H_n bir lineer pozitif operatör olsun, $u \in \left[a,b\right]$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$i-) \lim_{n\to\infty} \left\| H_n(1) - 1 \right\|_{C[a,b]} = 0$$

$$ii-) \lim_{n\to\infty} \left\| H_n(t) - u \right\|_{C[a,b]} = 0$$

$$iii-) \lim_{n\to\infty} \left\| H_n(t^2) - u^2 \right\|_{C[a,b]} = 0$$

koşulları sağlıyorsa $[a,b]$ kapalı aralığında

$$\lim_{n\to\infty} \left\| H_n(h) - h \right\|_{C[a,b]} = 0$$

olur. Bu şartlar sayesinde yaklaşım teorisinde yeni bir alt dal ortaya çıkmıştır "Korovkin tipi yaklaşım teorisi" ve bu alt dalda çalışmalar büyük hız kazanmıştır. Birçok operatör ve onların genelleştirilmiş halleri oluşturulmuştur. Bu genelleştirmelerle ilgili bazı çalışmaları sıralayalım. "Bernstein Polynomials"1953'de Lorentz tarafından kaleme alındı. Bernstein polinomlarının yaklaşım hızı özellikleri Shisha ve Mond tarafından 1968'de araştırılmıştır.

1967'de Durrmeyer , Bernstein operatörlerinin integral formunu [0,1] kapalı aralığında tanımlamıştır. Daha sonra bu form Benstein-Durrmeyer operatörleri olarak bilinmiş ve operatör teoriye yeni bir hız katarak bir operatörün sürekli fonksiyonlara yakınsaması birçok kişi tarafından çalışılmıştır. Tez çalışmamızın da içinde yer alacağı iki değişkenli lineer pozitif operatörler ve üçgensel bölgede iki değişkenli lineer pozitif operatörlerle ilgili çalışmalar şu şekildedir; 1951 yılında Kingsley ,Bernstein operatörünü iki değişkenli olarak tanımlamıştır 2008 yılında Pop, Kingsleyin elde edilen yakınsaklık şartlarını ve yakınsaklık modülünü Voronovskaja teoremleriyle göstermiştir. 1963 yılında Stancu iki değişkenli Bernstein operatörünü tanımlamış yakınsaklık şarlarını ve yakınsaklık modülünü üçgensel bölgede tanımlamıştır. 2009 yılında Pop ve Farcaş Kantorovich tip operatör tanımlamış ve şartlarını iki değişkenli olarak sağlatmışlardır. 2013 yılında Acar ve Aral iki boyutlu Berstein-Stancu-Chlodowsky operatörünü tanımlamış ve yakınsaklık şartlarını sağlatmışlardır. 1992 yılında Zhou L_p uzayları üzerinde iki değişkenli Bernstein-Durrmeyer operatörünü tanımlamıştır. Bizde tezimizde üçgensel bölgede iki değişkenli Bernstein-Durrmeyer operatörünün bir genelleştirilmiş halini tanımlayacağız. Yapacağımız grafik çizimlerinde ve hata paylarını içeren nümerik değer tablolarında da, tanıtacağımız Bernstein-Durrmeyer operatörünün farklı bir genellemesinin klasik Bernstein-Durrmeyer polinomundan daha avantajlı olduğunu gördük.

1.1. Temel Kavramlar

Bu bölümde tezimizde kullandığımız bazı tanım ve teoremler tek değişkenli ve iki değişkenli olarak tanıtılacaktır.

1.1.1. Tek değişkenli fonksiyonlar

Tanım 1.1 *U ve V uzayları elemanları fonksiyonlar olan normlu uzaylar olsunlar. $h \in U$ fonksiyonunu, $g \in V$ fonksiyonuna götüren (taşıyan) $B : U \to V$ 'ye dönüşüm yada operatör denir.*

Tanım 1.2 *A herhangi bir cisim ve bu cisim üzerinde U ve V lineer fonksiyon uzayı olsunlar. $B : U \to V$ operatörü verilsin. Eğer $\forall u, v \in U$ ve $\forall \alpha, \beta \in A$ için*

$$B(\alpha u + \beta v) = \alpha B(u) + \beta B(v)$$

koşulunu sağlıyorsa o zaman B operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 1.3 $U^{+} = \{h \in U : h(u) \geq 0\}$ *ve* $V^{+} = \{g \in V : g(u) \geq 0\}$ *olmak üzere* $B : U \to V$ *operatörü* U^{+} *kümesinin her bir elemanını* V^{+} *kümesinin en az bir elemanına eşliyorsa yani,* $h \in U$ *fonksiyonu pozitifken* $B : U \to V$ *operatörüde pozitif ise* $B : U \to V$ *dönüşümü pozitif dönüşümdür denir.* $h \geq 0$ *ve* $B(h; u) \geq 0$ *ise* B *operatörüne pozitif operatör denir.*

Tanım 1.2 ve Tanım 1.3 'ün ikisini birden sağlayan dönüşümlere lineer pozitif operatör denir.

Teorem 1.4

$$h(u) \leq r(u) \Rightarrow B(h; u) \leq B(r; u)$$

dur. Yani lineer pozitif $B : U \to V$ *operatörü hem monoton hem artandır.*

İspat. B lineer ve pozitif olduğundan, $B(U^{+}) \subset V^{+}$ olur. Yani $h(u) \geq 0$ olduğunda $B(h; u) \geq 0$ olur. Her $u \in U$ için

$$h(u) \leq r(u)$$

kabulü ile $r(u) - h(u) \geq 0$ olduğu görülür.B'nin pozitifliği kabülünden;

$$B(r(u) - h(u); u) \geq 0$$

elde edilir. B'nin lineerliği kabülünden;

$$B(r(u); u) - B(h(u); u) \geq 0 \Rightarrow B(h(u); u) \leq B(r(u); u)$$

elde edilir. □

Teorem 1.5 $B : U \to V$ *operatörü lineer ve pozitif olsun ,* $|B(h)| \leq B(|h|)$ *eşitsizliği vardır.*

İspat. Genel olarak h bir fonksiyon olmak üzere ;

$$-|h| \leq h \leq |h|$$

olur. B' nin lineerliği ve monoton artanlığından;

$$B\left(-\left|h\right|\right)\leq B\left(h\right)\leq B\left|\left(h\right)\right|$$

elde edilir. B' lineerliğinden

$$B\left(-\left|h\right|\right)=-B\left(\left|h\right|\right)$$

yazılabilir.Bulduğumuz sonucu ispatın ilk eşitsizliğine yazarsak;

$$-B\left(\left|h\right|\right)\leq B\left(h\right)\leq B\left(\left|h\right|\right)\Rightarrow\left|B(h)\right|\leq B\left(\left|h\right|\right)$$

sonucu elde edilir. Böylece ispat biter. □

Tanım 1.6 *$U\subset\mathbb{R}$ boş olmayan bir küme ve U üzerindeki tüm reel değerli fonksiyonları belirten küme $H\left(U\right)$ olmak üzere. $h:\mathbb{N}\rightarrow H\left(U\right)$ ile tanımlı h fonksiyonuna "fonksiyon dizisi" denir. Terimleri $h_1,\ h_2,\ h_3,...$ şeklindedir ve $\left(h_n\right)$ yazılımıyla gösterilir.*

Tanım 1.7 *$Y = \left\{B:C\left[\alpha,\beta\right]\rightarrow C\left[\alpha,\beta\right]:B\ \text{Lineer Pozitif Operatör}\right\}$ olmak üzere,$B:\ \mathbb{N}\rightarrow Y$ ile verilen B dönüşümüne lineer pozitif operatör dizisi denir ve*

$$\left(B_n\right)=\ \left(B_1,B_2,B_3,\ \ldots..\right)$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.8 *$C\left[\alpha,\beta\right]$, $\left[\alpha,\beta\right]$ üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların uzayı*

$$h(u)\in C\left[\alpha,\beta\right],\quad u\in\left[\alpha,\beta\right]$$

ise $C\left[\alpha,\beta\right]$'de tanımlı norm;

$$\left\|h\right\|_{C[\alpha,\beta]}=\begin{array}{c}max\\ \alpha\leq u\leq\beta\end{array}\left|h\left(u\right)\right|$$

şeklindedir.

Tanım 1.9 *Boştan farklı $U\subset\mathbb{R}$ kümesi ve her $u_1,u_2\in U$ olsun, $H:U\rightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu için $\varepsilon>0$ iken $\left|u_1-u_2\right|<\delta$ olduğunda $\left|h\left(u_1\right)-h\left(u_2\right)\right|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta=\delta\left(\varepsilon\right)$ sıfırdan farklı sayısı varsa h fonksiyonu U üzerinde "düzgün süreklidir" denir.*

Tanım 1.10 *Kabul edelim ki $n \geq 1$ için h ve g , $u = 0$ noktasında n-inci mertebeden türevlenebilen fonksiyon olsun. P_n ise n-inci mertebeden bir polinom olsun.*

$$\lim_{n\to\infty} g(u) = 0$$

olmak üzere;

$$h(u) = P_n(u) + u^n g(u)$$

şeklinde yazılabilir ise P_n polinomuna $u = 0$ noktasında h fonksiyonu tarafından üretilen Taylor polinomu adı verilir. (Musayev, 2007)

Tanım 1.11 *h fonksiyonu herhangi bir k noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türevlere sahip olsun.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n(k)}{n!}(u-k)^n$$

serisine h fonksiyonu tarafından k noktasında üretilen Taylor seri açılımı denir (Musayev, 2007).

Teorem 1.12 *$u \epsilon\ [0,1]$, $0 \leq a_{k,n} \leq 1$ olduğunda*

$$B_n\,(h;u) = \sum_{k=0}^{n} h(a_{k,n})\, P_{k,n}\,(u)\ \ ,\quad P_{k,n}\,(u) \geq 0$$

L.P.O. dizisi olsun. Kapalı $[0,1]$ aralığında $n \to \infty$ iken h fonksiyonu düzgün yakınsaktır ancak ve ancak

$$B_n\,(1;u) \rightrightarrows 1$$

$$B_n\,(t;u) \rightrightarrows u$$

$$B_n\left(t^2;u\right) \rightrightarrows u^2$$

olmasıdır.

Açık şekilde görülüyor ki Bohman'ın ortaya koyduğu bu teorem h fonksiyonunun kapalı $[0,1]$ aralığının dışındaki değerlerinde sağlamamaktadır. Bu şartları 1953 yılında P.P. Korovkin, $[0,1]$ kapalı aralığının dışındada geçerli olduğunu aşağıdaki teoremle ispatlamıştır.

Teorem 1.13 *Eğer B_n L.P.O dizisi kapalı $[a,b]$ aralığında*

$$B_n\,(1;u) \rightrightarrows 1$$

$$B_n\left(t;u\right) \rightrightarrows \ u$$

$$B_n\left(t^2;u\right) \rightrightarrows u^2$$

koşullarını sağlıyorsa; $C\left[a,b\right]$'nin herhangi bir elamanı olan h fonksiyonu için $n \to \infty$ iken;

$$B_n\left(h;u\right) \rightrightarrows h\left(u\right),\ a \le u \le b$$

olur. Yani tüm $h \in C\left[a,b\right]$ için $B_n\left(h;u\right)$ operatörü düzgün yakınsaktır. Benzer şekilde

$$\left\|B_n\left(h\right) - h\right\|_{C[a,b]} \to 0 \qquad \left(n \to \infty\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a \le u \le b} \left|B_n\left(h;u\right) - h\left(u\right)\right| = 0$$

ifadeleri de yazılabilir.

İspat. $h \in C\left[a,b\right]$ olduğundan $M > 0$ sayısı vardır ki;

$$\left|h\left(u\right)\right| \le M$$

yazılabilir. $h \in C\left[a,b\right]$, $r \in \left(-\infty,+\infty\right)$ ve $u \in \left[a,b\right]$ için $\forall\, \varepsilon > 0$ iken $\delta > 0$ vardır ki

$$\left|r - u\right| < \delta$$

olduğunda;

$$\left|h\left(r\right) - h\left(u\right)\right| < \varepsilon$$

olur. Bu eşitsizlikde; $u, r \in \left[a,b\right]$ olursa, h fonksiyonu kapalı $\left[a,b\right]$ aralığı için sürekli olur. $u \in \left[a,b\right]$, $r \notin \left[a,b\right]$ olduğunda da h fonksiyonu a ve b sınır noktalarında soldan ve sağdan sürekli bir fonksiyon olduğu için süreklidir.

Her $u \in \left[a,b\right]$; $h\left(u\right) \le M$, $M > 0$ vardır.

$$\left|r - u\right| \ge \delta \Rightarrow \frac{\left|r-u\right|}{\delta} \ge 1 \ \Rightarrow 1 \le \frac{\left|r-u\right|}{\delta} \le \frac{\left|r-u\right|^2}{\delta^2}$$

$\left|r - u\right| \ge \delta$ olduğunda ise üçgen eşitsizliğinden;

$$\left|h\left(r\right) - h\left(u\right)\right| \le \left|h\left(r\right)\right| + \left|h\left(u\right)\right| \le 2M \le 2M\frac{\left|r-u\right|^2}{\delta^2}$$

olur. O halde; $\left|r - u\right| < \delta$ için $\left|h\left(r\right) - h\left(u\right)\right| < \varepsilon$

$$\left|r - u\right| \ge \delta$$

için

$$|h(r) - h(u)| \leq 2M \frac{|r-u|^2}{\delta^2}$$

yazılabilir. Böylece $\forall\, r \in \mathbb{R}$ ve $u \in [a,b]$ elemanı için

$$|h(r) - h(u)| < \varepsilon + 2M \frac{|r-u|^2}{\delta^2}$$

dır. Şimdi de Korovkin şartlarına uyan (B_n) L.P.O dizisinin,

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n(h) - \ h\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğini ispat edelim. (B_n) operatörünün lineerliğinden;

$$\begin{aligned} |B_n(h(r);u) - \ h(u)| &= \ |B_n(h(r);u) - \ h(u) + B_n(h(u);u) - B_n(h(u);u)| \\ &= \ |B_n(h(r);u) - B_n(h(u);u) + B_n(h(u);u) - h(u)| \\ &= \ |B_n(h(r) - h(u);u) + h(u)\, B_n(\ 1;u) - 1| \end{aligned}$$

dır. Burada üçgen eşitsizliğini kullanırsak;

$$|B_n(h(r);u) - h(u)| \ \leq |B_n(h(r) - h(u);u)| + |h(u)|\, |B_n(1;u) - 1|$$

elde edilir. ilk eşitsizlikten

$$|B_n(h(r) - \ h(u);u)| \leq |B_n(|h(r) - \ h(u)|;u)|$$

şeklinde yazılır. Bu durumda elde edilen eşitsizliklerden dolayı son eşitsizlik;

$$|B_n(h(r);u) - h(u)| \leq B_n(|h(r) - h(u)|;u) + M\, |B_n(1;u) - 1|$$

olarak yazılabilir. (B_n) monoton artan olduğundan;

$$|B_n(h(r);u) - h(u)| \leq B_n\left(\left(\epsilon + 2M\frac{|r-u|^2}{\delta^2}\right);u\right) + M\, |B_n(1;u) - 1|$$

yazılabilir. Öte yandan (B_n) L.P.O olduğundan;

$$\begin{aligned} B_n\left(\left(\epsilon+2M\frac{|r-u|^2}{\delta^2}\right);u\right) &= B_n(\epsilon;u)+B_n\left(2M\frac{|r-u|^2}{\delta^2};u\right) \\ &= \epsilon B_n(1;u)+2\frac{M}{\delta^2}B_n\left(r^2-2ur+u^2;u\right) \\ &= \epsilon B_n(1;u)+2\frac{M}{\delta^2}\left\{B_n\left(r^2;u\right)-u^2-u^2+2u^2\right. \\ &\quad \left.-2u\,B_n(r;u)+u^2B_n(1;u)\right\} \\ &= \epsilon B_n(1;u)+2\frac{M}{\delta^2}\left\{B_n\left(r^2;u\right)-u^2+2u^2\right. \\ &\quad \left.-2u\,B_n(r;u)+u^2B_n(1;u)-u^2\right\} \\ &= \epsilon B_n(1;u)+2\frac{M}{\delta^2}\left\{\left(B_n\left(r^2;u\right)-u^2\right)\right. \\ &\quad \left.-2u\left(B_n(r;u)-u\right)+u^2\left(B_n(1;u)-1\right)\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade son eşitlikte yerine yazılmasıyla;

$$\begin{aligned} |B_n(h(u)-h(u);u)| \leq \epsilon B_n(1;u)+2\frac{M}{\delta^2}&\left\{\left(B_n\left(r^2;u\right)-u^2\right)-2u\left(B_n(r;u)-u\right)\right. \\ &\left.+u^2\left(B_n(1;u)-1\right)+M\left|B_n(1;u)-1\right|\right\} \end{aligned}$$

elde edilen bu ifade de Korovkin koşullarının kullanılmasıyla;

$$|B_n(h(r)-h(u);u)| \leq \epsilon$$

elde edilir. Yani

$$\lim_{n\to\infty}\|B_n(h)-\ h\|_{C[a,b]}=0$$

sonucuna ulaşılır ve ispat biter. □

Tanım 1.14 *h , kapalı $[a,b]$ aralığı üzerindeki herhangi fonksiyon ve $u_0 \in (a,b)$ olmak üzere h fonksiyonu u_0 noktasında türevlenebilir olması için*

$$\lim_{u\to u_0}\frac{h(u)-h(u_0)}{u-u_0}$$

limitinin var olması ve sonlu olması gerekir. Bu limit $h'(u_0)$ yada $\frac{dh(u)}{du}|_{u=u_0}$ şeklinde gösterilebilir. Yani

$$\lim_{u\to u_0}\frac{h(u)-h(u_0)}{u-u_0}=h'(u_0)$$

dir.

Tanım 1.15 $(a,b) \subset \mathbb{R}$ *açık aralığında ve bu aralık üzerinde* $u_0 \in (a,b)$ *noktası olmak üzere; bu açık aralık üzerinde* $(n+1)$*. mertebeden türevlenebilen* $h : (a,b) \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu için*

$$h(u_0) + \frac{h'(u_0)}{1!}(u-u_0) + \cdots + \frac{h^n(u_0)}{n!}(u-u_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k(u_0)}{k!}(u-u_0)^k$$

açılımı yazılabilir. Bu açılıma taylor açılımı denir.

S. N. Bernstein' in 1912'de Weierstrass teoremini kullanarak oluşturduğu ve sonradan kendi adıyla adlandırılacak olan Bernstein polinomunu şu şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 1.16 $h \in C[0,1]$ *,* $u \in [0,1]$ *,* $n \in \mathbb{N}$ *olmak üzere bu polinom*

$$B_n(h,u) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k u^k (1-u)^{n-k}$$

şeklindedir. Burada C_n^k

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

dir.

Yukarıda tanımlanan Bernstein operatörü ;

$$B_n(1;u) = 1$$

$$B_n(t;u) = u$$

$$B_n\left(t^2;u\right) = u^2 + \frac{u(1-u)}{n}$$

şartları sağlar.

Tanım 1.17 h *fonksiyonu, tanım kümesi kapalı* $[a,b]$ *aralığı olan fonksiyon olmak üzere. Kapalı* $[0,b-a]$ *aralığı üzerinde tanımlı*

$$\omega(\delta) := \omega(h,\delta) := \{sup\,|h(u_2) - h(u_1)| : |u_2 - u_1| \le \delta, u_1, u_2 \in [a,b]\}$$

fonksiyonuna h *fonksiyonunun "süreklilik modülü" denir.*

Yukarıda tanımını yazdığımız $\omega\left(h,\delta\right)$ süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar (F. Altomare ve M. Campiti, 1994).

$$\lim_{\delta\to 0}\omega\left(\delta\right)\ =0$$

$$0<\delta_1<\delta_2 \text{ ise } \omega\left(\delta_1\right)\leq\omega\left(\delta_2\right)$$

$$\omega\left(\delta_1+\delta_2\right)\leq\ \omega\left(\delta_1\right)+\omega\left(\delta_2\right)$$

$$\omega\left(n\delta\right)\leq n\omega\left(\delta\right),\ n\in Z^{+}$$

$$\left|h\left(t\right)-h\left(u\right)\right|\leq\omega\left(h;\left|t-u\right|\right)$$

$$\omega\left(h;\left|t-u\right|\right)\leq\left(1+\frac{\left|t-u\right|}{\delta}\right)\omega\left(h;\delta\right).$$

Şimdide iki değişkenli fonksiyonlar için bazı tanım ve teoremleri verelim.

1.1.2. İki değişkenli fonksiyonlar

Tanım 1.18 *$D\subset\mathbb{R}^2$ ve (a,b), D kümesinin bir yığılma noktası ve h da D üzerinde tanımlı , reel değerli bir fonksiyon olsun.*

$\lim_{(u,v)\to(a,b)} h(u,v)=l \Longleftrightarrow \forall\epsilon>0$ *için* $\exists\delta>0$ *öyleki* $|u-a|<\delta$ *ve* $|v-b|<\delta$ *bağıntısı sağlanmalıdır ki tüm* (u,v) *noktaları için* $|h(u,v)-l|<\epsilon$ *dur.*

Tanım 1.19 *$D\subset\mathbb{R}^2$ ve (a,b), D kümesinin bir yığılma noktası ve h da (a,b) de tanımlı $\lim_{(u,v)\to(a,b)} h(u,v)=h(a,b)$ ise h fonksiyonu (a,b) aralığında süreklidir denir. Eğer h fonksiyonu D nin tüm noktalarında sürekli ise h fonksiyonu D de süreklidir denir.*

Tanım 1.20 *$D\subset\mathbb{R}^2$, $h:D\to\mathbb{R}$, $h(u,v)=z$ fonksiyonu tanımlansın. $(a,b)\in D$ için eğer;*

$$\lim_{k\to 0}\frac{h(a+k,b)-h(a,b)}{k}$$

limiti varsa bu ifadeye h nin u değişkenine göre $(a,b)\in D$ noktasındaki kısmi türevi denir.

$\dfrac{\partial h}{\partial u}$, $h_u(a,b)$ sembolleriyle gösterilir. Benzer şekilde

$$\lim_{k\to 0} \frac{h(a,b+k)-h(a,b)}{k}$$

limiti varsa bu ifadeye h *nin* v *değişkenine göre* $(a,b) \in D$ *noktasındaki kısmi türevi denir.* $\dfrac{\partial h}{\partial v}, h_v(a,b)$ *sembolleriyle gösterilir.*

Teorem 1.21 *Eğer* h_u, h_v, h_{uv}, h_{vu} *kısmi türevleri herhangi bir* (a,b) *ikilisinin eleman olduğu bir açık yuvarda tanımlı ve* (a,b) *noktasında sürekli olurlarsa bu durumda* $h_{uv}(a,b) = h_{vu}(a,b)$ *olur.*

Teorem 1.22 $D = \{(u,v) : a \le u \le b, c \le v \le d\}$ *ve* $h : D \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu sürekli olsun. O halde*

$$\begin{aligned}\iint_D h(u,v)dudv &= \int_a^b \left(\int_c^d h(u,v)dv\right) du \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b h(u,v)du\right) dv\end{aligned}$$

olur. Bu teorem birinci Fubini Teoremi olarak bilinir.

Teorem 1.23 $\Psi, \Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu sürekli ,* $\forall u \in [a,b]$ *için* $\Psi(u) \le \Phi(u)$ *ve* $D = \{(u,v) : a \le u \le b, \Psi(u) \le v \le \Phi(u)\}$ *olsun.*

$h : D \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu sürekli yada bu aralıkta parçalı sürekli ise*

$$\iint_D h(u,v)dudv = \int_a^b \left(\int_{\Psi(u)}^{\Phi(u)} h(u,v)dv\right) du$$

olur. Bu teorem ikinci Fubini Teoremi olarak bilinir.

Tanım 1.24 $h(u,v) = z$ *fonksiyonunun* (a,b) *noktasında her mertebeden sürekli kısmi türevleri var ise*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[h_u(a,b)(u-a) + h_v(a,b)(v-b)\right]^{(k)}$$
$$= h(a,b) + \frac{1}{1!} \left[h_u(a,b)(u-a) + h_v(a,b)(v-b)\right]$$
$$+ \frac{1}{2!} \left[h_{uu}(a,b)(u-a)^2 + 2h_{uv}(a,b)(u-a)(v-b) + h_{vv}(a,b)(v-b)^2\right] + ...$$

serisine h fonksiyonunun (a,b) noktasındaki Taylor seri açılımı denir.

Tanım 1.25 $k = 0,1,2...n$ *olduğunda* $\forall\,(u_k)\,,(v_k) \in \mathbb{R}^n$ *sayı dizileri için* $1 < p,q < \infty$ *ve* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *olsun.*

$$\sum_{k=0}^{n} |u_k v_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{n} |v_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine hölder eşitsizliği denir. Burada $p = q = 2$ *seçilirse Cauchy-Schwartz Eşitsizliği elde edilir.*

Tanım 1.26 $k = 0,1,2...n$ *olduğunda* $\forall\,(u_k)\,,(v_k) \in \mathbb{R}^n$ *sayı dizileri için* $1 < p < \infty$ *seçilirse ve* $\mathbb{R}^n$ *de* $\|.\|_p$ *bir norm olmak üzere*

$$\|u_k + v_k\|_p \leq \|u_k\|_p + \|v_k\|_p$$

eşitsizliğine Minkowski eşitsizliği yada üçgen eşitsizliği denir.

Teorem 1.27 $D \subset \mathbb{R}^m$ *sınırlı bir bölge olmak üzere* $C_b\,(D)$ *ile* D *bölgesinde sürekli ve tüm* $\mathbb{R}^m$ *de sınırlı reel değerli fonksiyonların uzayı gösterilsin. Eğer,* (L_n) *lineer pozitif operatörler dizisi* $K \subset D$ *kompakt bölgesinde* $n \to \infty$ *için*

$$L_n\,(1;u) \rightrightarrows 1$$

$$L_n\,(t_i;u) \rightrightarrows x_i \quad i = 1,2,3,...,m$$

$$L_n\left(|t|^2\,;u\right) \rightrightarrows |u|^2$$

Şeklindeki $(m+2)$ *tane şartı sağlıyorsa, o taktirde keyfi* $h \in C_b\,(D)$ *için* K *üzerinde* $n \to \infty$ *iken*

$$L_n\,(h;u) \rightrightarrows h(u)$$

olur. (Burada $|u|^2 = \sum_{k=1}^{m} u_k^2$*dir.)Yani iki değişkenli uzayda çalıştığımız için*

$$L_n(1;u,v) \rightrightarrows 1$$

$$L_n(s;u,v) \rightrightarrows u$$

$$L_n(t;u,v) \rightrightarrows v$$

$$L_n\left(s^2+t^2;u,v\right) \rightrightarrows u^2+v^2$$

şartları sağlanmalı ki $L_n(h;u,v)$ *operatörü* $h(u,v)$ *fonksiyonuna düzgün yakınsasın. Dolayısıyla iki değişkenli fonksiyon uzayında Korovkin şartları sağlanmış olsun.(Hacıyev ve Hacısalihoğlu, 1995)*

Teorem 1.28 $L_{n,m}$ *lineer pozitif operatör dizisi* $\mathbb{R}^2$*de sınırlı ve* D *kompakt kümesi için,*

$$\lim_{n,m\to\infty} \|L_{n,m}(1;u,v)-1\|_{C(\mathrm{D})} = 0$$

$$\lim_{n,m\to\infty} \|L_{n,m}(t;u,v)-u\|_{C(\mathrm{D})} = 0$$

$$\lim_{n,m\to\infty} \|L_{n,m}(s;u,v)-v\|_{C(\mathrm{D})} = 0$$

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\|L_{n,m}((t^2+s^2);u,v)-(u^2+v^2)\right\|_{C(\mathrm{D})} = 0$$

Koşullarını sağlıyor ise her $h \in C(D)$*için*

$$\lim_{n,m\to\infty} \|L_{n,m}(h;u,v)-h(u,v)\|_{C(\mathrm{D})} = 0$$

olur.Burada $(t,s),(u,v) \in \mathbb{R}^2$*. (Volkov, 1957)*

Tanım 1.29 $D \subset \mathbb{R}^m$ *sınırlı bir bölge olmak üzere ;*$C(D)$*,* D *üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların uzayı olsun ;* $C(D)$ *lineer normlu uzayı üzerinde tanımlı olan norm*

$$\|h\|_{(D)} = \max_{(u,v)\in D} |h(u,v)|$$

şeklinde tanımlı bir normdur.

Tanım 1.30 *Şimdi* $h \in C(D)$ *olmak üzere kısmi ve tam süreklilik modüllerinin tanımlarını yapalım;*

$h \in C(D)$ *fonksiyonunun tam süreklilik modülü ;*

$$\omega(h,\delta)=\max_{\substack{\sqrt{(u_1-u_2)^2+(v_1-v_2)^2}\leq\delta\\(u,v)\in D}}|h(u_1,v_1)-h(u_2,v_2)|$$

şeklindedir.

ve $h(u,v)$ *nin* u *ve* v *ye göre kısmi süreklilik modülü ;*

$$\omega^{(1)}(h,\delta)=\max_{\substack{|u_1-u_2|\leq\delta\\(u_1,v),(u_2,v)\in D}}|h(u_1,v)-h(u_2,v)|$$

$$\omega^{(2)}(h,\delta)=\max_{\substack{|v_1-v_2|\leq\delta\\(u,v_1),(u,v_2)\in D}}|h(u,v_1)-h(u,v_2)|$$

şeklinde tanımlanır. (Altomare ve Campiti (1994))

Tam ve kısmi süreklilik modülünün bazı özellikleri ;

$$\omega(h,\delta)\leq(1+\lambda)\omega(h,\delta)$$

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(h,\delta)=0$$

şeklindedir. Bunların dışında tek değişkenli fonksiyonlar için tanımlı süreklilik modülü özellikleri uygun koşullarda iki değişkenli fonksiyonların süreklilik modülü içinde geçerlidir.

Temel tanım ve teoremleri verdikten sonra ikinci bölüm olan önceki çalışmalar kısmında tezimizi oluşturan operatör için önceden yapılan çalışmalar incelenecektir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Alman matematikçi Karl-Weiertrass topolojik olarak; her fonksiyon herhangi bir topolojik uzayda yoğun olan bir alt uzayın elemanlarından oluşan diziye yakınsar ifadesiyle bu fonksiyonların yakınsayacağı fonksiyon dizisini aşağıdaki gibi tanımlamıştır;

$$W(h,u)=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{n(t-u)^2}{2}}h(t)dt$$

Bu fonksiyon dizisin söz konusu fonksiyona $\mathbb{R}$ üzerinde kapalı ve sınırlı aralıklar üzerinde düzgün yakınsak olduğunu ispatlamıştır. Aslında bu Yaklaşımlar teorisinin temel teoremi olarak adlandırılır şöyleki;kapalı ve sınırlı $[a,b]$ aralığı içinde reel değerli sürekli h fonksiyonu için her $\epsilon>0$ ve her $u\in[a,b]$ olmak üzere;

$$|P_n(u)-h(u)|<\epsilon$$

olacak şekilde bir $P_n(u)$ polinomunun var olduğunu ilk kez Weiertrass 1885 yılında tanımlayıp ispat etmiştir. Yani topolojik olarak $P[a,b]$ uzayının $C[a,b]$ sürekli fonksiyonlar uzayı üzerinde yoğun olduğunu göstermiş ve $C[a,b]$ nin elemanı olan h fonksiyonunun $P[a,b]$ nin elemanı olan $P_n(u)$ polinomlarına düzgün yakınsak olduğunu ifade ve ispat etmiştir.

Fakat Weiertrass bu $P_n(u)$ polinomlarının nasıl olması gerektiğiyle ilgili bilgi vermemiştir. Bu durum matematikçiler tarafından karmaşık olduğu öne sürülmüştür. 1912 yılında ise Weiertrass'ın tanımlamış olduğu bu $P_n(u)$ polinomlarının nasıl olaması gerektiğiyle ilgili Rus matematikçi S.N. Bernstein çalışmalar yapmış ve bu polinomu toplamsal şekilde Bernstein polinomları olarak tanımlamıştır: $h\in C\left[0,1\right]$, $u\in\left[0,1\right]$, $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere bu polinom

$$B_n\left(h,u\right)=\sum_{z=0}^{n}h\left(\frac{z}{n}\right)C_n^z u^z(1-u)^{n-z}$$

şeklindedir. Burada C_n^z

$$C_n^z=\binom{n}{z}=\frac{n!}{(n-z)!z!}$$

şeklinde yazılır.

Görüldüğü üzere Bernstein kendi adıyla tanımladığı polinomların $[0,1]$ kapalı aralığında tanımlı ve sürekli olan fonksiyonlara yaklaşabileceğini ispatlamıştır.

Chlodowsky 1937 yılında Bernstein operatörlerini sonsuz aralığa taşımış ve kendi adıyla tanımlanan polinomları ifade ve ispat etmiştir.

Bernstein-Chlodowsky polinomları olarak adlandırılan bu operatör ise şu şelilde tanımlanmıştır;

$$C_n(h;u) = \sum_{z=0}^{n} \binom{n}{z} (\frac{u}{b_n})^z \left(1 - \frac{u}{b_n}\right)^{n-z} h\left(\frac{z}{n}b_n\right)$$

Burada reel terimli $\{b_n\}$, monoton artan ve pozitif sayı dizisidir. Ayrıca ;

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

özelliklerini sağlamaktadır.

1912 yılındaki Bernstein'ın çalışmalırından sonra farklı yer ve zamanda ; 1952 yılında Bohman ve ardından 1953 yılında Korovkin L.P.O'ların sonlu aralıktaki sürekli fonksiyonlara yaklaşımıyla ilgili yeni tanım ve teoremler ifade ve ispat etmişlerdir. Genel olarak bu şartlar Korovkin şartları olarak bilinir ve günümüzde halen bir operatörün bir fonksiyona yaklaşabilen Lineer Pozitif Operatörler olduğunu kabul edebilmek için Korovkin şartlarına bakılır. Bu şartlar ve ispatları önceki bölümde Temel Tanım ve Teoremler kısmında verilmiştir.

1957 yılında V.A. Baskakov $[0,\infty)$ aralığında sürekli olan ve

$$\lim_{u\to\infty} \frac{h(u)}{1+u^2} < \infty$$

koşulunu sağlayan ve h fonksiyonuna yakınsayan

$$V_n(h;u) = (1+u)^{-n} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{n-z-1}{z} \left(\frac{u}{1+u}\right)^z h\left(\frac{z}{n}\right)$$

şeklinde gösterilen $\{V_n\}$ Baskakov operatör dizisini tanımlamış ve bu operatör dizisinin yakınsaklık özelliklerini incelemiştir.

Bernstein polinomları kendisinin sınırsız bir aralıkta genellemesi yada başka bir deyişle yeni versiyonu olan Bernstein-Chlodowsky polinomlarına göre, daha çok araştırılmış ve üzerinde çok fazla çalışmalar yapılmıştır. Bernstein-Chlodowsky polinomlarının az çalışılmış olma nedeni kapalı ve sınırlı $[0, b_n]$ aralığının $n \to \infty$ iken sınırsız $[0,\infty)$ aralığınana dönüşmesi ve sonuç olarak Korovkin Teoremi şartlarının geçersiz olmasından kaynaklanır.

Bu çalışmalardan sonra yaklaşım teorisi başka bir boyut kazanmış ve büyük hızla birçok operatör ve onların genelleştirilmiş halleri oluşturulmuştur. Bu genelleştirmelerle ilgili bazı çalışmalar; "Bernstein Polynomials"1953'de Lorentz tarafından kaleme alındı. Bernstein polinomlarının yaklaşım hızı özellikleri Shisha ve Mond tarafından 1968'de araştırılmıştır.

Bernstein operatörü daha sonra iki değişkenli olarak karesel bir bölge olan $(u,v) \in D = [0,1] \times [0,1]$ bölgesinde h , D üzerinde sürekli bir fonksiyon ve $n, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere iki değişkenli Bernstein operatörü;

$$B_n(h;u,v) = \sum_{z=0}^{n} \sum_{r=0}^{m} \binom{n}{z} u^z (1-u)^{n-z} \binom{m}{r} v^r (1-v)^{m-r} h\left(\frac{z}{n}, \frac{r}{m}\right)$$

şeklinde tanımlanır.

1963 yılında ise Stancu $A = \{(u,v) : u+v \leq 1, 0 \leq u, v \leq 1\}$ üçgensel bölgesi üzerinde $h \in A$ için iki değişkenli Bernstein polinomlarını şu şekilde tanımlamıştır;

$$S_n(h;u,v) = \sum_{z=0}^{n} \sum_{r=0}^{n-z} \binom{n}{z} \binom{n-z}{r} u^z v^r (1-u-v)^{n-z-r} h\left(\frac{z}{n}, \frac{r}{n}\right)$$

Daha sonra 1985 yılında Derriennic bir üçgensel bölge üzerinde tanımlı integral fonksiyonlarıyla Bernstein operatörlerini çok değişkenli olarak L_p uzaylarında inceledi. 1992 de ise Zhou iki değişkenli Bernstein-Durrmeyer operatörlerini tanıttı; $h \in C(S)$, $C(S) : S$ üzerindeki sürekli fonksiyonlar ve $(u,v) \in S$ olmak üzere

$$V_n(h;u,v) = (n+1)(n+2) \sum_{z=0}^{n} \sum_{r=0}^{n-z} b_{n,z,r}(u,v) \int_0^1 \int_0^{1-t} b_{n,z,r}(s,t) h(s,t)\, ds dt$$

burada

$$b_{n,z,r}(u,v) = \binom{n}{z} \binom{n-z}{r} u^z v^r (1-u-v)^{n-z-r}$$

şeklinde tanımladı.

2009 yılında Pop ve Farcas iki değişkenli Bernstein-Kantorovich operatörlerinin

üçgensel bölgedeki GBS operatörlerinin yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Bu operatör ise;

$$U_m(h;u,v) = (n+1)^2 \sum_{z=0}^{n} \sum_{r=0}^{n-z} b_{n,z,r}(u,v) \int_{\frac{z}{n+1}}^{\frac{z+1}{n+1}} \int_{\frac{r}{n+1}}^{\frac{r+1}{n+1}} h(s,t)\, ds dt$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $h(s,t) = h(u,t) + h(s,v) - h(u,v)$'dir.

Özet olarak; 1951 yılında Kingsley ,Bernstein operatörünü iki değişkenli olarak tanımlamıştır 2008 yılında Pop, Kingsleyin elde edilen yakınsaklık şartlarını ve yakınsaklık modülünü Voronovskaja teoremleriyle göstermiştir. 1963 yılında Stancu iki değişkenli Bernstein operatörünü tanımlamış yakınsaklık şarlarını ve yakınsaklık modülünü üçgensel bölgede tanımlamıştır. 2009 yılında Pop ve Farcaş Kantorovich tip operatör tanımlamış ve şartlarını iki değişkenli olarak sağlatmışlardır. 2013 yılında Acar ve Aral iki boyutlu Berstein-Stancu-Chlodowsky operatörünü tanımlamış ve yakınsaklık şartlarını sağlatmışlardır. 1992 yılında Zhou L_p uzayları üzerinde iki değişkenli Bernstein-Durrmeyer operatörünü tanımlamıştır.

Son olarak 2012 yılında Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü , Matematik anabilim dalında yüksek lisans tezi olarak kabul edilen Ayşegül ÇİLO tarafından hazırlanan tezde kullanılan Bernstein operatörünün üçgensel bölgede iki değişkenli halinin Durrmeyer tipli genellemesini kendi tezimizde tanımladığımız operatör olarak kullandık.

Bu çalışmalar ışığında bizde tezimizde İki Değişkenli Bernstein-Durrmeyer operatörlerinin üçgensel bölgede bir modifikasyonunu oluşturup bu operatörün yaklaşım özelliklerini inceledik ayrıca tanımlamış olduğumuz operatörün GBS formunu tanıtıp yakınsaklık özelliklerini inceledik.

Üçüncü bölümde tez çalışmamızda oluşturduğumuz operatörün ispatları için kullanılan materyal ve metodlardan bahsedilecektir. Ayrıca hesaplamalar yapılırken kullanılabilen Mathematica programından ve grafik çizimleri için Maple program kodları verilecektir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Tezimizin bu kısmında öncelikle kullanacağımız gereç olan tek ve iki değişkenli Bernstein polinomlarının Korovkin şartlarını sağladığının daha önce yapılan ispatı verilecektir. Daha sonra kesin sonuçlar için operatörümüzü Wolfram Mathematica programındaki kodlarla çözeceğimiz için bu programla ilgili kodlar tanıtılacaktır.

3.1. Tek ve İki Değişkenli Bernstein Operatörleri

Tanım 3.1 $h \in C[0,1]$, $u \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ *olmak üzere tek değişkenli Bernstein polinomu*

$$B_n(h,u) = \sum_{z=0}^{n} h\left(\frac{z}{n}\right) C_n^z u^z (1-u)^{n-z}$$

şeklindedir. Burada C_n^z

$$C_n^z = \binom{n}{z} = \frac{n!}{(n-z)!z!}$$

dir.

Öncelikle bu operatörün lineer ve pozitif olduğunu gösterelim;α,$\beta \in \mathbb{R}$, $h, g \in C[0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} B_n(\alpha h + \beta g; u) &= \sum_{z=0}^{n} \binom{n}{z} u^z (1-u)^{n-z} (\alpha h + \beta g)\left(\frac{z}{n}\right) \\ &= \alpha \sum_{z=0}^{n} \binom{n}{z} u^z (1-u)^{n-z} h\left(\frac{z}{n}\right) + \beta \sum_{z=0}^{n} \binom{n}{z} u^z (1-u)^{n-z} g\left(\frac{z}{n}\right) \\ &= \alpha B_n(h;u) + \beta B_n(g;u) \end{aligned}$$

bu lineerliği gösterir.

Her $u \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ ve her $z = 0, 1, \ldots, n$ için $u^z(1-u)^{n-z} \geq 0$ olduğundan her $h \geq 0$ için $B_n(h,u) \geq 0$ olup her $n \in \mathbb{N}$ için operatör pozitiftir.

Lemma 3.2 *Yukarıda tanımlanan Bernstein operatörü için;*

$$B_n(1;u) = 1$$

$$B_n(t;u) = u$$

$$B_n\left(t^2;u\right)=u^2+\frac{u\left(1-u\right)}{n}$$

şartları sağlanır.

İspat. $h(t)=1$ için

$$\begin{aligned}B_n\left(1;u\right)&=\sum_{z=0}^{n}\binom{n}{z}u^z(1-u)^{n-z}\\&=(1-u+u)^n\\&=1\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. □

$h(t)=t$ için

$$\begin{aligned}B_n\left(t;u\right)&=\sum_{z=0}^{n}\binom{n}{z}u^z(1-u)^{n-k}\frac{z}{n}\\&=u\sum_{z=1}^{n}\binom{n-1}{z-1}u^{z-1}(1-u)^{n-z}\end{aligned}$$

burada z yerine $z+1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}&=u\sum_{z=0}^{n-1}\binom{n-1}{z}u^z(1-u)^{n-1-z}\\&=u\left(1-u+u\right)^{n-1}\\&=u\end{aligned}$$

olur. $h(t)=t^2$ için

$$\begin{aligned}B_n\left(t^2;u\right)&=\sum_{z=0}^{n}\binom{n}{z}u^z(1-u)^{n-z}\frac{z^2}{n^2}\\&=u\sum_{z=1}^{n}\binom{n-1}{z-1}u^{z-1}(1-u)^{n-z}\frac{z}{n}\\&=u\sum_{z=1}^{n}\binom{n-1}{z-1}u^{z-1}(1-u)^{n-z}\frac{z-1+1}{n}\\&=u\sum_{k=z}^{n}\binom{n-1}{z-1}u^{z-1}(1-u)^{n-z}\frac{z-1}{n}+\frac{u}{n}\sum_{z=1}^{n}\binom{n-1}{z-1}u^{z-1}(1-u)^{n-z}\\&=u^2\frac{n-1}{n}\sum_{z=2}^{n}\binom{n-2}{z-2}u^{z-2}(1-u)^{n-k}+\frac{u}{n}\sum_{z=1}^{n}\binom{n-1}{z-1}u^{z-1}(1-u)^{n-z}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikteki toplama işleminin solundaki toplam sembolündeki k yerine $k+2$, toplama işleminin sağındaki toplam sembolündeki z yerine $z+1$ yazılırsa;

$$\begin{aligned} B_n\left(t^2;u\right) &= u^2\frac{n-1}{n}\sum_{z=0}^{n-2}\binom{n-2}{z}u^z(1-u)^{n-z-2}+\frac{u}{n}\sum_{z=0}^{n-1}\binom{n-1}{z}u^z(1-u)^{n-z-1} \\ &= u^2\frac{n-1}{n}(1-u+u)^{n-2}+\frac{u}{n}(1-u+u)^{n-1} \\ &= u^2\frac{n-1}{n}+\frac{u}{n} \\ &= u^2+\frac{u(1-u)}{n} \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Şimdide Korovkin şartını sağlayıp sağlamadığını gösterelim.

Teorem 3.3 *$h \in C[0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n(h;u)-h(u)\right\|_{C[0,1]}=0$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Lemma 3.2 de ispatladığımız sonuçlar kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n(1;u)-1\right\|_{C[0,1]}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n(t;u)-u\right\|_{C[0,1]}=0$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left\|B_n\left(t^2;u\right)-u^2\right\|_{C[0,1]} &= \lim_{n\to\infty}\left\|u^2+\frac{u(1-u)}{n}-u^2\right\|_{C[0,1]} \\ &= \lim_{n\to\infty}\max_{0\le u\le 1}\left|\frac{u(1-u)}{n}\right| \\ &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Korovkin teoremi yardımıyla her $h \in C[0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n(h;u)-h(u)\right\|_{C[0,1]}=0$$

olduğu görülür. □

Tanım 3.4 *$(u,v) \in D = [0,1]\,x\,[0,1]$ karesel bölgesinde h , D üzerinde sürekli bir fonksiyon ve $n,m \in \mathbb{N}$ olmak üzere iki değişkenli Bernstein operatörü;*

$$B_n(h;u,v)=\sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{m}\binom{n}{z}u^z(1-u)^{n-z}\binom{m}{r}v^r(1-v)^{m-r}h\Big(\frac{z}{n},\frac{r}{m}\Big)$$

şeklinde tanımlanır.

Tek değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi bu operatörde lineer ve pozitiftir.

Teorem 3.5 *h , D üzerinde sürekli bir fonksiyon*

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n\left(h;u,v\right) - h(u,v)\|_{C[0,1]} = 0$$

eşitliği vardır.

İspat. Bu teoremi ispatlamak için öncelikle Korovkin şartlarının sağlandığı görülmelidir. $B_n\left(h;u,v\right)$ operatörü için Korovkin şartlarına bakalım;a,b pozitif sayılar olmak üzere
$h_{a,b}(t,s) = t^a s^b$ olsun. O halde $h_{0,0}$ için

$$\begin{aligned} B_n\left(h_{0,0};u,v\right) &= \sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{m}\binom{n}{z}u^z(1-u)^{n-z}\binom{m}{r}v^r(1-v)^{m-r} \\ &= \sum_{z=0}^{n}\binom{n}{z}u^z(1-u)^{n-z}\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}v^r(1-v)^{m-r} \\ &= \sum_{z=0}^{n}\binom{n}{z}u^z(1-u)^{n-z}\left(1-v+v\right)^m \\ &= \left(1-u+u\right)^n\left(1-v+v\right)^m \\ &= 1 \end{aligned}$$

olur. $h_{1,0}$ için

$$\begin{aligned} B_n\left(h_{1,0};u,v\right) &= \sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{m}\binom{n}{z}u^z(1-u)^{n-z}\binom{m}{r}v^r(1-v)^{m-r}\frac{z}{n} \\ &= \sum_{z=0}^{n}\binom{n}{z}u^z(1-u)^{n-z}\frac{z}{n}\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}v^r(1-v)^{m-r} \\ &= \sum_{z=0}^{n}\binom{n}{z}u^z(1-u)^{n-z}\frac{z}{n}\left(1-v+v\right)^m \\ &= \sum_{z=0}^{n}\binom{n}{z}u^z(1-u)^{n-z}\frac{z}{n} = u \end{aligned}$$

$h_{0,1}$ için

$$\begin{aligned}
B_n\left(h_{0,1};u,v\right) &= \sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{m}\binom{n}{z}u^z(1-u)^{n-z}\binom{m}{r}v^r(1-v)^{m-r}\frac{m}{r} \\
&= \sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}v^r(1-v)^{m-r}\frac{m}{r}\sum_{z=0}^{n}\binom{n}{z}u^z(1-u)^{n-z} \\
&= \sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}v^r(1-v)^{m-r}\frac{m}{r}\left(1-u+u\right)^n \\
&= \sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}v^r(1-v)^{m-r}\frac{m}{r} = v
\end{aligned}$$

$h_{2,0}$ için

$$\begin{aligned}
B_n\left(h_{2,0};u,v\right) &= \sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{m}\binom{n}{z}u^z(1-u)^{n-z}\binom{m}{r}v^r(1-v)^{m-r}\frac{z^2}{n^2} \\
&= \sum_{z=0}^{n}\binom{n}{z}u^z(1-u)^{n-z}\frac{z^2}{n^2}\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}v^r(1-v)^{m-r} \\
&= \sum_{z=0}^{n}\binom{n}{z}u^z(1-u)^{n-z}\frac{z^2}{n^2}\left(1-v+v\right)^m \\
&= \sum_{z=0}^{n}\binom{n}{z}u^z(1-u)^{n-z}\frac{z^2}{n^2} = u^2+\frac{u\left(1-u\right)}{n}
\end{aligned}$$

Benzer şekilde $h_{0,2}$ de bulunur. Sonuç olarak

$$B_n\left(h_{0,0};u,v\right) = 1$$

$$B_n\left(h_{1,0};u,v\right) = u$$

$$B_n\left(h_{0,1};u,v\right) = v$$

$$B_n\left(h_{2,0};u,v\right) = u^2+\frac{u\left(1-u\right)}{n}$$

$$B_n\left(h_{0,2};u,v\right) = v^2+\frac{v\left(1-v\right)}{n}$$

eşitlikleri elde edilir. Bulmuş olduğumuz bu eşitliklerden

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n\left(h_{0,0};u,v\right)-1\right\|_{C[0,1]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n\left(h_{1,0};u,v\right)-u\right\|_{C[0,1]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n\left(h_{0,1};u,v\right)-v\right\|_{C[0,1]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n\left(\left(h_{2,0}+h_{0,2}\right);u,v\right)-\left(u^2+v^2\right)\right\|_{C[0,1]} = 0$$

eşitlikleri görülür ve ispat biter. □

3.2. Programlama Kod Tanıtımı

Öncelikle Mathematicadan bahsetmek gerekirse; Matematik işlemleri yapılırken bazen hesaplar karmaşık hale gelebiliyor ve bilgisayar programlarından yararlanılabiliniyor. İşte bu programlama dillerinden biri olan Mathematica yazılımıdır. Bu programın mimarı Stephen Wolfram'dır. Wolfram Research şirketi bünyesinde oluşturulan programlama dilleri bilim dünyasında oldukça popüler olarak kullanılmaktadır. Bu programda grafik çizimleri, nümerik değer hesaplamaları, yüksek mertebeden ve çok değişkenli türev ve integral hesaplamaları yapılmaktadır. Bu bağlamda Wolfram Dilinde yerleşik 5000'den fazla fonksiyon vardır ve biz bunlardan bir kaçını daha doğrusu operatör hesaplarken işimize yarayanları tanıtacağız. Daha detaylı bilgi almak için Stephen Wolfram'ın kendi yazdığı Wolfram Language isimli kitaptan yararlanabilirsiniz.

Belirsiz integral

```
Integrate[h,u]
```

Belirli integral

```
Integrate[h,{u,u_min,u_max}]
```

İki değişkenli belirli integral

```
Integrate[h,{u,u_min,u_max},{v,v_min,v_max}]
```

Örnek 3.6 `In[1]:=Integrate[\alpha^{2}+cos[\alpha],\alpha]`

Out[1]:= $\frac{\alpha^3}{3} + sin(\alpha)$

Örnek 3.7 `In[1]:=Integrate[(u^2)*(v^3), {u, 0, 1}, {v, 0, 1}]`

Out[1]:=$\frac{1}{12}$

Tek değişkenli toplam

```
sum[h,{i,i_min,i_max}]
```

İki değişkenli toplam

```
sum[h,{i,i_min,i_max},{j,j_min,j_max}]
```

Örnek 3.8 `In[1]:=sum[i^2,{i,1,10}]`

Out[1]:=385

Örnek 3.9 `In[1]:=Sum[1/(j^2 (i + 1)^2), {i, 1, Infinity}, {j, 1, i}]`

Out[1]:=$\frac{\pi^4}{120}$

Binom açılımı

```
Binom[n,m]
```

Örnek 3.10 `In[1]:=Binom[10,3]`

Out[1]:=120

Şimdi Bernstein polinomunun Mathematicadaki kodunu yazalım.

Bernstein Polinom kodu

```
In[1]:=Sum[Binomial[n,z]*(u^z)*((1 - u )^(n -z)*h(u),{z, 0, n})
```

Out[1]:=$B_n(h,u) = \sum_{z=0}^{n} \binom{n}{z} u^z (1-u)^{n-z} h(u)$

Burada fonksiyon yerine istenilen ifade yazılır ve hesaplama yapılır. Şimdide Bernstein operatörünün değerlerini hesaplayalım;

Örnek 3.11 `In[1]:=Sum[Binomial[n,z]*(u^z)*((1 - u )^(n -z)`
`*1,{z, 0, n})`

Out[1]:=1

Örnek 3.12 `In[1]:=Sum[Binomial[n, z]*(u^z)*((1 - u )^(n -z)`
`*z/n,{z, 0, n})`

Out[1]:=u

Örnek 3.13 `In[1]:=Sum[Binomial[n, z]*(u^z)*((1 - u )^(n -z)`
`*(z^2)/(n^2),{z, 0, n})`

Out[1]:=$u^2 + \frac{u(1-u)}{n}$

Tanımları verdikten sonra kendi operatörümüzün yakınsaklık özelliklerini inceleyelim.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde aşağıda tanımladığımız üçgensel bölgedeki iki değişkenli $H_n(h;\xi,\varrho)$ operatörünün ilk olarak lineer ve pozitif olduğu gösterilecek ardından iki değişkenli operatörümüz için Korovkin şartlarını sağladığı ispatlanacaktır. Devamında merkezi momentler ve operatörün düzgün yakınsaklığı incelenektir. Yaklaşım hızını yani tam ve kısmi süreklilik modülleri ispatlanacaktır. Ardından Voronovskaja ve Grüss Voronovskaja tip asimptotik teoremleri verilip ispatlanacaktır. Daha sonra operatörümüzün GBS (Generalized Boolean Sum) tip operatörü tanıplanacak ve aynı şekilde yakınsaklık özellikleri incelenecektir. Ayrıca GBS operatörünün Lipschitz uzayında ki yakınsaklığı incelenecektir. Bu bölümden sonra $(u,v) = (\xi,\varrho)$ olarak kullanılacaktır.

$V := \{(\xi,\varrho) : -1 \leq \xi,\varrho \leq 1 \text{ ve } \xi+\varrho \leq 0\}$ ve $h \in C(V)$, olmak üzere üçgensel bölgedeki iki değişkenli Bernstein-Durrmeyer operatörü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır;

$$H_n(h;\xi.\varrho) = \sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z}\varphi_{n,z,r}(\xi,\varrho)\frac{(n+1)(n+2)}{16}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{-t}\varphi_{n,z,r}(s,t)h(s,t)dsdt \qquad (4.1)$$

burada

$$\varphi_{n,z,r}(\xi,\varrho) = \binom{n}{z}\binom{n-z}{r}\left(\frac{1+\xi}{2}\right)^{z}\left(\frac{1+\varrho}{2}\right)^{r}\left(1-\frac{1+\xi}{2}-\frac{1+\varrho}{2}\right)^{n-z-r}$$

şeklindedir.

Şimdi V üçgensel bölgesi üzerinde tanımlı operatörümüzün lineerlik ve pozitifliğini gösterelim. Lineerlik; $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ve$\forall\, h,g\in C(V)$ için

$$\begin{aligned}
H_n((\alpha h+\beta g);\xi.\varrho) &= \sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z}\varphi_{n,z,r}(\xi,\varrho)M\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{-t}\varphi_{n,z,r}(s,t)(\alpha h+\beta g)(s,t)dsdt \\
&= \alpha\sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z}\varphi_{n,z,r}(\xi,\varrho)M\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{-t}\varphi_{n,z,r}(s,t)h(s,t)dsdt \\
&+ \beta\sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z}\varphi_{n,z,r}(\xi,\varrho)M\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{-t}\varphi_{n,z,r}(s,t)g(s,t)dsdt \\
&= \alpha H_n(h;\xi.\varrho)+\beta H_n(g;\xi.\varrho)
\end{aligned}$$

burada $M = \frac{(n+1)(n+2)}{16}$'dir.

Pozitiflik; $\forall z, r, n \in \mathbb{Z}$ ve $(\xi.\varrho) \in V$ için

$$\varphi_{n,z,r}(\xi,\varrho) = \binom{n}{z}\binom{n-z}{r}\left(\frac{1+\xi}{2}\right)^{z}\left(\frac{1+\varrho}{2}\right)^{r}\left(1-\frac{1+\xi}{2}-\frac{1+\varrho}{2}\right)^{n-z-r} \geq 0$$

dır. Eğer $h(s,t) \geq 0$ ise

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{-t} h(s,t)dsdt \geq 0$$

olacağından $H_n(h;\xi.\varrho)$ pozitif bir operatör olur.

Şimdide $H_n(h;\xi,\varrho)$ lineer, pozitif operatörünün Korovkin şartlarını sağladığını göstermek için operatörün değerlerini hesaplayalım. Bunun için operatörümüzde bazı değişken değiştirmeler yapalım;

$$H_n(h;\xi.\varrho) = \sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z}\varphi_{n,z,r}(\xi,\varrho)\frac{(n+1)(n+2)}{16}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{-t}\varphi_{n,z,r}(s,t)h(s,t)dsdt$$

$$\varphi_{n,z,r}(\xi,\varrho) = \binom{n}{z}\binom{n-z}{r}\left(\frac{1+\xi}{2}\right)^{z}\left(\frac{1+\varrho}{2}\right)^{r}\left(1-\frac{1+\xi}{2}-\frac{1+\varrho}{2}\right)^{n-z-r}$$

operatörde $\varphi_{n,z,r}(\xi,\varrho)'$de $\frac{1+\xi}{2} = \mu$ ve $\frac{1+\varrho}{2} = \eta$ değişken değiştirmeleri yapılırsa $\xi = 2\mu - 1$ ve $\varrho = 2\eta - 1$ olur. $\varphi_{n,z,r}(s,t)$'de $\frac{1+s}{2} = a$ ve $\frac{1+t}{2} = b$ değişken değiştirmeleri yapılırsa $s = 2a - 1$ ve $t = 2b - 1$ olur. Gerekli sınır değişiklikleri ve jakobyen hesaplandıktan sonra operatörümüz;

$$H_n(h;2\mu-1,2\eta-1) = (n+1)(n+2)\sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z}\varphi_{n,z,r}(2\mu-1,2\eta-1)$$
$$\times\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-b}\varphi_{n,z,r}(2a-1,2b-1)h(2a-1,2b-1)dadb$$

olur. Şimdi teoremi verip ispatları yapalım.

Teorem 4.1 $e_{i,j} = s^i t^j, (i,j) \in \mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0, \mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ *için*

$i)\ H_n(e_{0,0};\xi,\varrho) = 1;$

$ii)\ H_n(e_{1,0};\xi,\varrho) = \xi - \dfrac{3\xi+1}{n+3};$

$iii)\ H_n(e_{0,1};\xi,\varrho) = \varrho - \dfrac{3\varrho+1}{n+3};$

$$iv)\ H_n(e_{2,0};\xi,\varrho)=\xi^2-\frac{(8+12n)\,\xi^2+2n\xi-2n-4}{(n+3)(n+4)};$$

$$v)\ H_n(e_{0,2};\xi,\varrho)=\varrho^2-\frac{(8+12n)\,\varrho^2+2n\varrho-2n-4}{(n+3)(n+4)};$$

$$vi)\ H_n(e_{1,1};\xi,\varrho)=\xi\varrho-\frac{(8n+3)\xi\varrho-3n(\xi+\varrho)-2n}{(n+3)(n+4)};$$

$$vii)\ H_n(e_{3,0};\xi,\varrho)=\xi^3-\tfrac{(15n^2+45n+6)}{(n+3)(n+4)(n+5)}\xi^3+\tfrac{(-3n^2+3n)}{(n+3)(n+4)(n+5)}\xi^2$$
$$+\tfrac{(6n^2+12n)}{(n+3)(n+4)(n+5)}\xi+\tfrac{(-12n-12)}{(n+3)(n+4)(n+5)};$$

$$vii)\ H_n(e_{0,3};\xi,\varrho)=\varrho^3-\tfrac{(15n^2+45n+6)}{(n+3)(n+4)(n+5)}\varrho^3+\tfrac{(-3n^2+3n)}{(n+3)(n+4)(n+5)}\varrho^2$$
$$+\tfrac{(6n^2+12n)}{(n+3)(n+4)(n+5)}\varrho+\tfrac{(-12n-12)}{(n+3)(n+4)(n+5)};$$

$$ix)\ H_n(e_{4,0};\xi,\varrho)=\xi^4-\tfrac{(24n^3+108n^2+348n+360)}{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}\xi^4+\tfrac{(-4n^3+12n^2-8n)}{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}\xi^3$$
$$+\tfrac{(12n^3+12n^2-24n)}{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}\xi^2+\tfrac{(-24n^2-48n)}{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}\xi+\tfrac{(12n^2+60n+72)}{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)};$$

$$x)\ H_n(e_{0,4};\xi,\varrho)=\varrho^4-\tfrac{(24n^3+108n^2+348n+360)}{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}\varrho^4+\tfrac{(-4n^3+12n^2-8n)}{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}\varrho^3$$
$$+\tfrac{(12n^3+12n^2-24n)}{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}\varrho^2+\tfrac{(-24n^2-48n)}{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}\varrho+\tfrac{(12n^2+60n+72)}{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)};$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. Teorem (4.1)'den önce tanımladığımız değişken değiştirmeler kullanılarak;

$i)$Hesaplamaları yaparken önce integralin sonucu bulunup operatör içine yazılacaktır.

$$\int_0^1\int_0^{1-b}\varphi_{n,k,l}(2a-1,2b-1)e_{00}dadb=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

olur. Bu eşitliği SP Singh 1987 de çalışmasında vermiştir.O halde

$$\begin{aligned}H_n(e_{00};2\mu-1,2\eta-1)&=(n+1)(n+2)\sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z}\varphi_{n,z,r}(2\mu-1,2\eta-1)\\&\times\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=\sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z}\varphi_{n,z,r}(2\mu-1,2\eta-1)=1\end{aligned}$$

olur.

Şimdi bu ispatı üçüncü bölümde tanıttığımız Wolfram Mathematica kodlarıyla çözümünü verelim. İlk olarak integralin sonucu bulmak için;

```
In[1]:=Integrate[Binomial[n, z]* Binomial[n - z,r]
(xi^z)*(varrho^r)*((1 - xi - varrho)^(n - z - r))*1,
{xi, 0,1},{varrho, 0, 1 - b}]
```

Out[1]:= $\dfrac{Gamma[n+1]}{Gamma[n+3]}$

bu sonuç toplamda yerine yazılırsa;

```
In[1]:=Sum[((n + 1)*(n + 2))*Binomial[n, z]*Binomial[n - z, r]
*(xi^z)*(varrho^r)*((1 - \xi - \varrho)^(n - z -r))
*Gamma[n+1]/Gamma[n+3],{z, 0, n}, {l, 0, n - z}]
```

Out[1]:= $(n+1)(n+2)\dfrac{Gamma[n+1]}{Gamma[n+3]}$

olarak bulunur. Yani;

$$\begin{aligned} H_n(e_{00};\xi,\varrho) &= (n+1)(n+2)\frac{Gamma[n+1]}{Gamma[n+3]} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)n!}{(n+2)!} = 1 \end{aligned}$$

olur.

$ii)$ $e_{1,0} = s$ için bakalım yani $H_n(e_{1,0};\xi,\varrho) = \xi - \dfrac{3\xi+1}{n+3}$ olduğunu gösterelim. Önce integral kısmını hesaplayıp sonucu toplamda yazılacaktır.

$$\int_0^1 \int_0^{1-b} \varphi_{n,z,r}(2a-1,2b-1)(2a-1)dadb = \frac{(2z-n-1)n!}{(n+3)!} = \frac{(2z-n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

bulunur. Bu sonucu toplamda yazarsak;

$$
\begin{aligned}
&H_n(e_{1,0}; 2\mu-1, 2\eta-1) = \\
&= \sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z} \varphi_{n,z,r}(2\mu-1, 2\eta-1)(n+1)(n+2)\frac{(2z-n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z} \varphi_{n,z,r}(2\mu-1, 2\eta-1)\frac{(2z-n-1)}{(n+3)} \\
&= \sum_{z=1}^{n}\sum_{r=0}^{n-z} \varphi_{n,z,r}(2\mu-1, 2\eta-1)\frac{2z}{(n+3)} \\
&- \frac{n}{(n+3)}\sum_{z=1}^{n}\sum_{r=0}^{n-z} \varphi_{n,z,r}(2\mu-1, 2\eta-1) \\
&- \frac{1}{(n+3)}\sum_{z=1}^{n}\sum_{r=0}^{n-z} \varphi_{n,z,r}(2\mu-1, 2\eta-1) \\
&= \frac{2}{(n+3)}\sum_{z=1}^{n}\sum_{r=0}^{n-z} \varphi_{n,z,r}(2\mu-1, 2\eta-1)z - \frac{n}{(n+3)} - \frac{1}{(n+3)} \\
&= \frac{2}{(n+3)}\sum_{z=1}^{n}\sum_{r=0}^{n-z} \binom{n}{r}\binom{n-z}{r}(\mu)^z(\eta)^r(1-\mu-\eta)^{n-z-r}z \\
&+ \frac{(-n-1)}{(n+3)} \\
&= \frac{2}{(n+3)}\sum_{z=1}^{n}\sum_{r=0}^{n-z} \frac{n!}{(n-z)z!}\frac{(n-z)!}{(n-z-r)r!}z(\mu)^z(\eta)^r(1-\mu-\eta)^{n-z-r} \\
&+ \frac{(-n-1)}{(n+3)} \\
&= \frac{2n\mu}{(n+3)}\sum_{z=1}^{n}\sum_{r=0}^{n-z} \frac{(n-1)!}{(n-z)(z-1)!}\frac{(n-z)!}{(n-z-r)r!}(\mu)^{z-1}(\eta)^r \\
&.\,(1-\mu-\eta)^{n-z-r} + \frac{(-n-1)}{(n+3)} \\
&= \frac{2n\mu}{(n+3)}\sum_{z=1}^{n}\sum_{r=0}^{n-z} \binom{n-1}{z-1}\binom{n-z}{r}(\mu)^{z-1}(\eta)^r(1-\mu-\eta)^{n-z-r} \\
&+ \frac{(-n-1)}{(n+3)} \\
&= \frac{2n\mu}{(n+3)} + \frac{(-n-1)}{(n+3)} = \frac{(2n\mu-n-1)}{(n+3)}
\end{aligned}
$$

$\mu = \frac{1+\xi}{2}$ olduğundan

$$\frac{(2n\mu-n-1)}{(n+3)} = \frac{(2n(\frac{1+\xi}{2})-n-1)}{(n+3)} = \frac{n\xi-1}{(n+3)} = \xi - \frac{3\xi+1}{n+3}$$

Sonuç olarak

$$H_n(e_{1,0}; \xi, \varrho) = \xi - \frac{3\xi+1}{n+3}$$

olur. Şimdi bu ispatı üçüncü bölümde tanıttığımız Wolfram Mathematica kodları yardımıyla verelim. İlk olarak integralin sonucu bulmak için;

```
In[1]:=Integrate[Binomial[n, z]* Binomial[n - z,r]
(xi^z)*(varrho^r)*((1 - xi - varrho)^(n - z - r))*(2a-1),
{xi, 0,1},{varrho, 0, 1 - b}]
```

Out[1]:= $\dfrac{(2z-n-1)Gamma[n+1]}{Gamma[n+4]}$

bu sonuç toplamda yerine yazılırsa;

```
In[1]:=Sum[((n + 1)*(n + 2))*Binomial[n, z]*Binomial[n - z, r]
*(xi^z)*(varrho^r)*((1 - xi - varrho)^(n - z -r))
*((2z-n-1))Gamma[n+1]/Gamma[n+3],{z, 0, n}, {r, 0, n - z}]
```

Out[1]:= $\dfrac{(-1-n+2n\mu)}{(n+3)}$

olarak bulunur. Yani $\mu = \frac{1+\xi}{2}$ olduğundan;

$$H_n(e_{1,0};\xi,\varrho) = \xi - \frac{3\xi+1}{n+3}$$

olur.

$iii)$ $e_{0,1} = t$ için bakalım yani $H_n(e_{0,1};\xi,\varrho) = \varrho - \dfrac{3\varrho+1}{n+3}$ olduğunu gösterelim. Önce integral kısmını hesaplayıp sonucu toplamda yazılacaktır.

$$\int_0^1 \int_0^{1-b} \varphi_{n,z,r}(2a-1,2b-1)(2b-1)dadb = \frac{(2r-n-1)n!}{(n+3)!} = \frac{(2r-n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

bulunur. Bu sonucu toplamda yazarsak;

$$
\begin{aligned}
&H_n(e_{0,1}; 2\mu-1, 2\eta-1) = \\
&= \sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z} \varphi_{n,z,r}(2\mu-1, 2\eta-1)(n+1)(n+2)\frac{(2r-n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z} \varphi_{n,z,r}(2\mu-1, 2\eta-1)\frac{(2r-n-1)}{(n+3)} \\
&= \sum_{z=0}^{n}\sum_{r=1}^{n-z} \varphi_{n,z,r}(2\mu-1, 2\eta-1)\frac{2r}{(n+3)} \\
&- \frac{n}{(n+3)}\sum_{z=0}^{n}\sum_{r=1}^{n-z} \varphi_{n,z,r}(2\mu-1, 2\eta-1) \\
&- \frac{1}{(n+3)}\sum_{z=0}^{n}\sum_{r=1}^{n-z} \varphi_{n,z,r}(2\mu-1, 2\eta-1) \\
&= \frac{2}{(n+3)}\sum_{z=0}^{n}\sum_{r=1}^{n-z} \varphi_{n,z,r}(2\mu-1, 2\eta-1)r - \frac{n}{(n+3)} - \frac{1}{(n+3)} \\
&= \frac{2}{(n+3)}\sum_{z=0}^{n}\sum_{r=1}^{n-z} \binom{n}{z}\binom{n-z}{r}(\mu)^z(\eta)^r(1-\mu-\eta)^{n-z-r}\, r \\
&+ \frac{(-n-1)}{(n+3)} \\
&= \frac{2}{(n+3)}\sum_{z=0}^{n}\sum_{r=1}^{n-z} \frac{n!}{(n-z)z!}\frac{(n-z)!}{(n-z-r)r!} r\,(\mu)^z(\eta)^r(1-\mu-\eta)^{n-z-r} \\
&+ \frac{(-n-1)}{(n+3)} \\
&= \frac{2n\eta}{(n+3)}\sum_{z=0}^{n}\sum_{r=1}^{n-z} \frac{(n-1)!}{(n-z)z!}\frac{(n-z)!}{(n-z-r)(r-1)!}(\mu)^z(\eta)^{r-1} \\
&\times (1-\mu-\eta)^{n-z-r} + \frac{(-n-1)}{(n+3)} \\
&= \frac{2n\eta}{(n+3)}\sum_{z=0}^{n}\sum_{r=1}^{n-z-1} \binom{n}{z}\binom{n-z-1}{r-1}(\mu)^z(\eta)^{r-1}(1-\mu-\eta)^{n-z-r} \\
&+ \frac{(-n-1)}{(n+3)} \\
&= \frac{2n\eta}{(n+3)} + \frac{(-n-1)}{(n+3)} = \frac{(2n\eta-n-1)}{(n+3)}
\end{aligned}
$$

$\eta = \frac{1+\varrho}{2}$ olduğundan

$$
\frac{(2n\eta-n-1)}{(n+3)} = \frac{(2n(\frac{1+\varrho}{2})-n-1)}{(n+3)} = \frac{n\varrho-1}{(n+3)} = \varrho - \frac{3\varrho+1}{n+3}
$$

Sonuç olarak

$$
H_n(e_{0,1}; \xi, \varrho) = \varrho - \frac{3\varrho+1}{n+3}
$$

olur. Şimdi bu ispatı üçüncü bölümde tanıttığımız Wolfram Mathematica kodlarıyla hesaplayalım. İlk olarak integralin sonucu bulmak için;

```
In[1]:=Integrate[Binomial[n, z]* Binomial[n - z,r] (xi^z)
*(varrho^r)*((1 - xi - varrho)^(n - z - r))
*(2b-1),{xi, 0,1},{varrho, 0, 1 - b}]
```

Out[1]:= $\dfrac{(2r-n-1)Gamma[n+1]}{Gamma[n+4]}$

bu sonuç toplamda yerine yazılırsa;

```
In[1]:=Sum[((n + 1)*(n + 2))*Binomial[n, z]*Binomial[n - z, r]
*(xi^z)*(varrho^r)*((1 - xi - varrho)^(n - z -r))
*((2r-n-1))Gamma[n+1]/Gamma[n+3],{z, 0, n}, {r, 0, n - z}]
```

Out[1]:= $\dfrac{(-1-n+2n\eta}{(n+3)}$

olarak bulunur. Yani $\eta = \frac{1+\varrho}{2}$ olduğundan;

$$H_n(e_{0,1};\xi,\varrho) = \varrho - \frac{3\varrho+1}{n+3}$$

olur.

$iv)$ $e_{2,0} = s^2$ için bakalım yani $H_n(e_{2,0};\xi,\varrho) = \xi^2 - \dfrac{8n\xi^2+2n\xi-2n+12\xi^2-4}{(n+3)(n+4)}$

olduğunu gösterelim. Önce integral kısmını hesaplayıp sonucu toplamda yazılacaktır.

$$\int_0^1\int_0^{1-b}\varphi_{n,z,r}(2a-1,2b-1)(2a-1)^2dadb=$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-b}\binom{n}{z}\binom{n-z}{r}(a)^z(b)^r(1-a-b)^{n-z-r}(4a^2-4a+1)dadb$$

$$=4\int_0^1\int_0^{1-b}\binom{n}{z}\binom{n-z}{l}(a)^{z+2}(b)^r(1-a-b)^{n-z-r}\,dadb$$

$$-4\int_0^1\int_0^{1-b}\binom{n}{z}\binom{n-z}{r}(a)^{z+1}(b)^r(1-a-b)^{n-z-r}\,dadb$$

$$+\int_0^1\int_0^{1-b}\binom{n}{z}\binom{n-z}{r}(a)^{z}(b)^r(1-a-b)^{n-z-r}\,dadb$$

$$=\frac{4z^2-4z(n+1)+n^2+3n+4}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}$$

bulunur. Bu sonucu toplamda yazarsak;

$$H_n(e_{2,0};2\mu-1,2\eta-1)=$$

$$=\sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z}\varphi_{n,z,r}(2\mu-1,2\eta-1)(n+1)(n+2)\frac{4z^2-4z(n+1)+n^2+3n+4}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}$$

$$=\sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z}\varphi_{n,z,r}(2\mu-1,2\eta-1)\frac{(4z^2-4z(n+1)+n^2+3n+4)}{(n+4)(n+3)}$$

$$=\sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z}\varphi_{n,z,r}(2\mu-1,2\eta-1)\frac{4z^2}{(n+4)(n+3)}$$

$$-\sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z}\varphi_{n,z,r}(2\mu-1,2\eta-1)\frac{4z(n+1)}{(n+4)(n+3)}$$

$$-\frac{n^2+3n+4}{(n+4)(n+3)}\sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z}\varphi_{n,z,r}(2\mu-1,2\eta-1)$$

$$=\frac{4}{(n+4)(n+3)}\sum_{z=0}^{n}z^2\sum_{r=0}^{n-z}\varphi_{n,z,r}(2\mu-1,2\eta-1)$$

$$-\frac{4(n+1)}{(n+4)(n+3)}\sum_{z=0}^{n}z\sum_{r=0}^{n-z}\varphi_{n,z,r}(2\mu-1,2\eta-1)$$

$$-\frac{n^2+3n+4}{(n+4)(n+3)}\sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z}\varphi_{n,z,r}(2\mu-1,2\eta-1)$$

$$= \frac{4}{(n+4)(n+3)} \sum_{z=2}^{n} z(z-1) + z \sum_{r=0}^{n-z} \varphi_{n,z,r}(2\mu-1, 2\eta-1)$$
$$- \frac{4(n+1)}{(n+4)(n+3)} \sum_{z=1}^{n} z \sum_{r=0}^{n-z} \varphi_{n,z,r}(2\mu-1, 2\eta-1) + \frac{n^2+3n+4}{(n+4)(n+3)}$$
$$= \frac{4n^2\mu^2 - 4n^2\mu - 4n\mu^2}{(n+4)(n+3)} + \frac{n^2+3n+4}{(n+4)(n+3)}$$

$\mu = \frac{1+\xi}{2}$ olduğundan

$$\frac{4n^2\mu^2 - 4n^2\mu - 4n\mu^2}{(n+4)(n+3)} + \frac{n^2+3n+4}{(n+4)(n+3)} = \frac{n^2\xi^2 - n\xi^2 - 2n\xi + 2n + 4}{(n+4)(n+3)}$$
$$= \xi^2 - \frac{8n\xi^2 + 2n\xi - 2n + 12\xi^2 - 4}{(n+4)(n+3)}$$

Sonuç olarak

$$H_n(e_{2,0}; \xi, \varrho) = \xi^2 - \frac{8n\xi^2 + 2n\xi - 2n + 12\xi^2 - 4}{(n+4)(n+3)}$$

olur. Şimdi bu ispatı üçüncü bölümde tanıttığımız Mathematica kodları yardımıyla verelim. İlk olarak integralin sonucu bulmak için;

```
In[1]:=Integrate[Binomial[n, z]* Binomial[n - z,r]
(xi^z)*(varrho^r)*((1 - xi - varrho)^(n - z - r))
*(2a-1)^2,{xi, 0,1},{varrho, 0, 1 - b}]
```

Out[1]:=$\frac{(4z^2-4z(n+1)+n^2+3n+4)Gamma[n+1]}{Gamma[n+5]}$

bu sonuç toplamda yerine yazılırsa;

```
In[1]:=Sum[((n + 1)*(n + 2))*Binomial[n, z]*Binomial[n - z, r]
*(xi^z)*(varrho^r)*((1 - xi - varrho)^(n - z -r))
*(4z^{2}-4z(n+1)+n^{2}+3n+4)Gamma[n+1]/Gamma[n+5],
{z, 0, n}, {r, 0, n - z}]
```

Out[1]:= $= \frac{4n^2\mu^2-4n^2\mu-4n\mu^2+n^2+3n+4}{(n+4)(n+3)}$

olarak bulunur. Yani $\mu = \frac{1+\xi}{2}$ olduğundan;

$$H_n(e_{2,0}; \xi, \varrho) = \xi^2 - \frac{8n\xi^2 + 2n\xi - 2n + 12\xi^2 - 4}{(n+4)(n+3)}$$

olur.

$v)$ $e_{0,2} = t^2$ için bakalım yani $H_n(e_{0,2};\xi,\varrho) = \varrho^2 - \dfrac{8n\varrho^2+2n\varrho-2n+12\varrho^2-4}{(n+3)(n+4)}$ olduğunu gösterelim. Önce integral kısmını hesaplayıp sonucu toplamda yazılacaktır.

$$\int_0^1\int_0^{1-b}\varphi_{n,k,l}(2a-1,2b-1)(2b-1)^2dadb =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1\int_0^{1-b}\binom{n}{k}\binom{n-k}{l}(a)^k(b)^l(1-a-b)^{n-k-l}(4b^2-4b+1)dadb \\
&= 4\int_0^1\int_0^{1-b}\binom{n}{k}\binom{n-k}{l}(a)^k(b)^{l+2}(1-a-b)^{n-k-l}dadb \\
&- 4\int_0^1\int_0^{1-b}\binom{n}{k}\binom{n-k}{l}(a)^k(b)^{l+1}(1-a-b)^{n-k-l}dadb \\
&+ \int_0^1\int_0^{1-b}\binom{n}{k}\binom{n-k}{l}(a)^k(b)^{l}(1-a-b)^{n-k-l}dadb \\
&= \frac{4l^2-4l(n+1)+n^2+3n+4}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu sonucu toplamda yazarsak;

$$\begin{aligned}
&H_n(e_{0,2};2\mu-1,2\eta-1) = \\
&= \sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z}\varphi_{n,z,r}(2\mu-1,2\eta-1)(n+1)(n+2)\frac{4r^2-4r(n+1)+n^2+3n+4}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} \\
&= \sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z}\varphi_{n,z,r}(2\mu-1,2\eta-1)\frac{(4r^2-4r(n+1)+n^2+3n+4)}{(n+4)(n+3)} \\
&= \sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z}\varphi_{n,z,r}(2\mu-1,2\eta-1)\frac{4r^2}{(n+4)(n+3)} \\
&- \sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z}\varphi_{n,z,r}(2\mu-1,2\eta-1)\frac{4r(n+1)}{(n+4)(n+3)} \\
&- \frac{n^2+3n+4}{(n+4)(n+3)}\sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z}\varphi_{n,z,r}(2\mu-1,2\eta-1) \\
&= \frac{4}{(n+4)(n+3)}\sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z}l^2\varphi_{n,z,r}(2\mu-1,2\eta-1) \\
&- \frac{4(n+1)}{(n+4)(n+3)}\sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z}l\varphi_{n,z,r}(2\mu-1,2\eta-1) \\
&- \frac{n^2+3n+4}{(n+4)(n+3)}\sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z}\varphi_{n,z,r}(2\mu-1,2\eta-1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4}{(n+4)(n+3)} \sum_{z=0}^{n} \sum_{r=2}^{n-z} (r(r-1)+r)\varphi_{n,z,r}(2\mu-1, 2\eta-1) \\
&- \frac{4(n+1)}{(n+4)(n+3)} \sum_{z=0}^{n} \sum_{r=1}^{n-z} l\varphi_{n,z,r}(2\mu-1, 2\eta-1) + \frac{n^2+3n+4}{(n+4)(n+3)} \\
&= \frac{4n^2\eta^2 - 4n^2\eta - 4n\eta^2}{(n+4)(n+3)} + \frac{n^2+3n+4}{(n+4)(n+3)}
\end{aligned}
$$

$\eta = \frac{1+\varrho}{2}$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
\frac{4n^2\eta^2 - 4n^2\eta - 4n\eta^2}{(n+4)(n+3)} + \frac{n^2+3n+4}{(n+4)(n+3)} &= \frac{n^2\varrho^2 - n\varrho^2 - 2n\varrho + 2n + 4}{(n+4)(n+3)} \\
&= \varrho^2 - \frac{8n\varrho^2 + 2n\varrho - 2n + 12\varrho^2 - 4}{(n+4)(n+3)}
\end{aligned}
$$

Sonuç olarak

$$
H_n(e_{0,2}; \xi, \varrho) = \varrho^2 - \frac{8n\varrho^2 + 2n\varrho - 2n + 12\varrho^2 - 4}{(n+4)(n+3)}
$$

olur. Şimdi bu ispatı üçüncü bölümde tanıttığımız Mathematica kodlarıyla çözümünü verelim. İlk olarak integralin sonucu bulmak için;

```
In[1]:=Integrate[Binomial[n, z]* Binomial[n-z,r]
(xi^z)*(varrho^r)*((1 - xi - varrho)^(n - z - r))*(2b-1)^2,
{xi, 0,1},{varrho, 0, 1 - b}]
```

Out[1]:=$\frac{(4l^2-4l(n+1)+n^2+3n+4)Gamma[n+1]}{Gamma[n+5]}$

bu sonuç toplamda yerine yazılırsa;

```
In[1]:=Sum[((n + 1)*(n + 2))*Binomial[n, z]*Binomial[n - z, r]
*(\xi^z)*(\varrho^r)*((1 - \xi - \varrho)^(n - z -r))
*(4r^{2}-4r(n+1)+n^{2}+3n+4)Gamma[n+1]/Gamma[n+5],
{z, 0, n}, {r, 0, n - z}]
```

Out[1]:= $= \frac{4n^2\eta^2-4n^2\eta-4n\eta^2+n^2+3n+4}{(n+4)(n+3)}$

olarak bulunur. Yani $\eta = \frac{1+\varrho}{2}$ olduğundan;

$$H_n(e_{0,2};\xi,\varrho) = \varrho^2 - \frac{8n\varrho^2 + 2n\varrho - 2n + 12\varrho^2 - 4}{(n+4)(n+3)}$$

olur.

vi,vii ve $viii$ ispatlarını önceki ispatlarla aynı olacağından tekrara düşmemek adına ispatları sadece kodlarla verelim.

$vi)$ $e_{1,1} = st$ için yani $H_n(e_{1,1};\xi,\varrho) = \xi\varrho - \frac{(8n+3)\xi\varrho - 3n(\xi+\varrho) - 2n}{(n+3)(n+4)}$ olduğunu gösterelim;

```
In[1]:=Integrate[Binomial[n, z]* Binomial[n - z,r]
(xi^z)*(varrho^r)*((1 - xi - varrho)^(n - z - r))*(2a-1)(2b-1),
{xi, 0,1},{varrho, 0, 1 - b}]
```

Out[1]:=$-\frac{(2r(2+n)-n(3+n)+2z(2-2r+n))Gamma[n+1]}{Gamma[n+5]}$

bu sonuç toplamda yerine yazılırsa;

```
In[1]:=Sum[((n + 1)*(n + 2))*Binomial[n, z]*Binomial[n - z, r]
*(\xi^z)*(\varrho^r)*((1 - \xi - \varrho)^(n - z -r))
*((2 r (2 + n) - n (3 + n)+ 2 z (2 - 2 r + n))
Gamma[1 +n])/Gamma[5 + n],{z, 0, n}, {r, 0, n - z}]
```

Out[1]:= $= \frac{(n(3+n-4\mu-2n\mu-4\eta-2n\eta-4\mu\eta+4n\mu\eta))}{(n+4)(n+3)}$ olarak bulunur. Yani $\mu = \frac{1+\xi}{2}$ ve $\eta = \frac{1+\varrho}{2}$ olduğundan;

$$H_n(e_{1,1};\xi,\varrho) = \xi\varrho - \frac{(8n+3)\xi\varrho - 3n(\xi+\varrho) - 2n}{(n+3)(n+4)}$$

olur.

$ix)$ $e_{4,0} = s^4$ için yani

$$\begin{aligned} H_n(e_{4,0};\xi,\varrho) &= \xi^4 - \frac{(24n^3+108n^2+348n+360)}{R(n)}\xi^4 \\ &+ \frac{(-4n^3+12n^2-8n)}{R(n)}\xi^3 + \frac{(12n^3+12n^2-24n)}{R(n)}\xi^2 \\ &+ \frac{(-24n^2-48n)}{R(n)}\xi + \frac{(12n^2+60n+72)}{R(n)} \end{aligned}$$

olduğunu gösterelim. Burada notasyon kolaylığı açısından $(n+3)(n+4)(n+5) = Z(n)$ ve $(n+3)(n+4)(n+5)(n+6) = R(n)$ kullanılmıştır ve bundan sonrada bu şekilde kullanılacaktır.

```
In[1]:=Integrate[Binomial[n, z]* Binomial[n - z,r]
(xi^z)*(varrho^r)*((1 -xi- varrho)^(n - z - r))*(2a-1)^4,
{xi, 0,1},{varrho, 0, 1 - b}]
```

Out[1]:=

$$\frac{\text{Gamma}[n+1]\left(\frac{\text{Gamma}[1+z]\text{Gamma}[2-z+n]}{\text{Gamma}[n+3]} - \frac{8\left(18+2z^2-2z(n+1)+n(n+7)\right)\text{Gamma}[2+z]\text{Gamma}[3-z+n]}{\text{Gamma}[n+7]}\right)}{\text{Gamma}[1+z]\text{Gamma}[2-z+n]}$$

bu sonuç toplamda yerine yazılırsa;

```
In[1]:=Sum[((n + 1)*(n + 2))*Binomial[n, z]*Binomial[n - z, r]
*(xi^z)*(varrho^r)*((1 - xi - varrho)^(n - z -r))
*(Gamma[1 + n]((Gamma[1 + z] Gamma[2 - z + n])/Gamma[3 + n]
-(8 (18 + 2 z^2 - 2 z (1 + n) + n (7 + n))
Gamma[2 + z] Gamma[3 - z + n])
/Gamma[7 + n]))/(Gamma[1 + z] Gamma[2 - z + n]),
{z, 0, n}, {r, 0, n - z}]
```

$$\begin{aligned}Out[1] := &\frac{72+86n+47n^2+10n^3+n^4-112n^2\mu-24n^3\mu-8n^4\mu-144n\mu^2}{R(n)}\\&+\frac{168n^2\mu^2-48n^3\mu^2+24n^4\mu^2+128n\mu^3+160n^3\mu^3-256n^2\mu^3-32n^4\mu^3}{R(n)}\\&+\frac{-96n\mu^4+176n^2\mu^4-96n^3\mu^4+16n^4\mu^4}{R(n)}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Yani $\mu = \frac{1+\xi}{2}$ yazılıp gerekli işlemler yapıldıktan sonra;

$$\begin{aligned}H_n(e_{4,0};\xi,\varrho) &= \xi^4 - \frac{(24n^3+108n^2+348n+360)}{R(n)}\xi^4\\&+\frac{(-4n^3+12n^2-8n)}{R(n)}\xi^3+\frac{(12n^3+12n^2-24n)}{R(n)}\xi^2\\&+\frac{(-24n^2-48n)}{R(n)}\xi+\frac{(12n^2+60n+72)}{R(n)}\end{aligned}$$

bulunur. $H_n(e_{0,4};\xi,\varrho)$,$H_n(e_{3,0};\xi,\varrho)$ ve $H_n(e_{0,3};\xi,\varrho)$ de aynı şekilde elde edilir. □

4.1. $H_n(h;\xi,\varrho)$ Operatörünün Yaklaşım Özellikleri

İlk olarak merkezi momentleri hesaplayalım;

Teorem 4.2 $k_{z,r} = (s-\xi)^z(t-\varrho)^r, (z,r) \in \mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0$, *olmak üzere aşağıdaki eşitlikler vardır.*

$i)\ H_n(k_{0,0};\xi,\varrho) = 1;$

$ii)\ H_n(k_{1,0};\xi,\varrho) = -\frac{3\xi+1}{n+3};$

$iii)\ H_n(k_{0,1};\xi,\varrho) = -\frac{3\varrho+1}{n+3};$

$iv)\ H_n(k_{2,0};\xi,\varrho) = -\frac{(2n-12)\,\xi^2-8\xi-2n-4}{(n+3)(n+4)};$

$v)\ H_n(k_{0,2};\xi,\varrho) = -\frac{(2n-12)\,\varrho^2-8\varrho-2n-4}{(n+3)(n+4)};$

$$vi) H_n(k_{4,0};\xi,\varrho) = \frac{12n^2-588n-936}{R(n)}\xi^4$$

$$+\frac{144n+480}{R(n)}\xi^3+\frac{-24n^2+312n+720}{R(n)}\xi^2+\frac{144n+288}{R(n)}\xi;$$

$$vii)\ \ H_n(k_{0,4};\xi,\varrho)=\frac{12n^2-588n-936}{R(n)}\varrho^4$$

$$+\frac{144n+480}{R(n)}\varrho^3+\frac{-24n^2+312n+720}{R(n)}\varrho^2+\frac{144n+288}{R(n)}\varrho;$$

İspat. $H_n(h;\xi,\varrho)$ operatörünün Teorem 4.1 de ispatladığımız değerleri kullanılarak ispat yapılacaktır;

$i)$ Zaten $H_n(1;\xi,\varrho)=1$ olduğunu Teorem 4.1 de ispatlamıştık.

$$ii)\ H_n((s-\xi);\xi,\varrho)=H_n(s;\xi,\varrho)-\xi=\xi-\frac{3\xi+1}{n+3}-\xi=-\frac{3\xi+1}{n+3}$$

olur.

$$iii)\ H_n((t-\varrho);\xi,\varrho)=H_n(t;\xi,\varrho)-\varrho=\varrho-\frac{3\varrho+1}{n+3}-\varrho=-\frac{3\varrho+1}{n+3}$$

olur.

$$iv)\ H_n((s-\xi)^2;\xi,\varrho)=H_n((s^2-2s\xi+\xi^2);\xi,\varrho)$$

$$=H_n(s^2;\xi,\varrho)-2_n(s;\xi,\varrho)+\xi^2H_n(1;\xi,\varrho)$$

$$=\xi^2-\frac{8n\xi^2+2n\xi-2n+12\xi^2-4}{(n+3)(n+4)}-2\xi\left(\xi-\frac{3\xi+1}{n+3}\right)+\xi^2$$

$$=-\frac{8n\xi^2+2n\xi-2n+12\xi^2-4}{(n+3)(n+4)}+\frac{6\xi^2+2\xi}{n+3}$$

$$=-\frac{2n\xi^2-2n-12\xi^2-8\xi-4}{(n+3)(n+4)}$$

elde edilir.

$$v)\ H_n((t-\varrho)^2;\xi,\varrho)=H_n((t^2-2t\varrho+\varrho^2);\xi,\varrho)$$

$$=H_n(t^2;\xi,\varrho)-2_n(t;\xi,\varrho)+\varrho^2H_n(1;\xi,\varrho)$$

$$=\varrho^2-\frac{8n\varrho^2+2n\varrho-2n+12\varrho^2-4}{(n+3)(n+4)}-2\varrho\left(\varrho-\frac{3\varrho+1}{n+3}\right)+\varrho^2$$

$$=-\frac{8n\varrho^2+2n\varrho-2n+12\varrho^2-4}{(n+3)(n+4)}+\frac{6\varrho^2+2\varrho}{n+3}$$

$$=-\frac{2n\varrho^2-2n-12\varrho^2-8\varrho-4}{(n+3)(n+4)}$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
vi)\ \ H_n((s-\xi)^4;\xi,\varrho) &= H_n((s^4-4s^3\xi+6s^2\xi^2-4s\xi^3+\xi^4);\xi,\varrho)\\
&= H_n(s^4;\xi,\varrho)-4_n(s^3;\xi,\varrho)+6\xi^2H_n(s^2;\xi,\varrho)\\
&- 4\xi^3H_n(s;\xi,\varrho)+\xi^4H_n(1;\xi,\varrho)\\
&= \xi^4-\frac{(24n^3+108n^2+348n+360)}{R(n)}\xi^4+\frac{(-4n^3+12n^2-8n)}{R(n)}\xi^3\\
&+\frac{(12n^3+12n^2-24n)}{R(n)}\xi^2+\frac{(-24n^2-48n)}{R(n)}\xi\\
&+\frac{(12n^2+60n+72)}{R(n)}\\
&-4\xi\ \left[\xi^3-\frac{(15n^2+45n+6)}{Z(n)}\xi^3+\frac{(-3n^2+3n)}{Z(n)}\xi^2\right.\\
&\left.+\frac{(6n^2+12n)}{Z(n)}\xi+\frac{(-12n-12)}{Z(n)}\right]\\
&+6\xi^2\left[\xi^2-\frac{8n\xi^2+2n\xi-2n+12\xi^2-4}{(n+3)(n+4)}\right]-4\xi^3\left[\xi-\frac{3\xi+1}{n+3}\right]+\xi^4\\
&= \frac{12n^2-588n-936}{R(n)}\xi^4+\frac{144n+480}{R(n)}\xi^3\\
&+\frac{-24n^2+312n+720}{R(n)}\xi^2+\frac{144n+288}{R(n)}\xi;
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
vii)\ \ H_n((t-\varrho)^4;\xi,\varrho) &= H_n((t^4-4t^3\varrho+6t^2\varrho^2-4t\varrho^3+\varrho^4);\xi,\varrho)\\
&= H_n(t^4;\xi,\varrho)-4_n(t^3;\xi,\varrho)+6\varrho^2H_n(t^2;\xi,\varrho)\\
&- 4\varrho^3H_n(t;\xi,\varrho)+\varrho^4H_n(1;\xi,\varrho)\\
&= \varrho^4-\frac{(24n^3+108n^2+348n+360)}{R(n)}\varrho^4+\frac{(-4n^3+12n^2-8n)}{R(n)}\varrho^3\\
&+\frac{(12n^3+12n^2-24n)}{R(n)}\varrho^2+\frac{(-24n^2-48n)}{R(n)}\varrho\\
&+\frac{(12n^2+60n+72)}{R(n)}\\
&-4\varrho\ \left[\varrho^3-\frac{(15n^2+45n+6)}{Z(n)}\varrho^3+\frac{(-3n^2+3n)}{Z(n)}\varrho^2\right.\\
&\left.+\frac{(6n^2+12n)}{Z(n)}\varrho+\frac{(-12n-12)}{Z(n)}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+6\varrho^2\left[\varrho^2-\frac{8n\varrho^2+2n\varrho-2n+12\varrho^2-4}{(n+3)(n+4)}\right]-4\varrho^3\left[\varrho-\frac{3\varrho+1}{n+3}\right]+\varrho^4\\
&=\frac{12n^2-588n-936}{R(n)}\varrho^4+\frac{144n+480}{R(n)}\varrho^3\\
&+\frac{-24n^2+312n+720}{R(n)}\varrho^2+\frac{144n+288}{R(n)}\varrho;
\end{aligned}
$$

bulunur ve ispat biter. □

Şimdide daha sonraki teoremlerde kullanacağımız bazı teoremleri ve ispatlarını verelim;

Teorem 4.3 *Üçgensel bölgedeki iki değişkenli $H_n(f;\xi,\varrho)$ operatörü için aşağıdaki eşitlikler elde edilir;*

$$i)\lim_{n\longrightarrow\infty} nH_n((s-\xi);\xi,\varrho)=-(3\xi+1);$$

$$ii)\lim_{n\longrightarrow\infty} nH_n((t-\varrho);\xi,\varrho)=-(3\varrho+1);$$

$$iii)\lim_{n\longrightarrow\infty} nH_n((s-\xi)^2;\xi,\varrho)=-(2\xi^2-2);$$

$$iv)\lim_{n\longrightarrow\infty} nH_n((t-\varrho)^2;\xi,\varrho)=-(2\varrho^2-2);$$

$$v)\lim_{n\longrightarrow\infty} nH_n((s-\xi)(t-\varrho);\xi,\varrho)=-2\xi\varrho+4(\xi+\varrho)+2;$$

İspat. Teorem 4.2 de bulmuş olduğumuz merkezi momentler kullanılarak limit alınırsa;

$$i)\lim_{n\longrightarrow\infty} nH_n((s-\xi);\xi,\varrho)=\lim_{n\longrightarrow\infty} n\left(-\frac{3\xi+1}{n+3}\right)=-(3\xi+1);$$

$$ii)\lim_{n\longrightarrow\infty} nH_n((t-\varrho);\xi,\varrho)=\lim_{n\longrightarrow\infty} n\left(-\frac{3\varrho+1}{n+3}\right)=-(3\varrho+1);$$

$$
\begin{aligned}
iii)\lim_{n\longrightarrow\infty} nH_n((s-\xi)^2;\xi,\varrho)&=\lim_{n\longrightarrow\infty} n\left(-\frac{2n\xi^2-2n-12\xi^2-8\xi-4}{(n+3)(n+4)}\right)\\
&=-(2\xi^2-2);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
iv)\lim_{n\longrightarrow\infty} nH_n((t-\varrho)^2;\xi,\varrho)&=\lim_{n\longrightarrow\infty} n\left(-\frac{2n\varrho^2-2n-12\varrho^2-8\varrho-4}{(n+3)(n+4)}\right)\\
&=-(2\varrho^2-2);
\end{aligned}
$$

$$v)\lim_{n\longrightarrow\infty} nH_n((s-\xi)(t-\varrho);\xi,\varrho)=-2\xi\varrho+4(\xi+\varrho)+2;$$

elde edilir ve ispat biter. □

Teorem 4.4 *Theorem 4.1 den aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz.*

$$H_n((s-\xi)^2;\xi,\varrho) \leq \frac{3}{n}$$
$$H_n((t-\varrho)^2;\xi,\varrho) \leq \frac{3}{n}$$

burada $n > 6$'dır.

İspat. Üçgensel bölgedeki bütün ξ, ϱ ler için Teorem 4.1 de bulduğumuz sonuçlar

$$H_n((s-\xi)^2;\xi,\varrho) = -\frac{2n\xi^2 - 2n - 12\xi^2 - 8\xi - 4}{(n+3)(n+4)}$$

ve

$$H_n((t-\varrho)^2;\xi,\varrho) = -\frac{2n\varrho^2 - 2n - 12\varrho^2 - 8\varrho - 4}{(n+3)(n+4)}$$

şeklindeydi. Bu ifadelerin maksimum değerleri $\xi = \frac{2}{n-6}$ ve $\varrho = \frac{2}{n-6}$ olarak bulunur. Bu maksimum değerleri eşitliklerde yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} H_n((s-\xi)^2;\xi,\varrho) &= -\frac{2n\xi^2 - 2n - 12\xi^2 - 8\xi - 4}{(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{2n^3 - 20n^2 + 32n + 96}{n^4 - 5n^3 - 36n^2 + 108n + 432} \leq \frac{3}{n} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} H_n((t-\varrho)^2;\xi,\varrho) &= -\frac{2n\varrho^2 - 2n - 12\varrho^2 - 8\varrho - 4}{(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{2n^3 - 20n^2 + 32n + 96}{n^4 - 5n^3 - 36n^2 + 108n + 432} \leq \frac{3}{n} \end{aligned}$$

sonuçları elde edilir ve ispat biter. □

Şimdide P.P. Korovkin teoremini ve ispatını verelim;

Teorem 4.5 $V := \{(\xi,\varrho) : -1 \leq \xi, \varrho \leq 1 \text{ } ve \text{ } \xi + \varrho \leq 0\}$ *ve* $h \in C(V)$ *olsun.* $H_n(h;\xi,\varrho) : C(V) \to C(R)$ *lineer pozitif operatörü*

i) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} H_n(1;\xi,\varrho) = 1$

ii) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} H_n(s;\xi,\varrho) = \xi$

iii) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} H_n(t;\xi,\varrho) = \varrho$

iv) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} H_n((s^2+t^2;\xi,\varrho) = \xi^2 + \varrho^2$

şartlarını sağlıyorsa H_n operatörü, $h \in C(V)$ fonksiyonuna yakınsaktır.

İspat. Teorem 4.1 de bulduğumuz sonuçların limiti alınırak ispat yapılacaktır;

$$i) \lim_{n\longrightarrow\infty} H_n(1;\xi,\varrho) = \lim_{n\longrightarrow\infty} 1 = 1$$

$$ii) \lim_{n\longrightarrow\infty} H_n(s;\xi,\varrho) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\xi - \frac{3\xi+1}{n+3}\right) = \xi$$

$$iii) \lim_{n\longrightarrow\infty} H_n(t;\xi,\varrho) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\varrho - \frac{3\varrho+1}{n+3}\right) = \varrho$$

$$iv) \lim_{n\longrightarrow\infty} H_n((s^2+t^2;\xi,\varrho) = \lim_{n\longrightarrow\infty} H_n((s^2;\xi,\varrho) + H_n((t^2;\xi,\varrho)$$

$$= \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\xi^2+\varrho^2 - \frac{2n(\xi^2+\varrho^2) - 4n - 12(\xi^2+\varrho^2) - 8(\xi+\varrho) - 8}{(n+3)(n+4)}\right)$$

$$= \xi^2 + \varrho^2$$

bu dört şartla operatörümüz Korovkin şartlarını sağlamış olur. □

4.2. $H_n(h;\xi,\varrho)$ Operatörünün Yaklaşım Hızı

Bu bölümde süreklilik modülleri yardımıyla yaklaşım hızı hesaplanacaktır.Bunun için tam ve kısmi süreklilik modüllerinin tanıtımı yapılacak ve daha sonra bu süreklilik modülleri yardımıyla yaklaşım hızı hesaplanacaktır;
$h \in C(V)$ için tam süreklilik modülü aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\omega(h,\delta) = \max_{\substack{\sqrt{(\xi_1-\xi_2)^2+(\varrho_1-\varrho_2)^2} \leq \delta \\ (\xi,\varrho)\in V}} \left|h(\xi_1,\varrho_1) - h(\xi_2,\varrho_2)\right|$$

Şimdide $h \in C(V)$ olamak üzere ξ ve ϱ için kısmi süreklilik modüllerini tanıtalım;

$$\omega^{(1)}(h,\delta) = \max_{\substack{|\xi_1-\xi_2| \leq \delta \\ (\xi_1,\varrho),(\xi_2,\varrho)\in V}} \left|h(\xi_1,\varrho) - h(\xi_2,\varrho)\right|$$

$$\omega^{(2)}(h,\delta) = \max_{\substack{|\varrho_1-\varrho_2|\leq\delta \\ (\xi,\varrho_1),(\xi,\varrho_2)\in V}} |h(\xi,\varrho_1) - h(\xi,\varrho_2)|$$

Bu süreklilik modülleri daha önce tanımlamış olduğumuz süreklilik modülü özelliklerini sağlamaktadır. Genel olarak F. Altomare ve M. Campiti'nin tanıttığı aşağıdaki iki özelliği sıkça kullanacağız;

$$\omega(h,\delta) \leq (1+\lambda)\,\omega(h,\delta)$$

ve

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(h,\delta) = 0.$$

Şimdide operatörümüzün süreklilik modülleri yardımıyla yaklaşım hızını hesaplayalım;

Teorem 4.6 *$h \in C(V)$ olmak üzere tam süreklilik modülü yardımıyla aşağıdaki eşitsizlik vardır;*

$$\|H_n(h;\xi,\varrho) - h(\xi,\varrho)\|_{C(V)} \leq 3\omega\left(h,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

İspat. Sık kullanılan süreklilik modülü özelliğinden aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir;

$$|h(s,t) - h(\xi,\varrho)| \leq \omega(h,\delta)\left(1+\frac{1}{\delta}\left((s-\xi)^2+(t-\varrho)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Cauchy-Schwartz eşitsizliği, Theorem 4.1 ve Theorem 4.2 kullanılarak, aşağıdaki işlemler elde edilir;

$$\begin{aligned}
|H_n(h;\xi,\varrho) &- h(\xi,\varrho)| = |H_n(h(s,t)-h(\xi,\varrho);\xi,\varrho)| \\
&\leq H_n(|h(s,t)-h(\xi,\varrho)|;\xi,\varrho) \\
&\leq H_n(\omega(h,\delta)\left(1+\frac{1}{\delta}\left((s-\xi)^2+(t-\varrho)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right);\xi,\varrho) \\
&\leq \omega(h,\delta)\left(1+\frac{1}{\delta}\left(H_n(\left(s-\xi\right)^2+(t-\varrho)^2\right);\xi,\varrho)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \omega(h,\delta)\left(1+\frac{1}{\delta}\left(H_n\left((s-\xi)^2;\xi,\varrho\right)+H_n\left((t-\varrho)^2;\xi,\varrho\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \omega(h,\delta)\left(1+\frac{1}{\delta}\left(\frac{(-8n-12)\,\xi^2-2n\xi+2n-4}{(n+3)(n+4)}\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+\frac{(-8n-12)\,\varrho^2-2n\varrho+2n-4}{(n+3)(n+4)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}$$

Daha sonra kareköklü ifadelerin maksimum değeri alınır ve δ=$\frac{1}{\sqrt{n}}$ alınırsa;

$$= \omega\left(h,\delta\right)\left(1+\frac{1}{\delta}\left(\frac{4}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \omega\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{1}{\delta}\left(\frac{4}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = 3\omega\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 4.7 *$h \in C\left(V\right)$ olmak üzere kısmi süreklilik modülü yardımıyla aşağıdaki eşitsizlik vardır;*

$$\left\|H_n(h;\xi,\varrho)-h\left(\xi,\varrho\right)\right\|_{C(V)} \leq \left(1+\sqrt{3}\right)\left(\omega^{(1)}\left(h,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\omega^{(2)}\left(h,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

İspat. Sık kullanılan süreklilik modülü özelliğinden aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir;

$$\left|h\left(s,t\right)-h\left(\xi,\varrho\right)\right| \leq \omega^{(1)}\left(h,\delta\right)\left(1+\frac{1}{\delta}\left((s-\xi)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)+\omega^{(2)}\left(h,\delta\right)\left(1+\frac{1}{\delta}\left((t-\varrho)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Cauchy-Schwartz eşitsizliği, Theorem 4.1 ve Theorem 4.2 kullanılarak , aşağıdaki işlemler elde edilir;

$$\begin{aligned}
\left|H_n(h;\xi,\varrho)-h\left(\xi,\varrho\right)\right| &= \left|H_n(h(s,t)-h\left(\xi,\varrho\right);\xi,\varrho)\right| \\
&\leq H_n(\left|h(s,t)-h\left(\xi,\varrho\right)\right|;\xi,\varrho) \\
&\leq H_n\left(\omega^{(1)}\left(h,\delta\right)\left(1+\frac{1}{\delta}\left((s-\xi)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right. \\
&\quad \left.+\omega^{(2)}\left(h,\delta\right)\left(1+\frac{1}{\delta}\left((t-\varrho)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right);\xi,\varrho\right) \\
&\leq \omega^{(1)}\left(h,\delta\right)\left(1+\frac{1}{\delta}\left(H_n\left((s-\xi)^2;\xi,\varrho\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&\quad +\omega^{(2)}\left(h,\delta\right)\left(1+\frac{1}{\delta}\left(H_n\left((t-\varrho)^2;\xi,\varrho\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&\leq \omega^{(1)}\left(h,\delta\right)\left(1+\frac{1}{\delta}\left(\tfrac{(-8n-12)\xi^2-2n\xi+2n-4}{(n+3)(n+4)}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&\quad +\omega^{(2)}\left(h,\delta\right)\left(1+\frac{1}{\delta}\left(\tfrac{(-8n-12)\varrho^2-2n\varrho+2n-4}{(n+3)(n+4)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}$$

Daha sonra kareköklü ifadelerin maksimum değeri alınır ve δ=$\frac{1}{\sqrt{n}}$ alınırsa;

$$\begin{aligned}
&\leq \omega^{(1)}\left(h,\delta\right)\left(1+\frac{1}{\delta}\left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)+\omega^{(2)}\left(h,\delta\right)\left(1+\frac{1}{\delta}\left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \omega^{(1)}\left(h,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\sqrt{n}\left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)+\omega^{(2)}\left(h,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\sqrt{n}\left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \left(1+\sqrt{3}\right)\left(\omega^{(1)}\left(h,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\omega^{(2)}\left(h,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

4.2.1. Voronovskaja-tip teorem

Teorem 4.8 *$\forall\, h \in C^2(V)$ ve $(\xi,\varrho) \in V$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır;*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n.\left(H_n(h(\xi,\varrho);\xi,\varrho) - h(\xi,\varrho)\right) &= (-3\xi-1)\,h'_{\xi}(\xi,\varrho) + (-3\varrho-1)\,h'_{\varrho}(\xi,\varrho)\\ &+ \left(-4\xi^2-\xi+1\right)h''_{\xi\,\xi}(\xi,\varrho)\\ &+ (-2\xi\varrho+4(\xi+\varrho)+2)\,h''_{\xi\varrho}(\xi,\varrho)\\ &+ \left(-4\varrho^2-\varrho+1\right)h''_{\varrho\varrho}(\xi,\varrho)\end{aligned}$$

İspat. $h \in C^2(V)$ için Taylor formülü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}h(s,t) &= h(\xi,\varrho) + h'_{\xi}(\xi,\varrho)(s-\xi) + h'_{\varrho}(\xi,\varrho)(t-\varrho)\\ &+\frac{1}{2}\left\{h''_{\xi\,\xi}(\xi,\varrho)(s-\xi)^2 + h''_{\xi\varrho}(\xi,\varrho)(s-\xi)(t-\varrho) + h''_{\varrho\varrho}(\xi,\varrho)(t-\varrho)^2\right\}\\ &+\mho(s,t)\sqrt{(s-\xi)^4+(t-\varrho)^4}\end{aligned}$$

burada $\mho(.,.;\xi,\varrho) = \mho(.,.) \in C(V)$ Taylor formülünün kalan sınıfını temsil eder ve aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\mho(s,t;\xi,\varrho) = \begin{cases}\dfrac{h(s,t)-h(\xi,\varrho)-h'_{\xi}(\xi,\varrho)+h'_{\varrho}(\xi,\varrho)+\frac{1}{2}\left\{h''_{\xi\,\xi}(\xi,\varrho)+h''_{\xi\varrho}(\xi,\varrho)+h''_{\varrho\varrho}(\xi,\varrho)\right\}}{\sqrt{(s-\xi)^4+(t-\varrho)^4}} & ,(s,t)\neq(\xi,\varrho)\\ 0 & ,(s,t)=(\xi,\varrho)\end{cases}$$

Şimdi de H_n lineer pozitif operatörü için Taylor açılımı uygulanırsa;

$$\begin{aligned}H_n(h(s,t);\xi,\varrho) &= h(\xi,\varrho) + h'_{\xi}(\xi,\varrho)H_n((s-\xi);\xi,\varrho) + h'_{\varrho}(\xi,\varrho)H_n((t-\varrho);\xi,\varrho)\\ &+\frac{1}{2}\left\{h''_{\xi\,\xi}(\xi,\varrho)H_n\left((s-\xi)^2;\xi,\varrho\right)\right.\\ &+ h''_{\xi\varrho}(\xi,\varrho)H_n((s-\xi)(t-\varrho);\xi,\varrho)\\ &\left.+ h''_{\varrho\varrho}(\xi,\varrho)H_n\left((t-\varrho)^2;\xi,\varrho\right)\right\}\\ &+H_n\left(\mho(s,t)\sqrt{(s-\xi)^4+(t-\varrho)^4};\xi,\varrho\right)\end{aligned}$$

Son eşitliğin son terimine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa;

$$\begin{aligned}&\left|H_n\left(\mho(s,t)\sqrt{(s-\xi)^4+(t-\varrho)^4};\xi,\varrho\right)\right|\\ \leq\;& \left\{H_n\left(\mho^2(s,t);\xi,\varrho\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{H_n\left((s-\xi)^4+(t-\varrho)^4;\xi,\varrho\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\\ =\;& \left\{H_n\left(\mho^2(s,t);\xi,\varrho\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{H_n\left((s-\xi)^4;\xi,\varrho\right)+H_n\left((t-\varrho)^4;\xi,\varrho\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$\mho(.,.;\xi,\varrho) \in C(V)$ ve Teorem 4.5 den $(s,t) \to (\xi,\varrho)$ iken $\mho(s,t;\xi,\varrho) \to 0$ olacağından

$$\lim_{n\to\infty} H_n\left(\mho^2(s,t);\xi,\varrho\right) = \mho^2(s,t) = 0$$

olur. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} n.\left(H_n\left(\mho(s,t)\sqrt{(s-\xi)^4+(t-\varrho)^4};\xi,\varrho\right)\right) = 0$$

yazılılabilir. Theorem 4.3 ve son eşitsizlikten, aşağıdaki sonucu yazabiliriz;

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n.\left(H_n\left(h(s,t);\xi,\varrho\right) - h(\xi,\varrho)\right) &= (-3\xi-1)\,h'_\xi(\xi,\varrho) + (-3\varrho-1)\,h'_\varrho(\xi,\varrho)\\ &+ \left(-4\xi^2-\xi+1\right) h''_{\xi\,\xi}(\xi,\varrho)\\ &+ (-2\xi\varrho+4(\xi+\varrho)+2)\,h''_{\xi\varrho}(\xi,\varrho)\\ &+ \left(-4\varrho^2-\varrho+1\right) h''_{\varrho\varrho}(\xi,\varrho)\end{aligned}$$

böylece ispat tamamlanır. □

4.2.2. Grüss Voronovskaja-tip teorem

Teorem 4.9 $h \in C^2(V), w \in C^2(V)$ *olmak üzere aşağıdaki eşitliği yazabiliriz;*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left\{H_n(h.w;\xi,\varrho) - h(\xi,\varrho)w(\xi,\varrho)\right\} &= (2-2\xi-8\xi^2)h'_\xi(\xi,\varrho)w'_\xi(\xi,\varrho)\\ &+ (3(\xi+\varrho)-8\xi\varrho+2)\left[h'_\xi(\xi,\varrho)w'_\varrho(\xi,\varrho)\right.\\ &+ \left.h'_\varrho(\xi,\varrho)w'_\xi(\xi,\varrho)\right]\\ &+ (2-2\varrho-8\varrho^2)h'_\varrho(\xi,\varrho)w'_\varrho(\xi,\varrho)\end{aligned}$$

İspat. İspat yapılırken kolaylık olsun diye $(s-\xi) = X$, $(t-\varrho) = Y$, $h(\xi,\varrho) = h$ ve $w(\xi,\varrho) = w$ olarak yazılacaktır. Taylor Teoreminden yararlanarak birkaç hesaplamayla aşağıdaki eşitlik yazılabilir;

$n\left\{H_n(h.w;\xi,\varrho) - H_n(h;\xi,\varrho)\,H_n(w;\xi,\varrho)\right\}$

$$= n\Big\{H_n(h.w;\xi,\varrho) - h.w - \left[h.w'_\xi + h'_\xi.w\right] H_n(X;\xi,\varrho)$$

$$-\left[h.w'_\varrho + h'_\varrho.w\right] H_n(Y;\xi,\varrho) - \tfrac{1}{2}\left[h.w''_{\xi\,\xi} + 2h'_\xi.w'_\xi + h''_{\xi\,\xi}.w\right] H_n(X^2;\xi,\varrho)$$

$$-\left[h.w''_{\xi\varrho} + h'_\xi.w'_\varrho + h'_\varrho.w'_\xi + h''_{\xi\varrho}.w\right] H_n(YX;\xi,\varrho)$$

$$-\tfrac{1}{2}\left[h.w''_{\varrho\varrho} + 2h'_\varrho.w'_\varrho + h''_{\varrho\varrho}.w\right] H_n(Y^2;\xi,\varrho)$$

$$-w\left[H_n(h;\xi,\varrho)-h-h'_{\xi}.H_n(X;\xi,\varrho)-h'_{\varrho}.H_n(Y;\xi,\varrho)\right.$$
$$\left.-\tfrac{1}{2}h''_{\xi\xi}.H_n(X^2;\xi,\varrho)-h''_{\xi\varrho}.H_n(YX;\xi,\varrho)-\tfrac{1}{2}h''_{\varrho\varrho}.H_n(Y^2;\xi,\varrho)\right]$$
$$-H_n(h;\xi,\varrho)\left[H_n(w;\xi,\varrho)-w-w'_{\xi}.H_n(X;\xi,\varrho)-w'_{\varrho}.H_n(Y;\xi,\varrho)\right.$$
$$\left.-\tfrac{1}{2}w''_{\xi\xi}.H_n(X^2;\xi,\varrho)-w''_{\xi\varrho}.H_n(XY;\xi,\varrho)-\tfrac{1}{2}w''_{\varrho\varrho}.H_n(X^2;\xi,\varrho)\right]$$
$$-w'_{\xi}.H_n(X;\xi,\varrho)\left[H_n(h;\xi,\varrho)-h\right]-w'_{\varrho}.H_n(Y;\xi,\varrho)\left[H_n(h;\xi,\varrho)-h\right]$$
$$-w''_{\xi\xi}.\frac{H_n\left(X^2;\xi,\varrho\right)}{2}\left[H_n(h;\xi,\varrho)-h\right]-w''_{\varrho\varrho}\frac{H_n\left(Y^2;\xi,\varrho\right)}{2}\left[H_n(h;\xi,\varrho)-h\right]$$
$$-w''_{\xi\varrho}.H_n(YX;\xi,\varrho)\left[H_n(h;\xi,\varrho)-h\right]+h'_{\xi}.w'_{\xi}.H_n(X^2;\xi,\varrho)$$
$$+h'_{\xi}.w'_{\varrho}.H_n(YX;\xi,\varrho)+h'_{\varrho}.w'_{\xi}.H_n(YX;\xi,\varrho)$$
$$\left.+h'_{\varrho}.w'_{\varrho}.H_n(Y^2;\xi,\varrho)\right\}$$

Theorem 4.2, 4.3, 4.4 ve 4.8'den yararlanarak aşağıdaki sonuç yazılabilir;

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left\{H_n(hw;\xi,\varrho)-h.w\right\} &= (2-2\xi-8\xi^2)h'_{\xi}.w'_{\xi}\\ &\quad+(3(\xi+\varrho)-8\xi\varrho+2)\left[h'_{\xi}.w'_{\varrho}+h'_{\varrho}.w'_{\xi}\right]\\ &\quad+(2-2\varrho-8\varrho^2)h'_{\varrho}.w'_{\varrho}\end{aligned}$$

böylece ispat tamamlanır. □

Şimdide $H_n(h;\xi,\varrho)$ operatörümüzün GBS formunu tanıtıp süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı hesaplanacaktır. Ayrıca tanımlanan GBS operatörünün Lipschitz sınıfından yaklaşımıda incelenecektir.

4.3. $H_n(h;\xi,\varrho)$ Operatörünün GBS Formu Olan $E_n(h;\xi,\varrho)$ Operatörünün İnşası

B-süreklilik ve B-diferansiyellenebilir fonksiyonlar K.Bögel tarafından 1934 yılında tanımlanmıştır. K. Bögel bu fonksiyonları Bögel uzayı olarak tanımlamış olduğu uzay üzerindeki süreklilik ve diferansiyellenebilirlik tanımlamıştır. Bu çalışmada tanımlanan ve tezimizde de kullanacağımız B-süreklilik ve B-sınırlılık tanımlarını verelim;

ξ_0, ϱ_0'ın ξ, ϱ ile h fonksiyonu altındaki karışık farkı (mixed difference) $\nabla_{(\xi,\varrho)} h\,[\xi_0, \varrho_0; \xi, \varrho]$ olmak üzere;

$$\nabla_{(\xi,\varrho)} h\,[\xi_0, \varrho_0; \xi, \varrho] = h(\xi, \varrho) - h(\xi, \varrho_0) - h(\xi_0, \varrho) + h(\xi_0, \varrho_0)$$

şeklinde tanımlanmışlardır. Burada Φ and Λ kompakt,reel uzaylar olmak üzere $h : \Phi \times \Lambda \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan fonksiyondur.
$h : \Phi \times \Lambda \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $(\xi_0, \varrho_0) \in \Phi \times \Lambda$ için B-sürekli bir fonksiyon ise

$$\lim_{(\xi,\varrho)\to(\xi_0,\varrho_0)} \nabla_{(\xi,\varrho)} h\,[\xi_0, \varrho_0; \xi, \varrho] = 0$$

limiti vardır. $C_b(V)$, V üzerindeki tüm b-sürekli fonksiyonların uzayıdır. Burada $C(V) \subset C_b(V)$ şeklindedir.

Eğer $(\xi_0, \varrho_0)\,, (\xi, \varrho) \in \Phi \times \Lambda$ için

$$\left|\nabla_{(\xi,\varrho)} h\,[\xi_0, \varrho_0; \xi, \varrho]\right| \leq K$$

olacak şekilde $K > 0$ sayısı varsa $\nabla_{(\xi,\varrho)} h\,[\xi_0, \varrho_0; \xi, \varrho]$ fonksiyonu $\Phi \times \Lambda$ üzerinde B-sınırlı fonksiyondur denir. Aynı zamanda $\Phi \times \Lambda$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$'nin kompakt bir alt kümesi olduğunda B-sürekli her fonksiyon B-sınırlıdır.

Bögelin bu çalışmasından sonra birçok araştırmacı bu konuya yoğunlaşmış ve yaklaşım teorisinde yeni bir sayfa açılmıştır. Son zamanlarda popüler olan bu yaklaşım GBS (Generalized Boolean Sum) yani Genelleştirilmiş Boolean Tolamı olarak genelleştirilen iki değişkenli fonksiyonu ortaya çıkmıştır. GBS (Generalized Boolean Sum) ilk olarak Badea tarafından 1988 yılında kullanıldı. Bedea bu çalışmasında yaklaşım teorisinin amiral gemisi olan Korovkin teoremini B-süreklilik ile ispat etmiştir.Daha sonra Dobrescu ve Matei, sınırlı aralıktaki herhangi bir B-sürekli fonksiyona yine bu aralıktaki iki değişkenli GBS tip Bernstein polinomlarıyla yaklaşılabileceğini göstermişlerdir. Günümüze kadar B-süreklilik ve B-diferansiyellenebilirliği kullanarak bir çok çalışma yapılmıştır;bunların bazılarına örnek verecek olursak;Barbosu ve Pop, 2008; Barsan ve Braica, 2011; Deshwal ve ark., 2017; Goyal ve ark., 2017; Ruchive ark., 2018 ve daha birçok çalışma yapılmıştır.

Bu çalışmalar ışığında tanımlamış olduğumuz üçgensel bölgedeki iki değişkenli $H_n(h; \xi, \varrho)$ Bernstein-Durrmeyer operatörümüzün GBS formu olan $E_n(h; \xi, \varrho)$

operatörünü aşağıdaki gibi tanımladık.

$$\begin{aligned} E_n(h;\xi,\varrho) &= \sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z}\varphi_{n,z,r}(\xi,\varrho)\frac{(n+1)(n+2)}{16} \\ &\times \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{-t}\varphi_{n,z,r}(s,t)\left(h(\xi,t)+h(s,\varrho)-h(s,t)\right)dsdt \end{aligned} \tag{4.2}$$

burada her $(\xi,\varrho) \in V$ noktaları için $h \in C_b(V)$'dir ve $E_n(h;\xi,\varrho)$ lineer pozitif operatördür.

4.3.1. $E_n(h;\xi,\varrho)$ GBS operatörünün yaklaşım özellikleri

Bu bölümde $E_n(h;\xi,\varrho)$ GBS operatörünün yaklaşım özelliklerini inceleyeceğiz. Bunun için öncelikle karışık süreklilik modülü tanımını verip bu tanım yardımıyla $E_n(h;\xi,\varrho)$ GBS operatörünün yaklaşım oranını belirleyeceğiz.

$h \in C_b(V)$, $(\xi,\varrho),(s,t) \in V$ ve her $\delta_1,\delta_2 \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, karışık süreklilik modülü (mixed moduli of continuity)

$$\omega_{mixed}\left(h;\delta_1,\delta_2\right) := \sup\left\{\left|\nabla h\left[(s,t);(\xi,\varrho)\right]\right| : |\xi-s|<\delta_1, |\varrho-t|<\delta_2\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Karışık süreklilik modülü aşağıdaki özelliği sağlar;

$$\omega_{mixed}\left(h;\lambda_1\delta_1,\lambda_1\delta_2\right) \le \left(1+\lambda_1\right)\left(1+\lambda_2\right)\omega_{mixed}\left(h;\delta_1,\delta_2\right)$$

buradan

$$\begin{aligned} |\nabla h[(s,t);(\xi,\varrho)]| &\le \omega_{mixed}\left(h;|s-\xi|,|t-\varrho|\right) \\ &\le \left(1+\frac{|s-\xi|}{\delta_1}\right)\left(1+\frac{|t-\xi|}{\delta_2}\right)\omega_{mixed}\left(h;\delta_1,\delta_2\right) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Şimdide yukarıda yazdığımız tanım ve özelliği kullanarak $E_n(h;\xi,\varrho)$ GBS operatörünün yaklaşım oranını belirleyeceğimiz teoremi verelim.

Teorem 4.10 *$\forall\, h \in C_b\left(V\right)$ ve tüm $(\xi,\varrho) \in V$ noktaları için $E_n(h;\xi,\varrho)$ GBS operatörü*

$$|E_n(h;\xi,\varrho)-h(\xi,\varrho)| \le 8\,\omega_{mixed}\left(h;\delta_1(n),\delta_2(n)\right)$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. Karışık fark ve süreklilik modülünün tanımı ve özelliklerini kullanarak

$$\nabla_{(\xi,\varrho)}h\left[(t,s);\xi,\varrho\right] = h(\xi,t) + h(s,\varrho) - h(s,t)$$

ve

$$E_n(h;\xi,\varrho) - h(\xi,\varrho) = -H_n(\nabla_{(\xi,\varrho)}h\left[(s,t);(\xi,\varrho)\right];\xi,\varrho)$$

yazılabilir. Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} |E_n(h;\xi,\varrho) - h(\xi,\varrho)| &\leq \left|H_n\left(\nabla_{(\xi,\varrho)}h\left[(s,t);\xi,\varrho\right];\xi,\varrho\right)\right| \\ \leq &\left(H_n(e_{00}) + \delta_1^{-1}\sqrt{H_n\left((s-\xi)^2;\xi,\varrho\right)} + \delta_2^{-1}\sqrt{H_n\left((t-\varrho)^2;\xi,\varrho\right)}\right. \\ &\left.+\delta_1^{-1}\delta_2^{-1}\sqrt{H_n\left((s-\xi)^2;\xi,\varrho\right)H_n\left((t-\varrho)^2;\xi,\varrho\right)}\right)\omega_{mixed}\left(h;\delta_1(n),\delta_2(n)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 4.1 ve Teorem 4.4 kullanılarak

$$\begin{aligned} |E_n(h;\xi,\varrho) &- h(\xi,\varrho)| \leq H_n\left|(\nabla_{(\xi,\varrho)}h\left[(s,t);\xi,\varrho\right];\xi,\varrho)\right| \\ &\leq \left(1+\delta_1^{-1}\sqrt{\frac{3}{n}}+\delta_2^{-1}\sqrt{\frac{3}{n}}+\delta_1^{-1}\delta_2^{-1}\sqrt{\frac{3}{n}\frac{3}{n}}\right)\omega_{mixed}\left(h;\delta_1(n),\delta_2(n)\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $\delta_1 = n^{-\frac{1}{2}}$ ve $\delta_2 = n^{-\frac{1}{2}}$, seçilerek

$$|E_n(h;\xi,\varrho) - h(\xi,\varrho)| \leq \left(4+2\sqrt{3}\right)\omega_{mixed}\left(h;\delta_1(n),\delta_2(n)\right)$$

sonucuna ulaşılır ve ispat biter. □

4.3.2. $E_n(h;\xi,\varrho)$ GBS operatörünün lipschitz sınıfından fonksiyonlara yaklaşım özellikleri

$h \in C_b(V)$ B-Sürekli fonksiyonları için $\mu,\eta \in (0,1]$ olmak üzere $Lip_\beta(\mu,\eta)$ Lipschitz sınıfı tanımı

$$Lip_\Gamma(\mu,\eta) = \left\{h \in C_b(V) : \left|\nabla_{(\xi,\varrho)}h\left[(s,t);(\xi,\varrho)\right]\right| \leq \beta\ |s-\xi|^\mu\, |t-\varrho|^\eta\right\} \qquad (4.3)$$

şeklinde verilebilir. Burada $(s,t),(\xi,\varrho) \in V$. dir.

Teorem 4.11 *$h \in Lip_\beta(\mu,\eta)$ ve $(s,t),(\xi,\varrho) \in V$ için*

$$|E_n(h;\xi,\varrho) - h(\xi,\varrho)| \leq \beta\ \Psi_n(\xi)^{\frac{\mu}{2}}\Psi_n(\varrho)^{\frac{\eta}{2}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\Psi_n(\xi) = H_n\left((s-\xi)^2;\xi,\varrho\right)$ ve $\Psi_n(\varrho) = H_n\left((t-\varrho)^2;\xi,\varrho\right)$ dir.

İspat. (4.2) ve (4.3)'den aşağıdaki eşirsizlik yazılabilir

$$\begin{aligned}
|E_n(h;\xi,\varrho)-h(\xi,\varrho)| &\leq H_n\left(\left|\nabla_{(\xi,\varrho)}h\left[(s,t);(\xi,\varrho)\right]\right|;\xi,\varrho\right)\\
&\leq \beta H_n\left(|s-\xi|^{\mu}|t-\varrho|^{\eta};\xi,\varrho\right)\\
&= \beta H_n\left(|s-\xi|^{\mu};\xi,\varrho\right)H_n\left(|t-\varrho|^{\eta};\xi,\varrho\right)
\end{aligned}$$

son eşitsizlikte $(p_1,q_1)=\left(\frac{2}{\mu},\frac{2}{2-\mu}\right)$ ve $(p_2,q_2)=\left(\frac{2}{\eta},\frac{2}{2-\eta}\right)$ için Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|E_n(h;\xi,\varrho)-h(\xi,\varrho)| &\leq \beta\Big(H_n\left((s-\xi)^2;\xi,\varrho\right)^{\frac{\mu}{2}}H_n\left(e_{00};\xi,\varrho\right)^{\frac{2-\mu}{2}}\\
&\quad\times H_n\left((t-\varrho)^2;\xi,\varrho\right)^{\frac{\eta}{2}}H_n\left(e_{00};\xi,\varrho\right)^{\frac{2-\eta}{2}}\Big)\\
&\leq \beta\Psi_n(\xi)^{\frac{\mu}{2}}\Psi_n(\varrho)^{\frac{\eta}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat biter. □

4.4. $H_n(h;\xi,\varrho)$ Operatörü ve $E_n(h;\xi,\varrho)$ GBS Operatörü için Nümerik Örnekler

Bu bölümde $H_n(h;\xi,v)$ operetörü ve bu operatörün GBS formu olan $E_n(h;\xi,\varrho)$ operatörü için nümerik değer tabloları ve bazı fonksiyonlara yakınsaklıklarını gösteren grafikler verilecektir.

İlk olarak sabit (ξ,ϱ) noktasında farklı n değerleri için $H_n(h;\xi,\varrho)$ operatörü ve $E_n(h;\xi,\varrho)$ GBS operatörlerünün hata paylarını içeren nümerik değer tablosu verilecektir.

Çizelge 4.1. $H_n(h;\xi,\varrho)$ ve $E_n(h;\xi,\varrho)$ GBS operatörleri için farklı n değerlerinde hata payları .

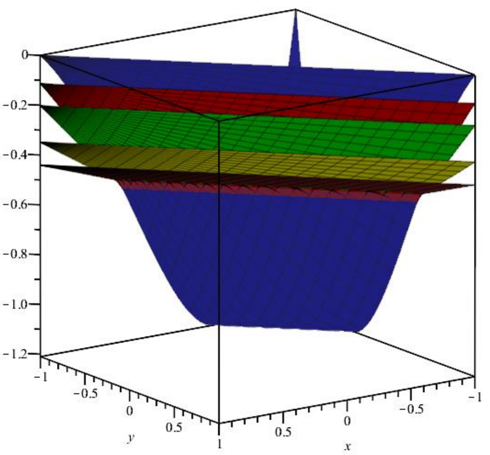
n	$\lvert H_n(h;\xi,\varrho)-h(\xi,\varrho)\rvert$	$\lvert E_n(h;\xi,\varrho)-h(\xi,\varrho)\rvert$
10	0.008858399150	0.008704518631
25	0.003920956488	0.003831667796
50	0.002201491056	0.002140252626
100	0.001415762625	0.001310766823

$h:V\to R;\ h(\xi,\varrho)=|\xi^2\varrho^2|$ fonksiyonu için Çizelge 4.1'de $(\xi,\varrho)=(0.05,-0.05)$ sabit noktası referans alınarak n'in farklı değerlerinde $H_n(h;\xi,\varrho)$ operatörü ve $E_n(h;\xi,\varrho)$ GBS operatörlerinin yaklaşımındaki hata payları hesaplanmıştır.

Şimdide $H_n(h;\xi,\varrho)$ operatörünün $h(\xi,\varrho) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(\xi+\varrho)\right)e^{-1-\xi-\varrho}$ ve $h(\xi,\varrho) = \sin(\pi(\xi+\varrho))(\xi^2+\varrho^2)$ fonksiyonlarına yaklaşımı Maple programında çizilen grafiklerle incelecektir. Daha sonra $H_n(h;\xi,\varrho)$ operatörünün ve $E_n(h;\xi,\varrho)$ GBS operatörünün $h(\xi,\varrho) = |\xi^2\varrho^2|$ fonksiyonuna yaklaşımları ayrı grafiklerde verilecek ve son olarak iki operatörün aynı fonksiyona tek grafikte yaklaşımı incelenecektir.

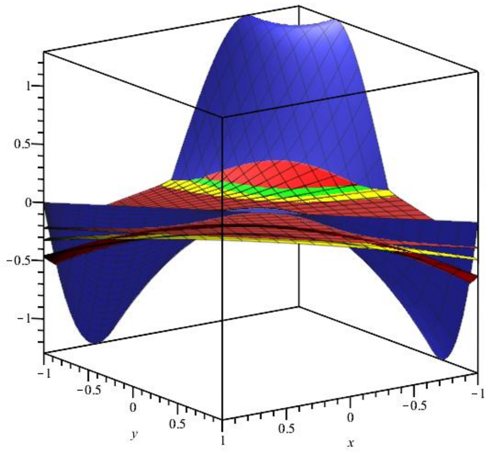
Son olarakda $H_n(h;\xi,\varrho)$ operatörünün ve $E_n(h;\xi,\varrho)$ GBS operatörünün farklı (ξ,ϱ) noktalarında $n = 200$ değeri için hata paylarını içeren nümerik değer tablosu verilecektir.

Örnek 4.12 *$H_n(h;\xi,\varrho)$ operatörünün n=1 (kahverengi), n=5 (sarı), n=10 (yeşil), n=20 (kırmızı) değerlerinin $h(\xi,\varrho) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(\xi+\varrho)\right)e^{-1-\xi-\varrho}$ (mavi) fonksiyonuna yaklaşımı Şekil 4.1'de gösterilmiştir.*



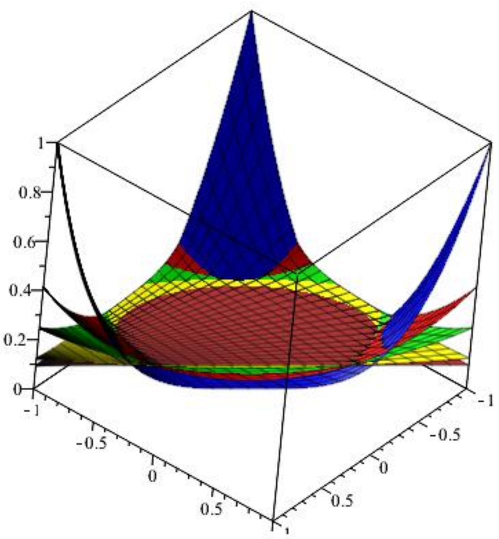
Şekil 4.1. $H_n(h;\xi,\varrho)$ operatörünün $h(\xi,\varrho) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(\xi+\varrho)\right)e^{-1-\xi-\varrho}$ fonksiyonuna faklı n değerleri için yaklaşımı.

Örnek 4.13 *$H_n(h;\xi,\varrho)$ operatörünün n=1 (kahverengi), n=5 (sarı), n=10 (yeşil), n=20 (kırmızı) değerlerinin $h(\xi,\varrho) = \sin(\pi(\xi+\varrho))(\xi^2+\varrho^2)$ (mavi) fonksiyonuna yaklaşımı Şekil 4.2'de gösterilmiştir.*



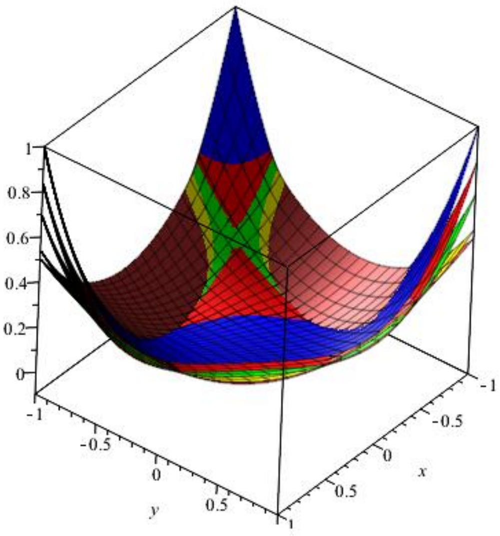
Şekil 4.2. $H_n\left(h;\xi,\varrho\right)$ operatörünün $h(\xi,\varrho)=\sin\left(\pi\left(\xi+\varrho\right)\right)\left(\xi^2+\varrho^2\right)$ fonksiyonuna faklı n değerleri için yaklaşımı.

Örnek 4.14 *$H_n(h;\xi,\varrho)$ operatörünün n=1 (kahverengi), n=5 (sarı), n=10 (yeşil), n=20 (kırmızı) değerlerinin $h(\xi,\varrho)=|\xi^2\varrho^2|$ (mavi) fonksiyonuna yaklaşımı Şekil 4.3'de gösterilmiştir.*



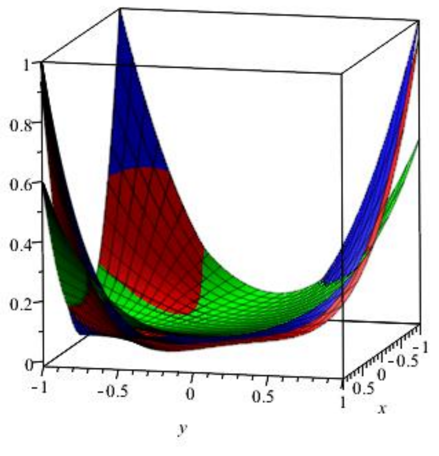
Şekil 4.3. $H_n\left(h;\xi,\varrho\right)$ operatörünün $h(\xi,\varrho)=\left|\xi^2\varrho^2\right|$ fonksiyonuna faklı n değerleri için yaklaşımı.

Örnek 4.15 *$E_n(h;\xi,\varrho)$ GBS operatörünün n=1 (kahverengi), n=5 (sarı), n=10 (yeşil), n=20 (kırmızı) değerleri için $h(\xi,\varrho)=|\xi^2\varrho^2|$ (mavi) fonksiyonuna yaklaşımı Şekil 4.4'de gösterilmiştir.*



Şekil 4.4. $E_n(h;\xi,\varrho)$ operatörünün $h(\xi,\varrho)=\left|\xi^2\varrho^2\right|$ fonksiyonuna faklı n değerleri için yaklaşımı.

Örnek 4.16 *$n=50$ için , $H_n(h;\xi,\varrho)$ operatörü (yeşil) ve $E_n(h;\xi,\varrho)$ GBS operatörü (kırmızı) $h(\xi,\varrho)=|\xi^2\varrho^2|$ (mavi) fonksiyonuna yaklaşımı Şekil 4.5'de verilmiştir.*



Şekil 4.5. $H_n(h;\xi,\varrho)$ operatörü ve $E_n(h;\xi,\varrho)$ GBS operatörünün $h(\xi,\varrho)=\left|\xi^2\varrho^2\right|$ fonksiyonuna yaklaşımı.

Şekil 4.5.'de görüldüğü gibi $E_n(h;\xi,\varrho)$ GBS operatörü $H_n(h;\xi,\varrho)$ operatöründen $h(\xi,\varrho)=|\xi^2\varrho^2|$ fonksiyonuna daha iyi yaklaştığı görülmüştür.

Çizelge 4.2. Farklı (ξ, ϱ) noktaları için $H_n(h;\xi,\varrho)$ ve $E_n(h;\xi,\varrho)$ GBS operatörlerinin nümerik hata payları .

(ξ, ϱ)	$\lvert H_n(h;\xi,\varrho) - h(\xi,\varrho)\rvert$	$\lvert E_n(h;\xi,\varrho) - h(\xi,\varrho)\rvert$
$(1,-1)$	0.8495540691	0.7663879599
$(0.9,-1)$	0.6861251394	0.6206321071
$(0.9,-0.9)$	0.5459929013	0.5080926891
$(0.8,-0.9)$	0.4291121293	0.4016625079
$(0.8,-1)$	0.5397625418	0.4901649946

Çizelge 4.2.'de, $H_n(h;\xi,\varrho)$ operatörü ve $E_n(h;\xi,\varrho)$ GBS operatörünün farklı (ξ,ϱ) noktalarında yukarda yazılı olan $h(\xi,\varrho)$ fonksiyonuyla $n = 200$ değerindeki nümerik hata payları verilmiştir. Çizelge 4.2.'de görüldüğü gibi $E_n(h;\xi,\varrho)$ GBS operatörü $H_n(h;\xi,\varrho)$ operatöründen daha iyi yaklaşmıştır çünkü hata payları daha küçüktür.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

$V := \{(\xi,\varrho) : -1 \leq \xi, \varrho \leq 1 \text{ ve } \xi + \varrho \leq 0\}$ ve $h \in C(V)$, olmak üzere üçgensel bölgedeki iki değişkenli Bernstein-Durrmeyer operatörü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır;

$$H_n(h;\xi.\varrho) = \sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z} \varphi_{n,z,r}(\xi,\varrho)\frac{(n+1)(n+2)}{16}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{-t}\varphi_{n,z,r}(s,t)h(s,t)dsdt \qquad (5.1)$$

burada

$$\varphi_{n,z,r}(\xi,\varrho) = \binom{n}{z}\binom{n-z}{r}\left(\frac{1+\xi}{2}\right)^z\left(\frac{1+\varrho}{2}\right)^r\left(1-\frac{1+\xi}{2}-\frac{1+\varrho}{2}\right)^{n-z-r}$$

şeklindedir. Tezimizde $H_n(h;\xi,\varrho)$ Bernstein-Durrmeyer operatörünün yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

İlk olarak tanımlanan Bernstein-Durrmeyer operatörünün lineer ve pozitif olduğu gösterilmiştir. Daha sonra H_n operatörümüzün 1, s, t, s^2, t^2, s^3, t^3, s^4, t^4 değerleri bulundu ve bunlar yardımıyla merkezi momentleri hesaplandı. Ayrıca Teorem 4.1'de tanımlamış olduğumuz Korovkin teoreminin

$$H_n(1;\xi,\varrho) \rightrightarrows 1$$

$$H_n(s;\xi,\varrho) \rightrightarrows \xi$$

$$H_n(t;\xi,\varrho) \rightrightarrows \varrho$$

$$H_n(s^2+t^2;\xi,\varrho) \rightrightarrows \xi^2+\varrho^2$$

şartlarıyla yakınsaklıkları ispatlandı ve

$$H_n(h;\xi,\varrho) \rightrightarrows h$$

sonucuna ulaşıldı. Sonrasında $h \in C(V)$ için tam süreklilik modülü ;

$$\omega(h,\delta) = \max_{\substack{\sqrt{(\xi_1-\xi_2)^2+(\varrho_1-\varrho_2)^2} \leq \delta \\ (\xi,\varrho)\in V}} |h(\xi_1,\varrho_1) - h(\xi_2,\varrho_2)|$$

ve $h \in C(V)$ olamak üzere ξ ve ϱ için kısmi süreklilik modülü;

$$\omega^{(1)}(h,\delta) = \max_{\substack{|\xi_1-\xi_2|\le\delta \\ (\xi_1,\varrho),(\xi_2,\varrho)\in V}} |h(\xi_1,\varrho)-h(\xi_2,\varrho)|$$

$$\omega^{(2)}(h,\delta) = \max_{\substack{|\varrho_1-\varrho_2|\le\delta \\ (\xi,\varrho_1),(\xi,\varrho_2)\in V}} |h(\xi,\varrho_1)-h(\xi,\varrho_2)|$$

şeklinde tanımlandı. Bu süreklilik modülleri yardımıyla yaklaşım hızı hesaplandı.

$H_n(h;\xi,\varrho)$ Bernstein-Durrmeyer operatörünün merkezi momentleri kullanılarak Voronovskaya teoreminin sonucu olan;

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n.\left(H_n(h;\xi,\varrho)-h(\xi,\varrho)\right) &= (-3\xi-1)\,h'_{\xi}(\xi,\varrho)+(-3\varrho-1)\,h'_{\varrho}(\xi,\varrho)\\ &+\left(-4\xi^2-\xi+1\right)h''_{\xi\,\xi}(\xi,\varrho)\\ &+(-2\xi\varrho+4(\xi+\varrho)+2)\,h''_{\xi\varrho}(\xi,\varrho)\\ &+\left(-4\varrho^2-\varrho+1\right)h''_{\varrho\varrho}(\xi,\varrho)\end{aligned}$$

elde edildi. Aynı şekilde iki farklı h ve w fonksiyonu için Grüss Voronovskaya teoreminin sonucu olan;

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left\{H_n(h.w;\xi,\varrho)-h(\xi,\varrho)w(\xi,\varrho)\right\} &= (2-2\xi-8\xi^2)h'_{\xi}(\xi,\varrho)w'_{\xi}(\xi,\varrho)\\ &+(3(\xi+\varrho)-8\xi\varrho+2)\Big[h'_{\xi}(\xi,\varrho)w'_{\varrho}(\xi,\varrho)\\ &+h'_{\varrho}(\xi,\varrho)w'_{\xi}(\xi,\varrho)\Big]\\ &+(2-2\varrho-8\varrho^2)h'_{\varrho}(\xi,\varrho)w'_{\varrho}(\xi,\varrho)\end{aligned}$$

elde edildi.

Üçgensel bölgedeki iki değişkenli $H_n(h;\xi,\varrho)$ Bernstein-Durrmeyer operatörümüzün GBS formu olan :

$$\begin{aligned}E_n(h;\xi,\varrho) &= \sum_{z=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-z}\varphi_{n,z,r}(\xi,\varrho)\frac{(n+1)(n+2)}{16}\\ &\times\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{-t}\varphi_{n,z,r}(s,t)\left(h(\xi,t)+h(s,\varrho)-h(s,t)\right)dsdt\end{aligned} \tag{5.2}$$

şeklinde inşa edildi. İnşa edilen GBS tip operatörün karma süreklilik modülü (Mixed modul) aracılığıyla yaklaşım hızı hesaplanmış ve Lipschitz sınıfındaki fonksiyonlara yaklaşımıda ispatlandı.

Tezimizin son kısmında ise $H_n(h;\xi,\varrho)$ Bernstein-Durrmeyer operatörümüzün ve bu operatörün GBS formu olan $E_n(h;\xi,\varrho)$ operatörünün, çizilen grafikler ve hata paylarını içeren nümerik değer tablolarıyla verilen fonksiyonlara yaklaşımı gösterildi.

5.2. Öneriler

Tezimizde $V := \{(\xi,\varrho): -1 \leq \xi,\varrho \leq 1 \text{ ve } \xi+\varrho \leq 0\}$ ve $h \in C(V)$, olmak üzere üçgensel bölgedeki iki değişkenli Bernstein-Durrmeyer operatörü olan $H_n(h;\xi,\varrho)$ için L_p uzayları ve ağırlıklı uzaylarda (weighted spaces) çalışmalar yapılabilir. Ayrıca quantum ve post-quantum analog uzayları yani q-analog ve (p,q)-analog uzaylarındada yaklaşım özellikleri incelenebilir. Aynı zamanda değişken sayısı arttırılabilir ve farklı boyutlarda yaklaşım yapılabilir.

Ayrıca mühendislik ve tıp alanları başta olmak üzere birçok disiplinde tanımladığımız operatör kullanılabilir ve geliştirilebilir. Örneğin, spline, radyal temel fonksiyonlar ile yaklaşık değer ve enterpolasyonda, havacılık ve otomotiv endüstrilerinde geometrik modelleme için yaygın olarak uygulanabilir. Aynı zamanda termografi hesaplamalarında ve deprem mühendisliği alanlarında, farklı tipteki binaların enerji verimliliğini ve depreme dayanıklılık verilerini analiz etmek için inşaat mühendisliği projelerindede kullanılabilir.

KAYNAKLAR

ABEL, U., 1998. Asymptotic approximation with Kantorovich polynomial. Approx. Theory and Its Appl., 14: 106.

ACAR, T. and ARAL, A., 2013. Approximation properties of two dimensional Bernstein-Stancu-Chlodowsky operators. Le Matematiche, 68-2:15–31

AGRANTINI, O.,2011. Statistical convergence of a non-positive approximation process. Chaos Solitons & Fractals, 44: 977-981.

AGRAWAL, P. N., ISPIR, N. and KAJLA, A.,2016. GBS operators of Lupaş–Durrmeyer type based on Pólya distribution. Results in Mathematics,69-4:397–418.

AGRAWAL, P. N., KUMAR, D. and ARICI, S.,2017. Linking of Bernstein-Chlodowsky and Szász-Appell-Kantorovich type operators. J. Nonlinear Sci. Appl. , 10:3288–3302.

AHAROUCH, L., ANSARI, K.J. and MURSALEEN, M., 2021. Approximation by Bézier Variant of Baskakov-Durrmeyer-Type Hybrid Operators. Journal of Function Spaces, Hindawi-2021.

ALTOMARE, F., and CAMPITI, M., 1994.Korovkin- Type Approximation Theory And Its Applications. De Gruyter Series Studies in Mathematics, Walter De Gruyter Berlin- New York, 17: 627.

BADEA, C. and COTTİN, C., 1990.Korovkin-type theorems for generalized boolean sum operators. Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 58-2:51–67.

BADEA, C., BADEA, I. and GONSKA, H. H., 1986. A test function theorem and apporoximation by pseudopolynomials. Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 34-1:53–64.

BALCI, M., 2012. Reel Analiz, Balcı Yayınları, Ankara, 144s.

BARBOSU, D., ACU, A. M. and MURARU, C.V., 2017. On certain GBS-Durrmeyer operators based on q-integers. Turkish Journal of Mathematics, 41-2:368–380.

BAYRAKTAR, M., 2006. Fonksiyonel Analiz. Ankara.

BASKAKOV, V. A., 1961. On a Construction of Converging Seguences of Linear Positive Operators, Studies of Modern Problems of Constructive Theory of Functions. Moscow, 314-318.

BOHMAN, H. 1952-54. On approximation of continuous and analytic functions,Ark. Math., 2, 43-46.

BÖGEL, K., 1935. Über mehrdimensionale Differentiation, Integration und beschränkte Variations. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 173-1:5–30.

BÖGEL, K., 1934. Mehrdimensionale Differentiation von Funktionen mehrerer reeller Veränderlichen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 170-2:197–217.

BUTZER, P. L. and NESSEL, R. J. 1971. Fourier Analysis and Approximation, Academic Press, New York and Londan.

CHLODOVSKY I., 1937. Sur le developpement des fonctions definies dans un intervalle infini en series de polynomes de M.S. Bernstein. Compos Math, 4: 380-393.

ÇİLO A., 2012. [-1,1] aralığında Bernstein polinomlarının yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızı.Yüksek Lisans Tezi, Harran Üniv. / In [-1,1] ranges Bernstein polynomials approach properties and approach speed. MSc Thesis, Harran Univ..

DESHWAL, S., ISPIR, N. and AGRAWAL, P. N., 2017. Blending type approximation by bivariate Bernstein-Kantorovich operators. Appl. Math., 11-2:423–432.

DOBRESCU, E. and MATEI, I., 1961. The approximation by Bernstein type polynomials of bidimensionally continuous functions. Univ. Timisoara Ser. Sti. Mat.-Fiz., 4-1:85–90.

GOYAL, M., KAJLA, A., AGRAWAL, P. N. and ARICI, S., 2017. Approximation by bivariate Bernstein-Durrmeyer operators on a triangle. Appl. Math. Inf. Sci., 11-3:693–702.

HACISALİHOĞLU, H., ve HACIYEV, A., 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletme Yayınları, Ankara, 94s.

ISPIR, N., 2001 On modified Baskakov operators on weighted spaces. Turk. J. Math., 25: 355-365.

IZGI, A., 2009. Order of approximation of functions of two variables by new type gamma operators.. General Mathematics, 17-1:23–32.

IZGI, A., 2012. Approximation by composition of Szász-Mirakyan and Durrmeyer-Chlodowsky operators. Eurasian Mathematical Journal, 3-1:63–71.

IZGI, A., 2013. Approximation by a Class of New Type Bernstein Polynomias of one and two Variables. Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 8-5:55–71.

KAJLA, A., 2017. Generalized Bernstein-Kantorovich–type operators on a triangle. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 42-12:4365–4377.

KANTOROVICH, L.V., 1930. Sur cestain developpemenets suivant les polynomes de la forme de S.Berntein, I, II, C.R. Acad. URSS, 563-568, 595-600.

KİNGSLEY, E. H., 1951. Bernstein polynomials for functions of two variables of class C (k). Proceedings of the American Mathematical Society, 2-1:64–71.

KOROVKİN, P. P., 1953. On Convergence of Linear Positive Operators in the Space of Continuous Functions(Russian). Dokl. Akad. Nauk. SSSR(N. S.) 90:961-964.

KREYSZİG, E. 1978. Introductory Functional Analysis with Application, John Wiley and sons, Canada.

MURSALEEN, M., AHASAN, M. and ANSARI, K.J., 2020. Bivariate Bernstein–Schurer–Stancu type GBS operators in (p, q) (p,q)-analogue. PAdvances in Difference Equations, 2020-1:1–17.

MURSALEEN, M., RAHMAN, S. and ANSARI, K.J., 2019. Approximation by Jakimovski-Leviatan-Stancu-Durrmeyer type operators. Filomat, 33-6:1517–1530.

MURSALEEN, M., AL-ABİED, A. and ANSARI, K.J., 2017. Rate of convergence of Chlodowsky type Durrmeyer Jakimovski-Leviatan operators. Tbilisi Mathematical Journal, 10-2:173–184.

MUSAYEV, B., ALP, M., MUSTAFAYEV, N. ve EKİNCİOĞLU, İ., 2007. Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz 1. Ankara.

OUSMAN, N., 2019. Szasz Operatörlerinin Bir Genelleştirmesi. Harran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Şanlıurfa, 32s.

POP, O.T., 2008. The Generalızatıon of Voronovskaja's Theorem for a Class of Bivariate Operators. Studia Universitatis Babes-Bolyaı Mathematica, 53-2:85–107.

RUCHİ, R., BAXHAKU, B. and AGRAWAL, P.N., 2018. GBS operators of bivariate Bernstein-Durrmeyer-type on a triangle. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 41-7:2673–2683.
STANCU, D.D., 1963. A method for obtaining polynomials of Bernstein type of two variables. The American Mathematical Monthly, 70-3:260–264.
SZASZ, O., 1950. Genelalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval.J. Research Nat. Bur. Standars, 45: 239-245.
TOTİK, V., 1983. Approximation by Szasz-Mirakjan-Kantorovich operators in Lp . Analysis Mathematica , 9-2: 147-167.
USTA, F., 2021. Approximation of functions by a new construction of Bernstein-Chlodowsky operators: Theory and applications. TNumerical Methods for Partial Differential Equations, 37-1:782–795.
USTA, F., 2021. Bernstein approximation technique for numerical solution of Volterra integral equations of the third kind. Computational and Applied Mathematics, 40-5:1–11.
VOLKOV, V. I., 1957. On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables. In: Doklady Akademii Nauk., 43-85:504. Russian Academy of Sciences.
WALZACK, Z., 2000. On certain Moddified Szasz-Mirakjan operators for functions of two variables. Demonstratio Math ., 33-1, 91-100.
WEİERSTRASS, K., 1885. Über die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willkürlicher Funktionen Einer Reelen Veränderlichen. Sitzungberichte der Akademie zu Berlin, 2:633-639.
YAU, S.T., 2017. From Approximation Theory to Real World Applications Workshop. TSIMF December 11–15, 2017, PR China.
ZHOU, S.P., 1993. On comonotone approximation by polynomials in Lp space. Analysis, 13-4:363–376.