

**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SONLU DEVİRLİ GRUPLARIN BİRİM GRAFLARI

Yakup KIRĞIL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ŞANLIURFA
2020**

Dr. Öğr. Üyesi N. Feyza YALÇIN danışmanlığında, Yakup KIRGIL'ın hazırladığı "Sonlu Devirli Grupların Birim Grafları" konulu bu çalışma 24/08/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi N. Feyza YALÇIN



Üye : Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE



Üye : Dr. Öğr. Üyesi Kemal TOKER



Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylıyorum.

Doç. Dr. İsmail HİLALİ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	v
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	3
2.1. Graf Yapısı.....	3
2.2. Graf Çeşitleri	8
2.3. Topolojik İndeks.....	12
2.4. Grup	14
2.5. Birim Graf.....	17
3. MATERİYAL ve YÖNTEM.....	20
3.1. Materyal.....	20
3.2. Yöntem	20
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA.....	21
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	35
5.1. Sonuçlar.....	35
5.2. Öneriler.....	35
KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ.....	37

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SONLU DEVİRLİ GRUPLARIN BİRİM GRAFLARI

Yakup KIRĞIL

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi N. Feyza YALÇIN
Yıl: 2020, Sayfa: 36

Bu çalışmada sonlu devirli grupların birim grafları göz önüne alınmıştır. Sonlu devirli grupların birim grafları grupta tersi kendisi olan elemanların alt kümesi ve tersi kendisinden farklı elemanların alt kümesi ile ilişkili olarak incelenmiştir. Bu alt kümelerin özellikleri kullanılarak sonlu devirli grupların birim graflarındaki üçgen sayısı ve kenar sayısı belirlenmiştir. Ayrıca birim grafların Schultz, Gutman, birinci Zagreb, ikinci Zagreb, Wiener ve Harary indeksleri hesaplanmıştır.

ANAHTAR KELİMELELER: Graf, birim graf, birim grafın topolojik indeksi

ABSTRACT

MSc Thesis

IDENTITY GRAPHS OF FINITE CYCLIC GROUPS

Yakup KIRĞIL

**Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

**Supervisor: Assist. Prof. Dr. N. Feyza YALÇIN
Year: 2020, Page: 36**

In this paper, identity graphs of finite cyclic groups are considered. The identity graphs of finite cyclic groups are examined regarding to the subset of self-inverse elements and the subset of mutual inverse elements in a group. By using the features of these subsets the number of triangles and the number of edges in the identity graphs of finite cyclic groups are determined. Furthermore, Schultz, Gutman, first Zagreb, second Zagreb, Wiener and Harary indices are computed for identity graphs.

KEY WORDS: Graph, identity graph, topological index of identity graph

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca yardımlarını benden esirgemeyen, bilgisi ve tecrübesi ile bana yol gösteren, değerli zamanlarını fazlasıyla bana ayıran ve bu çalışma boyunca desteklerini hiç esirgemeyen danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi N. Feyza Yalçın'a en içten dileklerle teşekkür ederim.

Bilgi ve deneyimlerinden faydalandığım, bu süreçte desteğini esirgemeyen Sayın Dr. Öğr. Üyesi Zehra VELİOĞLU'na teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Matematiğe bakış açımı değiştiren Ortaokul Matematik hocam Fatih KURŞUN'a, Lise Matematik hocam Mehmet YILDIRIM'a, Balıkesir Üniversitesi ve Harran Üniversitesi Matematik Bölümü değerli hocalarına verdikleri desteklerden dolayı teşekkür ederim.

Hayatım boyunca hep yanımda olan, desteğini ve güvenini her zaman hissettiğim, lisansüstü eğitimim konusunda hep ısrarcı olan babam Kasım KIRGIL, annem Ayşe KIRGIL ve tüm aileme teşekkür ederim. Tüm zorluklarda yanımda olan, beni destekleyen ve bu süreci tamamlamamda çok büyük etkisi olan eşim Kadriye Şeyma KIRGIL'a teşekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 2.1. G grafi.....	3
Şekil 2.2. G grafi.....	4
Şekil 2.3. G grafi.....	5
Şekil 2.4. G grafi.....	6
Şekil 2.5. G grafi.....	7
Şekil 2.6. Basit graf.....	8
Şekil 2.7. Pseudo graf ve çoklu graf.....	8
Şekil 2.8. Bağlantısız graf ve bağlantılı graf.....	9
Şekil 2.9. K_3 ve K_4 Tam grafları.....	9
Şekil 2.10. S_4 ve S_5 Yıldız grafları.....	10
Şekil 2.11. P_3 ve P_4 Yol grafları.....	10
Şekil 2.12. T_3 ve T_7 Ağaç grafları.....	11
Şekil 2.13. G ve H grafları.....	11
Şekil 2.14. $G_I(\mathbb{Z}_9)$ birim grafi.....	17
Şekil 2.15. $G_I(G)$ birim grafi.....	17
Şekil 2.16. $G_I(S_3)$ birim grafi.....	18
Şekil 2.17. $G_I(D_{2,3})$ birim grafi.....	18
Şekil 4.1. $G_I(G)$ ve $G_I(H)$ birim grafları.....	23

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$G = (V(G), E(G))$	G grafi
$V(G)$	G grafinin köşe kümesi
$E(G)$	G grafinin kenar kümesi
$u \sim v$	Komşu köşeler
$u \not\sim v$	Komşu olmayan köşeler
$\deg(v)$	v köşesinin derecesi
P_n	Yol graf
$d(u, v)$	u ve v köşeleri arasındaki uzaklık
$D(G)$	G grafinin uzaklık matrisi
C_n	n köşeli döngü graf
N_m	m köşeli boş graf
K_n	n köşeli tam graf
S_n	Yıldız graf
T_n	n köşeli ağaç
$gir(G)$	Girth
$e(u)$	Eksantrik
$rad(G)$	G grafinin yarıçapı
$diam(G)$	G grafinin çapı
\mathcal{G}	Sonlu grafların sınıfı
$G \cong H$	İzomorfluk
$M_1(G)$	G grafinin I. Zagreb indeksi
$M_2(G)$	G grafinin II. Zagreb indeksi
$D'(G)$	G grafinin Schultz indeksi
$Gut(G)$	G grafinin Gutman indeksi
$W(G)$	G grafinin Wiener indeksi
$H(G)$	G grafinin Harary indeksi
$ G $	G grubunun mertebesi
$S(G)$	Tersi kendisi olan elemanların kümesi
$M(G)$	Tersi kendisinden farklı elemanların kümesi
$G_1(G)$	G grubunun birim grafi

1. GİRİŞ

Graf teorisinin temeli L. Euler'in çalışmalarına dayanmaktadır. L. Euler, 1736 yılında ünlü "Königsberg Köprüsü" probleminin çözümü üzerinde çalışırken problemi bir basit graf olarak ele almış ve çözümün mümkün olmadığı kanaatine varmıştır. Ayrıca problemin çözümünün hangi durumlarda mümkün olacağı üzerinde çalışmalar yaparak, çalışmasını "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis" isimli makale olarak yayınlamıştır. Graf teorisi ve uygulamaları; otoyol haritaları, elektrik devreleri, bilgisayar mühendisliği, iletişim ağları (Solé, 1995), Türkçe cümle yapısının öğretilmesi (Ceylan ve Mete, 2018), müzik eğitimi vb birçok bilim dalındaki problemlerin modellenmesinde ve çözümünde kullanılmaktadır.

Bir graf invariantı olan topolojik indeks kavramının tanımlanması kimyasal graf teorisinin oluşumuna zemin hazırlamasının yanında grup teorisi, halka teorisi, graf teorisi ve kimya arasında bir köprü kurmuştur. Cebirsel yapıların graflar ile ilişkisi son yıllarda dikkat çeken konulardan biridir. Bir cebirsel yapının graf ile temsili soyut olan bu yapıları somut biçimde yaklaşmayı sağlaması açısından büyük önem taşımaktadır. Değişmeli bir halkanın sıfır bölen grafi (Anderson ve Livingston, 1999), değişmeli bir halkanın total grafi (Anderson ve Badawi, 2008), bir halkanın birimsel grafi (Ashrafi ve ark., 2010) gibi birçok graf çeşidi tanımlanmıştır. Yapılan bu çalışmalar ve benzer çalışmalar ile ilgili grafların graf teorik özellikleri, graf teorisine ait temel bilgilerin yanısıra cebirsel yapıların işlemleri de kullanılarak incelenmiştir. Grup yapısı ile ilgili çalışmalardan birisi ise (Kandasamy ve Smarandache, 2009) çalışmasında tanımlanan grupların ve yarıgrupların birim grafları ve bazı özel alt grafları ve bu graflar arasındaki ilişkilerdir.

Bu çalışmada sonlu devirli grupların birim grafları grupta tersi kendisi olan elemanların alt kümesi olan $S(G)$ ve tersi kendisinden farklı elemanların alt kümesi olan $M(G)$ kümelerinin özellikleri ile ilişkili olarak incelenmiştir. Bu alt kümelerin özellikleri kullanılarak, sonlu devirli grupların birim graflarındaki üçgen sayısı ve

kenar sayısı belirlenmiştir. Ayrıca birim grafların Schultz, Gutman, birinci Zagreb, ikinci Zagreb, Wiener ve Harary indeksleri hesaplanmıştır.



2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışmamızda kullanacağımız temel tanım ve teoremlere yer verilecektir. Temel tanım ve kavramlar için (Bondy ve Murty, 1976; Vasudev, 2007; Biggs, 1993) kaynaklarından yararlanılmıştır.

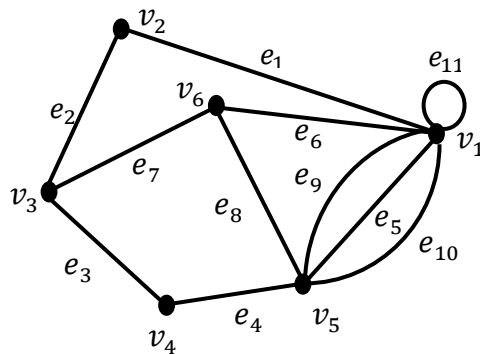
2.1. Graf Yapısı

Tanım 2.1.1. Elemanları köşe olarak adlandırılan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots\}$ kümesi ve bu köşeleri birleştiren, elemanları kenar olarak adlandırılan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ kümesinden oluşan $G = (V(G), E(G))$ sıralı ikilisine graf denir. $G = (V(G), E(G))$ grafi kısaca G ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.2. $G = (V(G), E(G))$ grafında $u, v \in V(G)$ köşelerini birleştiren bir $e \in E(G)$ varsa “ u ve v köşeleri komşudur” denir. Bu durumda $u \sim v$, $e = uv$ ya da $(u, v) \in E(G)$ gösterimlerinden biri kullanılır. Bir grafta iki köşeyi birleştiren birden fazla kenar varsa, bu kenarlara katlı (paralel) kenarlar denir. Ayrıca bir köşeyi kendisine birleştiren kenara ise ilmek (loop) denir.

Tanım 2.1.3. $G = (V(G), E(G))$ bir graf olmak üzere, herhangi bir v köşesine komşu olan köşelerin sayısına v köşesinin derecesi denir ve $\deg(v)$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.1.

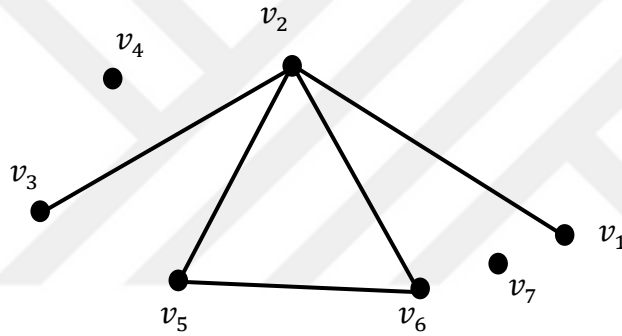


Şekil 2.1. G grafi

Şekil 2.1. de verilen G grafının köşe ve kenar kümeleri sırasıyla $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ ve $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}\}$ olmak üzere, köşe komşulukları $v_1 \sim v_2, v_1 \sim v_5, v_1 \sim v_6, v_2 \sim v_3, v_3 \sim v_4, v_3 \sim v_6, v_4 \sim v_5$, ve $v_5 \sim v_6$ şeklindedir. Ayrıca $\deg(v_1) = 7, \deg(v_2) = 2, \deg(v_3) = 3, \deg(v_4) = 2, \deg(v_5) = 5$ ve $\deg(v_6) = 3$ tür.

Tanım 2.1.4. $G = (V(G), E(G))$ grafında $v \in V(G)$ iken $\deg(v) = 0$ ise v köşesine bir izole köşe, $\deg(v) = 1$ ise pendant köşe denir. Bir kenarı birleştiren köşelerden biri pendant köşe ise bu kenara pendant kenar denir.

Örnek 2.1.2.



Şekil 2.2. G grafi

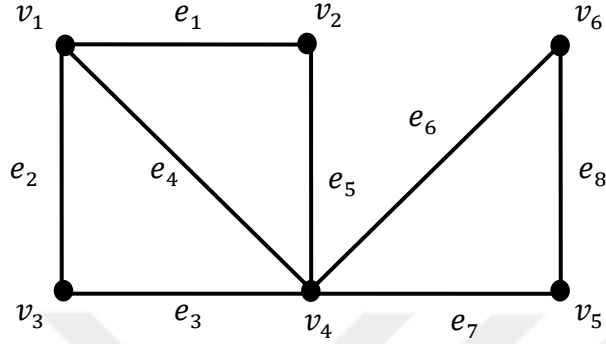
Şekil 2.2. de verilen G grafında v_4 ile v_7 izole köşe ve v_1 ile v_3 ise pendant köşedir.

Tanım 2.1.5. Bir grafın köşe ve kenar kümesi sonlu ise sonlu graf, aksi halde sonsuz graf denir.

Tanım 2.1.6. $G = (V(G), E(G))$ grafında $v_1, v_2, v_3, \dots, v_t \in V(G)$ ve $e_1, e_2, e_3, \dots, e_t \in E(G)$ ve $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ olmak üzere, $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_t v_t$ şeklindeki bir sonlu diziyeye t -uzunluğunda yürüme (walk) denir ve W ile gösterilir. Tüm köşeleri birbirinden farklı olan yürümeye yol (path) denir. t -uzunluğunda bir yol $v_0 - v_1 - \dots - v_t$ şeklinde de gösterilebilir. Başlangıç ve bitim köşeleri aynı olan yürümeye ise

kapalı yürüme denir. Köşelerin ve kenarların tekrar edilmediği kapalı yürüme döngü (cycle) denir. Üç köşeden oluşan döngüye özel olarak üçgen de denir.

Örnek 2.1.3.



Şekil 2.3. G grafi

Şekil 2.3. de verilen G grafına ait yürüme, yol ve döngü örneği aşağıda verilmiştir:

Yürüme : $v_1 e_1 v_2 e_5 v_4 e_6 v_6 e_8 v_5 e_7 v_4 e_3 v_3$

Yol : $v_1 e_2 v_3 e_3 v_4 e_7 v_5 e_8 v_6$

Döngü : $v_1 e_1 v_2 e_5 v_4 e_3 v_3 e_2 v_1$

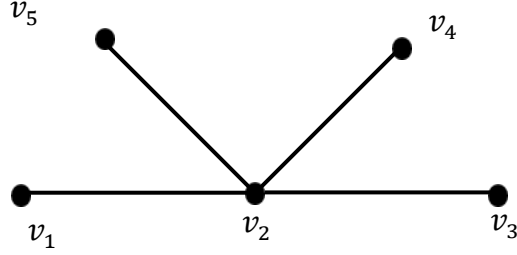
Tanım 2.1.7. $G = (V(G), E(G))$ bir graf ve $u, v \in V(G)$ olsun. u ve v köşeleri arasındaki en kısa yolun uzunluğuna u ile v köşeleri arasındaki uzaklık (distance) denir ve $d(u, v)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.8. G köşe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ olan bağlantılı bir graf olsun. $d(i, j)$, v_i ve v_j köşelerinin arasındaki en kısa yolun uzunluğu olmak üzere (i, j) girdisi

$$\begin{cases} d(i, j); & i \neq j \text{ ise} \\ 0; & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $n \times n$ matrise G grafının uzaklık matrisi denir ve $D(G)$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.4.



Şekil 2.4. G grafi

Şekil 2.4. de verilen G grafının uzaklık matrisi

$$D(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.9. Bir G basit grafının içerdiği en kısa uzunluklu döngünün uzunluğuna girth denir ve $gir(G)$ ile gösterilir.

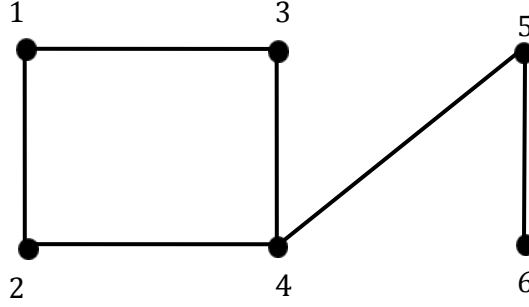
Tanım 2.1.10. $G = (V, E)$ grafından alınan bir u köşesi ile bu köşeye en uzak mesafedeki köşe ile arasındaki uzaklığa u köşesinin eksantriği denir ve $e(u)$ ile gösterilir.

$$e(u) = \max\{d(u, v) : v \in V(G)\}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.11. Bağlantılı bir G grafının köşeleri arasındaki minimum eksantriğe G grafının yarıçapı (radius) denir ve $rad(G)$ ile gösterilir. G grafının köşeleri arasındaki maksimum eksantriğe ise G grafının çapı (diameter) denir ve $diam(G)$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.5.



Şekil 2.5. G grafi

Şekil 2.5. G grafında köşeler arası en büyük uzaklık değeri $d(1,6) = 4$ ve en küçük uzaklık değeri $d(1,2) = 1$ dir. O halde $diam(G) = 4$ ve $rad(G) = 1$ dir.

Teorem 2.1.1. (Handshaking) G , köşe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ olan m kenarlı bir graf olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 2m$$

dir. Bu teoreme “El Sıkışma Teoremi” de denir.

Sonuç 2.1.1. Bir G grafında tek dereceli köşelerin sayısı çifttir.

Tanım 2.1.12. $G = (V_1, E_1)$ ve $H = (V_2, E_2)$ iki graf olsun. $f : V_1 \rightarrow V_2$ fonksiyonu

- (i) Birebir ve örten,
- (ii) $\forall u, v \in V_1$ için $(u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_2$

koşullarını sağlıyorsa, bu iki grafa izomorftur denir ve $G \cong H$ ile gösterilir.

İki grafın izomorf olabilmesi için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

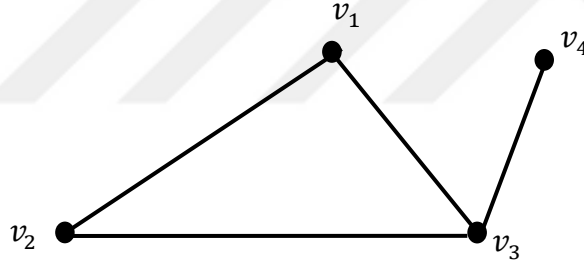
- (i) $|V_1| = |V_2|$,
- (ii) $|E_1| = |E_2|$,
- (iii) İki grafın aynı dereceli köşelerinin sayısı eşit,
- (iv) c_n , n uzunluğundaki döngülerin sayısı olmak üzere aynı (c_1, c_2, \dots, c_n) döngü vektörüne sahiptir.

2.2. Graf Çeşitleri

Tanım 2.2.1. G grafının her köşesi izole köşe ise, yani G grafı kenar içermiyorsa bu grafa boş (null) graf denir. m köşeli boş graf N_m ile gösterilir.

Tanım 2.2.2. Katlı kenar ve ilmek içermeyen graflara basit graf denir.

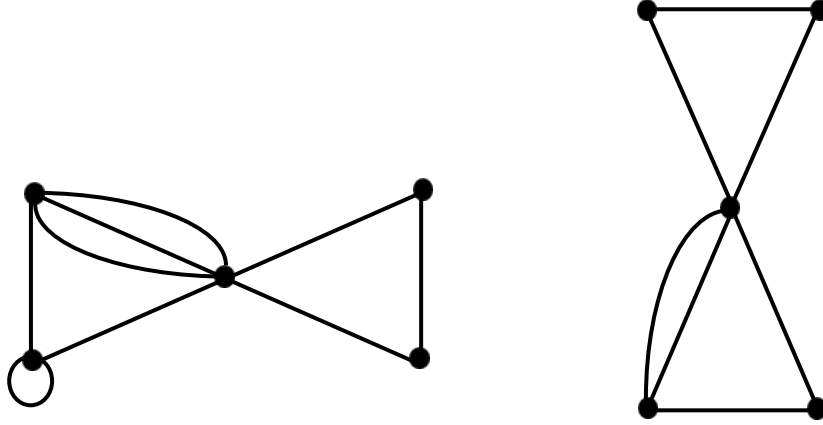
Örnek 2.2.1.



Şekil 2.6. Basit graf

Tanım 2.2.3. Hem katlı kenar hem de ilmek içeren graflara pseudo graf denir. Katlı kenar içeren fakat ilmek içermeyen graflara ise çoklu graf (multigraph) denir.

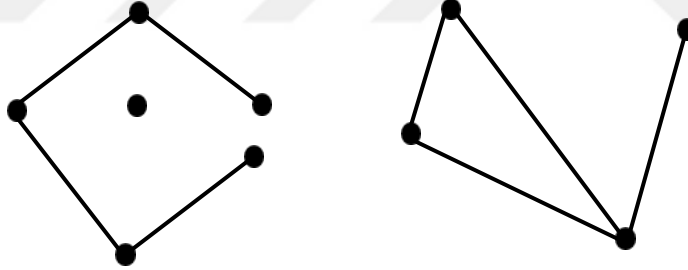
Örnek 2.2.2.



Şekil 2.7. Pseudo graf ve çoklu graf

Tanım 2.2.4. Bir G grafında herhangi iki köşe arasında bir yol varsa, G ye bağlantılı graf denir. Bağlantılı olmayan graf ise bağlantısız graf olarak adlandırılır.

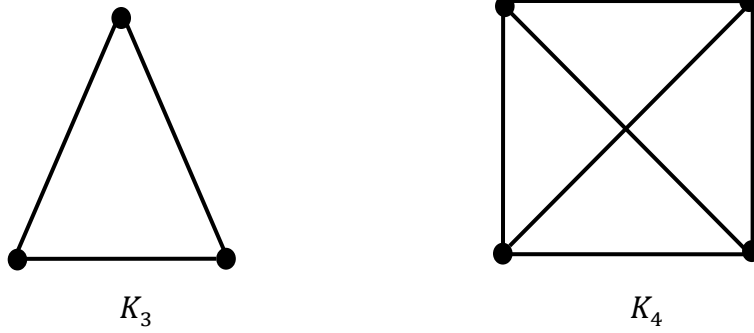
Örnek 2.2.3.



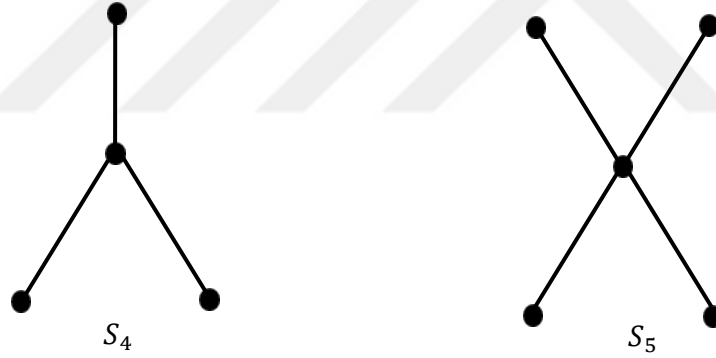
Şekil 2.8. Bağlantısız graf ve bağlantılı graf

Tanım 2.2.5. Bir G grafında bütün köşelerin dereceleri eşit ise G ye düzenli (regüler) graf denir.

Tanım 2.2.6. Tüm köşeleri komşu olan grafa tam (complete) graf denir. n köşeli bir tam graf K_n ile gösterilir ve her bir köşenin derecesi $n - 1$ olduğundan K_n regüler graftır.

Örnek 2.2.4.Şekil 2.9. K_3 ve K_4 tam grafları

Tanım 2.2.6. $n + 1$ köşeli bir grafta bir köşenin derecesi n , diğer bütün köşelerin derecesi 1 ise bu graflara yıldız graf denir ve S_n ile gösterilir.

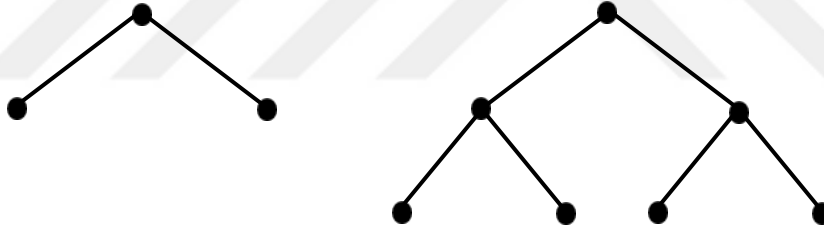
Örnek 2.2.5.Şekil 2.10. S_4 ve S_5 yıldız grafları

Tanım 2.2.7. G , n köşeli bir graf olsun. İki köşesinin derecesi 1, diğer $n - 2$ köşesinin derecesi 2 olan grafa yol (path) graf denir ve P_n ile gösterilir. P_n yol grafının kenar sayısı $n - 1$ dir.

Örnek 2.2.6.Şekil 2.11. P_3 ve P_4 yol grafları

Tanım 2.2.8. Yalnız bir döngüden oluşan grafa döngü graf denir ve n köşeli bir döngü graf C_n ile gösterilir.

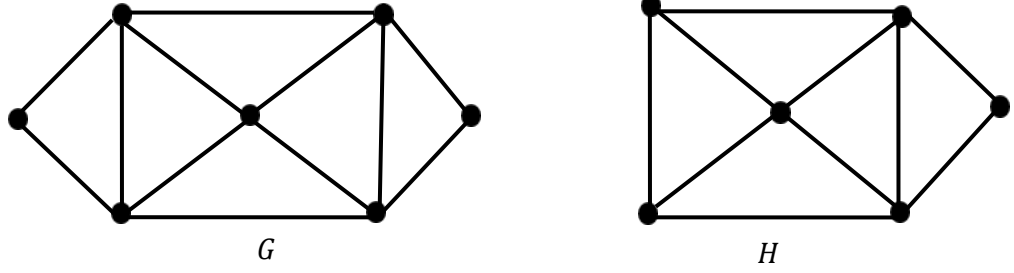
Tanım 2.2.9. Döngü içermeyen graflara ağaç (tree) denir ve n köşeli bir ağaç T_n ile gösterilir.

Örnek 2.2.7.Şekil 2.12. T_3 ve T_7 ağaç graflar

Tanım 2.2.10. Bağlantılı bir G grafının tüm kenarlarını içeren kapalı yola Euler yolu denir. G grafı en az bir Euler yolu içeriyorsa, G ye Euler graf denir.

Teorem 2.2.1. G bağlantılı grafının Euler graf olması için gerek ve yeter koşul G nin her bir köşesinin derecesinin çift olmasıdır.

Tanım 2.2.11. G ve H graflarını $G = (V_1, E_1)$ ve $H = (V_2, E_2)$ iki graf olsun. $V_2 \subseteq V_1$ ve $E_2 \subseteq E_1$ ise H grafı G nin bir alt grafı olarak adlandırılır.

Örnek 2.2.8.Şekil 2.13. G ve H grafları

Şekil 2.13. incelendiğinde $V(H) \subseteq V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ olduğu görülür. O halde H grafi G nin bir alt grafidir.

Tanım 2.2.12. H , G grafinin bir alt grafi olsun. $V(H) = V(G)$ ise H ye G nin bir kapsayan alt grafi denir.

2.3. Topolojik İndeks

Topolojik indeks kavramı kimya alanında tanımlanmış, kimyasal yapıların çeşitli fiziksel özellikleri, kimyasal ya da biyolojik aktiviteleri ile ilişkili nümerik değerlerdir. Bir grafin topolojik indeksi köşe derecesi, uzaklık ve derece-uzaklık gibi graf parametrelerine bağlıdır. Topolojik indeks kavramının tanımlanması cebir, graf ve kimya alanları arasında ilişki kurmuştur. Günümüzde cebirsel yapıların graflarının çeşitli topolojik indekslerinin hesaplanması da dikkat çeken konulardandır (Ahmadi ve Jahani-Nezhad, 2011; Nikmehr ve ark., 2014; Suthar ve Prakash, 2017).

Tanım 2.3.1. Bütün sonlu grafların sınıfını \mathcal{G} gösterelim. Her $G, H \in \mathcal{G}$ için G ve H grafları izomorf iken $T(G) = T(H)$ olacak biçimde bir $T: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna topolojik indeks denir.

Tanım 2.3.2. $G = (V(G), E(G))$ sonlu ve bağlantılı bir graf olmak üzere, G grafinin birinci Zagreb ve ikinci Zagreb indeksi sırasıyla

$$M_1(G) = \sum_{u \in V(G)} \deg(u)^2$$

$$M_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} \deg(u) \deg(v)$$

şeklinde tanımlanır (Gutman ve Trinajstić, 1972).

Tanım 2.3.3. $G = (V(G), E(G))$ basit, bağlantılı ve sonlu bir graf olsun.

$D_G(v) = \sum_{u \in V(G)} d(u, v)$ ifadesine v köşesinin G grafindaki uzaklığı denir. Ayrıca

$$D'(G) = \sum_{u \in V(G)} \deg(u) \cdot D_G(u)$$

ise G grafinın derece uzaklığı olarak adlandırılır (Dobrynin ve Kochetova, 1994). G grafinın derece uzaklığı olan $D'(G)$, Schultz indeksi olarak da adlandırılır (Gutman, 1994). G grafinın Schultz indeksi

$$D'(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} [\deg(u) + \deg(v)] d(u, v)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Schultz indeksinin ikinci çeşidi olan Gutman indeksi ise

$$Gut(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} [\deg(u) \cdot \deg(v)] d(u, v)$$

ile tanımlanır (Gutman, 1994).

Tanım 2.3.4. $G = (V(G), E(G))$ sonlu ve bağlantılı bir graf olmak üzere, G grafinın Wiener indeksi G grafindaki bütün köşe çiftlerinin sırasız ikilileri arasındaki uzaklıkların toplamıdır ve

$$W(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} d(u,v)$$

şeklinde tanımlanır (Wiener, 1947).

Bir grafın Schultz indeksi, Wiener indeksinin derece ağırlıklı versiyonu olarak göz önüne alınabilir.

Tanım 2.3.5. $G = (V(G), E(G))$ sonlu ve bağlantılı graf olmak üzere G grafının Harary indeksi

$$H(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} \frac{1}{d(u,v)}$$

şeklinde tanımlanır (Plavšić ve ark., 1993).

2.4. Grup

Tanım 2.4.1. G boştan farklı bir küme olmak üzere, G kümesi üzerinde bir $*$ ikili işlemi tanımlı olsun. Eğer

- (i) $*$ ikili işlemi birleşme özelliğini sağlarsa, yani her $x, y, z \in G$ için $(x * y) * z = x * (y * z)$ ise,
- (ii) her $x \in G$ için $x * e = e * x = x$ olacak şekilde bir $e \in G$ varsa (e ye G nin birim elemanı denir),
- (iii) her $x \in G$ için $x * x' = x' * x$ olacak şekilde bir $x' \in G$ varsa (x' ye x in bir ters elemanı denir),

bu durumda $(G, *)$ sıralı ikilisine bir grup denir. G grubunun birim elemanı e_G ile gösterilecektir. Bu koşullara ek olarak; her $x, y \in G$ için

$$x * y = y * x$$

ise bu gruba değişmeli veya abelyan denir.

Örnek 2.4.1. $n \geq 1$ bir tamsayı ve \mathbb{Z} kümesinin n modülüne göre kalan sınıflarının kümesi $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ olsun. \mathbb{Z}_n üzerinde toplama işlemi. her $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$ için $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$ ile tanımlı olsun. Toplama işleminin tanımından birleşme ve değişme özellikleri olduğu açıktır. $\bar{0}$ birim elemandır. Çünkü, her $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ için

$$\bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a} = \bar{a}$$

dır. Benzer biçimde \bar{a} elemanın tersi $-\bar{a} = \overline{-a}$ dır. O halde \mathbb{Z}_n kümesi bir abelyen gruptur.

Tanım 2.4.2. G bir grup olsun. G nin kardinalitesi olan $|G|$ ye G grubunun mertebesi denir. $|G|$ sonlu ise G ye sonlu grup, aksi takdirde sonsuz grup denir.

Tanım 2.4.3. $(G, *)$ ve (H, Δ) gruplar olsun. Eğer

- (i) $H \subseteq G$,
- (ii) Her $a, b \in H$ için $a \Delta b = a * b$ ise

o zaman H ya G nin bir alt grubu denir ve $H \leq G$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.4.1. G bir grup ve $H \subseteq G$ olsun. $H \leq G$ olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in H$ için $xy^{-1} \in H$ olmasıdır.

Örnek 2.4.2. $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ grubunun $A = \{0, 3\}$ ve $B = \{0, 2, 4\}$ alt kümelerinin toplama işlemine göre grup olma şartlarını sağladıklarından A ve B alt kümeleri \mathbb{Z}_6 nin birer alt grubudur.

Tanım 2.4.4. G bir grup ve X , G nin bir alt kümesi olsun. O zaman G nin X i içeren bütün alt gruplarının kesişimine X tarafından üretilen alt grup denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. X e $\langle X \rangle$ in bir üreteç kümesi denir. Eğer $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ise $\langle X \rangle = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ ile gösterilir ve buna x_1, x_2, \dots, x_n tarafından üretilen alt grup denir. Eğer $n = 1$ ise $\langle x_1 \rangle$ grubuna x_1 tarafından üretilen devirli alt grup denir.

Teorem 2.4.2. G bir grup ve $a \in G$ olsun. O zaman

$$\langle a \rangle = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\}$$

dir.

Tanım 2.4.5. G bir grup olsun. $G = \langle a \rangle$ olacak biçimde bir $a \in G$ varsa, G ye a tarafından üretilen bir devirli grup denir.

Örnek 2.4.3. \mathbb{Z} toplamsal grubu ve her $m \geq 1$ için \mathbb{Z}_m toplamsal grubu devirlidir. Gerçekten

$$\mathbb{Z} = \{z: z \in \mathbb{Z}\} = \{z.1: z \in \mathbb{Z}\} = \langle 1 \rangle$$

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{z}: z \in \mathbb{Z}\} = \{z.\bar{1}: z \in \mathbb{Z}\} = \langle \bar{1} \rangle$$

dir.

Tanım 2.4.6. $(G,*)$ bir sonlu grup olsun. $a \in G$ için $a = a^{-1}$ ise $a \in G$ elemanına tersi kendisi olan (self-inverse) eleman denir ve G grubunun bütün self-inverse elemanlarının kümesi

$$S(G) = \{a \in G: a = a^{-1}\}$$

ile gösterilir.

Tanım 2.4.7. $(G,*)$ bir sonlu grup olsun. Bir $a \in G$ için $a * b = b * a = e$ olacak biçimde $b \in G$ varsa, a elemanına G grubunun tersi kendisinden farklı (mutual inverse) elemanı denir. G grubunun bütün mutual inverse elemanlarının kümesi

$$M(G) = \{a \in G: a \neq a^{-1}\}$$

ile gösterilecektir.

Örnek 2.4.4.

$\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ sonlu grubunda $0 + 0 = 0$, $1 + 3 = 0$ ve $2 + 2 = 4$ olduğundan tersi kendisine eşit olan elemanlar 0 ve 2 dir. Buradan $S(\mathbb{Z}_4) = \{0,2\}$ dir. Tersine kendisine eşit olmayan elemanlar 1 ve 3 olduğundan $M(\mathbb{Z}_4) = \{1,3\}$ dir.

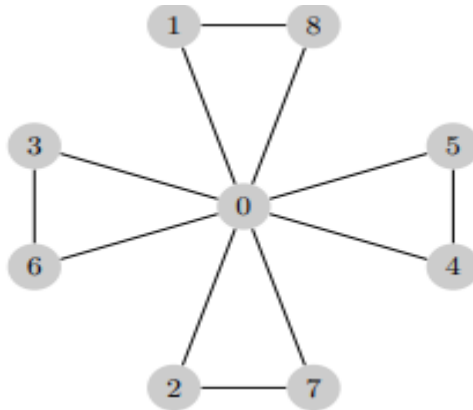
$\mathbb{Z}_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ sonlu grubunda $0 + 0 = 0$, $1 + 6 = 0$, $2 + 5 = 0$ ve $3 + 4 = 0$ olduğundan tersi kendisine eşit olan tek eleman 0 dır. Buradan $S(\mathbb{Z}_7) = \{0\}$ dir. Tersini kendisine eşit olmayan elemanlar $1,2,3,4,5,6$ olduğundan $M(\mathbb{Z}_7) = \{1,2,3,4,5,6\}$ dir.

2.5. Birim Graf

Bir G grubunun birim grafı (Kandasamy ve Smarandache, 2009) çalışmasında tanımlanmıştır.

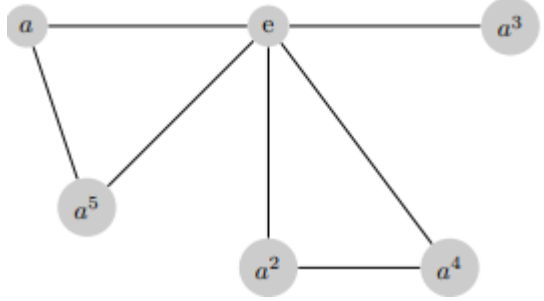
Tanım 2.5.1. G bir grup olsun. $x, y \in G$ için $xy = e_G$ ise “ x ve y komşudur veya x ile y bir kenar ile birleştirilebilir” denir. Ayrıca G grubunun her elemanının e_G ile komşu olduğu kabulü ile G grubu bir graf olarak temsil edilebilir. Bu grafa G grubunun birim grafı denir ve $G_I(G)$ ile gösterilir. $V(G_I(G)) = G$ dir.

Örnek 2.5.1. $G = \mathbb{Z}_9$ grubunu göz önüne alalım. $\mathbb{Z}_9 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dir. $G_I(\mathbb{Z}_9)$ birim grafının komşuluk tanımından $1 \sim 8$, $2 \sim 7$, $3 \sim 6$ ve $4 \sim 5$ dir. Ayrıca $G_I(\mathbb{Z}_9)$ birim grafında tüm köşeler \mathbb{Z}_9 grubunun birim elemanı 0 a komşudur. $M(G) = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ ve $S(G) = \{0\}$ dir. $G_I(\mathbb{Z}_9)$ grafı Şekil 2.14. de görülmektedir.



Şekil 2.14. $G_I(\mathbb{Z}_9)$ birim grafı

Örnek 2.5.2. $G = \langle a \rangle$ mertebesi 6 olan devirli bir grup olsun. G grubunun $G_I(G)$ birim grafi Şekil 2.15. de verilmiştir.

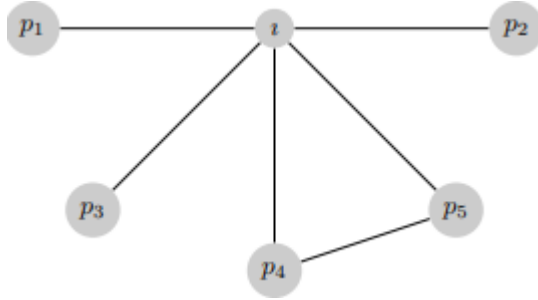


Şekil 2.15. $G_I(G)$

Örnek 2.5.3.

$$S_3 = \left\{ \iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

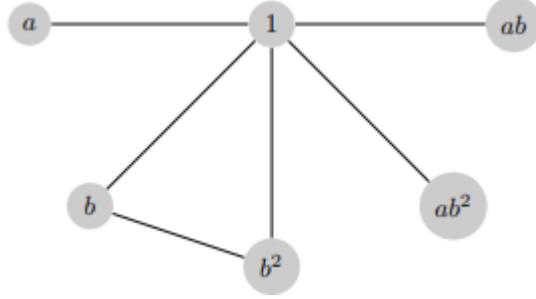
simetrik grubunun $G_I(S_3)$ birim grafi Şekil 2.16. da verilmiştir.



Şekil 2.16. $G_I(S_3)$

Şekil 2.15. ve Şekil 2.16. da verilen graflar incelendiğinde, G grubu ile S_3 simetrik grubu aynı mertebeli gruplar olmasına rağmen birim graflarının izomorfik olmadığı görülmektedir.

Örnek 2.5.4. $D_{2,3} = \{a, b: a^2 = b^3 = 1; b a b = a\}$ dihedral grubunun $G_1(D_{2,3})$ birim grafi Şekil 2.17. de verilmiştir.



Şekil 2.17. $G_1(D_{2,3})$

Şekil 2.16. ve Şekil 2.17. de verilen graflar incelendiğinde, S_3 simetrik grubu ile $D_{2,3}$ dihedral grubunun birim graflarının izomorfik olduğu görülür.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

Bu çalışmada birim graf ve grafların topolojik indeksleri ile ilgili makaleler, kitaplar, kütüphane ve dijital ortamda bulunan kaynaklar bir araya getirilerek incelenmiştir.

3.2. Yöntem

Çalışmada sonlu devirli grupların birim grafları, grubun $S(G)$ ve $M(G)$ alt kümelerine bağlı olarak ele alınmıştır. Bu alt kümelerin özellik ve kardinaliteleri kullanılarak birim grafın kenar sayısı ve üçgen sayısı belirlenmiştir. Ayrıca sonlu devirli grupların birim graflarının bazı topolojik indeksleri hesaplanmıştır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde sonlu devirli grupların birim grafları ele alınacaktır. Grupta tersi kendisine eşit olan elemanların kümesi $S(G)$ nin ile tersi kendisinden farklı olan elemanların kümesi $M(G)$ nin kardinaliteleri ve özellikleri kullanılarak, sonlu devirli grupların birim graflarının üçgen sayısı, kenar sayısı ve Schultz, Gutman, birinci Zagreb, ikinci Zagreb, Wiener ve Harary indeksleri hesaplanacaktır.

Teorem 4.1. G bir sonlu devirli grup olsun. Bu durumda

$$|S(G)| = \begin{cases} 1, & |G| \text{ tek ise} \\ 2, & |G| \text{ çift ise} \end{cases}$$

dir. Burada $|S(G)|$, $S(G)$ kümesinin kardinalitesidir (Chalapathi ve Kumar, 2018).

Sonuç 4.1. G mertebesi çift olan bir grup ise $|S(G)|$ ve $|M(G)|$ nin her ikisi de çifttir (Chalapathi ve Kumar, 2018).

Sonuç 4.2. G mertebesi tek tamsayı olan bir grup ise $|S(G)| = 1$ ve $|M(G)| = |G| - 1$ dir (Chalapathi ve Kumar, 2018).

Uyarı 4.1. G mertebesi çift ancak devirli olmayan bir grup ise $|S(G)| \geq 2$ dir (Chalapathi ve Kumar, 2018).

Örnek 4.1. $V_4 = \{e, a, b, c\}$ Klein grubu mertebesi çift, devirli olmayan bir gruptur ancak $e = e^{-1}$, $a = a^{-1}$, $b = b^{-1}$ ve $c = c^{-1}$ olduğundan $|S(V_4)| = 4$ tür (Chalapathi ve Kumar, 2018).

Örnek 4.2. $|S(S_3)| = 4$, $|S(D_3)| = 4$, $|S(Q_8)| = 2$, $|S(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)| = 4$ tür (Chalapathi ve Kumar, 2018).

Hatırlatma 4.1. $G = \langle a \rangle$ mertebesi n olan bir devirli grup ve $k \in \mathbb{Z}$ olsun. $a^k \in M(G)$ ise $n \nmid 2k$ ve $a^k \in S(G)$ iken $n \mid 2k$ olduğu aşıkardır.

Sonlu devirli grupların birim graflarındaki üçgen sayısı 2009 yılında Kandasamy ve Smarandache tarafından belirlenmiştir.

Teorem 4.2. p bir asal sayı ve $G = \langle a \rangle$, p . mertebeden bir devirli grup olsun. Bu durumda $G_I(G)$ birim grafi sadece $\frac{p-1}{2}$ adet üçgenden oluşur (Kandasamy ve Smarandache, 2009).

Sonuç 4.3. n bir tek tamsayı ve $G = \langle a \rangle$, mertebesi n olan bir devirli grup olsun. Bu durumda $G_I(G)$ birim grafi sadece $\frac{n-1}{2}$ adet üçgenden oluşur.

Sonuç 4.3. e göre tek mertebeli birim grafların herhangi bir köşesinin derecesi çift sayıdır. O halde aşağıdaki sonuç Euler grafın tanımı gereği direkt verilebilir.

Sonuç 4.4. G mertebesi tek sayı olan bir devirli grup ise $G_I(G)$ Euler grafıdır.

Teorem 4.3. n bir çift sayı ve $G = \langle a \rangle$ mertebesi n olan bir devirli grup olsun. Bu durumda $G_I(G)$ birim grafi $\frac{n-2}{2}$ adet üçgen ve 1 tane kenardan oluşur (Kandasamy ve Smarandache, 2009).

Sonuç 4.5. G çift mertebeli bir grup ise $G_I(G)$ Euler grafi değildir.

Sonuç 4.6. G bir sonlu devirli bir grup ise $gir(G_I(G)) = 3$ tür.

İspat: Teorem 4.2. ve Teorem 4.3. den $G_I(G)$ birim grafi üçgenlerden oluştuğundan $gir(G_I(G)) = 3$ olduğu aşıkardır.

Bu kısımda öncelikle $S(G)$ ve $M(G)$ ayrık kümelerinin kardinalitesi kullanılarak sonlu devirli grupların birim grafları yeniden ele alınacak ve bu

graflardaki üçgen sayısı, kenar sayısı gibi bazı temel özellikler ifade edilecektir. Daha sonra sonlu devirli grupların birim graflarının Schultz, Gutman, birinci Zagreb, ikinci Zagreb, Wiener ve Harary indeksleri hesaplanacaktır.

Hatırlatma 4.2. G , n . mertebeden bir devirli grup ve grubun birimi e ve G grubunun birim grafi $G_I(G)$ olsun. Birim grafın komşuluk tanımından $V(G_I(G)) = G$ ve $\deg(e) = n - 1$ dir.

Teorem 4.4. G bir sonlu grup olsun. Bu durumda $G_I(G)$ bir bağlantılı graftır.

İspat: $G_I(G)$ birim grafının komşuluk tanımından herhangi iki köşe arasında bir yolun varlığı açıkça görülmektedir.

Teorem 4.5. $G = \langle a \rangle$ mertebesi çift olan bir devirli bir grup olsun. Bu durumda $u \in S(G) \setminus \{e\}$ ise $\deg(u) = 1$ dir.

İspat: G grubunun mertebesi çift olduğundan Teorem 4.1. gereği $|S(G)| = 2$ dir. O halde $S(G) = \{e, a: a^2 = e\}$ olur. Buradan $u \in S(G) \setminus \{e\}$ ise u sadece e köşesine komşu olduğundan u bir pendant köşedir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi G sonlu devirli grubunun $G_I(G)$ birim grafindaki üçgen sayısı, $M(G)$ kümesinin kardinalitesi kullanılarak yeniden hesaplanacaktır.

Teorem 4.6. G bir sonlu devirli grup ve $G_I(G)$ birim grafindaki üçgenlerin sayısı t olmak üzere, $u \in M(G)$ ise $\deg(u) = 2$ ve $t = \frac{|M(G)|}{2}$ dir.

İspat: $u \in M(G)$ ise $u \neq u^{-1}$ dir. Komşuluk tanımından $u \sim u^{-1}$, $u \sim e$ ve $u^{-1} \sim e$ olduğundan $\deg(u) = 2$ dir. Bir $u \in M(G)$ için her bir $\{u, u^{-1}\}$ köşe çifti $G_I(G)$ birim grafinda bir üçgen oluşturur. O halde $G_I(G)$ birim grafinda $t = \frac{|M(G)|}{2}$ adet üçgen vardır. Bu durumda ispat tamamlanır.

Sonuç 4.7. G , n . mertebeden bir devirli grup ve $G_I(G)$ birim grafindaki üçgenlerin sayısı t olsun. O halde

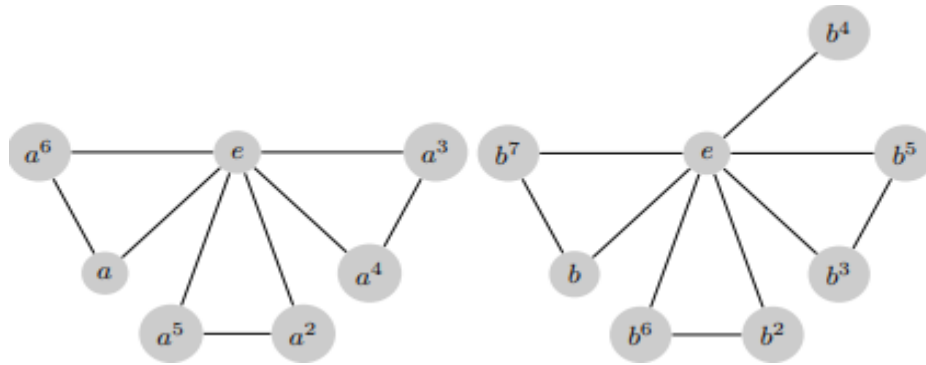
$$t = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & n \text{ tek ise} \\ \frac{n-2}{2}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

dir.

İspat: n tek tamsayı ise Sonuç 4.2 gereği $|M(G)| = |G| - 1$ olduğundan $|M(G)| = n - 1$ dir. Teorem 4.6 dan $t = \frac{|M(G)|}{2}$ olduğu göz önüne alınırsa, ispat biter. n nin çift tamsayı olması durumunda Teorem 4.1 ve Sonuç 4.1 in kullanılmasıyla ispat benzer şekilde görülür.

Örnek 4.2.

$G = \langle a \rangle$ ve $H = \langle b \rangle$ sırasıyla mertebeleri 7 ve 8 olan iki devirli grup olsun. Bu durumda $M(G) = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6\}$ ve $S(G) = \{e\}$ dir. Ayrıca $M(H) = \{b, b^2, b^3, b^5, b^6, b^7\}$ ve $S(H) = \{e, b^4\}$ tür. G ve H gruplarının birim grafları sırasıyla Şekil 4.1 de görülmektedir. Şekil 4.1 den görüleceği üzere, $M(G)$ ve $M(H)$ kümelerinin elemanlarından oluşan herbir $\{u, u^{-1}\}$ köşe çifti birim graflarında bir üçgen oluşturmaktadır. Buna ek olarak, grubun mertebesi çift ise tersi kendisi olan (self-inverse) elemanların kümesi birim grafinda bir tek kenar oluşturur.



Şekil 4.1. $G_I(G)$ ve $G_I(H)$ birim grafları

Aşağıdaki teoremden sonlu devirli grubun birim grafının kenar sayısı belirlenmiştir.

Teorem 4.7. G , n . mertebeden devirli bir grup olsun. Bu durumda

$$|E(G_I(G))| = \begin{cases} \frac{3(n-1)}{2}, & n \text{ tek ise} \\ \frac{3(n-2)}{2} + 1, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

dir.

İspat: $|G| = n$ çift tamsayı olsun. Teorem 4.1. den, $|S(G)| = 2$ ve buradan $|M(G)| = n - 2$ olduğunu biliyoruz. $e \in S(G)$ ve $u \in S(G) \setminus \{e\}$ için $\deg(e) = n - 1$ ve $\deg(u) = 1$ olduğu açıktır. Buradan $\deg(e) + \deg(u) = n$ dir. $G_I(G)$ birim grafında e ve u dışındaki $n - 2$ farklı köşe $M(G)$ kümesine aittir ve her $v \in M(G)$ için $\deg(v) = 2$ dir. Teorem 2.1.1 gereği,

$$\sum_{a \in G} \deg(a) = n + 2(n - 2) = 3n - 4 = 2|E(G_I(G))|$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $|M(G)| = n - 2$ olduğu göz önüne alınırsa; birim graftaki üçgen sayısı t olmak üzere, $|E(G_I(G))| = 3t + 1$ yazabiliriz.

n tek tamsayı iken ispat benzer şekilde görülebilir.

Teorem 4.8. $G = \langle a \rangle$, n . mertebeden bir devirli grup ise $\text{diam}(G_I(G)) < 3$ eşitsizliği sağlanır.

İspat: $n = 2$ ise $S(G) = \{e, a : a^2 = e\}$ ve $M(G) = \emptyset$ olduğundan $G_I(G)$ birim grafi komşuluk tanımından sadece bir $e - a$ kenarından ibarettir. Dolayısıyla $\text{diam}(G_I(G)) = 1$ dir. $n = 3$ ise Teorem 4.2. gereği $G_I(G)$ birim grafi yalnızca bir üçgenden oluşur. Bu durumda $\text{diam}(G_I(G)) = 1$ dir.

$n > 3$ ve n çift tamsayı ise $S(G) = \{e, a: a^2 = e\}$, $|M(G)| = n - 2$ dir ve Teorem 4.3 den $G_I(G)$ birim grafi $\frac{n-2}{2}$ üçgen ve bir $a - e$ kenarından oluşur. $b \in M(G)$ ise $a \in S(G) \setminus \{e\}$ için 2 uzunluğunda $a - e - b$ en kısa yolu daima vardır. Buradan $diam(G_I(G)) = 2$ olur. $b, c \in M(G)$ ve $b \sim c$ ise $d(b, c) = 1$ olduğu açıktır. $b \not\sim c$, yani b ile c komşu değil ise 2 uzunluğunda $b - e - c$ en kısa yolu daima vardır ve $diam(G_I(G)) = 2$ dir.

$n > 3$ ve n tek tamsayı ise Sonuç 4.2. den $S(G) = \{e\}$ ve $|M(G)| = n - 1$ dir. Sonuç 4.3. den $G_I(G)$ sadece $\frac{n-1}{2}$ adet üçgenden oluşur. $b, c \in M(G)$ farklı üçgenlerdeki köşeler olsun. Bu durumda daima 2 uzunluğunda $b - e - c$ en kısa yolu vardır ve $diam(G_I(G)) = 2$ dir. Dolayısıyla ispat biter.

Bu çalışmanın kalan kısmında sonlu devirli grubun $G_I(G)$ birim grafının bazı topolojik indeksleri hesaplanacaktır.

Teorem 4.9. G , n . mertebeden devirli bir grup olsun. Bu durumda $G_I(G)$ birim grafının Schultz indeksi

$$D'(G_I(G)) = \begin{cases} 5n^2 - 14n + 9, & n \text{ tek ise} \\ 5n^2 - 16n + 14, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

dir.

İspat: n nin tek ya da çift olması durumuna göre ispat yapılacaktır.

1. Durum. n bir tek tamsayı olsun. Sonuç 4.2. den $S(G) = \{e\}$ ve $|M(G)| = n - 1$ dir. $G_I(G)$ birim grafının Schultz indeksi

$$\begin{aligned} D'(G_I(G)) &= \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} [\deg(u) + \deg(v)]d(u,v) \\ &= \sum_{u \sim e; u \in M(G)} [\deg(u) + \deg(e)].1 + \sum_{u \sim u^{-1}; u \in M(G)} [\deg(u) + \deg(u^{-1})].1 \\ &\quad + \sum_{u \not\sim v; u, v \in M(G)} [\deg(u) + \deg(v)].2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

dir. $M(G)$ kümesine ait her köşe e ye komşu ve $|M(G)| = n - 1$, $\deg(u) = 2$, $\deg(e) = n - 1$ olduğundan ilk toplamın katkısı $(n - 1)(2 + (n - 1))$, yani $(n - 1)(n + 1)$ dir.

İkinci toplamı göz önüne alalım. $u, u^{-1} \in M(G)$ ise $u \sim u^{-1}$, $u \sim e$ ve $u^{-1} \sim e$ dir ve $\deg(u) = \deg(u^{-1}) = 2$ dir. Buradan ikinci toplam, t üçgenlerin sayısı olmak üzere $4t$ dir. Sonuç 4.7. den $2(n - 1)$ e eşittir.

Son toplamda 2 uzunluğundaki yolların sayısını belirlemeliyiz. 1 uzunluğundaki yolların sayısının grafın kenar sayısına eşit olduğu açıktır ve $\frac{3(n-1)}{2}$ ye eşittir. n köşeli bir grafın uzaklık matrisini göz önüne alalım. Köşegenin üzerinde kalan üçgende ki girdilerin sayısı $\binom{n}{2}$, yani $\frac{n^2-n}{2}$ dir. O halde 2 uzunluğundaki yolların sayısı

$$\begin{aligned} \frac{n^2 - n}{2} - |E(G_1(G))| &= \frac{n^2 - n}{2} - \frac{3(n-1)}{2} \\ &= \frac{(n-1)(n-3)}{2} \end{aligned}$$

dir. $u, v \in M(G)$ için $\deg(u) = \deg(v) = 2$ olduğu göz önüne alınırsa; son toplam

$$\sum_{u \sim v; u, v \in M(G)} [\deg(u) + \deg(v)].2 = 4(n-1)(n-3)$$

Elde edilen toplamlar (4.1) de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} D'(G_1(G)) &= (n-1)(n+1) + 2(n-1) + 4(n-1)(n-3) \\ &= (n-1)(5n-9) \\ &= 5n^2 - 14n + 9 \end{aligned}$$

bulunur.

2. Durum. n bir çift tamsayı olsun Teorem 4.1. den $|S(G)| = 2$ ve $|M(G)| = n - 2$ dir. $G_1(G)$ birim grafının Schultz indeksi

$$\begin{aligned}
D'(G_I(G)) &= \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} [\deg(u) + \deg(v)]d(u,v) \\
&= \sum_{u \sim e; u \in M(G)} [\deg(u) + \deg(e)].1 \\
&+ \sum_{u \sim e; u \in S(G) \setminus \{e\}} [\deg(u) + \deg(e)].1 \\
&+ \sum_{u \sim u^{-1}; u \in M(G)} [\deg(u) + \deg(u^{-1})].1 \\
&+ \sum_{u \in M(G); v \in S(G) \setminus \{e\}} [\deg(u) + \deg(v)].2 \\
&+ \sum_{u \neq v; u, v \in M(G)} [\deg(u) + \deg(v)].2 \tag{4.2}
\end{aligned}$$

dir. İlk toplamda $M(G)$ kümesine ait her köşe yani $n - 2$ köşe e ye komşu ve $\deg(u) = 2$, $\deg(e) = n - 1$ olduğundan ilk toplam

$$\sum_{u \sim e; u \in M(G)} [\deg(u) + \deg(e)].1 = (n - 2)(n + 1) \tag{4.3}$$

dir.

İkinci toplamda e köşesine komşu bir tek $u \in S(G)$ köşesi olduğundan $\deg(u) = 1$ dir. Bu durumda ikinci toplam

$$\sum_{u \sim e; u \in S(G) \setminus \{e\}} [\deg(u) + \deg(e)].1 = (1 + n - 1).1 = n \tag{4.4}$$

dir.

Üçüncü toplamda $u, u^{-1} \in M(G)$ ise $u \sim u^{-1}$, $u \sim e$ ve $u^{-1} \sim e$ dir ve $\deg(u) = \deg(u^{-1}) = 2$ dir. Buradan ikinci toplam, t üçgenlerin sayısı olmak üzere $4t$ dir. Sonuç 4.7. den $2(n - 2)$ ye eşittir, yani

$$\sum_{u \sim u^{-1}; u \in M(G)} [\deg(u) + \deg(u^{-1})].1 = 2(n-2) \quad (4.5)$$

dir.

Dördüncü toplam $\sum_{u \in M(G); v \in S(G) \setminus \{e\}} [\deg(u) + \deg(v)].2$ yi göz önüne alalım. $u \in M(G)$, $v \in S(G) \setminus \{e\}$ olduğundan $\deg(u) = 2$ ve $\deg(v) = 1$ dir. $v \in S(G) \setminus \{e\}$ köşesi sadece e köşesine komşu ve $M(G)$ de hiçbir köşeye komşu değildir. Dolayısıyla v köşesinden $M(G)$ nin $n-2$ tane köşesine olan uzaklık 2 dir. O halde 2 uzunluğundaki yol sayısı $n-2$ dir.

$$\sum_{u \in M(G); v \in S(G) \setminus \{e\}} [\deg(u) + \deg(v)].2 = (n-2).3.2 = 6(n-2) \quad (4.6)$$

dir. Ayrıca 1. Durum'a benzer olarak 2 uzunluğundaki yolların toplam sayısı

$$\begin{aligned} \frac{n^2 - n}{2} - |E(G_I(G))| &= \frac{n^2 - n}{2} - \left[\frac{3(n-2)}{2} + 1 \right] \\ &= \frac{(n-2)^2}{2} \end{aligned}$$

dir.

$\sum_{u \neq v; u, v \in M(G)} [\deg(u) + \deg(v)].2$ son toplamını göz önüne alalım. $u, v \in M(G)$ için 2 uzunluğundaki yolların sayısı

$$\frac{(n-2)^2}{2} - (n-2) = \frac{(n-2)(n-4)}{2}$$

dir. O halde

$$\begin{aligned} \sum_{u \neq v; u, v \in M(G)} [\deg(u) + \deg(v)].2 &= 8 \frac{(n-2)(n-4)}{2} \\ &= 4(n-2)(n-4) \end{aligned} \quad (4.7)$$

dür. (4.3)-(4.7) değerleri (4.2) de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
D'(G_I(G)) &= (n-2)(n+1) + n + 2(n-2) + 6(n-2) + 4(n-2)(n-4) \\
&= (n-2)(5n-7) + n \\
&= 5n^2 - 16n + 14
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.10. G , n . mertebeden devirli bir grup olsun. Bu durumda $G_I(G)$ birim grafının birinci Zagreb indeksi

$$M_1(G_I(G)) = \begin{cases} n^2 + 2n - 3, & n \text{ tek ise} \\ n^2 + 2n - 6, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

dir.

İspat: n bir çift tamsayı olsun. Buradan $|S(G)| = 2$ ve $|M(G)| = n - 2$ dir. $G_I(G)$ birim grafının birinci Zagreb indeksi

$$\begin{aligned}
M_1(G_I(G)) &= \sum_{u \in G} (\deg(u))^2 \\
&= \sum_{u \in S(G)} (\deg(u))^2 + \sum_{u \in M(G)} (\deg(u))^2 \\
&= 1 + (\deg(e))^2 + 4|M(G)| \\
&= 1 + (n-1)^2 + 4(n-2) \\
&= n^2 + 2n - 6
\end{aligned}$$

dir.

n bir tek tamsayı olsun. Buradan $|S(G)| = 1$ ve $|M(G)| = n - 1$ dir. $G_I(G)$ birim grafının birinci Zagreb indeksi

$$\begin{aligned}
M_1(G_I(G)) &= \sum_{u \in G} (\deg(u))^2 \\
&= \sum_{u \in S(G)} (\deg(u))^2 + \sum_{u \in M(G)} (\deg(u))^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (n - 1)^2 + 4|M(G)| \\
&= (n - 1)^2 + 4(n - 1) \\
&= n^2 + 2n - 3
\end{aligned}$$

dir.

Teorem 4.11. G , n . mertebeden devirli bir grup olsun. Bu durumda $G_I(G)$ birim grafının ikinci Zagreb indeksi

$$M_2(G_I(G)) = \begin{cases} 2n^2 - 2n, & n \text{ tek ise} \\ 2n^2 - 3n - 1, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

dir.

İspat: n bir çift tamsayı olsun. Bu durumda $G_I(G)$ birim grafının ikinci Zagreb indeksi

$$\begin{aligned}
M_2(G_I(G)) &= \sum_{uv \in E(G)} \deg(u) \cdot \deg(v) \\
&= \sum_{u \sim e; u \in M(G)} \deg(u) \cdot \deg(e) + \sum_{u \sim e; u \in S(G) \setminus \{e\}} \deg(u) \cdot \deg(e) \\
&\quad + \sum_{u \sim u^{-1}; u \in M(G)} [\deg(u) \cdot \deg(u^{-1})] \cdot 1 \\
&= 2(n-2)(n-1) + (n-1) + 4t \\
&= 2(n-2)(n-1) + (n-1) + 2(n-2) \\
&= 2n^2 - 3n - 1
\end{aligned}$$

dir. n bir tek tamsayı olsun. Bu durumda $G_I(G)$ birim grafının ikinci Zagreb indeksi

$$\begin{aligned}
M_2(G_I(G)) &= \sum_{uv \in E(G)} \deg(u) \cdot \deg(v) \\
&= \sum_{u \sim e; u \in M(G)} \deg(u) \cdot \deg(e) + \sum_{u \sim u^{-1}; u \in M(G)} [\deg(u) \cdot \deg(u^{-1})] \cdot 1 \\
&= 2(n-1)(n-1) + 4t \\
&= 2(n-1)^2 + 2(n-1) \\
&= 2n^2 - 2n
\end{aligned}$$

dir. Böylece ispat biter.

Teorem 4.12. G , n . mertebeden devirli bir grup olsun. Bu durumda $G_I(G)$ birim grafinin Wiener indeksi

$$W(G_I(G)) = \begin{cases} \frac{2n^2 - 5n + 3}{2}, & n \text{ tek ise} \\ \frac{2n^2 - 5n + 4}{2}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

dir.

İspat: n bir çift tamsayı olsun. O halde Teorem 4.9. un ispatındaki uzaklıklar ve yolların sayısı kullanılırsa;

$$\begin{aligned} W(G_I(G)) &= \sum_{\{u,v\} \subseteq G} d(u,v) \\ &= \sum_{u \sim e; u \in M(G)} d(u,e) + \sum_{u \sim e; u \in S(G) \setminus \{e\}} d(u,e) \\ &+ \sum_{u \sim u^{-1}; u \in M(G)} d(u,u^{-1}) + \sum_{u \in M(G); v \in S(G) \setminus \{e\}} d(u,v) \\ &+ \sum_{u \neq v; u,v \in M(G)} d(u,v) \\ &= (n-2) \cdot 1 + 1 + t \cdot 1 + |M(G)| \cdot 2 + \frac{(n-2)(n-4)}{2} \cdot 2 \\ &= n - 1 + \frac{n-2}{2} + 2(n-2) + (n-2)(n-4) \\ &= \frac{2n^2 - 5n + 4}{2} \end{aligned}$$

elde edilir.

n bir tek tamsayı olsun. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned}
W(G_I(G)) &= \sum_{\{u,v\} \subseteq G} d(u,v) \\
&= \sum_{u \sim e; u \in M(G)} d(u,e) + \sum_{u \sim u^{-1}; u \in M(G)} d(u,u^{-1}) \\
&+ \sum_{u \neq v; u,v \in M(G)} d(u,v) \\
&= (n-1) \cdot 1 + t \cdot 1 + \frac{(n-1)(n-3)}{2} \cdot 2 \\
&= \frac{3(n-1)}{2} + (n-1)(n-3) \\
&= \frac{2n^2 - 5n + 3}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.13. G , n . mertebeden devirli bir grup olsun. Bu durumda $G_I(G)$ birim grafının Harary indeksi

$$H(G_I(G)) = \begin{cases} \frac{n^2 + 2n - 3}{4}, & n \text{ tek ise} \\ \frac{n^2 - 2n - 4}{4}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

dir.

İspat: n bir çift tamsayı olsun. O halde Teorem 4.9. un ispatındaki uzaklıklar ve yolların sayısı kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
H(G_I(G)) &= \sum_{\{u,v\} \subseteq G} \frac{1}{d(u,v)} \\
&= \sum_{u \sim e; u \in M(G)} \frac{1}{d(u,e)} + \sum_{u \sim e; u \in S(G) \setminus \{e\}} \frac{1}{d(u,e)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{u \sim u^{-1}; u \in M(G)} \frac{1}{d(u, u^{-1})} + \sum_{u \in M(G); v \in S(G) \setminus \{e\}} \frac{1}{d(u, v)} \\
& + \sum_{u \neq v; u, v \in M(G)} \frac{1}{d(u, v)} \\
& = (n-2) \cdot \frac{1}{1} + 1 \cdot \frac{1}{1} + t \cdot \frac{1}{1} + |M(G)| \cdot \frac{1}{2} + \frac{(n-2)(n-4)}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
& = n-1 + \frac{n-2}{2} + \frac{(n-2)}{2} + \frac{(n-2)(n-4)}{4} \\
& = \frac{n^2 - 2n - 4}{4}
\end{aligned}$$

elde edilir.

n bir tek tamsayı olsun. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned}
H(G_I(G)) & = \sum_{\{u,v\} \subseteq G} \frac{1}{d(u, v)} \\
& = \sum_{u \sim e; u \in M(G)} \frac{1}{d(u, e)} + \sum_{u \sim u^{-1}; u \in M(G)} \frac{1}{d(u, u^{-1})} \\
& + \sum_{u \neq v; u, v \in M(G)} \frac{1}{d(u, v)} \\
& = (n-1) \cdot \frac{1}{1} + t \cdot \frac{1}{1} + \frac{(n-1)(n-3)}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
& = \frac{3(n-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-3)}{4} \\
& = \frac{n^2 + 2n - 3}{4}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada sonlu devirli grupların birim grafları ele alınmıştır. Öncelikle çalışmaya temel teşkil eden çalışmalar incelenmiştir. Daha sonra G sonlu devirli grubunun $S(G)$ ve $M(G)$ ayrık alt kümelerinin kardinalitesi ve özellikleri kullanılarak sonlu devirli grupların birim grafları yeniden ele alınmış ve bu graflardaki üçgen sayısı, kenar sayısı belirlenmiştir. Daha sonra sonlu devirli grupların birim graflarının Schultz, Gutman, birinci Zagreb, ikinci Zagreb, Wiener ve Harary indeksleri hesaplanmıştır.

5.2. Öneriler

İki sonlu devirli grubun birim grafları için graf işlemleri göz önüne alınarak oluşan grafların üçgen sayıları, kenar sayıları ve topolojik indeksleri hesaplanabilir.

KAYNAKLAR

- AHMADI, M.R., and JAHANI-NEZHAD, R., 2011. Energy and Wiener index of zero divisor graphs, *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*, vol. 2: 45-51.
- ANDERSON, D.F., and LIVINGSTON, P.S., 1999. The zero-divisor graph of commutative ring, *Journal of Algebra*, 217: 434-447.
- ANDERSON, D.F., and BADAWI, A., 2008. The total graph of a commutative ring, *Journal of Algebra*, 320: 2706–2719.
- ASHRAFI, N., MAIMANI, H.R., and YASSEMI, S., 2010. Unit graphs associated with rings, *Comm. Algebra* 38(8): 2851–2871.
- BIGGS, N., 1993. *Algebraic Graph Theory (Second Edition)*. The Press Syndicate of The University Cambridge, New York, USA.
- BONDY, J. A. and MURTY, U.S.R., 1976. *Graph Theory with Applications*. Elsevier Science Publishing Co. Inc, New York, USA, 264p.
- CEYLAN, İ., and METE, F., 2018. Türkçe Kuralsız (Devrik) Cümle Yapısının Graf Çizimler ile Gösterilmesi, *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 33(3): 631-643.
- CHALAPATHI, T., and KUMAR, R. V.M.S.S., 2018. Invertible graphs of finite groups, *Computer Science Journal of Moldova*, 26(2): 126-145.
- DOBRYNIN, A.A., and KOCHETOVA, A.A., 1994. Degree Distance of a Graph: A degree analogue of the Wiener index, *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*, 34: 1082-1086.
- GUTMAN, I., and TRINAJSTIC, N., 1972. Graph theory and molecular orbitals, Total φ -electron energy of alternant hydrocarbons, *Chemical Physics Letters*, 17: 535-538.
- GUTMAN, I., 1994. Selected properties of the Schultz molecular topological index, *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*, 34: 1087-1089.
- KANDASAMY, W.B.V., and SMARANDACHE, F., 2009. *Groups as Graphs*, EdituraCuArt <http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/eBooks-otherformats.htm>.
- NIKMEHR, M.J., HEIDARZADEH, L., and SOLEIMANI, N., 2014. Calculating Different topological indices of total graph of Z_n , *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* 51(1): 133-140.
- SOLE, P., 1995. Expanding and forwarding, *Discrete Appl. Math.*, 58: 67–78.
- SUTHAR, S., and PRAKASH, O., 2017. Energy and Wiener index of Total Graph over Ring Z_n , *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 63: 485–495.
- PLAVSIC, D., NIKOLIC, S., TRINAJSTIC, N., and MIHALIC, Z., 1993, On the Harary index for the characterization of chemical graphs, *J. Math. Chem.* 12: 235-250.
- WIENER, H., 1947. Structural determination of paraffin boiling points, *Journal of the American Chemical Society*, 69: 17-20.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Yakup KIRĞIL
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Osmaniye, 23/10/1994
e-mail : yakupkircil10@gmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: 80.Yıl Cumhuriyet Anadolu Lisesi, Osmaniye	2012
Üniversite	: Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir	2015
Yüksek Lisans	: Harran Üniversitesi, Şanlıurfa	2020

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2015-	Milli Eğitim Bakanlığı	Matematik Öğretmeni

YAYINLAR

1. YALÇIN, N.F., KIRĞIL, Y., 2020. Identity graphs of finite cyclic groups, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi 22 (1): 149-158.