T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

# KÜREMSİ DALGA DENKLEMİNİN SANKİ-SPEKTRAL YÖNTEMLERLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Hülya AYTAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2017

Doç. Dr. Haydar ALICI danışmanlığında, Hülya AYTAR'ın hazırladığı "**Küremsi Dalga Denkleminin Sanki-Spektral Yöntemlerle Sayısal Çözümleri**" konulu bu çalışma 29/12/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

| | | | İmza |
|---|---|---|---|
| Danışman | : | Doç. Dr. Haydar ALICI | ................... |
| Üye | : | Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ | ................... |
| Üye | : | Yrd. Doç. Dr. Hüseyin ALTUNDAĞ | ................... |

**Bu Tezin Matematik Anabilim Dalı'nda Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.**

**Prof. Dr. Halil Murat ALĞIN**
**Enstitü Müdürü**

# İÇİNDEKİLER

# ÖZET

**Yüksek Lisans Tezi**

**KÜREMSİ DALGA DENKLEMİNİN SANKİ-SPEKTRAL YÖNTEMLERLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

**Hülya AYTAR**

**Harran Üniversitesi**
**Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman : Doç. Dr. Haydar ALICI**
**Yıl: 2017, sayfa: 39**

Bu tezde, küremsi dalga denkleminin bant genişliği parametresinin hem küçük hem de çok büyük değerleri için sanki-spektral yöntemlerle sayısal çözümleri elde edilmiştir. Bant genişliği parametresinin küçük değerleri için denklem Jacobi diferansiyel denklemini andıran bir forma dönüştürülüp uygun Jacobi sanki-spektral yöntemi kullanılarak sayısal çözümler hesaplanmıştır. Bu yöntem bant genişliği parametresinin çok büyük değerleri için kullanışsız bir hal almaktadır. Bu yüzden denklem cebirsel forma dönüştürülüp gönderimli Chebyshev sanki-spektral yöntemi kullanılarak yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Yöntemin verimliliğini görmek için literatürde var olan sayısal sonuçlarla karşılaştırmalar yapılmıştır.

**ANAHTAR KELİMELER:** Küremsi dalga denklemi, klasik dik polinomlar, sanki-spektral yöntemler.

# ABSTRACT

**MSc Thesis**

**NUMERICAL SOLUTION OF THE SPHEROIDAL VAWE EQUATION BY USING PSEUDOSPECTRAL METHODS**

**Hülya AYTAR**

**Harran University**
**Graduate School of Natural and Applied Sciences**
**Department of Mathematics**

**Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Haydar ALICI**
**Year: 2017, page: 39**

In this thesis, numerical solution of the spheroidal vawe equation is obtained by using pseudospectral methods for both small and very large values of the bandwidth parameter. For small values of the bandwidth parameter, spheroidal vawe equation is transformed into a form resembling the Jacobi differential equation and hence, it is approximated by using suitable Jacobi pseudospectral method. However, the method becomes useless especially for very large values of the bandwidth parameter. For this reason, first it is transformed into an equivalent algebraic form and then approximated by using the mapped Chebyshev pseudospectral method. Comparison with literature results is made to see the efficiency of the present method.

**KEYWORDS:** Spheroidal wave equation, classical orthogonal polynomials, pseudospectral methods.

# TEŞEKKÜR

Çalışmalarımız boyunca desteklerini esirgemeyen, engin bilgileriyle beni bilgilendiren çok kıymetli ve saygıdeğer hocam Doç. Dr. Haydar ALICI'ya teşekkür ederim.

Ayrıca, tez jürisinde bulunan ve tezin son halini almasında önemli katkıları bulunan Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ ve Yrd. Doç. Dr. Hüseyin ALTUNDAĞ hocalarıma da teşekkürü borç bilirim.

Son olarak, bana her koşulda ve her durumda destek olan çok değerli aile bireylerime de teşekkür ederim.

# ÇİZELGELER DİZİNİ

# 1. GİRİŞ

Fiziğin optik, atomik, moleküler ve nükleer gibi bir çok alanında karşımıza çıkan küremsi dalga denklemi

$$\left[-\frac{1}{\cos\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\cos\theta\frac{d}{d\theta}\right)+\frac{m^2}{\cos^2\theta}+c^2\sin^2\theta\right]y=\lambda y, \quad y(\pm\pi/2)=0 \tag{1.1}$$

ifadesi ile verilir (Barakat ve Abodayeh, 2005). Burada $\lambda$ özdeğer parametresi, $m$ zonal dalga sayısı ve $c$ bant genişliği parametresi olarak bilinir. Helmholtz denklemine küremsi koordinatlarda değişkenlerine ayırma yönteminin uygulanmasıyla elde edilen üç denklemden biri küremsi dalga denklemidir ve bu denklemin çözümleri küremsi dalga fonksiyonları olarak bilinir. Bu fonksiyonların keyfi bir $c$ ve $m$ değeri için yüksek doğruluktaki yaklaşık temsilleri, Helmholtz denkleminin özellikle dalga sayısının büyük değerleri için yaklaşık çözümlerini elde etmede gereklidir.

Ayrıca, bu fonksiyonların bazı adi ve kısmi differansiyel denklemlerin çözümlerinde, özellikle bandlimited fonksiyonları içeren problemlerde, baz olarak kullanıldığında, aynı doğruluğu elde etmek için klasik ortogonal polinom bazlarına nazaran dalga boyu başına daha az sayıda grid noktasına ihtiyaç duyduğu rapor edilmiştir (Xiao ve ark. , 2001). Dolayısı ile küremsi dalga denkleminin yaklaşık çözümlerini özellikle büyük $c$ değerleri için elde etmek önem arzetmektedir.

Bu çalışmada Jacobi sanki-spektral yöntemini kullanarak küçük, dönüştürülmüş Chebyshev sanki-spektral yöntemini kullanarak da büyük $c$ değerleri için iyi sonuç veren iki algoritma verilmesi hedeflenmektedir.

Bunun için önce denklemi nümerik açıdan daha kolay ele alınabilir bir forma dönüştüreceğiz. Uygun dönüşümler kullanıldığında denklemde ne sınır değer koşulu ne de tekillik kalacaktır. Ayrıca dönüştürülmüş denklemden, hangi Jacobi polinomlarının en uygun baz kümesi teşkil edeceğini de anlayabileceğiz.

## 1.1. Ön Bilgiler

**Tanım 1.1** *Euler Gamma fonksiyonu*

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \quad x>0 \tag{1.2}$$

*genelleştirilmiş integrali ile tanımlanır.*

Hemen tanıma kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt \\ &= \lim_{b\longrightarrow\infty} \int_0^b t^x e^{-t} dt \\ &= \underbrace{\lim_{b\longrightarrow\infty} (-t^x e^{-t})\Big|_0^b}_{0} + x\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \qquad (1.3) \\ \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

olduğu görülür ve

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \tag{1.4}$$

ifadesini kullanarak gama fonksiyonunun tanım kümesi negatif tamsayılar ve sıfır hariç tüm reel sayılara analitik devam yöntemi ile genişletilebilir. Yine Gamma fonksiyonunun tanımından $a > 0$ ve $x > 0$ olmak üzere

$$a^{-x} = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^\infty e^{-at} t^{x-1} dt \tag{1.5}$$

olduğu kolayca görülür.

**Tanım 1.2** *a reel veya kompleks bir sayı, n sıfır ya da pozitif bir tamsayı olmak üzere*

$$\begin{aligned}(a)_n &= a(a+1)(a+2)...(a+n-1), \quad n \geq 1 \\ (a)_0 &= 1\end{aligned} \tag{1.6}$$

*ifadesi Pochhammer sembolü olarak bilinir.*

**Lemma 1.3** *Pochhammer sembolü, Gama fonksiyonu cinsinden*

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \tag{1.7}$$

*şeklinde ifade edilebilir.*

**İspat.** (1.4) eşitliğinden faydalanılarak $\Gamma(a+n)$ ifadesi

$$\begin{aligned}\Gamma(a+n) &= (a+n-1)\Gamma(a+n-1) \\ &= (a+n-1)(a+n-2)\Gamma(a+n-2) \\ &\vdots \\ &= (a+n-1)(a+n-2)\dots(a+1)a\Gamma(a) \\ &= (a)_n\Gamma(a)\end{aligned} \tag{1.8}$$

şeklinde yazılabilir. eşitliğin her iki tarafı $\Gamma(a)$ ile bölünürse (1.7) eşitliği elde edilir. $\square$

## 1.2. Hipergeometrik Tip Denklem ve Bazı Özellikleri

Klasik ortogonal polinomlar hipergeometrik tip diferansiyel denklemin polinom çözümleri olduğundan burada ilk olarak hipergeometrik tip diferansiyel denklemin bazı temel özelliklerini vereceğiz. Hipergeometrik tip diferansiyel denklemler teorik ve pratik araştırmalarda, özellikle uygulamalı matematiğin denklemlerinin belirli koordinat sistemlerinde değişkenlere ayrılması metodu ile çözülmesinden ortaya çıkar. Katsayı fonksiyonları $\sigma(x)$ ve $\tau(x)$ sırasıyla, en fazla ikinci ve birinci dereceden polinomlar ve $\lambda$ sabit olmak üzere

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0 \tag{1.9}$$

diferansiyel denklemine hipergeometrik diferansiyel denklem olarak bilinir. Bu denklemin çözümlerine de Hipergeometrik tip fonksiyonlar denir. Bu denklem,

$$[\sigma(x)\rho(x)]' = \tau(x)\rho(x) \tag{1.10}$$

denkleminin çözümü olan $\rho(x)$ ağırlık fonksiyonu yardımıyla

$$[\sigma(x)\rho(x)y']' + \lambda\rho(x)y = 0 \tag{1.11}$$

özeşlenik formda da yazılabilir.

**Teorem 1.4** *Hipergeometrik tipteki bir fonksiyonun her mertebeden türevleri de hipergeometrik tiptendir.*

**İspat.** (1.9) denkleminin $x$ değişkenine göre bir kez türevi alnırsa

$$\sigma(x)y''' + [\sigma'(x) + \tau(x)]y'' + (\tau' + \lambda)y' = 0 \tag{1.12}$$

denklemde $v_1 = y'$ alınırsa

$$\sigma(x)v_1'' + \tau_1(x)v_1' + \mu_1 v_1 = 0 \tag{1.13}$$

elde edilir. Burada $\tau_1(x) = \sigma'(x) + \tau(x)$ birinci dereceden polinom ve $\mu_1 = \tau' + \lambda$ sabittir. Tümevarım yönteminden faydalanılarak $v_n = y^{(n)}$ isimlendirmesi yapılırsa

$$\sigma(x)v_n'' + \tau_n(x)v_n' + \mu_n v_n = 0 \quad , v_0 = y \tag{1.14}$$

bulunur. Burada

$$\tau_n(x) = \sigma'(x) + \tau_{n-1}(x) = n\sigma'(x) + \tau(x) \quad , \tau_0(x) = \tau(x) \tag{1.15}$$

ve

$$\mu_n = \mu_{n-1} + \tau' n - 1 = \lambda + n\tau' + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma'' \quad , \mu_0 = \lambda \tag{1.16}$$

ile verilir. Dikkat edilirse $\tau_n$ en fazla birinci derece bir polinomdur ve $\mu_n$ terimi sabittir. Yani (1.14) denklemi de hipergeometrik tip bir denklemdir. Bunun çözümleri olan $v_n$ dolayısı ile $y^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ fonksiyonları da hipergeometrik tiptendir. □

**Teorem 1.5** *(Nikiforov ve Uvarov, 1988)* (1.9) *denkleminin* $\mu_n = 0$*, yani*

$$\lambda := \lambda_n = -n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma'' \tag{1.17}$$

*özel değeri için derecesi n olan* $P_n(x)$ *polinom çözümleri vardır.*

**İspat.** $\mu_n = 0$ için (1.14) denkleminin $v_n = C$ gibi bir sabit çözümü olduğu açıktır. $v_n(x) = y^{(n)}(x) = C$ olduğundan (1.4) denkleminin çözümü olan $y(x)$ fonksiyonu derecesi $n$ olan bir polinom olmak zorundadır. Öte yandan, $\mu_n = 0$ olduğundan, (1.16) eşitliğinden (1.17) ifadesi kolayca elde edilir. □

**Teorem 1.6** *Bu polinom çözümler Rodriguez formülü olarak bilinen*

$$P_n(x) = B_n \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n}[\sigma^n(x)\rho(x)] \tag{1.18}$$

*ifadesi ile verilir.*

**İspat.** Rodriguez Formülü (1.9) ve (1.14) denklemlerinin özeşlenik formlarından faydalanılarak

$$[\sigma(x)\rho(x)]' = \tau(x)\rho(x) \tag{1.19}$$

$$[\sigma(x)\rho_n(x)]' = \tau_n(x)\rho_n(x) \tag{1.20}$$

olmak üzere

$$[\sigma(x)\rho(x)y'(x)]' + \lambda\rho(x)y(x) = 0 \tag{1.21}$$

$$[\sigma(x)\rho_n(x)v_n'(x)]' + \mu_n\rho_n(x)v_n(x) \tag{1.22}$$

denklemleri dikkate alınarak (1.19) den

$$\rho(x) = exp\left(\int \frac{\tau(x) - \sigma'(x)}{\sigma(x)} dx\right) \tag{1.23}$$

elde edilir. Aslında $\rho_n(x)$ ve $\rho(x)=\rho_0(x)$ arasında bağlantı vardır. Burada (1.20)

$$\frac{[\sigma(x)\rho_n(x)]'}{\rho_n(x)}=\tau_n(x)=n\sigma'(x)+\tau(x) \tag{1.24}$$

elde edilen ifade (1.19) eşitliğinden faydalanılarak

$$\frac{[\sigma(x)\rho_n(x)]'}{\rho_n(x)}=n\sigma'(x)+\frac{\sigma(x)\rho(x)]'}{\rho(x)} \tag{1.25}$$

şeklinde yazılabilir. Son eşitlikten

$$\frac{\rho_n'(x)}{\rho_n(x)}=n\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}+\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} \tag{1.26}$$

şeklinde yazıldığında $\rho_n(x)=\sigma^n(x)\rho(x)$ eşitliği bulunur. Bu eşitlikten ise

$$\sigma(x)\rho_n(x)=\sigma^{n+1}(x)\rho(x)=\rho_{n+1}(x) \tag{1.27}$$

elde edilir. Ayrıca $v_n'(x)=v_{n+1}(x)$ olduğundan (1.20) denklemi

$$[\rho_{n+1}(x)\sigma_{n+1}(x)]'+\mu_n(x)\rho_n(x)v_n(x)=0 \tag{1.28}$$

halini alır. Buradan

$$\rho_n(x)v_n(x)=-\frac{1}{\mu_n}[\rho_{n+1}(x)v_{n+1}(x)]' \tag{1.29}$$

olur. Burada $m<n$ için

$$\begin{aligned}\rho_n(x)v_n(x)&=-\frac{1}{\mu_m}[\rho_{m+1}(x)v_{m+1}(x)]'\\&=(-\frac{1}{\mu_m})(-\frac{1}{\mu_{m+1}})[\rho_{m+2}(x)v_{m+2}(x)]''\\&=(-1)^2\frac{1}{\mu_m\mu_{m+1}}[\rho_{m+2}(x)v_{m+2}(x)]''\\&=(-1)^n\frac{1}{\mu_m\mu_{m+1}\ldots\mu_{m+n+1}}[\rho_{m+n}(x)v_{m+n}(x)]^{(n)}\end{aligned} \tag{1.30}$$

bulunur. Son eşitlikte $n$ yerine $n-m$ yazılırsa

$$\begin{aligned}\rho_m(x)v_m(x)&=(-1)^{n-m}\frac{1}{\mu_m\mu_{m+1}\ldots\mu_{m+n-1}}[\rho_n(x)v_n(x)]^{(n-m)}\\&=\frac{(-1)^n\mu_0\mu_1\ldots\mu_{m-1}}{(-1)^m\mu_0\mu_1\ldots\mu_{m-1}\mu_m\ldots\mu_{n-1}}[\rho_n(x)v_n(x)]^{(n-m)}\end{aligned} \tag{1.31}$$

elde edilir. Bu ise

$$\rho_m v_m=\frac{A_m}{A_n}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(\rho_n v_n) \tag{1.32}$$

eşitliğini verir. Burada

$$A_j(\lambda) = (-1)^j \prod_{k=0}^{j-1} \mu_k(\lambda), \quad A_{0m} = 1 \tag{1.33}$$

şeklindedir. (1.33) ifadesinde $\lambda = \lambda_n$ seçilirse

$$A_{mn} := A_m(\lambda_n) = \frac{n!}{(n-m)!} \prod_{k=0}^{m-1} [\tau' + \frac{1}{2}(n+k-1)\sigma''], \quad A_{0n} = 1 \tag{1.34}$$

ifadesi elde edilir. $v_n(x) = C_0$ olduğundan (1.32) eşitliği

$$v_m(x) = P_n^{(m)}(x) = B_n \frac{A_{mn}}{\rho_m} \frac{d^{m-n}}{dx^{n-m}} \rho_n(x) \tag{1.35}$$

halini alır. Burada

$$B_n = \frac{C_0}{A_n(\lambda_n)} = \frac{P_n^{(n)}}{A_{nn}} \tag{1.36}$$

sabittir. Özel olarak, (1.35) eşitliğinde $m = 0$ seçilirse hipergeometrik tip polinomların bir açık gösterimi olan

$$P_n(x) = B_n \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\sigma^n(x)\rho(x)] \tag{1.37}$$

Rodriguez formülü elde edilir. Burada $B_n$ normalizasyon sabiti olarak düşünülebilir. □

**Teorem 1.7** (1.9) *denkleminin katsayıları* $k = 0, 1, 2, ...$ *için*

$$\sigma(x)\rho(x)x^k \Big|_a^b = 0 \tag{1.38}$$

*eşitliğini sağlasın. O zaman,* $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_m, \ldots, \lambda_n \ldots\}$ *değerlerine karşılık gelen* $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m(x), \ldots, P_n(x), \ldots\}$ *hipergeometrik tipteki polinomların dizisi* $(a, b)$ *aralığında*

$$\int_a^b P_m(x)P_n(x)\rho(x)dx = \mathscr{N}_n^2 \delta_{mn} \tag{1.39}$$

*iç çarpımı anlamında ortogonaldir. Burada* $\mathscr{N}_n$ *normalizasyon sabitidir.*

Öte yandan (1.22) ve (1.27) eşitliklerinden ve $v_k = P_n^{(k)}$ ifadesinden faydalanılarak $\mu_{kn} = \mu_k(\lambda_n)$ olmak üzere

$$\left[\sigma(x)\rho_k(x)P_n^{(k+1)}(x)\right]' + \mu_{kn}\rho_k(x)P_n^{(k)}(x) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{1.40}$$

yazılabilir. Ayrıca (1.38) sağlandığında

$$\sigma(x)\rho_k(x)x^k \Big|_a^b = 0 \tag{1.41}$$

şartı otomatik olarak sağlanacağından $\{P_0^{(k)}(x), P_1^{(k)}(x), P_2^{(k)}(x), \ldots, P_m^{(k)}(x), \ldots,$ $P_n^{(k)}(x), \ldots\}$ dizisi $(a,b)$ aralığında $\rho_k(x)$ ağırlık fonksiyonu altında

$$\int_a^b P_m^{(k)}(x) P_n^{(k)}(x) \rho_k(x) dx = \mathscr{N}_{kn}^2 \delta_{mn}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{1.42}$$

anlamında ortogonaldir. Dikkat edilirse, $\mathscr{N}_n = \mathscr{N}_{0n}$, $\rho_0(x) = \rho(x)$ ve $P_m^{(0)}(x) = P_m(x)$ olmak üzere son ifade $k = 0$ özel durumunda (1.39) ifadesi elde edilir.

**Teorem 1.8** *Hipergeometrik tip denklemin çözümü olan*

$$P_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots \tag{1.43}$$

*polinomunun başkatsayısı*

$$a_n = \frac{1}{n!} A_{n-1,n} B_n [(n-1)\sigma'' + \tau'] \tag{1.44}$$

*ve alt başkatsayısı*

$$\frac{b_n}{a_n} = n \frac{(n-1)\sigma'(0) + \tau(0)}{(n-1)\sigma'' + \tau'} \tag{1.45}$$

*eşitlikleriyle verilir.*

**İspat.** (1.43) eşitliğinin $x$ değişkenine göre $k$ defa türevi alınırsa

$$P_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} b_n x^{n-k-1} + \ldots \tag{1.46}$$

elde edilir. Burada $k = n-1$ alınırsa

$$P_n^{(n-1)}(x) = n! a_n x + (n-1)! b_n \tag{1.47}$$

bulunur. Öte yandan (1.35) eşitliği $k = n-1$ için

$$P_n^{(n-1)}(x) = \frac{A_{n-1,n} B_n}{\sigma^{(n-1)}(x)\rho(x)} \frac{d}{dx} [\sigma^n(x)\rho(x)] \tag{1.48}$$

halini alır ve bu eşitliğin yeniden düzenlenmesiyle

$$P_n^{(n-1)}(x) = A_{n-1,n} B_n [(n-1)\sigma'(x) + \tau(x)] \tag{1.49}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikte $\sigma(x)$ ve $\tau(x)$ polinomlarının sıfır etrafındaki Taylor seri açılımları

$$\sigma(x) = \sigma(0) + \sigma'(0)x + \frac{1}{2}\sigma'' x^2 \tag{1.50}$$

$$\tau(x) = \tau(0) + \tau' x \tag{1.51}$$

kullanılırsa (1.49) ifadesi

$$P_n^{(n-1)}(x) = A_{n-1,n}B_n\left\{\left[(n-1)\sigma'' + \tau'\right]x + (n-1)\sigma'(0) + \tau(0)\right\} \tag{1.52}$$

halini alır. Son olarak (1.47) ve (1.52) ifadelerinin birbirlerine eşitlenmesiyle (1.44) ve (1.45) kolayca elde edilir. □

**Teorem 1.9** (1.39) *eşitliğindeki normalizasyon sabiti*

$$\mathcal{N}_n^2 = \frac{(-1)^n}{A_{nn}}(n!a_n^2)\int_a^b \rho_n(x)dx \tag{1.53}$$

*ifadesiyle verilir.*

**İspat.** (1.22) ve (1.27) eşitliklerinden faydalanılarak $\mu_{kn} = \mu_k(\lambda_n)$ olmak üzere

$$\frac{d}{dx}[\rho_{k+1}(x)P_n^{(k+1)}(x)] + \mu_{kn}\rho_k(x)P_n^{(k)}(x) = 0 \tag{1.54}$$

yazılabilir. Son ifade $P_n^{(k)}(x)$ ile çarpılıp $(a,b)$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_a^b P_n^{(k)}[\rho_{k+1}P_n^{(k+1)}]'dx + \mu_{kn}\int_a^b \rho_k[P_n^{(k)}]^2dx = 0 \tag{1.55}$$

olur. Burada ilk integrale kısmi integrasyon tekniği uygulandığında

$$\rho_{k+1}P_n^{(k+1)}P_n^{(k)}\Big|_a^b - \int_a^b \rho_{k+1}[P_n^{(k+1)}]^2dx + \mu_{kn}\int_a^b \rho_k[P_n^{(k)}]^2dx = 0 \tag{1.56}$$

bulunur. Burada en soldaki terim (1.38) eşitliğinden dolayı sıfırlanır. Bu yüzden sonuç olarak

$$\mathcal{N}_{k+1,n}^2 = \mu_{kn}\mathcal{N}_{kn}^2, \quad k = 0,1,\ldots \tag{1.57}$$

bağıntısı elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{1,n}^2 &= \mu_{0n}\mathcal{N}_{0n}^2 = \mu_{0n}\mathcal{N}_n^2\\
\mathcal{N}_{2,n}^2 &= \mu_{1n}\mathcal{N}_{1n}^2 = \mu_{0n}\mu_{1n}\mathcal{N}_n^2\\
&\vdots\\
\mathcal{N}_{k,n}^2 &= \mathcal{N}_n^2\prod_{j=0}^{k-1}\mu_{jn} = (-1)^kA_{kn}\mathcal{N}_n^2
\end{aligned} \tag{1.58}$$

yazılabilir. Burada son eşitlik (1.34) ifadesinden faydalanılarak yazılmıştır. (1.47) eşitliğinden $P_n^{(n)}(x) = n!a_n$ olduğundan $m = k = n$ için (1.42) eşitliği

$$\mathcal{N}_{nn}^2 = (n!a_n)^2\int_a^b \rho_n(x)dx \tag{1.59}$$

halini alır. Ayrıca (1.58) ifadesinden

$$\mathscr{N}_n^2 = \frac{(-1)^n}{A_{nn}}\mathscr{N}_{nn}^2 = \frac{(-1)^n}{A_{nn}}(n!a_n)^2\int_a^b \rho_n(x)dx \tag{1.60}$$

bulunur. □

**Teorem 1.10** (1.39) *eşitliğindeki ortogonallik koşulu $m < n$ için*

$$\int_a^b x^m P_n(x)\rho(x)dx = 0 \tag{1.61}$$

*ifadesine denktir. Bu ise $P_n(x)$ polinomunun derecesi $n$'den küçük bütün polinomlara dik olduğu anlamına gelir.*

**İspat.** Derecesi $m$ olan keyfi bir $q_m(x)$ polinomu $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m(x)$ ortogonal polinomlarının lineer kombinasyonu

$$q_m(x) = \sum_{m}^{k=0} c_{km}P_k(x) \tag{1.62}$$

şeklinde yazılabilir. (1.39)'deki ortogonallik koşulunu kullanarak (1.62) denkleminin her iki tarafının $P_j(x)\rho(x)$ ile çarpılıp $(a,b)$ aralığında integralinin alınmasıyla

$$\int_a^b q_m(x)P_j(x)\rho(x)dx = \sum_{m}^{k=0} c_{km}\int_a^b P_k(x)P_j(x)\rho(x)dx \tag{1.63}$$

bulunur. (1.39) ortogonallik koşulu kullanılırsa kombinasyon sabitleri

$$c_{km} = \frac{1}{\mathscr{N}_k^2}\int_a^b q_m(x)P_k(x)\rho(x)dx, \quad k = 0, 1, \ldots, m \tag{1.64}$$

bulunur. Şimdi $m < n$ olmak üzere $q_m(x) = x^m$ seçilirse

$$x^m = \sum_{m}^{k=0} c_{km}P_k(x) \tag{1.65}$$

yazılır ve eşitliğin her iki tarafı $P_n(x)\rho(x)$ ile çarpılıp $(a,b)$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_a^b x^m P_n(x)\rho(x)dx = \sum_{m}^{k=0} c_{km}\int_a^b P_k(x)P_n(x)\rho(x)dx \tag{1.66}$$

elde edilir. $m < n$ ve $k$ indisinin üst sınırı $m$ olduğundan

$$\int_a^b x^m P_n(x)\rho(x)dx = 0 \tag{1.67}$$

bulunur ki bu da $P_n(x)$ polinomunun derecesi $n$'den küçük her polinoma dik olduğunu söyler. □

**Teorem 1.11** *Ortogonal polinomlar*

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.68}$$

*tipinde bir üç terimli yineleme bağıntısını sağlarlar. Burada katsayılar*

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad , \beta_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}, \quad \gamma_n = \frac{\mathcal{N}_n^2}{\mathcal{N}_{n-1}^2} \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

*eşitlikleriyle verilir. Ayrıca, $a_n$, $b_n$ ve $\mathcal{N}_n$ sırasıyla,* (1.44), (1.45) *ve* (1.53) *ifadelerinde verilmiştir.*

**İspat.**

$$xP_n(x) = \sum_{n+1}^{k=0} c_{kn} P_k(x) \tag{1.69}$$

açılımını kullanarak (1.64) eşitliğinden

$$c_{kn} = \frac{1}{\mathcal{N}_n^2} \int_a^b P_k(x) x P_n(x) \rho(x) dx \tag{1.70}$$

yazılabilir. Fakat $xP_k(x)$ derecesi $k+1$ olan bir polinom olduğundan $k+1 < n$ yani $k < n-1$, $c_{kn} = 0$ olmak zorundadır. Dolayısıyla (1.69) açılımından

$$xP_n(x) = c_{n-1,n} P_{n-1}(x) + c_{n,n} P_n(x) + c_{n+1,n} P_{n+1}(x) \tag{1.71}$$

yazılır. Elde edilen eşitlik (1.68) ile karşılaştırılırsa

$$c_{n-1,n} = \gamma_n, \quad c_{n,n} = \beta_n, \quad c_{n+1,n} = \alpha_n \tag{1.72}$$

olduğu açıktır. (1.70) eşitliğinde $k$ ve $n$ indisleri kendi aralarında yer değiştirirse integral aynı kalır. Bu söylemden

$$\mathcal{N}_k^2 c_{k,n} = \mathcal{N}_n^2 c_{n,k} \tag{1.73}$$

yazılır. $k = n-1$ alınırsa

$$\gamma_n = \frac{\mathcal{N}_n^2}{\mathcal{N}_{n-1}^2} \alpha_{n-1} \tag{1.74}$$

bulunur. Öte yandan, $P_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots$ olduğundan (1.68) eşitliği $a_n x^{n+1} + b_n x^n + \ldots = \alpha_n a_{n+1} x^{n+1} + (\alpha_n b_{n+1} + \beta_n a_n) x^n$ eşitliğini verir ki buradan

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}, \tag{1.75}$$

$$\beta_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \tag{1.76}$$

bulunur. O halde (1.75) ifadesi (1.74) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\gamma_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{\mathcal{N}_n^2}{\mathcal{N}_{n-1}^2} \tag{1.77}$$

bulunur. □

**Teorem 1.12** *$P_n(x)$ polinomunun ortogonal olduğu $(a,b)$ aralığında reel ve birbirinden farklı (basit) n tane kökü vardır.*

**İspat.** $P_n(x)$, $(a,b)$ aralığında $k$ defa işaret değiştirsin, $0 \leq k \leq n$ olduğu açıktır. İspatı tamamlamak için $k = n$ olduğunu göstermelidir. $x_j \in (a,b)$ noktaları $P_n(x)$ polinomunun işaret değiştirdiği noktalar olsun. Şimdi

$$q_k(x) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \prod_{j=1}^{k}(x - x_j), & 0 < k \leq n \end{cases} \tag{1.78}$$

polinomunu tanımlayalım. Dikkat edilirse $q_n(x)P_n(x)$ çarpımı $(a,b)$ aralığında daima pozitiftir. O halde

$$\int_a^b q_k(x)P_n(x)\rho(x)dx \neq 0 \tag{1.79}$$

olur. Bu ise ancak $k = n$ durumunda sağlanır. Çünkü $P_n(x)$ derecesi $n$'den küçük tüm polinomlara diktir (bakınız teorem 1.10). □

**Teorem 1.13** *(Darboux-Christofel formülü) Her bir ortogonal polinom için*

$$\mathscr{A}_k(x,y) = \frac{\alpha_k}{\mathscr{N}_k^2}\begin{vmatrix} P_{n+1}(x) & P_{n+1}(y) \\ P_n(x) & P_n(y) \end{vmatrix} \tag{1.80}$$

*olmak üzere*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathscr{N}_k^2} P_k(x)P_k(y) = \frac{\mathscr{A}_n(x,y)}{x-y} \tag{1.81}$$

*şeklinde bir sonlu toplam formülü vardır.*

**İspat.** (1.68) yineleme bağıntısından

$$\frac{1}{\mathscr{N}_k^2} xP_k(x) = \frac{\alpha_k}{\mathscr{N}_k^2}P_{k+1}(x) + \frac{\beta_k}{\mathscr{N}_k^2}P_k(x) + \frac{\alpha_{k-1}}{\mathscr{N}_k^2}P_{k-1}(x) \tag{1.82}$$

$$\frac{1}{\mathscr{N}_k^2} yP_k(y) = \frac{\alpha_k}{\mathscr{N}_k^2}P_{k+1}(y) + \frac{\beta_k}{\mathscr{N}_k^2}P_k(y) + \frac{\alpha_{k-1}}{\mathscr{N}_k^2}P_{k-1}(y) \tag{1.83}$$

yazılabilir. İlk denklemi $P_k(y)$, ikinci denklemi $P_k(x)$ ile çarpıp birbirinden çıkarırsak

$$\frac{x-y}{\mathscr{N}_k^2} P_k(x)P_k(y) = -\mathscr{A}_k(x,y) + \mathscr{A}_{k-1}(x,y) \tag{1.84}$$

elde edilir. $k = 0, 1, \ldots, n$ için toplam alınırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\mathscr{N}_k^2} P_k(x)P_k(y) &= \frac{1}{x-y}\sum_{k=0}^{n} \mathscr{A}_{k-1}(x,y) - \mathscr{A}_k(x,y) \\ &= \frac{\mathscr{A}_n(x,y) - \mathscr{A}_{-1}(x,y)}{x-y} \end{aligned} \tag{1.85}$$

bulunur. Dikkat edilirse $\alpha_{-1}/\mathscr{N}_{-1}^2 = 0$ ve $P_{-1}(x)P_{-1}(y) = 0$ olduğundan $\mathscr{A}_{-1}(x,y) = 0$ olduğu açıktır. Bu da ispatı bitirir. $\square$

**Teorem 1.14** *$P_{n+1}(x)$ polinomunun ardışık iki kökü arasında $P_n(x)$ polinomunun bir kökü bulunur.*

**İspat.** (1.80) eşitliğinde $y \to x$, limit durumunda L-Hospital kuralını kullanarak

$$\begin{aligned} \lim_{y\to x} \frac{\partial}{\partial y}\mathscr{A}_n(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\mathscr{A}_n(x,x) \\ &= -\frac{1}{\mathscr{N}_n^2}\frac{a_n}{a_{n+1}}[P_{n+1}(x)P_n'(x) - P_n(x)P_{n+1}'(x)] \end{aligned} \tag{1.86}$$

elde edilir. Öte yandan limit durumunda (1.86) eşitliğinin sol tarafı

$$\lim_{y\to x}\sum_{k=0}^{n}\frac{P_k(x)P_k(y)}{\mathscr{N}_k^2} = \sum_{k=0}^{n}\frac{P_k^2(x)}{\mathscr{N}_k^2} \tag{1.87}$$

olur. Şimdi $j = 1,2,\ldots,n+1$ için $x_j$, $P_{n+1}(x)$ polinomunun kökleri olsun. (1.86) ve (1.87) eşitliklerinden

$$P_n(x_j)P_{n+1}'(x_j) = \mathscr{N}_n^2\frac{a_n}{a_{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{P_k^2(x_j)}{\mathscr{N}_k^2} \tag{1.88}$$

yazılır. Dolayısıyla sol taraftaki ifadenin işareti $x_j$'den bağımsız olup sadece $a_n/a_{n+1}$ kesrinin işaretine bağlıdır. Fakat $P_{n+1}'(x)$ polinomunun $(x_j, x_{j+1})$ aralığında bir yerel ekstremum değeri olduğundan bu aralıkta işaret değiştirir. Sağ tarafın işareti aynı kaldığından, sol tarafta $P_n(x)$ polinomu da $P_{n+1}'(x)$ ile birlikte işaret değiştirmelidir. Bu ise $P_n(x)$ polinomunun $(x_j, x_{j+1})$ aralığında en az bir kökü olduğunu gösterir. $(a,b)$ aralığında bu şekilde $n$ tane alt aralık olup her biri $P_n(x)$ polinomunun en az bir kökünü içerir. Öte yandan $P_n(x)$ polinomunun tam olarak $n$ tane kökü olduğundan bu alt aralıkların her biri $P_n(x)$ polinomunun tam olarak bir kökünü içerir. Dolayısıyla $P_{n+1}(x)$ polinomunun ardışık iki kökü arasında $P_n(x)$ polinomunun tam olarak bir kökü bulunur. $\square$

## 1.3. Jacobi Polinomları

(1.11) denkleminde $\sigma(x) = 1 - x^2$ ve $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ olsun. (1.10) denkleminde $\tau(x) = \beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x$ ve Teorem 1.5'den $\lambda_n = n(n+\alpha+\beta+1)$ bulunur. Karşılık gelen polinomlar (1.20) Rodriguez formülü ile

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}] \tag{1.89}$$

verilir. Jacobi polinomları için Rodriguez formülünde $B_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$ olarak seçilmiştir. Çarpımın türevleri için Leibniz kuralı uygulanırsa jacobi polinomları

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(\alpha+1)_n}{(\alpha+1)_{n-k}}\frac{(\beta+1)_n}{(\beta+1)_k}(x-1)^{n-k}(x+1)^k \tag{1.90}$$

şeklinde veya (1.7) eşitliğini kullanarak

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(x-1)^{n-k}(x+1)^k}{\Gamma(n-k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)} \tag{1.91}$$

biçiminde de yazılabilir. Jacobi polinomlarının

$$(1-x^2)y'' + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0 \tag{1.92}$$

diferansiyel denklemini sağladığı (1.9) denkleminden açıktır. Teorem 1.7'deki (1.38) eşitliği $\alpha > -1$, $\beta > -1$ için $a = -1$, $b = -1$ olduğunda sağlanır. Yani Jacobi polinomları $(-1,1)$ aralığında $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir. Buradan

$$\int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx = \mathcal{N}_n^2\delta_{mn} \tag{1.93}$$

yazılabilir. (1.34) eşitliğinde $\lambda_n = n(n+\alpha+\beta+1)$ yerine yazılırsa

$$\mathcal{A}_{n-1,n} = n!(-1)^{n-1}\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \tag{1.94}$$

bulunur. Ayrıca, Teorem 1.8'deki (1.44) ve son eşitlikten Jacobi polinomlarının başkatsayısı

$$a_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \tag{1.95}$$

ve (1.45) eşitliğinden alt başkatsayısı

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{(\alpha-\beta)n}{2n+\alpha+\beta} \tag{1.96}$$

bulunur. Öte yandan (1.93) eşitliğindeki normalizasyon sabiti teorem 1.9'daki (1.53) eşitliğinden

$$\mathcal{N}_n^2 = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{n!(2n+\alpha+\beta+1)}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \tag{1.97}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla son üç eşitlikten faydalanılarak Jacobi polinomlarının üç terimli yineleme bağıntısındaki katsayılar

$$\alpha_n = \frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)} \tag{1.98}$$

$$\beta_n = \frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)} \tag{1.99}$$

ve

$$\gamma_n = \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)} \tag{1.100}$$

şeklinde bulunur. (1.68) bağıntısında yerine yazılırsa Jacobi polinomlarının sağladığı üç terimli yineleme bağıntısı

$$\begin{aligned} &2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &+\left[(2n+\alpha+\beta+1)(\beta^2-\alpha^2)-(2n+\alpha+\beta)_3\, x\right]P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &+2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)=0 \end{aligned} \tag{1.101}$$

halini alır. Burada

$$P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1 \tag{1.102}$$

ve

$$P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}[\alpha-\beta+(\alpha+\beta+2)x] \tag{1.103}$$

şeklindedir.

## 1.4. Chebyshev Polinomları

Birinci tip Chebyshev polinomları $\alpha=\beta=-1/2$ özel değeri için $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomlarının bir alt sınıfı olup aralarındaki bağlantı

$$T_n(x) = \frac{n!\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+1/2)}P_n^{(-1/2,-1/2)}(x), \quad n\in\mathbb{N} \tag{1.104}$$

şeklindedir. Dolayısıyla Chebyshev polinomları için Rodriguez formülü (1.89) ifadesinden cebirsel işlemler sonucunda

$$T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n-1/2}] \tag{1.105}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\Gamma(n+1/2) = \frac{(-2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!} \tag{1.106}$$

eşitliği kullanılmıştır. (1.92) ifadesinden birinci tip Chebyshev polinomlarının

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0 \tag{1.107}$$

diferansiyel denklemini sağladığı açıktır. (1.104), (1.98)-(1.100) eşitlikleri (1.68) eşitliğinde yerine yazılırsa, cebirsel işlemlerin ardından Chebyshev polinomlarının yineleme bağıntısı

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{1.108}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca,

$$T_0(x) = 1 \quad , T_1(x) = x \tag{1.109}$$

olduğu (1.102)-(1.103) ve (1.104) eşitliklerinden açıktır. Birinci tip Chebyshev polinomları $(-1,1)$ aralığında

$$\rho(x) = (1-x^2)^{-1/2} \tag{1.110}$$

ağırlık fonksiyonu altında ortogonaldir ve (1.93) eşitliğinden

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{-1/2}dx = \mathcal{N}_n^2\delta_{mn} \tag{1.111}$$

yazılabilir. Burada

$$\mathcal{N}_0^2 = \int_{-1}^{1} T_0^2(x)(1-x^2)^{-1/2}dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}dx = \pi \tag{1.112}$$

iken , $n \neq 0$ için normalizasyon sabiti (1.104) ve (1.97) eşitliklerini kullanarak

$$\mathcal{N}_n^2 = \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.113}$$

olarak bulunur. Derecesi $n$ olan Chebyshev polinomlarının kökleri

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{1.114}$$

ve mutlak ekstremum noktaları

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{1.115}$$

şeklindedir. Bu çalışmada, bant genişliği parametresinin çok büyük değerleri için Chebyshev ekstremum noktalarını kullanan dönüştürülmüş sanki-spektral yöntemi kullanılacaktır.

Chebyshev polinomlarının daha birçok özelliği vardır fakat amacımızdan sapmamak adına burada bunlardan bahsedilmeyecektir.

## 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinde sanki-spektral yöntemlerin kullanımı Frazer, Jones ve Skan'a (Frazer ve ark., 1937) kadar uzanır. 1938'de Lanczos baz fonksiyonlarının seçiminin ve düğüm noktalarının dağılımının çözümün doğruluğu üzerinde kritik etkisi olduğunu gösterdi (Lanczos, 1938). 1957'de Clenshaw, (Clenshaw, 1957) Chebyshev seri açılımını başlangıç değer problemlerine uyguladı. Daha sonra 1967'de Villadsen ve Stewart (Villadsen ve Stewart, 1967) bu yöntemi sınır değer problemine uyguladı. Spektral yöntemler 1970'lerde adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için popüler bir yöntem oldu. Kısmi diferansiyel denklemlere ilk uygulayan ve aynı zamanda sanki-spektral (pseudospectral) terimini ilk kullanan kişi Orszag olmuştur (Canuto ve ark., 2006).

(1.1) eşitliği ile verilen Küremsi dalga denklemin öz değer ve öz fonksiyonlarının yaklaşık hesabı hala aktif bir araştırma alanıdır (Barakat ve Abodayeh, 2005; Boyd, 2004, 2005; Huang ve ark., 2015; Ogburn ve ark., 2014). Özellikle bant genişliği parametresi $c$ çok büyük olduğunda bir çok nümerik yöntemde sıkıntı yaşanmaktadır. Literatürde asimptotik iterasyon (Barakat ve Abodayeh, 2005), sonlu farklar (Ogburn ve ark., 2014), Hermite-pseudospectral (Huang ve ark., 2015) ve Legendre-Galerkin (Schmutzhard ve ark., 2015) gibi yöntemler kullanılmıştır.

# 3. MATERYAL ve YÖNTEM

## 3.1. Türev Matrisleri

Bu bölümde, birinci ve ikinci mertebeden sanki-spektral türev matrislerini oluşturacağız.

Sanki-spektral yöntemler bir $y(x)$ fonksiyonunun $I_N y(x)$ olarak adlandırılan ve

$$I_N y(x) = P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \ell_n(x) y_n \tag{3.1}$$

ile verilen $N$. derece polinom interpolasyonu üzerine kurulur. Burada $y_n = y(x_n)$ değerleri $y(x)$ fonksiyonunun, önceden seçilmiş $x = x_n, \quad n = 0, 1, \ldots, N$ noktalarındaki gerçek değerleridir . Ayrıca her bir $n = 0, 1, \ldots, N$ için $\ell_n(x)$ fonksiyonları

$$\ell_n(x) = \frac{\phi_{N+1}(x)}{(x - x_n)\phi'_{N+1}(x_n)} \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanan Lagrange interpolasyon polinomlarıdır. Burada

$$\phi_{N+1}(x) = \kappa \prod_{m=0}^{N} (x - x_m) \tag{3.3}$$

kökleri reel ve birbirinden farklı $(N+1)$. derece polinomdur. Lagrange polinomlarının en önemli özelliklerinden biri, $\delta_{mn}$ Kronecker delta olmak üzere,

$$\ell_n(x_m) = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \tag{3.4}$$

ile verilir. Bu özellikten faydalanarak, $P_N(x)$ interpolatının ve $y(x)$ fonksiyonunun en azından $x = x_m,\ m = 0, 1, \ldots, N$ noktalarında çakıştığı, yani $y(x_m) = P_N(x_m)$ olduğu görülür. (3.3) ifadesinde $\kappa$ sabiti teorik olarak bir anlam ifade etmese de , nümerik yöntemlerde önemli bir role sahiptir.

$P_N(x)$ interpolatının türevleri yardımıyla $y(x)$ foksiyonunun türevlerini de yaklaşık olarak hesaplamak mümkündür. Dahası $y(x)$ fonksiyonunun $x_n$ noktalarındaki $y^{(k)}(x_m)$ türev değerleri $y(x_m) = P_N(x_m)$ fonksiyon değerleri cinsinden belirlenebilir. Bunun için ilk olarak $(3.1)$ ifadesinin $k$. mertebeden türevinin alınıp $x = x_m$ noktalarında hesaplanmasıyla

$$P_N^{(k)}(x_m) = \sum_{n=0}^{N} \ell_n^{(k)}(x_m) y(n), \quad m, n, k = 0, 1, \ldots, N \tag{3.5}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi bu son eşitlik

$$D^{(k)} = \left[d^{(k)}_{(mn)}\right] = \ell^{(k)}_n(x_m), \quad m,n,k = 0,1,\ldots,N \tag{3.6}$$

olamak üzere

$$y^{(k)} = D^{(k)}y \tag{3.7}$$

matris vektör-formunda ifade edilebilir. Burada $y = [y_0, y_1, \ldots, y_N]^T$ fonksiyon değerlerini ve $y^{(k)} = \left[P^{(k)}_N(x_0), P^{(k)}_N(x_1), \ldots, P^{(k)}_N(x_n)\right]$ türev değerlerini içeren $(N+1)$ boyutlu sütun vektörleridir. $(3.6)$ ifadesi ile tanımlanan $(N+1)\times(N+1)$ boyutlu $D^{(k)}$ kare matrisine "türev matrisi" denir.

Şimdi birinci ve ikinci mertebeden türev matrislerinin elemanlarını hesaplayalım. $(3.2)$ ifadesinin $x$ değişkenine göre türetilmesiyle

$$\ell'_n(x) = \frac{1}{\phi'(x_n)}\left[\frac{\phi'_{N+1}(x)}{x-x_n} - \frac{\phi_{N+1}(x)}{(x-x_n)^2}\right] \tag{3.8}$$

eşitliği elde edilir. $(3.3)$ eşitliğinden $\phi_{N+1}(x_m) = 0$ olduğu göz önüne alınarak birinci mertebe türev matrisinin köşegen dışı elemanı

$$d^{(1)}_{mn} = \frac{1}{x_m - x_n}\frac{\phi'_{N+1}(x_m)}{\phi'_{N+1}(x_n)}, \quad m \neq n \tag{3.9}$$

olarak bulunur. Köşegen elemanları $(m = n)$ ise $x = x_n$ durumundaki belirsizlikten dolayı

$$d^{(1)}_{nn} = \lim_{x\to x_n} \ell'_n(x) \tag{3.10}$$

limiti ile bulunabilir. (3.10) ifadesinde belirsizliğin giderilmesiyle

$$d^{(1)}_{nn} = \lim_{x\to x_n} \frac{1}{2}\frac{\phi''_{N+1}(x)}{\phi'_{N+1}(x_n)} = \frac{1}{2}\frac{\phi''_{N+1}(x_n)}{\phi'_{N+1}(x_n)} \tag{3.11}$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla birinci mertebe türev matrisinin elemanları

$$d^{(1)}_{mn} = \begin{cases} \dfrac{1}{x_m - x_n}\dfrac{\phi'_{N+1}(x_m)}{\phi'_{N+1}(x_n)}, & m \neq n \\[2ex] \dfrac{1}{2}\dfrac{\phi''_{N+1}(x_n)}{\phi'_{N+1}(x_n)}, & m = n \end{cases} \tag{3.12}$$

şeklinde ifade edilir (Funaro, 1992). Benzer şekilde Lagrange polinomunun ikinci mertebe türevinin

$$\ell''_n(x) = \frac{1}{\phi'_{N+1}(x_n)}\left[\frac{\phi''_{N+1}(x)}{(x-x_n)} - 2\frac{\phi'_{N+1}(x)}{(x-x_n)^2} + 2\frac{\phi_{N+1}(x)}{(x-x_n)^3}\right] \tag{3.13}$$

$x = x_m$ noktalarında $(m \neq n)$ hesaplanmasıyla ikinci mertebe türev matrisinin köşegen dışı elemanları

$$d_{mn}^{(2)} = \frac{1}{x_m - x_n}\left[\frac{\phi''_{N+1}(x_m)}{\phi'_{N+1}(x_n)} - \frac{2}{(x_m - x_n)}\frac{\phi'_{N+1}(x_m)}{(\phi'_{N+1}x_n)}\right]$$

ve

$$d_{nn}^{(2)} = \lim_{x \to x_n} \ell''_n(x) = \lim_{x \to x_n} \frac{1}{3}\frac{\phi'''_{N+1}(x)}{\phi'_{N+1}(x_n)} = \frac{1}{3}\frac{\phi'''_{N+1}(x_n)}{\phi'_{N+1}(x_n)} \tag{3.14}$$

limiti ile de ikinci mertebe türev matrisinin köşegen elemanları bulunur. Sonuç olarak ikinci mertebe sanki-spektral türev matrisinin elemanları

$$d_{mn}^{(2)} = \begin{cases} \dfrac{1}{x_m - x_n}\left[\dfrac{\phi''_{N+1}(x_m)}{\phi'_{N+1}(x_n)} - \dfrac{2}{(x_m - x_n)}\dfrac{\phi'_{N+1}(x_m)}{\phi'_{N+1}(x_n)}\right], & m \neq n \\ \\ \dfrac{1}{3}\dfrac{\phi'''_{N+1}(x_n)}{\phi'_{N+1}(x_n)}, & m = n \end{cases} \tag{3.15}$$

şeklinde ifade edilebilir (Funaro, 1992). Daha yüksek mertebeden türev matrisinin elemanları da benzer şekilde elde edilebilir. Ancak uygulamalı bilimlerde birçok problem matematiksel olarak ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemle modellendiği için, daha yüksek merteben türev matrisleri burada hesaplanmayacaktır. Ayrıca bazı durumlarda, örneğin Chebyshev sanki-spektral yönteminde, $k$. mertebeden türev matrisi, birinci mertebeden türev matrisinin $k$. kuvvetidir (Trefethen, 2000). Yani $D^{(k)} = [D^{(1)}]^k \quad k = 2, 3, \ldots$ şeklindedir.

## 3.2. Küçük Bant Genişliği Parametresi İçin Denklemin Sayısal Çözümleri

Dikkat edillirse (1.1) denklemi ve sınır koşulları simetriktir. Yani $\theta$ bağımsız değişkeni yerine $-\theta$ alındığında sistem (denklem ve sınır koşulları) aynı kalır. Simetrik sistemlerde spektrum (özdeğer kümesi) $\lambda_n$, simetrik (çift) $\lambda_{2n}$ ve anti-simetrik (tek) $\lambda_{2n+1}$ özdeğerleri içerecek şekilde iki kümeye ayrılabilir ve bunlara karşılık gelen $y_{2n}(\theta)$ ve $y_{2n+1}(\theta)$ özfonksiyonları sırasıyla $\theta$ değişkeninin çift ve tek fonksiyonu olurlar. Bu ayrıştırmanın nümerik açıdan faydası ise $2N \times 2N$ matris yerine iki tane $N \times N$ matris kullanarak maliyeti düşürmektir. Şimdi ayrıştırma işlemi için

$$x = \cos 2\theta, \quad x \in (-1, 1) \tag{3.16}$$

çift dönüşümü ile başlarsak (1.1) denklemi

$$(1 - x^2)y'' + \frac{1}{2}(1 - 3x)y' - \left[\frac{m^2}{2(1+x)} + \frac{c^2(1-x)}{8}\right]y = -\frac{1}{4}\lambda, \quad y(-1) = 0 \tag{3.17}$$

halini alır. Ardından $x = -1$ noktasındaki tekilliği gidermek için bağımlı değişken üzerinde

$$y(x) = (1+x)^{\frac{m}{2}} u(x) \tag{3.18}$$

dönüşümü ile,

$$(1-x^2)u'' + \left[m + \frac{1}{2} - \left(m + \frac{3}{2}\right) x\right] u' + q(x)u = \nu u \tag{3.19}$$

denklemine ulaşılır. Burada

$$q(x) = \frac{c^2}{8}(x-1) \tag{3.20}$$

ve

$$\nu_n = \frac{1}{4}[m(m+1) - \lambda_{2n}] \tag{3.21}$$

ifadeleriyle verilir. Son eşitlikten (1.1) denkleminin çift indisli özdeğerleri

$$\lambda_{2n} = m(m+1) - 4\nu_n, \quad n = 0, 1, ... \tag{3.22}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca (3.18) dönüşümü (3.17) denklemindeki sınır koşulunu otomatik olarak sağlamaktadır. Bu yüzden, $u(x)$ fonksiyonu sınırlı kaldığı sürece herhangi bir koşulu sağlamak zorunda değildir. Geri dönüşümler kullanılarak (3.19) denkleminin simetrik özdeğer-özfonksiyon $(\lambda_{2n}, y_{2n+1})$ çiftlerini verdiği kolayca görülür. Gerçekten de

$$y_{2n}(\theta) = (1+\cos 2\theta)^{\frac{m}{2}} u(\cos 2\theta) \tag{3.23}$$

$$= 2^{\frac{m}{2}} \cos\theta u(\cos 2\theta) \tag{3.24}$$

özfonksiyonlarının $\theta$ değişkeninin çift fonksiyonu olduğu açıktır.

Anti-simetrik (tek) özfonksiyonları ele alabilmek için ise önce (1.1) denklemine $\phi(\theta)$ çift fonksiyon olmak üzere

$$y(\theta) = \sin(\theta)\phi(\theta) \tag{3.25}$$

dönüşümü uygulanarak

$$-\phi'' + (\tan\theta - 2\cot\theta)\phi' + \left(\frac{m^2}{\cos^2\theta} + c^2 \sin^2\theta\right)\phi = (\lambda - 2)\phi \qquad \phi(\pm 1) = 0 \tag{3.26}$$

denklemi elde edilir. Burada $\phi$ fonksiyonu çift olduğu için simetrik durumda kullanılan $x = \cos 2\theta$ ve $\phi(x) = (1+x)^{\frac{m}{2}} u(x)$ dönüşümleri ile

$$(1-x^2)u'' + \left[m - \frac{1}{2} - \left(m + \frac{5}{2}\right) x\right] u' + q(x)u = \nu u \tag{3.27}$$

denklemine ulaşılır. Burada $q(x)$ halihazırda (3.19) eşitliğinde verilmiş iken

$$\nu_n = \frac{1}{4}[(m+1)(m+2) - \lambda_{2n+1}] \tag{3.28}$$

(3.21) eşitliğinden biraz farklıdır. Bu ifadeden de tek indisli özdeğerler

$$\lambda_{2n+1} = (m+1)(m+2) - 4\nu_n \tag{3.29}$$

şeklinde elde edilir.

Dönüşümlerle geri dönüldüğünde

$$y(\theta) = \sin\theta(1+\cos 2\theta)^{\frac{m}{2}} u(\cos 2\theta) \tag{3.30}$$

$$= 2^{\frac{m}{2}} \sin\theta \cos^m \theta u(\cos 2\theta) \tag{3.31}$$

(3.27) denkleminin, (1.1) denkleminin anti-simetrik (tek) özfonksiyonlarını verdiği açıktır. Aslında, (3.19) ve (3.27) denklemleri

$$\nu = \tfrac{1}{4}\left[\left(\alpha+\beta+\tfrac{1}{2}\right)\left(\alpha+\beta+\tfrac{3}{2}\right) - \lambda\right] \tag{3.32}$$

olmak üzere

$$(1-x^2)u'' + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x]u' + q(x)u = \nu u, \tag{3.33}$$

şeklinde tek denklemde toplanabilir. $(\alpha,\beta) = (-\frac{1}{2}, m)$ ve $(\alpha,\beta) = (\frac{1}{2}, m)$ ikililerinin sırasıyla (3.19) ve (3.27) denklemlerini verdiği açıktır. Öte yandan $c = 0$, yani $q(x) = 0$, durumunda (3.33) denkelemi Jacobi diferansiyel denklemine

$$(1-x^2)u'' + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x]u_n' + n(n+\alpha+\beta+1)u_n = 0 \tag{3.34}$$

dönüşmektedir. Dolayısı ile simetrik özdeğer-özfonksiyon $(\lambda_{2n}, y_{2n})$ çiftlerini yaklaşık olarak hesaplarken $P_n^{(-\frac{1}{2},m)}(x)$, antisimetrik özdeğer-özfonksiyonları $(\lambda_{2n+1}, y_{2n+1})$ hesaplarken $P_n^{(\frac{1}{2},m)}(x)$ Jacobi polinomlarını sanki-spektral yöntemde baz elemanları olarak kullanacağız.

## 3.3. Denklemin Jacobi Sanki-spektral Formülasyonu

Bu bölümde (3.33) de verilen dönüştürülmüş spheroidal dalga denklemine Jacobi sanki-spektral yöntemini uygulayacağız. Bunu yaparken $(\alpha,\beta)$ parametreleri genel tutulacak ve en sonunda simetrik ve antisimetrik özdeğer-özfonksiyon çiftleri için sırasıyla

$(\alpha,\beta) = (-1/2, m)$ ve $(\alpha,\beta) = (+1/2, m)$ alınacak. (2.3) eşitliğiyle verilen $\phi_{N+1}(x)$ polinomu

$$\phi_{N+1}(x) = P_{N+1}^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{3.35}$$

olarak alınacaktır. Şimdi (2.1) ifadesinden faydalanarak yaklaşık çözüm olarak

$$u(x) \approx P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \ell_n(x) u_n \tag{3.36}$$

alalım. (3.36) ile verilen yaklaşık çözümü (3.33) denkleminde yerine yazıp $x = x_m, m = 0, 1, 2, \ldots, N$ noktalarında sağlanması istenirse

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \left\{(1-x_m^2)\ell_n''(x_m) + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x_m]\ell_n'(x_m) + q(x_m)\ell_n(x_m)\right\}\\ = \nu \sum_{n=0}^{N} \ell_n(x_m) u_n\end{aligned} \tag{3.37}$$

cebirsel denklem sistemine ulaşılır. Bu eşitlik matris-vektör formunda

$$\hat{\mathscr{B}}\mathbf{u} = \nu \mathbf{u} \tag{3.38}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\hat{\mathscr{B}}$ matrisinin elemanları $m, n = 0, 1, \ldots N$ olmak üzere

$$\hat{\mathscr{B}}_{mn} = (1-x_m^2) d_{(mn)}^{(2)} + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x_m] d_{(mn)}^{(1)} + q(x_m)\delta_{mn} \tag{3.39}$$

$$= \sigma(x_m) d_{(mn)}^{(2)} + \tau(x_m) d_{(mn)}^{(1)} + q(x_m)\delta_{mn} \tag{3.40}$$

şeklindedir. (2.12) ve (2.15) türev matrislerini (3.39) eşitliğinde kullanarak $\hat{B}$ matrisinin elemanlarının açık gösterimi

$$\hat{\mathscr{B}}_{mn} = -\frac{1}{6}\begin{cases} \dfrac{12\sigma(x_m)}{(x_m-x_n)^2}\dfrac{\phi_{N+1}'(x_m)}{\phi_{N+1}'(x_n)} & \text{if } m \neq n \\[2ex] \dfrac{\tau(x_n)}{\sigma(x_n)}\left[\tau(x_n) - 2\sigma'(x_n)\right] - 2N\left[\tau' + \frac{1}{2}(N+1)\sigma''\right] - 6q(x_m) & \text{if } m = n. \end{cases} \tag{3.41}$$

olarak bulunur. Burada $\hat{\mathscr{B}}_{mn}$ matrisinin köşegen elemanları bulunurken (3.19) denkleminden faydalanılmıştır. Dikkat edilirse $\hat{\mathscr{B}}$ matrisi simetrik değildir. Fakat $\mathscr{B} = \mathscr{S}^{-1}\hat{\mathscr{B}}\mathscr{S}$ şeklinde bir benzerlik dönüşümü ile simetrik hale getirilebilir. Gerçekten de $\mathscr{S}$ matrisi

$$\mathscr{S}_{mn} = \sqrt{1-x_m^2}\,\phi_{N+1}'(x_m)\delta_{mn} = \sqrt{\sigma(x_m)}\,\phi_{N+1}'(x_m)\delta_{mn} \tag{3.42}$$

şeklinde köşegen matris olarak seçilirse

$$\mathscr{B}_{mn} = -\frac{1}{6}\begin{cases} \dfrac{12\sqrt{(1-x_m^2)(1-x_n^2)}}{(x_m-x_n)^2} & \text{if } m \neq n \\ \\ \dfrac{\tau(x_n)}{\sigma(x_n)}\left[\tau(x_n)-2\sigma'(x_n)\right]-2N\left[\tau'+\frac{1}{2}(N+1)\sigma''\right]-6q(x_m) & \text{if } m = n. \end{cases} \tag{3.43}$$

Bilindiği gibi benzer matrislerin özdeğerleri aynıdır. Dolayısıyla (3.38) denklem sisteminin özdeğerleri, yani (1.1) denkelminin yaklaşık özdeğerleri

$$\mathscr{B}\mathbf{y} = \nu\mathbf{y} \tag{3.44}$$

simetrik denklem sisteminin öz değerleridir. Öte yandan

$$\hat{\mathscr{B}}\mathbf{u} = \nu\mathbf{u} \Rightarrow \mathscr{S}^{-1}\mathscr{B}\mathscr{S}u = \nu\mathbf{u} \Rightarrow \mathscr{B}(\mathscr{S}\mathbf{u}) = \nu(\mathscr{S}\mathbf{u}) \tag{3.45}$$

olduğundan (3.38) denkleminin özvektörleri ile (3.44) denklemin özvektörleri arasında

$$y = \mathscr{S}\mathbf{u} \tag{3.46}$$

bağıntısı vardır. Simetrik $\mathscr{B}$ matrisinin elemanlarına, yani (3.43) ifadesi sadece $x_m$ noktalarının bilinmesini gerektirmektedir. Aslında (3.35) seçimi ile $x_m$ nokltalarını $(N+1)$. derece Jacobi polinomunun kökleri olarak atadık. Jacobi polinomlarını kökleri (Golub ve Welsch, 1969) algoritmasını kullanarak hesaplanabilir. Bu algoritma $L_2$ normuna göre normalize edilmiş Jacobi polinomlarının

$$\Psi(x) = \frac{1}{\mathscr{N}_n}P_n^{(\alpha,\beta)}(x), \quad \mathscr{N}_n^2 = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n!} \tag{3.47}$$

yineleme bağıntısının

$$A_{n+1}\Psi_{n+1}(x)+(B_n-x)\Psi_n(x)+A_n\Psi_{n-1}(x) = 0 \tag{3.48}$$

kullanılmasına dayanır. (3.48) ifadesi $n = 0,1,\ldots,N$ için yazılırsa homojen olmayan

$$\begin{bmatrix} B_0-x & A_0 & & & 0 \\ A_0 & B_1-x & A_1 & & \\ & A_1 & B_2-x & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & A_{N-1} \\ 0 & & & A_{N-1} & B_N-x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Psi_0(x) \\ \Psi_1(x) \\ \vdots \\ \Psi_{N-1}(x) \\ \Psi_N(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Psi_{N+1}(x) \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Şimdi

$$\Psi_{N+1}(x) = \frac{1}{\mathscr{N}_{N+1}}P_{N+1}^{(\alpha,\beta)} = 0 \tag{3.50}$$

olmasını, yani (3.50) polinomunun köklerini bulmak istersek

$$R = \begin{bmatrix} B_0 & A_0 & & & 0 \\ A_0 & B_1 & A_1 & & \\ & A_1 & B_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & A_{N-1} \\ 0 & & & A_{N-1} & B_N \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} \Psi_0(x) \\ \Psi_1(x) \\ \vdots \\ \Psi_{N-1}(x) \\ \Psi_N(x) \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

olmak üzere

$$(R - xI)\Psi = 0 \Rightarrow R\Psi = x\Psi \tag{3.52}$$

matris özdeğer problemiyle karşılaşırız. Dolayısıyla $P_{N+1}^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomunun kökleri simetrik tridiagonal $R$ matrisinin özdeğerleridir. Burada Jacobi polinomları için

$$A_n = \frac{2}{2n+\alpha+\beta}\sqrt{\frac{n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta+1)}} \tag{3.53}$$

ve

$$B_n = \frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)} \tag{3.54}$$

şeklinde (1.97)-(1.100) eşitlikleri kullanılarak elde edilir.

İlerde araştırma bulgularındanda görüleceği gibi bu formülasyon küçük bant genişliği parametresi değerleri için uygun olup, büyük bant genişliği parametresi değerleri için verimsiz ve pahalı bir yöntemdir. Dolayısıyla bir sonraki bölümde büyük bant genişliği parametresi için bir yöntem vereceğiz.

## 3.4. Büyük Bant Genişliği Parametresi İçin Denklemin Sayısal Çözümleri

(1.1) Küresel dalga denklemi, (3.1) ve (3.2) alt bölümlerinde belli dönşümler ile uygun bir forma dönüştürülmüş, Jacobi sanki-spektral yöntemi yardımıyla $c$ parametresinin küçük değerleri için yüksek doğrulukta sayısal sonuçlar elde edilmişti. Bu kısımda ise bant genişliği parametresinin büyük değerleri için de yüksek doğrulukta sayısal sonuçlar veren bir yöntem sunulacaktır. Bunun için (1.1) denkleminde bağımsız değişken üzerinde

$$x = \sin\theta, \quad x \in (-1,1) \tag{3.55}$$

dönüşümü uygulandığında küresel dalga denkleminin cebirsel formu

$$(1-x^2)y'' - 2xy' - \left(\frac{m^2}{1-x^2} + c^2x^2\right)y = -\lambda(c,m)y, \quad y(\pm 1) = 0 \tag{3.56}$$

elde edilir. Ardından $u(x)$, $[-1,1]$ aralığında sonlu bir fonksiyon olmak üzere, son denklemde $(1-x^2)^{-1}$ ile orantılı terimden kurtulmak için bağımlı değişken üzerinde

$$y(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} u(x) \tag{3.57}$$

dönüşümü yapılırsa

$$(1-x^2)u'' - 2(m+1)xu' - \left(c^2x^2\right) u = \nu u, \quad \nu = m(m+1) - \lambda(c,m) \tag{3.58}$$

denklemi elde edilir. Dikkat edilirse (3.57) dönüşümü ile (3.56) denklemindeki sınır koşulları otomatik olarak sağlanmaktadır. Dolayısıyla (3.58) denklemi üzerinde sınır koşulu bulunmamaktadır.

## 3.5. Dönüştürülmüş Chebyshev Sanki-spektral Yöntemi

Büyük $c$ değerleri için denklemin özfonksiyonları sıfırın küçük bir komşuluğu dışında sıfıra çok yakın değerler almaktadır. Öte yandan şebeke noktaları olarak kullanılan jacobi polinomlarının kökleri aralığın uç noktalarında daha yoğun, orijin civarında ise seyrek bir dağılım göstermektedir. Bu yüzden şebeke noktalarını sıfırın çok küçük bir komşuluğunda yoğunlaştırmak, aralığın uçlarına doğru ise seyreltmek gerekir. İşte bunun için dönüştürülmüş sanki-spektral yöntemler kullanılacaktır. Genelde koordinat dönüşümü

$$g'(x;\gamma) > 0, \quad g(\pm 1,\gamma) = \pm 1, \quad \gamma \in D_\gamma \tag{3.59}$$

olmak üzere

$$t = g(x;\gamma), \quad x \in [-1,1], \quad \gamma \in D_\gamma \tag{3.60}$$

şeklindedir. Burada, $D_\gamma$ $\gamma$'nın tanım aralığıdır. (3.60) dönüşümü terslenebilir ve tersi

$$x = g^{-1}(t;\gamma) := h(t;\gamma), \quad t \in [-1,1], \quad \gamma \in D_\gamma \tag{3.61}$$

biçimindedir.

Pratikte birkaç ilginç dönüşüm kullanılmıştır. Özelde Kosloff ve Talzer bir parametreli

$$t = g(x;\gamma) = \frac{\arcsin(\gamma x)}{\arcsin \gamma}, \quad 0 < \gamma < 1 \tag{3.62}$$

dönüşümünü tanımlamışlardır. Bu dönüşüm $\gamma \to 1^-$ Chebyshev-Gauss Lobatto noktalarını eşit aralıklı noktalara doğru götürür. (Kosloff ve Tal-Ezer, 1993) sınır katı bulunan problemlerin yaklaşık çözümlerini dönüştürülmüş Chebyshev yöntemiyle hesaplamak için

$$t = g(x;\gamma) = \frac{4}{\pi}\arctan\left[\tan\frac{\pi}{4}\gamma(x-1)\right] + 1 \tag{3.63}$$

gönderimini kullanmışlardır. Bu dönüşüm $\gamma \to 0^+$ $(\gamma \to 0^-)$ noktaları $t = -1$ $(t = +1)$ civarında yoğunlaştırmaktadır. (Bayliss ve ark., 1989) iki parametreli

$$t = g(x;\gamma) = \gamma_2 + \frac{1}{\gamma_1}[\tan(a_1(x-a_0))], \quad \gamma \in D_\gamma \tag{3.64}$$

dönüşümünü tanımlamışlardır. Burada

$$D_\gamma = \{(\gamma_1,\gamma_2); \quad \gamma_1 > 0, \quad -1 \le \gamma_2 \le 1\} \tag{3.65}$$

şeklindedir. Bu dönüşümde $\gamma_1$ değeri arttıkça noktalar $t = \gamma_2$ civarında yığılır.

$$k_1 = \arctan(\gamma_1(1+\gamma_2)), \qquad k_2 = \arctan(\gamma_1(1-\gamma_2)) \tag{3.66}$$

olmak üzere, eğer $a_0$ ve $a_1$ sabitleri

$$a_0 = a_0(\gamma) := \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}, \qquad a_1 = a_1(\gamma) := \frac{k_1+k_2}{2} \tag{3.67}$$

şeklinde seçilirse $g = (\pm 1, \gamma) = \pm 1$ şartları sağlanır ve bu seçimlerle

$$-1 \le a_0 \le 1, \qquad 0 < a_1 < \frac{\pi}{2} \tag{3.68}$$

olduğu kolayca görülebilir. Bu dönüşümün tersi

$$x = g^{-1}(t;\gamma) = a_0 + \frac{1}{a_1}\arctan[\gamma_1(t-\gamma_2)] \tag{3.69}$$

şeklinde açıkça yazılabilir.

Bu dönüşümlerden bizim problemimize uygun olanı son dönüşümdür. Ayrıca grid noktalarını sıfırın civarında yoğunlaştırmamız gerektiğinden bu dönüşümde $\gamma_2 = 0$ alınacaktır.

Ayrıca (3.64) ve (3.69) ifadelerinden

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dx}\frac{dx}{dt} \tag{3.70}$$

zincir kuralını kullanarak

$$\frac{d}{dt} = \frac{\gamma_1}{a_1}\frac{1}{1+[\gamma_1(t-\gamma_2)]^2}\frac{d}{dx} \tag{3.71}$$

veya

$$\frac{d}{dt} = \frac{\gamma_1}{a_1}\frac{1}{1+\tan^2[a_1(x-a_0)]}\frac{d}{dx} := F(x)\frac{d}{dx} \tag{3.72}$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dx}\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{d}{dx}\frac{d^2x}{dt^2} \tag{3.73}$$

olduğundan

$$\frac{d^2}{dt^2} = \left(\frac{\gamma_1}{a_1}\frac{1}{1+\tan^2[a_1(x-a_0)]}\right)^2\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{-2\gamma_1^2}{a_1}\frac{\tan[a_1(x-a_0)]}{[1+\tan(a_1(x-a_0)^2)]^2}\right)\frac{d}{dx} \tag{3.74}$$

$$= F^2(x)\frac{d^2}{dx^2} + F'(x)\frac{d}{dx} \tag{3.75}$$

bulunur. Şimdi Chebyshev türev matrislerini hatırlayalım.

**Teorem 3.1** *(Trefethen, 2000)*

$$x_m = \cos\left(\frac{m\pi}{N}\right), \quad c_m = \begin{cases} 2, & m = 0 \text{ veya } N, \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{3.76}$$

*olmak üzere birinci mertebe chebyshev türev matrisi*

$$D^{(1)}_{mn} = \begin{cases} \dfrac{c_m}{c_n}\dfrac{(-1)^{m+n}}{x_m - x_n}, & m \neq n \quad m,n = 0,1,2,\dots,N \\[2ex] \dfrac{2N^2+1}{6}, & m = n = 0 \\[2ex] \dfrac{-x_m}{2(1-x_m^2)}, & m =,1,2,\dots,N-1 \\[2ex] -\dfrac{2N^2+1}{6}, & m = n = N. \end{cases} \tag{3.77}$$

*şeklindedir.*

Ayrıca yüksek mertebeden Chebyshev türev matrisleri, birinci mertebe Chebyshev türev matrisinin kuvvetleri

$$D^{(k)} = [D^{(1)}]^k \quad k = 2,3,\dots \tag{3.78}$$

şeklinde hesaplanabilir (Trefethen, 2000). Dolayısıyla (3.72) ve Teorem 3.1 ’den birinci mertebe dönüştürülmüş Chebyshev türev matrisi

$$F = \mathrm{diag}(F(x_0), F(x_1), \dots, F(x_n)) \tag{3.79}$$

ve

$$F_1 = \mathrm{diag}(F'(x_0), F'(x_1), \ldots, F'(x_n)) \tag{3.80}$$

köşegen matrisler olmak üzere

$$\hat{D}^{(1)} = FD^{(1)} \tag{3.81}$$

bulunur. Benzer şekilde ikinci mertebe dönüştürülmüş Chebyshev türev matrisi

$$\hat{D}^{(2)} = F^2 D^{(2)} + F_1 D^{(1)} \tag{3.82}$$

halini alır.

## 3.6. Yöntemin Denkleme Uygulanması

Dönüştürülmüş Chebyshev sanki spektral yöntemi (3.58) denklemine uygulanırsa

$$\mathbf{B} = [\mathrm{diag}\{1 - x_j^2\}\hat{D}^{(2)} - \mathrm{diag}\{2(m+1)x_j\}\hat{D}^{(1)} - \mathrm{diag}\{c^2 - x_j^2\}] \tag{3.83}$$

ve $j = 0, 1, \ldots, N$ olmak üzere

$$\mathbf{Bu} = \nu\mathbf{u} \tag{3.84}$$

ayrık sistemi elde edilir. Buradan büyük $c$ değerleri için küremsi dalga denkleminin özdeğerleri (3.58) yardımıyla

$$\lambda_n(c,m) = m(m+1) - \nu_n, \quad n = 0, 1, \ldots, N \tag{3.85}$$

şeklinde ve özfonksiyonların şebeke noktalarındaki değerleri (3.57) yardımıyla

$$y_n(x_j) = (1 - x_j^2)^{\frac{m}{2}} u_n^j \tag{3.86}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $u_n^j$ (3.84) lineer denklem sisteminin $n$'inci özvektörünün $j$'inci elemanıdır.

# 4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde bir önceki bölümde verilen yöntemler kullanilarak farklı $c$ ve $m$ değerleri için küresel dalga denkleminin yaklaşık özdeğerleri tablolar halinde verilecektir. Bunun için (3.38) eşitliğinde elde edilen $\mathscr{B}$ matrisini bilgisayar yardımıyla köşegenleştirerek (1.1) denkleminin özdeğerleri elde edilecektir. Programlama dili olarak matlab ve fortran kullanılmıştır.

Çizelge 4.1. Matris boyutu $N$ artarken $\lambda_0(1,0)$ ve $\lambda_{1000}(1,0)$ özdeğerlerindeki doğruluk artışı. Baz fonksiyonları derecesi N, mertebesi $(\alpha,\beta)=(-1/2,0)$ olan Jacobi polinomlarıdır.

| $N$ | $\lambda_0(1,0)$ | $N$ | $\lambda_{1000}(1,0)$ |
|---|---|---|---|
| 4 | 0.3190000551469 | 501 | 1001000.50001 |
| 5 | 0.3190000551468927398 | 502 | 1001000.5000001560941 |
| 6 | 0.319000055146892739783982 | 503 | 1001000.50000015609406982910038 |
| 7 | 0.31900005514689273978398198587 | 504 | 1001000.5000001560940698291003783 |
| 8 | 0.31900005514689273978398198587 | 505 | 1001000.5000001560940698291003783 |

Çizelge 4.1.'de matris boyutu $N$ artarken (1.1) küresel dalga denkleminin $c=1$ ve $m=0$ için $\lambda_0$ ve $\lambda_{1000}$ özdeğerlerinin doğruluklarının artışı verilmiştir. Çizelgeden de görüldüğü üzere matris boyutunu bir arttırmak özdeğerlerde ortalama altı basamak doğruluk artışına sebep olmaktadır.

Çizelge 4.2. Küresel dalga denkleminin bazı yüksek çift indeksli özdeğerlerini verilen doğrulukta elde etmek için gerekli en küçük matris boyutu.

| $n$ | $N$ when $(\alpha,\beta)=(-\frac{1}{2},0)$ | $\lambda_n(1,0)$ |
|---|---|---|
| 100 | 55 | 10100.500015471905647093185536399 |
| 200 | 105 | 40200.500003886917446770035728532 |
| 500 | 255 | 250500.50000062375510956230988949 |
| 1000 | 505 | 1001000.5000001560940698291003783 |

Çizelge 4.3. Zonal dalga sayısı $m$ değişirken $\lambda_{11}(10,m)$ özdeğerini verilen doğrulukta elde etmek için gerekli en küçük matris boyutları. Baz fonksiyonları derecesi N, mertebesi $(\alpha,\beta)=(-1/2,m)$ olan Jacobi polinomlarıdır.

| $m$ | $N$ | $\lambda_{11}(10,m)$ |
|---|---|---|
| 0 | 26 | 184.54761858852457640833705901739 |
| $10^{-1}$ | 20 | 186.80600167867847699593805333280 |
| 1 | 19 | 207.70676111785875039455851329530 |
| 10 | 17 | 501.10179565732031970129421278971 |
| $10^2$ | 12 | 12441.764971364585860241721862947 |
| $10^3$ | 9 | 1023133.1303999773054788754589760 |

Çizelge 4.2.'de ise bazı yüksek çift indeksli özdeğerleri, verilen doğrulukta elde etmek için gerekli en küçük matris boyutu verilmiştir. Çizelgeden de anlaşılacağı üzere yöntem çok hızlı yakınsamaktadır. Örneğin $\lambda_{1000}$ özdeğerini herhangi bir doğrulukta ekrana yazdırmak için gerekli en küçük matris boyutu $N = 501$'dir. Bununla birlikte $N = 505$ değeri bu özdeğeri çizelgede verilen doğrulukta elde etmek için yeterlidir. Yani, matris boyutunu sadece dört artırarak 25 ondalık basamak doğruluk elde edilmiştir.

Çizelge 4.4. Bant genişliği $c$ değişirken $\lambda_{11}(c,m)$ özdeğerlerini verilen doğrulukta elde etmek için gerekli en küçük matris boyutları. Baz fonksiyonları derecesi N, mertebesi $(\alpha,\beta) = (-1/2,10)$ olan Jacobi polinomlarıdır.

| $c$ | $N$ | $\lambda_{11}(c,10)$ |
|---|---|---|
| 0 | 6 | 462.00000000000000000000000000002 |
| $10^{-1}$ | 9 | 462.00391869871637233605123379790 |
| 1 | 12 | 462.39186517444384925685069161521 |
| 10 | 17 | 501.10179565732031970129421278971 |
| $10^2$ | 51 | 2345.010135577631447774866243889 |
| $10^3$ | 162 | 23034.2246949267005286970936261 |

Çizelge (4.3.)'de (1.1) küresel dalga denkleminin $c = 10$ için zonal dalga sayısı $m$ değişirken, $\lambda_{11}$ özdeğerinin rapor edilen doğrulukta elde edilmesi için gerekli en küçük matris boyutu $N$ verilmiştir. İlginç bir şekilde $m$ arttıkça matris boyutu $N$ azalmaktadır.

Çizelge 4.5. $n = 0,50,100,200$ için küresel dalga denkleminin $\lambda_{2n}(\sqrt{10},0)$ özdeğerlerinin doğruluk artışı. Baz fonksiyonları derecesi N, mertebesi $(\alpha,\beta) = (-1/2,0)$ olan Jacobi polinomlarıdır.

| $N$ | $\lambda_0(\sqrt{10},0)$ | $N$ | $\lambda_{100}(\sqrt{10},0)$ |
|---|---|---|---|
| 5 | 2.305 040 10 | 51 | 10105.0 |
| 6 | 2.305 040 107 940 | 52 | 10105.000 433 |
| 7 | 2.305 040 107 940 431 6 | 53 | 10105.000 433 246 48 |
| 8 | 2.305 040 107 940 431 635 6 | 54 | 10105.000 433 246 482 907 99 |
| 9 | 2.305 040 107 940 431 635 679 732 | 55 | 10105.000 433 246 482 907 993 562 45 |
| 10 | 2.305 040 107 940 431 635 679 732 102 9 | 56 | 10105.000 433 246 482 907 993 562 450 |
| 11 | 2.305 040 107 940 431 635 679 732 102 9 | 57 | 10105.000 433 246 482 907 993 562 450 |
| $N$ | $\lambda_{200}(\sqrt{10},0)$ | $N$ | $\lambda_{400}(\sqrt{10},0)$ |
| 101 | 40205.00 | 201 | 160405.00 |
| 102 | 40205.000 108 8 | 202 | 160405.000 027 2 |
| 103 | 40205.000 108 835 777 | 203 | 160405.000 027 275 870 8 |
| 104 | 40205.000 108 835 777 578 646 2 | 204 | 160405.000 027 275 870 838 131 19 |
| 105 | 40205.000 108 835 777 578 646 209 290 | 205 | 160405.000 027 275 870 838 131 198 65 |
| 106 | 40205.000 108 835 777 578 646 209 290 | 206 | 160405.000 027 275 870 838 131 198 65 |

Çizelge (4.4.)'de ise zonal dalga sayısı $m = 10$ ve bant genişliği parametresi $c$ değişirken, $\lambda_{11}(c,10)$ özdeğerinin çizelgedeki doğrulukta elde edilmesi için gerekli en küçük matris boyutu $N$ değerleri verilmiştir. Çizelge 4.4.'den açıkça görülmektedir ki $c$ değeri artarken, $N$ matris boyutu çok hızlı bir şekilde büyümektedir.

Çizelge 4.5.'de ise $c^2 = 10$ ve $m = 0$ değerleri için bazı özdeğerlerin doğruluk artışları rapor edilmiştir. Çizelgeden görüldüğü üzere matris boyutunu bir artırmak ortalama dört-beş basamak doğruluk artışına sebep olmaktadır. Çizelge 4.1. ile karşılaştırıldığında, altı-sekiz basamak arası olan doğruluk artışının dört-beş basamağa düştüğü görülmektedir. Bunun sebebi ise bant genişliği parametresinin $c = 1$ iken $c = \sqrt{10}$ olmasıdır. Çizelgelerden açıkça görülmektedir ki $c$ parametresindeki artış yöntemin yakınsama hızını önemli ölçüde düşürmektedir.

Çizelge 4.6. Çok büyük $c$ parametreleri için bazı çift indeksli özdeğerler.Baz fonksiyonları derecesi N, mertebesi $(\alpha,\beta) = (-1/2,0)$ olan Jacobi polinomlarıdır.

| $N$ | $n$ | $c$ | $\lambda_{2n}(c,0)$ | $\lambda_{2n}(c,0)$(Huang ve ark., 2015) |
|---|---|---|---|---|
| 300 | 0 | $10^4$ | 9999.24998333 | 9999.2499812476 |
| | 2 | | 49996.24972134 | 49996.2497186864 |
| | 4 | | 89989.24873225 | 89989.2487058253 |
| | 6 | | 129978.24930688 | 129978.2463421388 |
| 900 | 0 | $10^5$ | 99999.2500 | 99999.249998 |
| | 2 | | 499996.2499 | 499996.249971 |
| | 4 | | 899989.2554 | 899989.249870 |
| | 6 | | 1299978.7679 | 129978.249634 |

Çizelge 4.7. Çok büyük $c$ parametreleri için bazı çift indeksli özdeğerler.

| $n$ | $N_J$ | $N_{DC}$ | $\gamma_1^{opt}$ | $c$ | $\lambda_{2n}(c,0)$ (Jacobi) | $\lambda_{2n}(c,0)$ (DC) | $\lambda_{2n}(c,0)$ (Huang ve ark., 2015) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 300 | 50 | 35 | $10^4$ | 9999.24998333 | 9999.2499812461 | 9999.2499812476 |
| 2 | | | | | 49996.24972134 | 49996.2497201367 | 49996.2497186864 |
| 4 | | | | | 89989.24873225 | 89989.2483888987 | 89989.2487058253 |
| 6 | | | | | 129978.24930688 | 129978.2668896432 | 129978.2463421388 |
| 0 | 900 | 62 | 73 | $10^5$ | 99999.2500 | 99999.24999811 | 99999.249998 |
| 2 | | | | | 499996.2499 | 499996.24997187 | 499996.249971 |
| 4 | | | | | 899989.2554 | 899989.24987046 | 899989.249870 |
| 6 | | | | | 1299978.7679 | 129978.24962771 | 129978.249634 |

Yine Çizelge 4.6. göstermektedir ki çok büyük $c$ değerleri için matris boyutu dramatik bir şekilde artarken sadece birkaç basamak doğruluk elde edilmektedir. Bant genişliği parametresi daha da artırıldığında Jacobi sanki-spektral yöntemi sonuç verememektedir. Fakat Çizelge 4.6.'dan da görüldüğü gibi dönüştürülmüş Chebyshev (DC) sanki-spektral yöntemi kullanıldığında oldukça küçük matris boyutlarında dahi yüksek doğrulukta sonuçlar elde edilmiştir. Örneğin bant genişliği parametrsi $c = 10^4$ iken, Jacobi sanki-spektral yöntemiyle 8-10 basamak doğruluk elde etmek için gerekli matris boyutu $N = 300$ olmaktadır. Fakat, dönüştürülmüş Chebyshev sanki-spektral yöntemi kullanıldığında 10-12 basamak doğruluk elde etmek için gerekli matris boyutu $N = 60$ olmaktadır.

Açıkça görüldüğü üzere Jacobi polinomları üzerine kurulan klasik sanki-spektral şemalar bant genişliği parametresinin çok büyük değerleri için kullanışsız bir hal almaktadır. Bununla birlikte, sanki-spektral şemada dönüştürülmüş Chebyshev polinomları kullanıldığında, çok büyük $c$ değerleri için denklemin özdeğerleri oldukça küçük matris boyutlarında bile yüksek doğrulukta hesaplanabilmektedir.

Çizelge 4.8. $c = 10^4$ için ilk birkaç çift indeksli özdeğerler.

| $n$ | $N$ | $\gamma_1^{opt}$ | $\lambda(10^4,0)(DC)$ | (Huang ve ark., 2015) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 90 | 20 | 9999.24998124842386 | 9999.249981247640 |
| 2 | | | 49996.24971868807188 | 49996.24971868644 |
| 4 | | | 89989.24870582588483 | 89989.24870582526 |
| 6 | | | 129978.24634213931859 | 129978.2463421388 |
| 8 | | | 169963.24202680154121 | 169963.2420268017 |
| 10 | | | 209944.23515867584501 | 209944.2351586839 |
| 12 | | | 249921.22513674607035 | 249921.2251363630 |

Fakat, matris boyutunun küçük olması için dönüşümde bulunan $\gamma_1$ parametresinin seçimi büyük önem arzetmektedir. Bu parametrenin optimum değerini $(\gamma_1^{opt})$ bulmak için sistematik bir yol olmayıp deneme yanılma yöntemiyle bulunmaktadır. Burada optimum değerden kasıt, verilen doğruluğu elde etmek için gerekli en küçük matris boyutunun elde edildiği parametre değeridir. Çizelge 4.7.'de son sütun karşılaştırma amaçlı verilmiştir.

Çizelge 4.9. Çok büyük $c$ parametreleri için bazı çift indeksli özdeğerler.

| $n$ | $N$ | $\gamma_1^{opt}$ | $\lambda(10^5,0)$ | (Huang ve ark., 2015) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 105 | 103 | 99 999.249 998 080 413 21 | 99999.24999812440 |
| 2 | | | 499996.24997188552516 | 49996.249971716 |
| 4 | | | 899989.24987056641839 | 899989.2498706253 |
| 6 | | | 1299978.24963431758806 | 1299978.249634355 |
| 8 | | | 1699963.24920305632986 | 1699963.249203085 |
| 10 | | | 2099944.24851671652868 | 2099944.248516781 |
| 12 | | | 2499921.24751564534381 | 2499921.247515428 |

Çizelge 4.8., $c = 10^4$ parametre değeri için ilk yedi çift indeksli özdeğerin DC sanki-spektral yöntemi ile elde edilen yaklaşık değerlerini içermektedir. Son sütun karşılaştırma amacıyla (Huang ve ark., 2015) çalışmasından alınmıştır. Bu çalışmada yazarlar $c$ parametresinin karekökü ile ölçeklendirilmiş Hermite fonksiyonlarını baz olarak kullanan bir spektral yöntem kullanmışlardır.

Benzer şekilde Çizelge 4.9. ve Çizelge 4.10. sırasıyla $c = 10^5$ ve $c = 10^6$ için sayısal sonuçları içermektedir. Dikkat edilirse bu üç çizelgede de DC sanki-spektral ve ölçeklendirilmiş Hermite spektral yöntemleriyle elde edilen sayısal sonuçlar birbirleriyle oldukça uyumludur.

Çizelge 4.10. Çok büyük $c$ parametreleri için bazı çift indeksli özdeğerler.

| $n$ | $N$ | $\gamma_1^{opt}$ | $\lambda_n(10^6,0)$ | (Huang ve ark., 2015) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 130 | 103 | 999999.2499980628490 | 999999.2499998127 |
| 2 | | | 4999996.24999722372741 | 4999996.249997196 |
| 4 | | | 8999989.24998725764453 | 8999989.249987049 |
| 6 | | | 12999978.24996347166598 | 12999978.24996351 |
| 8 | | | 16999963.24992034211755 | 16999963.24992045 |
| 10 | | | 20999944.24985164403915 | 20999944.24985144 |
| 12 | | | 24999921.24975156039000 | 24999921.24975141 |

Çizelge 4.11. Çok büyük $c$ parametreleri için bazı çift indeksli özdeğerler.

| $n$ | $N$ | $\gamma_1^{opt}$ | $\lambda_n(10^7,0)(DC)$ | Asimptotik | (Alıcı ve Shen, 2017) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 170 | 289 | 9999999.24999823 | 9999999.24999998 | 9999999.24999998 |
| 2 | | | 49999996.249999150 | 49999996.24999972 | 49999996.24999971 |
| 4 | | | 89999989.249998450 | 89999989.24999870 | 89999989.24999870 |
| 6 | | | 129999978.249996796 | 129999978.24999635 | 129999978.24999634 |
| 8 | | | 169999963.249993264 | 169999963.24999204 | 169999963.24999203 |
| 10 | | | 209999944.249981880 | 209999944.24998516 | 209999944.24998516 |
| 12 | | | 249999921.249972999 | 249999921.24997514 | 249999921.24997515 |
| 14 | | | 289999894.249961853 | 289999894.24996138 | 289999894.24996139 |
| 16 | | | 329999863.249941706 | 329999863.24994326 | 329999863.24994328 |
| 18 | | | 369999828.249918341 | 369999828.24992019 | 369999828.24992021 |
| 20 | | | 409999789.249890208 | 409999789.24989158 | 409999789.24989160 |

Çizelge 4.11.'de $c = 10^7$ için bazı çift indeksli özdeğerler verilmiştir. Sonuçlar önce büyük $c$ değerleri için geçerli olan

$$\begin{aligned}\lambda_n(c,m) = {} & ck + m^2 - \frac{1}{8}(k^2+5) - \frac{k}{64c}(k^2+11-32m^2)\\ & - \frac{1}{1024c^2}\left[5(k^4+26k^2+21) - 384m^2(k^2+1)\right]\\ & - \frac{1}{c^3}\left[\frac{1}{128^2}(33k^5+1594k^3+5621) - \frac{m^2}{128}(37k^3+167k) + \frac{m^4}{8}k\right]\\ & + O(c^{-4}), \quad k = 2n+1\end{aligned} \tag{4.1}$$

asimptotik formülü ile karşılaştırılmıştır (Abramowitz ve Stegun, 1970). Sonuçların uyum içinde olduğu görülmektedir. Ardından (Alıcı ve Shen, 2017) ile karşılaştırma yapılmıştır. Bu çalışmada araştırmacılar, özel dönüşümlerle denklemi $(-1,1)$ aralığından $(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlı bir denkleme dönüştürmüş ve $c$ parametresinin karekökü ile ölçeklendirilmiş Hermite polinomlarını sanki-spektral şemada kullanmışlardır. Tablodaki sonuçları ise $N = 30$ matris boyutunda elde etmişlerdir. Her ne kadar elde edilen sonuçlar uyum içinde olsa da (Alıcı ve Shen, 2017) çalışmasında kullanılan yöntemin bu çalışmadakinden daha verimli olduğu açıktır.

Çizelge 4.12. Çok büyük $c$ parametreleri için bazı çift indeksli özdeğerler.

| $n$ | $N$ | $\gamma_1^{opt}$ | $\lambda_n(10^8,0)(DC)$ | (4.1) asimptotic formülü |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 300 | 500 | 9999999.24999823 | 9999999.24999998 |
| 2 | | | 49999996.249999150 | 49999996.24999972 |
| 4 | | | 89999989.249998450 | 89999989.24999870 |
| 6 | | | 129999978.249996796 | 129999978.24999635 |
| 8 | | | 169999963.249993264 | 169999963.24999204 |
| 10 | | | 209999944.249981880 | 209999944.24998516 |
| 12 | | | 249999921.249972999 | 249999921.24997514 |
| 14 | | | 289999894.249961853 | 289999894.24996138 |
| 16 | | | 329999863.249941706 | 329999863.24994326 |
| 18 | | | 369999828.249918341 | 369999828.24992019 |
| 20 | | | 409999789.249890208 | 409999789.24989158 |

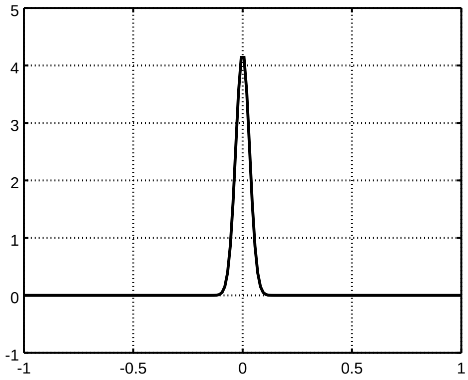
Fakat burada çok büyük $c$ değerleri için, Jacobi sanki-spektral yönteminden daha iyi bir yöntem verildiği açıktır. Çünkü, Çizelge 4.7.'den açıkça görüldüğü üzere $c = 10^5$ iken bile matris boyutu $N = 900$ olmaktadır. Bant genişliği parametresinin değeri arttıkça matris boyutunun dramatik bir şekilde arttığı düşünülürse, DC sanki-spektral yönteminin çok büyük $c$ değerleri için çok iyi bir iyileştirme olduğu açıktır.

Çizelge 4.13. Çok büyük $c$ değerleri için bazı özdeğerler.

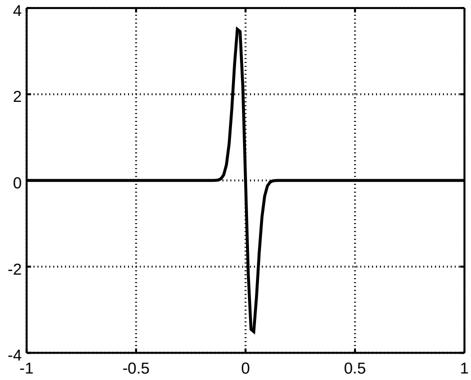
| $n$ | $N$ | $\gamma$ | $c$ | $\lambda_n(DC)$ | (4.1) asimptotic formülü |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 500 | 30 | $10^5$ | 99999.2499982 | 99999.2499981249 |
| 50 | | | | 10098724.0887909 | 10098724.0887909140 |
| 100 | | | | 20094947.9800125 | 20094947.9800124540 |
| 150 | | | | 30088669.9843846 | 30088669.9843901656 |
| 0 | 600 | 60 | $10^6$ | 999999.24999936 | 999999.2499998124 |
| 50 | | | | 100998724.2338837 | 100998724.2338836789131 |
| 100 | | | | 200994949.1230737 | 200994949.12307307124138 |
| 150 | | | | 300988673.8237994 | 300988673.82380032539368 |
| 0 | 950 | 100 | $10^7$ | 9999999.2497875 | 9999999.24999998137355 |
| 50 | | | | 1009998724.2483787 | 1009998724.24838840961456 |
| 100 | | | | 2009994949.2374091 | 2009994949.23730802536011 |
| 150 | | | | 3009988674.2074265 | 3009988674.20738363265991 |

Son olarak, Çizelge 4.13. çok büyük $c$ değerleri ($c = 10^5, 10^6, 10^7$) için bazı büyük indeksli $(n = 0, 50, 100, 150)$ özdeğerleri listelemektedir. Çizelgeden de görüldüğü üzere burada kullanılan yöntem hem düşük indisli hem de büyük indisli özdeğerleri yüksek doğrulukta hesaplayabilmektedir.

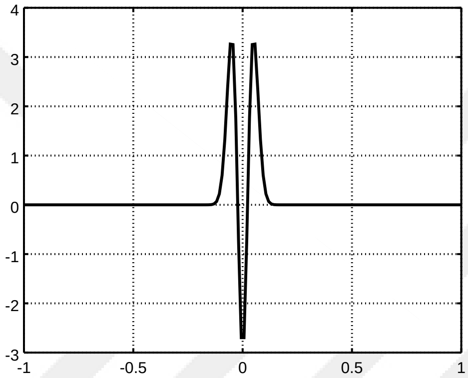
Bu çalışmada verilen yöntem ile keyfi bir $m = 0, 1, 2, \ldots$ değeri için de benzer sonuçlar elde edilmiştir. Şekil 4.1. $c = 1000$, $m = 10$ için (3.56) denkleminin ilk dört özfonksiyonunu içermektedir.



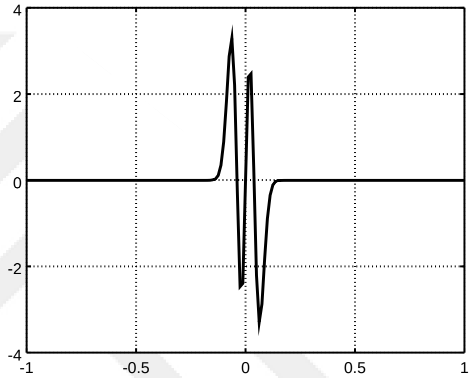

(a) $y_0(x), \quad \lambda_0 = 1099.299\ 886\ 167\ 0$




(b) $y_1(x), \quad \lambda_1 = 3098.399\ 433\ 242\ 3$




(c) $y_2(x), \quad \lambda_2 = 5096.498\ 154\ 090\ 5$




(d) $y_3(x), \quad \lambda_3 = 7093.595\ 296\ 337\ 4$

Şekil 4.1. (3.56) küremsi dalga denkleminin $c = 10^3$, $m = 10$ için ilk dört özfonksiyonu.

## 5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada, küremsi dalga denkleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları bant genişligi parametresinin hem küçük hem de çok büyük değerleri için sırasıyla Jacobi tipi ve dönüştürülmüş Chebyshev sanki-spektral yöntemleriyle hesaplanmıştır. Jacobi sanki-spektral yönteminin özellikle küçük bant genişliği değerleri $(c < 10^3)$ için uygun olduğu fakat daha büyük değerler için kullanışsız olduğu görülmüştür. Bu yüzden, parametrenin büyük değerleri için daha uygun bir yöntem olan dönüştürülmüş Chebyshev sanki-spektral yöntemi kullanılmıştır. Büyük $c$ değerleri için özfonksiyonlar sıfırın küçük bir komşuluğuna sıkıştığı için Chebyshev ekstremum noktaları uygun bir dönüşümle bu bölgeye gönderilmiş ardından yöntem uygulanmıştır. Bunun sonucunda da özdeğer ve özfonksiyonlar $c < 10^7$ parametre değerleri için etkili ve ucuz bir şekilde yüksek doğrulukta elde edilmiştir.

Ancak daha büyük $c$ değerleri için Chebyshev sanki-spektral yöntemi de kullanışsız bir hal almaktadır. Bu durumda, özdeğer ve özfonksiyonların hesabında asimptotik formüller kullanılabilir. Ayrıca, spektral yöntemlerde baz fonksiyonu olarak Hermite veya Laguerre fonksiyonlarının kullanılması da çok büyük $c$ değerleri için yüksek doğrulukta sonuçlar vermektedir (Huang ve ark., 2015; Alıcı ve Shen, 2017).

## KAYNAKLAR


ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I. A., 1970. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Dover, New York, 1970.

ALICI, H. and SHEN, J., 2017. Highly Accurate Pseudospectral Approximations of the Prolate Spheroidal Wave Equation for Any Bandwidth Parameter and Zonal Wavenumber. J. Sci. Comput., 71(2):804–821.

BARAKAT, K. M. A., ABODAYEH, T. 2005. The asimptotik iteration method for the angular spheroidal eigenvalue. J. Phys. A Math. Gen., 38:1299–1304.

BAYLISS, A., GOTTLIEB, D., MATKOWSY, B. J., and MINKOFF, M., 1989. An adaptive pseudospectralmethod for reaction dicusion problems. J. Comput. Phys., 81:421–443.

BOYD, J. P., 2004. Prolate spheroidal wawefunctions as an alternative to Chebyshev and Legendre polynomials for spectral and pseudospectral algorithms. J. Comput. Phys., 199: 688-716s.

BOYD, J. P., 2005. Computation of grid points ,quadrature weights and derivates for spectral element methods using prolate spheroidal wawefunctions prolate elements. ACM. Trans. Math. Softw., 31:149-165s.

CANUTO, C., HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A., and ZANG, T. A., 2006. Spectral Methods Fundamentals in Single Domains. Springer, Berlin Heidelberg.

CLENSHAW, C. W., 1957. The numerical solution of lineer differential equations in Chebyshev series. Proc. Camb. Phil. Soc., 53:134–149.

FRAZER, R. A., JONES, W. P. and SKAN, S. W., 1937. Approximations to functions and to the solution of differential equations. Rep. and Mem., 1799.

FUNARO, D., 1992. Polynomial Approximation of Differential Equations. Lecture Notes in Physics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

GOLUB, G. H. and WELSCH, J. H., 1969. Calculation of Gauss quadrature rules, Math. Comput., 23:221–230+s1–s10.

HUANG, Z., XİAO, J., BOYD, J. P. 2015. Adaptive radial basis function and hermite function pseudospectral methods for computing eigenvalues of the prolate spheroidal wave equation for very large bandwidth parameter. J. Comput. Phys., 281:269–284.

KOSLOOF, D. and TAL-EZER, H., 1993. A modifed Chephsev pseudospektral method with an $o(n^{-1})$ time step restriction. J. Comput. Phys., 104:457–469.

LANCZOS, C., 1938. Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions. J. Math. Phys., 17:123–199.

NIKIFOROV, A. F. and UVAROV, V. B., 1988. Special Functions of Mathematical Physics. Birkhäuser, Basel.

OGBURN, D., WATERS, C, SCIFFER, M. HOGAN J., ABBOTT, P. ,2014. A finite difference construction of the spherodial wawe function, J. Comput. Phys. Comm., 185:244–253.

SCHMUTZHARD, S., HRYCAK, T. and FEICHTINGER, H., 2015. A numerical study of the Legendre-Galerkin method for the evaluation of the prolate spheroidal wavefunction. Numer. Algorithms., 68:691–710.

TREFETHEN, L. N., 2000. Spectral Methods in Matlab. SIAM, Philadelphia.

VILLADSEN, J. V. and STEWART, W. E., 1967. Solution of boundary value problems

by orthogonal collocation. Chem. Eng. Sci., 22:1483–1501.
XIAO, H., ROKHLIN, V. ve YARVIN, N., Prolate spheroidal wavefunctions, quadrature and interpolation. Inverse Probl., 17:805–828.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

| | | |
|---|---|---|
| **Adı Soyadı** | : | Hülya AYTAR |
| **Uyruğu** | : | T.C. |
| **Doğum Yeri ve Tarihi** | : | Şanlıurfa , 21.02.1993 |
| **Telefon** | : | 0544 309 55 26 |
| **e-mail** | : | aytarhulya93@gmail.com |

### EĞİTİM

| **Derece** | | **Adı** | **Bitirme Yılı** |
|---|---|---|---|
| Lise | : | Yüzbaşı Ali Saip URSAVAŞ Lisesi, Şanlıurfa | 2010 |
| Üniversite | : | Harran Üniv., Matematik Böl., Şanlıurfa | 2014 |
| Yüksek Lisans | : | Harran Üniv., Matematik Böl., Şanlıurfa | |

### İŞ DENEYİMLERİ

| **Yıl** | **Kurum** | **Görevi** |
|---|---|---|
| 2015 – | Özel Erkan Şanlıurfa Teknik Meslek LİIsesi | Matematik Öğretmeni |

### YABANCI DİLLER

ingilizce