T.C
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BANACH UZAYLARINDA İTERASYON DİZİLERİ İÇİN GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLERİN YAKINSAKLIK TEOREMLERİ

Mustafa KÖROĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2015

Prof.Dr. Seyit TEMİR danışmanlığında, Mustafa KÖROĞLU'nun hazırladığı "Banach uzaylarında iterasyon dizileri için genişlemeyen dönüşümlerin yakınsaklık teoremleri" konulu bu çalışma 12/02/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

			İmza
Danışman	:	Prof. Dr. Seyit TEMİR	
Üye	:	Prof. Dr. Manaf MANAFLI	
Üye	:	Doç.Dr. Aydın İZGİ	

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Prof. Dr. Sinan UYANIK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BANACH UZAYLARINDA İTERASYON DİZİLERİ İÇİN GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLERİN YAKINSAKLIK TEOREMLERİ

Mustafa KÖROĞLU

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Seyit TEMİR
Yıl: 2015, Sayfa:42

Banach uzaylarında genişlemeyen, sözde genişlemeyen, asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümler ya da asimtotik olarak sözde genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktaya yaklaşımları için iterasyon teknikleri ile ilgili problemler son zamanlarda birçok yazar tarafından çalışılmaktadır. Özellikle, Mann ve Ishikawa iterasyon süreçlerini içeren Banach uzaylarında genişlemeyen ve onun genelleşmeleri olan dönüşümler için sabit nokta iterasyon süreçleri çok sayıda yazar tarafından yoğun olarak çalışılmış ve kuvvetli ve zayıf yakınsaklık teoremleri ispatlanmıştır . Bu tezde,iki genişlemeyen dönüşüm ve iki asimtotik olarak genişlemeyen dönüşüm için iterasyon süreçlerinin kuvvetli ve zayıf yakınsaklık teoremleri incelenmektedir. Ayrıca Banach uzayında Ishikawa hata içeren iterasyon şemasının *I*-asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümleri için ortak sabit noktaya kuvvetli ve zayıf teoremleri ispatlanmaktadır.

ANAHTAR KELİMELER: Genişlemeyen Dönüşümler, Asimtotik Olarak Genişlemeyen Dönüşümler, *I*-Asimtotik Olarak Genişlemeyen Dönüşümler, Yakınsaklık Teoremleri

ABSTRACT

MScThesis

CONVERGENCE THEOREMS FOR ITERATION SEQUENCES OF NONEXPANSIVE MAPPINGS IN BANACH SPACES.

Mustafa KÖROĞLU

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Seyit TEMİR

Year: 2015, Page:42

Recently, problems related to iterative techniques for approximating fixed points of nonexpansive mappings , asymptotically non-expansive mappings or asymptotically quasi- non-expansive mappings in Banach spaces have been studied by many authors. Especially,fixed point iteration processes for non-expansive mappings and their generalization mappings in Banach spaces including Mann and Ishikawa-type iteration processes have been studied and proved weak and strong convergence theorems extensively by many authors. In this thesis, the strong and weak convergence theorems of iterative processes for two non-expansive mappings and asymptotically non-expansive mappings are studied. In addition, the strong and weak convergence theorems of the Ishikawa-type iterative scheme with errors to common fixed point of *I*- asymptotically non-expansive mappings in a Banach space are proved.

KEY WORDS: Non-Expansive Mapping, Asymptotically Non-Expansive Mapping, *I*-Asymptotically Non-Expansive Mapping, Convergence Theorems .

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım tez danışmanım sayın Prof. Dr. Seyit TEMİR ´e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu zorlu süreçte her zaman desteklerini hissettiğim ailem ve sevgili arkadaşlarıma sonsuz teşekkürler.

1. GİRİŞ

Banach ve metrik uzaylarda genişlemeyen ve sözde genişlemeyen dönüşümler için sabit noktalar üzerinde son zamanlarda bir çok çalışma yapılmıştır. Asimtotik olarak sözde genişlemeyen dönüşümler yada asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümler için öteleme dizilerin sabit noktaya yaklaşımı ile ilgili problemler birçok yazar tarafından çalışılmaktadır. 1965'de Browder, Banach uzaylarında lineer olmayan genişlemeyen dönüşümleri çalışmıştır. 1967' de Diaz ve Metcalf, sözde genişlemeyen dönüşüm kavramını vermişlerdir. 1972' de Goebel ve Kirk,asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin notasyonunu sunmuşlardır. Petryshyn ve Williamson (1973)'de çalışmaları, ötelemelerin dizisinin sözde genişlemeyen dönüşümlerinin sabit noktaya zayıf ve kuvvetli yakınsaklığı, çeşitli özel durumlarda Dotson (1970) tarafından çalışılan ve Mann (1953) tarafından sunulan Mann ötelemelerinin yakınsaklığı ile ilgilidir.

Tan ve Xu (1993), genişlemeyen dönüşümlerin Ishikawa (1974) tarafından sunulan Ishikawa ötelemelerinin yakınsaklık teoremlerini kurmuşlardır. Banach uzaylarında sözde genişlemeyen dönüşümleri için Ishikawa ötelemelerinin yakınsaklığı ise, Ghosh ve Debnath (1997) tarafından incelenmiştir. Daha sonra, Liu (2001) tarafından asimtotik sözde genişlemeyen dönüşümler için Ishikawa öteleme dizilerinin sabit noktaya yakınsaklığı için gerekli ve yeterli koşullar gösterilmiştir.

Shahzad (2004), genelleştirilmiş I-genişlemeyen dönüşümler için bir iyi yaklaşım sonucunun değişmeli olmayan versiyonunu göstermiştir. Temir ve Gül (2007) tarafından Hilbert uzayında I-asimtotik sözde genişlemeyen dönüşüm için zayıf yakınsaklık teoremi, yukarıda geliştirilen sonuçlardan farklı bir yaklaşım kullanılarak ispatlanmıştır. Rhoades ve Temir (2006), Opial koşulunu sağlayan düzgün konveks Banach uzayında I-genişlemeyen dönüşümün Mann öteleme dizisinin zayıf yakınsaklığını kurmuşlardır.Temir(2010),I-asimtotik olarak sözde genişlemeyen dönüşümler için hatalı Ishikawa öteleme dizilerinin yakınsaklıkları incelenmiştir.

Bu çalışmada öncelikle S. H. Khan ve H. Fukar-ud-din (2005), Shahzad ve Udomene (2006), Ciric ve ark. (2010) çalışmaları göz önüne alınarak düzgün konveks bir Banach uzayında öteleme şemasının iki genişlemeyen dönüşüm için zayıf ve kuvvetli yakınsaklıkları incelenecektir.

Daha sonra, kaynaklar kısmında verilen çalışmalar ışığında kendinden kendi üzerine asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümün ve onun genişlemeleri olan dönüşümün sabit noktalarına, *I*-asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümün ortak sabit noktaya yaklaşımı elde edilmeye çalışılacaktır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1. Diziler

Tanım 2.1.1. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinden $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesine tanımlanan her fonksiyona bir reel terimli dizi veya kısaca dizi denir ve $\{x_n\}$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine üstten sınırlıdır denir. M sayısına da bu dizinin bir üst sınırı adı verilir. Üst sınırlarının en küçüğüne de dizinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir. $\sup x_n$ veya $\text{eküs}x_n$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq K$ olacak şekilde bir K reel sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine alttan sınırlıdır denir. K sayısına da bu dizinin bir alt sınırı adı verilir. Alt sınırlarının en büyüğüne dizinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir. $\inf x_n$ veya $\text{ebas}x_n$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. Her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| \leq A$ olacak şekilde bir A pozitif reel sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine sınırlı dizi denir.

Tanım 2.1.5 (x_n) bir reel sayı dizisi olsun ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $|x_n - x_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa $\{x_n\}$ dizisi x_0 a yakınsaktır denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ veya $\{x_n\} \to x_0$ şeklinde gösterilir.

Yakınsak her dizi sınırlıdır ve limiti tektir. (Kolmogorov, Fomin, 1970).

Tanım 2.1.6. Bir $\{x_n\}$ dizisi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n < x_{n+1}$ ise bu diziye monoton artan dizi denir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > x_{n+1}$ ise monoton azalan dizi denir.

Tanım 2.1.7. $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $x(n)=x_n$ dizisi verilsin. $n:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $n(k)=n_k$ dizisi bir artan dizi olmak üzere $(x\circ n):\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ bileşke fonksiyonuna $\{x_n\}$ dizisinin bir alt dizisi denir ve $(x\circ n)(k)=x(n(k))=x(n_k)=x_{n_k}$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.8. Gerçel değerli bir $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak ve limitinin L olması için gerekli ve yeterli koşul $\{x_n\}$ dizisinin bütün $\{x_{n_k}\}$ alt dizilerinin de aynı L limitine yakınsamasıdır. Her sınırlı reel sayı dizisinin en az bir yakınsak alt dizisi vardır (Kolmogorov, Fomin, 1970).

Tanım 2.1.9 Herhangi bir X uzayında $\{x_n\}$ dizisi verilsin. O zaman

$$\overline{\lim} x_n = \limsup x_n = \inf_{m\geq 1}\left(\sup_{n\geq m}(x_n)\right)$$

şeklinde tanımlanan limit değerine $\{x_n\}$ dizisinin üst limiti denir.

Benzer olarak

$$\underline{\lim} x_n = \liminf x_n = \sup_{m\geq 1}\left(\inf_{n\geq m}(x_n)\right)$$

şeklinde tanımlanan limit değerine $\{x_n\}$ dizisinin alt limiti denir.

Teorem 2.1.10. $\{x_n\}$ sınırlı bir dizi ise $\limsup x_n$ ve $\liminf x_n$ sırasıyla $\{x_n\}$ dizisinin en büyük ve en küçük limit noktasıdır ve

$$\liminf x_n \leq \limsup x_n \quad \text{ve} \quad \liminf(-x_n) = -\limsup x_n$$

dir. (Royden, 1978).

Teorem 2.1.11. $\{x_n\}$ reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. O zaman

$$\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n = x \Leftrightarrow \lim x_n = x$$

dir. (Royden, 1978).

Tanım 2.1.12. $\{x_n\}$ reel terimli bir dizi olsun. Her $\varepsilon>0$ sayısına karşı gelen bir $n_0\in\mathbb{R}$ sayısı m,n$\geq n_0$ alındığında $|x_m-x_n|<\varepsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi adı verilir.

2.2. Metrik Uzaylar

Tanım 2.2.1. X boş olmayan bir küme olsun. $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna, her $x, y, z \in X$ için

(M1) $d(x, y) \geq 0$

(M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

koşullarını sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik adı verilir. (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir. (X, d) metrik uzayı kısaca X ile gösterilir.

Tanım 2.2.2. X bir metrik uzay ile bu uzayın bir x_0 noktası ve pozitif bir r reel sayısı verilsin. Bu durumda

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar,

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) = r\}$$

kümesine de x_0 merkezli ve r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

Tanım 2.2.3. $\mathbb{R}$ nin bazı alt kümelerinin bir $\mathfrak{M}$ sınıfı göz önüne alınsın. Bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesi için, $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, $A_\lambda \in \mathfrak{M}$ yazılabiliyorsa $\mathfrak{M}$ sınıfına A kümesinin bir örtüsü adı verilir. Bu durumda A kümesinin her noktası $\mathfrak{M}$ sınıfı içinde bulunur. $\mathfrak{M}$ deki bütün kümeler açıksa bu sınıf bir açık örtü adını alır. $\mathfrak{M}$ sınıfı $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ gibi kümelerin oluşturduğu sayılabilir bir sınıfsa ve $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ yazılabiliyorsa $\mathfrak{M}$ sınıfına A nın sayılabilir örtüsü denir.

Tanım 2.2.4. $\mathfrak{M}$ sınıfı bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesinin bir örtüsü olsun. $\mathfrak{A}$ her üyesi $\mathfrak{M}$ nin içinde olan bir alt kümeler sınıfıysa ve $\mathfrak{A}$ sınıfı da A kümesinin bir örtüsü ise $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}$ alt sınıfı A nın bir alt örtüsü adını alır.

Tanım 2.2.5. Bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A ya kompakt küme adı verilir.

Önerme 2.2.6. Bir metrik uzayın kompakt alt kümesi kapalı ve sınırlıdır (Bayraktar,1992).

Tanım 2.2.7. X kompakt bir küme ise X metrik uzayına kompakt metrik uzay denir.

Her kompakt metrik uzay tamdır (Kolmogorov, Fomin, 1970).

Tanım 2.2.8. X bir metrik uzay ve A bir alt kümesi olsun. Bir $x \in X$ noktasının A kümesine uzaklığı bu noktanın A nın tüm noktalarına uzaklıklarının infimumudur.

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$$

Tanım 2.2.9. X bir metrik uzay ve A ile B birer alt kümesi olsun. A ve B kümesinin birbirine uzaklığı, $x \in A$ ve $y \in B$ için

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

dir. Bu tanımda $d(A, B) = d(B, A)$ olduğu açıktır.

İki küme arasındaki uzaklığın sıfır olmasının bu kümelerin aynı olduğunu ifade etmediği açıktır.

Tanım 2.2.10. X metrik uzayının bir alt kümesi A olsun. $x, y \in A$ için bir A alt kümesinin çapı,

$$d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.2.11. X bir metrik uzay, bu uzay içinde bir dizi $\{x_n\}$ ve $x \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n_0 \leq n$ olduğunda $d(x_n, x) < \varepsilon$ ya da $x_n \in B(x, \varepsilon)$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsıyor denir. Bu durum $x_n \to x$ ya da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şeklinde ifade edilir.

Önerme 2.2.12. Bir (X, d) metrik uzayında yakınsak her dizi sınırlıdır ve limiti tektir (Kolmogorov, Fomin, 1970).

Tanım 2.2.13. X bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için m,n$\geq n_0$ olduğunda

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.2.14. Bir X metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde yakınsak ise X metrik uzayına tam metrik uzay denir (Kolmogorov, Fomin, 1970)

2.3. Normlu Lineer Uzaylar

Tanım 2.3.1. X boş olmayan bir küme ve $\mathbb{F}$ bir sayı cismi olsun. Her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için

1) $x + y = y + x$

2)$x + (y + z) = (x + y) + z$

3) $x + \theta = x$ olacak biçimde bir θ öğesi var

4) $x + x = \theta$ olacak biçimde bir $x \in X$ öğesi var

5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

7) $(\alpha\beta x)=\alpha(\beta x)$

8) $1.x=x$

koşulları sağlanıyorsa X kümesine $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör) uzayı denir.

Tanım 2.3.2. X bir lineer uzay ve $A\subseteq X$ olsun. Eğer $x,y\in A$ için $0\leq\lambda\leq 1$ olmak üzere $\lambda\cdot x+(1-\lambda)\cdot y\in A$ oluyorsa A kümesine konveks küme denir.

Tanım 2.3.3. X bir lineer uzay olsun. $N:X\to\mathbb{R}$ dönüşümü her $x,y\in X$ ve her $\alpha\in\mathbb{R}$ için

N1) $N(x)\geq 0$ ve $N(x)=0\Leftrightarrow x=\theta$

N2) $N(\alpha x)=|\alpha|N(x)$

N3) $N(x+y)=N(x)+N(y)$

koşullarını sağlıyorsa bu dönüşüme norm denir. X bir lineer uzay ve bu uzay üzerinde bir norm tanımlanmış olsun. Bu uzaya normlu lineer uzay denir. Genel olarak, N norm dönüşümü yerine $\|\cdot\|$ sembolü kullanılır.

X normlu bir lineer uzay olmak üzere,

$$d:X\times X\to\mathbb{R}\,;\ d(x,y)=\|x-y\|$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü X uzayı üzerinde bir metriktir. Bu metriğe norm metriği denir. Bu nedenle her normlu uzay bir metrik uzaydır (Bayraktar, 1992).

Tanım 2.3.4. $(X,\|\cdot\|)$ normlu lineer uzayının alt kümesi A olsun. Eğer

$$R_A=\sup\{\|x-y\|:x\in A,y\in A\}<\infty$$

oluyorsa A kümesine X içinde sınırlı küme denir.

Tanım 2.3.5. $(X,\|\cdot\|)$ normlu lineer uzayı içinde bir $\{x_n\}$ dizisi verilmiş olsun. Her $\varepsilon>0$ için $n\geq n_0$ olduğunda $\|x_n-x\|\leq\varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsaktır denir ve $x_n \to x$ şeklinde gösterilir.

Önerme 2.3.1. $(X,\|\cdot\|)$ normlu lineer uzayı içinde yakınsak her dizi sınırlıdır ve limiti tektir (Kolmogorov, Fomin, 1970).

Tanım 2.3.6. $(X,\|\cdot\|)$ normlu lineer uzayı içinde $\{x_n\}$ dizisi verilmiş olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\mathrm{m}, n \geq n_0$ olduğunda

$$\|x_m - x_n\| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi adı verilir.

Önerme 2.3.2. $(X,\|\cdot\|)$ normlu lineer uzayıiçinde her Cauchy dizisi sınırlıdır(Kolmogorov,Fomin,1970).

Önerme 2.3.3. $(X,\|\cdot\|)$ normlu lineer uzayında $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi $x \in X$ noktasına yakınsak bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisine sahip ise $\{x_n\}$ diziside x'e yakınsaktır(Kolmogorov,Fomin,1970).

Tanım 2.3.4. $(X,\|\cdot\|_1)$, $(Y,\|\cdot\|_2)$ birer normlu lineer uzay. X uzayından Y içine f bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$\|x - x_0\|_1 < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_2 < \varepsilon$$

ya da buna denk olarak

$$f\big(B(x_0,\delta)\big) \subset B\big(f(x_0),\varepsilon\big)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir.

Bir $(X,\|\cdot\|)$ normlu lineer uzayının her noktasında sürekli olan f dönüşümüne X üzerinde sürekli bir fonksiyon adı verilir.

2.4. Banach Uzayları

Tanım 2.4.1. X normlu lineer uzay olsun. X, norm metriğine göre tam ise X uzayına Banach uzayı denir.

Tanım 2.4.2. X in normlu reel veya kompleks lineer uzay oluşuna göre Banach uzayına, reel veya kompleks Banach uzayı denir.

Örnek 2.4.3. $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ kümesi bileşen ve bileşen toplama ve skalerle çarpma ve

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

normuna göre bir reel Banach uzaydır.

Tanım 2.4.4. X ve Y reel sayı cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $T : X \to Y$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$T(x+y) = T(x) + T(y)$$

$$T(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot T(x)$$

ya da buna denk olarak her $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$T(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot T(x) + \beta \cdot T(y)$$

şartını sağlıyorsa T dönüşümüne lineer dönüşüm denir.

Eğer T dönüşümü yukarıdaki şartlardan herhangi birini gerçeklemezse T dönüşümüne lineer olmayan dönüşüm denir.

Tanım 2.4.5. $(X, \|\cdot\|)$ ve $(Y, \|\cdot\|)$ iki normlu uzay ve $T : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in X$ için

$$\|T(x)\| \leq M \cdot \|x\|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti varsa, T dönüşümüne sınırlı dönüşüm denir.

Tanım 2.4.6. X bir lineer uzay olsun. Bu uzayın bir vektörüne bir skaler sayı karşı getiren bir $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu lineer fonksiyonel olarak adlandırılır.

Lineer fonksiyonellerin oluşturduğu $X^* = L(X,\mathbb{R})$ lineer uzayına da X uzayının cebirsel duali adı verilir.

Tanım 2.4.7. $(X,\|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzayı üzerindeki tüm sürekli lineer fonksiyonellerin oluşturduğu lineer uzayına X uzayının topolojik duali adı verilir. $f' : X \to \mathbb{R}$ sınırlı lineer fonksiyonellerin oluşturduğu topolojik dual $X' = B(X,\mathbb{R})$ ile gösterilir.

X' de bir normlu lineer uzaydır ve $\mathbb{R}$ tam olduğu için X tam olmasa bile X' daima bir Banach uzayıdır. X' topolojik dualinin, X^* cebirsel dualin alt uzayı olduğu açıktır.

Tanım 2.4.8. X normlu lineer uzayının X' duali de normlu lineer uzay olduğundan bu uzayın da duali, yani X üzerinde her sınırlı sürekli fonksiyonele bir skaler sayı karşı getiren sürekli lineer fonksiyonellerin oluşturduğu lineer uzay tanımlanabilir. $(X')' = X''$ lineer uzayına X in biduali (ikinci duali) adı verilir. X'' bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.4.9. $\Gamma : X \to X''$ fonksiyonu lineerdir. Γ fonksiyonuna X uzayının X'' uzayı içine kanonik dönüşümü adı verilir. Γ kanonik dönüşümünün erişim uzayı X'' bidualinin tümünü kapsarsa yani $\Re(\Gamma) = X''$ ise X uzayı norm refleksif ya da kısaca refleksif olarak adlandırılır. X'' daima tam olduğundan bir X normlu lineer uzayı ancak Banach uzayı ise refleksif olabilir. Bir Banach uzayı ancak ve ancak duali refleksif ise refleksif olur .

Tanım 2.4.10. X bir Banach uzayı olsun. Her $x, y \in X$ için $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$ ve $\|x-y\| > 0$ iken $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| < 1$ ise X uzayına sıkı konveks Banach uzayı adı verilir.

Tanım 2.4.11. X bir Banach uzayı olsun. Eğer $x, y \in X$ ve herhangi bir $\varepsilon \in (0,2]$ için $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ ve $\|x-y\| > \varepsilon$ iken

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \delta$$

olacak biçimde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa X uzayına düzgün konveks Banach uzayı denir. Düzgün konveks Banach uzayı refleksifdir .

Tanım 2.4.12. X normlu lineer uzayı içinde bir dizi $\{x_n\}$ ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

ise $\{x_n\}$ dizisi x_0 noktasına kuvvetli yakınsıyor denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.4.13. X normlu lineer uzayı içinde bir dizi $\{x_n\}$ dizisi verilmiş olsun. Eğer, her $f \in X'$ için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

olacak biçimde bir $x_0 \in X$ elemanı varsa $\{x_n\}$ dizisi x_0 a zayıf yakınsıyor denir ve $x_n \xrightarrow{z} x_0$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.4.14. X normlu lineer uzayı üzerinde sınırlı lineer fonsiyonellerin bir dizisi (f_n) olsun. Eğer her $x \in X$ için $f_n(x) \to f(x)$ olacak şekilde bir $f \in X'$ fonksiyoneli varsa, (f_n) dizisi f ye zayıf yakınsar denir ve $f_n \xrightarrow{z^*} f$ şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.4.15. X bir Banach uzayı, x_n ve x X in elemanları, f_n ve f de X in elemanları olsun. $(n \in \mathbb{N})$

(a) $x_n \to x_0$, $f_n \to f$

(b) $x_n \xrightarrow{z} x_0$, $f_n \xrightarrow{k} f$

(c) $x_n \xrightarrow{k} x_0$, $f_n \xrightarrow{z^*} f$

ise $n \to \infty$ iken $f_n\left(x_n\right) \xrightarrow{k} f\left(x\right)$ dir.

Bir refleksif normlu lineer uzayda her sınırlı dizinin zayıf yakınsak bir alt dizisi vardır (Kolmogorov,Fomin,1970).

Teorem 2.4.16. X normlu lineer uzayı içinde $\{x_n\}$ bir dizi olsun. O zaman;

(i) Kuvvetli yakınsak ise zayıf yakınsaktır.

(ii) (i) şartının tersi genelde doğru değildir.

(iii) Eğer X normlu uzayının boyutu sonlu ise o zaman zayıf yakınsak ise kuvvetli yakınsaktır(Kolmogorov,Fomin,1970).

Örnek 2.4.17. Bir refleksif Banach uzayında her sınırlı dizi, zayıf yakınsak bir alt diziye sahiptir.

Çözüm: X refleksif Banach uzayı ve $\{x_n\}$, X içinde sınırlı bir dizi olsun. Her n için $\|x_n\| \leq k$ olacak şekilde bir k sabiti vardır.M , $x_1, x_2, x_3, \ldots$ vektörleri ile tanımlı kapalı alt uzay olsun. O zaman, M ayrılabilirdir. M aynı zamanda refleksifdir. Çünkü X refleksif Banach uzayının kapalı alt uzayıdır.

Böylece M=M** dır. Bu sebeple M** ayrılabilirdir. Sonuç olarak M* ayrılabilirdir.

$\{f_i : i = 1,2,3,\ldots\}$, M^* ın sayılabilir yoğun alt kümesi olsun. Her n için

$$\left|f_1\left(x_n\right)\right| \leq \|f\| \cdot \|x_n\| \leq k \cdot \|f_n\|$$

dir. $\left(f_1\left(x_n\right)\right)$, skalerlerin sınırlı bir dizisidir. Bu sebeple, $k \to \infty$ iken $\left(f_1\left(x_1, k\right)\right)$ yakınsak olacak şekilde $\{x_n\}$ in $s_1 = \left(x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots\right)$ bir alt dizisi vardır. Benzer şekilde $k \to \infty$ iken $\left(f_2\left(x_2, k\right)\right)$ yakınsak olacak şekilde $\left(s_1\right)$ in $s_2 = \left(x_{21}, x_{22}, x_{23}, \ldots\right)$ bir alt dizisi vardır. Genel olarak, $k \to \infty$ iken $\left(f_n\left(x_n, k\right)\right)$ yakınsak olacak şekilde

(s_{n-1}) in $s_n = (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, ...)$ bir alt dizisi vardır. $s = (x_{11}, x_{22}, x_{33}, ...)$ diagonal dizisi alınsın. O zaman, $n = 1, 2, 3, ...$ için s_n bir alt dizisi s dir. Her bir $f_i \in \mathrm{M}^*$ için $n \to \infty$ iken $(f_i(x_m))$ yakınsaktır. Böylece her $f \in \mathrm{M}^*$ için $(f(x_{nn}))$ yakınsaktır. $F(f) = \lim_{n\to\infty} f(x_{nn})$ tanımlansın. O zaman, $|F(f)| \le \|f\| \cdot \sup_{(n)} \|x_{nn}\| \le k \cdot \|f\|$, $f \in \mathrm{M}^{**}$ olduğunu gösterir.

$f(p) = F(f)$ olacak şekilde $p \in \mathrm{M}$, M nin refleksif olmasından sağlanır. Her $f \in \mathrm{M}^*$ için

$$f(p) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

olur. Bu nedenle $\{x_n\}$ dizisi p noktasına zayıf yakınsaktır.

Tanım 2.4.18. T, $\mathbb{R}$ uzayından $\mathbb{R}$ içine tanımlı bir dönüşüm olmak üzere $F = \{x \in \mathbb{R} : T(x) = x\}$ şeklinde bir küme tanımlansın. F kümesinin her bir x elemanına T dönüşümünün sabit noktası, F kümesine de T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi denir.

Tanım 2.4.19. $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu 0 da sürekli, artan bir fonksiyon olsun ve $\phi(0) = 0$ koşulunu sağlasın. (X, d) ve (Y, ρ) metrik uzaylar olmak üzere $f : X \to Y$ fonksiyonu her $x_1, x_2 \in X$ için

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \le \phi(d(x_1, x_2))$$

bağıntısını gerçeklerse ϕ ye f fonksiyonun bir süreklilik modülü adı verilir.

Tanım 2.4.20. $k > 0$ bir sabit olmak üzere süreklilik modülü $\phi(d) = k \cdot d$ şeklinde olan fonksiyonlar Lipschitz sınıfını oluşturur ve her $x_1, x_2 \in X$ için

$$d(f(x_1), f(x_2)) \le k \cdot d(x_1, x_2)$$

olduğundan Lipschitz sürekli fonksiyonlar olarak adlandırılır. k sayısına Lipschitz sabiti adı verilir.

Tanım 2.4.21. (X,d) bir metrik uzay olsun ve $f:X\to X$ fonksiyonu bu uzayı

kendi içine dönüştürsün. Her $x,y\in X$ nokta çifti ve $0<k<1$ koşulunu sağlayan bir k reel sayısı için

$$\rho\left(f(x),f(y)\right)\le k\cdot d(x,y)$$

koşulu sağlanıyorsa f ye bir büzülme dönüşümü adı verilir. Bir büzülme dönüşümünün Lipschitz sürekli bir fonksiyon olduğu açıktır. k Lipschitz sabiti bu durumda büzülme sabiti olarak adlandırılır.

Teorem 2.4.22. Tam metrik uzay üzerinde her büzülme dönüşümü, bir sabit noktaya sahiptir. (Kolmogorov, Fomin, 1970)

Teorem 2.4.23. X bir tam metrik uzay ve f bir büzülme dönüşümü ise f fonksiyonunun tek bir sabit noktası vardır. Büzülme olmayan dönüşümlerin de sabit noktası vardır, hatta tek olabilir (Kolmogorov, Fomin, 1970).

Örnek 2.4.24. $T(x)=2+\frac{1}{2}\cdot x,\ \ x\in[0,1]$ şeklinde tanımlanan $T:[0,1]\to\mathbb{R}$ dönüşümü $[0,1]$ üzerinde büzülme dönüşümüdür, fakat bu aralıkta sabit noktaya sahip değildir.

Çözüm: $d:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}_+,\ d(x,y)=\|x-y\|$ şeklinde tanımlanan uzaklık fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde bir metriktir. d metriğine $\|\cdot\|$ normunun indirgediği metrik adı verilir. Her $x,y\in[0,1]$ ve $0<k<1$ koşulunu sağlayan bir k reel sayısı için

$$d\left(T(x),T(y)\right) \leq k \cdot d(x,y)$$
$$\left\|T(x)-T(y)\right\| \leq k \cdot \left\|x-y\right\|$$
$$\left\|2+\frac{1}{2}\cdot x-\left(2+\frac{1}{2}\cdot y\right)\right\| \leq k \cdot \left\|x-y\right\|$$
$$\left\|2+\frac{1}{2}\cdot x-2-\frac{1}{2}\cdot y\right\| \leq k \cdot \left\|x-y\right\|$$
$$\left\|\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}\cdot y\right\| \leq k \cdot \left\|x-y\right\|$$
$$\frac{1}{2}\cdot \left\|x-y\right\| \leq k \cdot \left\|x-y\right\|$$
$$\left\|x-y\right\| \leq 2\cdot k \cdot \left\|x-y\right\|$$

$$0<2\cdot k<1 \Rightarrow 0<k<\frac{1}{2}$$

dir. T , $[0,1]$ üzerinde büzülme dönüşümüdür. $x \in [0,1]$ için

$$T(x)=x \Rightarrow 2+\frac{1}{2}\cdot x = x \Rightarrow 2=\frac{x}{2} \Rightarrow x=4 \notin [0,1]$$

dir. Gerçekten T dönüşümü $[0,1]$ aralığında sabit noktaya sahip değildir.

3. MATERYAL VE METOD

Bu tezde kaynaklar kısmında verilen çalışmalar detaylı olarak incelenerek mevcut sonuçlar karşılaştırılmaktadır. Daha iyi bir yaklaşım elde etmek için hangi koşullar altında sonuçların elde edildiği incelenip, bu verilmiş olan koşullar yerine özel koşullar alınarak iterasyon dizilerinin zayıf ve kuvvetli yakınsaklıkları araştırılmaktadır.

3.1. İterasyon Şemaları

Özellikle, Mann ve Ishikawa iterasyon dizilerinin genişlemeyen ve onun genelleşmeleri olan dönüşümler için kuvvetli ve zayıf yakınsaklıkları ile ilgili olan makaleler temin edilerek, çalışmalarımıza esas teşkil eden konu ele alınmıştır.

C, X normlu uzayının boştan farklı konveks alt kümesi olsun. *S* ve $T{:}C \to C$ iki dönüşüm olsun.

Mann hata içeren öteleme şeması ve Ishikawa hata içeren öteleme şeması olarak da bilinen öteleme şemaları aşağıda verilmiştir.

$\{x_n\}$ dizisi aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$x_1 \in C$$

$$x_{n+1} = a_n Tx_n + b_n x_n + c_n u_n, \quad n \geq 1$$

Burada $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ dizileri $[0,1]$ aralığında ve $a_n + b_n + c_n = 1$ olacak şekildeki dizilerdir. $\{u_n\}$ ise C de sınırlı bir dizidir. Buradaki sınırlı $\{u_n\}$ dizisi hatalı Mann öteleme şeması olarak bilinir. Burada $c_n=0$ alındığında bu şema Mann öteleme şemasına dönüşür.

$\{x_n\}$ dizisi aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$x_1 \in C$$

$$x_{n+1} = a_n Tx_n + b_n x_n + c_n u_n,$$

$$y_n = a_n' Tx_n + b_n' x_n + c_n' v_n, \ \mathrm{n} \geq 1 \quad a_n + b_n + c_n = 1 = a_n' + b_n' + c_n'$$

Burada $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ ve $\{a_n^{'}\},\{b_n{'}\},\{c_n{'}\}$ dizileri [0,1] aralığında $a_n + b_n + c_n = 1 = a_n^{'} + b_n^{'} + c^{'}_n$ olacak şekildeki dizilerdir. $\{u_n\},\{v_n\}$ ise C de sınırlı dizilerdir. Buradaki $\{x_n\}$ dizisi hata içeren Ishikawa öteleme şeması olarak da bilinir.

Mann ve Ishikawa öteleme şemalarının genellemesi Das ve Debata (1989) ve Takashi ve Tamura (1998) tarafından aşağıda tanımlanan $\{x_n\}$ öteleme dizileri ile verilmiştir.

$$x_1 \in \text{C}$$

$$x_{n+1} = b_n S y_n + (1 - a_n) x_n$$

$$y_n = b_n T x_n + (1 - b_n) x_n \text{ , n} \geq 1$$

Bu çalışmada aşağıda verilen hata içeren şema genelleştirilecektir.

$\{x_n\}$ dizisi aşağıda

$$x_1 \in C$$

$$x_{n+1} = a_n S y_n + b_n x_n + c_n u_n,$$

$$y_n = a_n T x_n + b_n x_n + c_n u_n, \text{ n} \geq 1$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Burada $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ ve $\{a_n^{'}\},\{b_n{'}\},\{c_n{'}\}$ dizileri [0,1] aralığında $0 < \delta \leq a_n$, $a'_n \leq 1 - \delta < 1$ $a_n + b_n + c_n = 1 = a_n^{'} + b_n^{'} + c^{'}_n$ ve $\{u_n\},\{v_n\}$ ise C de sınırlı dizilerdir.

3.2.Genişlemeyen Dönüşümler

Tanım 3.2.1. X Banach uzayı ve C, X in kapalı konveks bir alt kümesi olsun. Eğer $T : C \to C$ lineer olmayan dönüşümü her $x, y \in C$ için

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

eşitsizliğini gerçekliyorsa T dönüşümüne C üzerinde genişlemeyen dönüşüm denir.

Örnek 3.2.2. X Banach uzayı ve C, X in kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $T : C \to C$ dönüşümü, $T(x) = \frac{x}{2} + a$, $(a \neq 0)$ şeklinde tanımlansın. O zaman T genişlemeyen bir dönüşümdür.

Çözüm: Gerçekten her $x, y \in C$ ve $y \neq 0$ için

$$\|Tx - Ty\| = \left\|\frac{x}{2} + a - \left(\frac{y}{2} + a\right)\right\| = \left\|\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right\| = \frac{\|x - y\|}{2} \leq \|x - y\|$$

dir.

Tanım 3.2.3. X Banach uzayı ve C, X in kapalı konveks bir alt kümesi olsun. Eğer $T : C \to C$ sürekli dönüşümü her $x \in C$ ve her $x^* \in F(T)$ için

$$\|Tx - x^*\| \leq \|x - x^*\|$$

eşitsizliğini gerçekliyorsa T dönüşümüne C üzerinde sözde genişlemeyen dönüşüm denir.

Bir genişlemeyen dönüşüm, sabit nokta kümesi boştan farklı olmak şartıyla aynı zamanda sözde genişlemeyen dönüşümdür. Tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 3.2.4. X Banach uzayı C, X in boş olmayan bir alt kümesi ve $F(T)$, T nin sabit noktalarının kümesi olsun. $T : C \to C$ dönüşümü, her $x, y \in C$ ve $n > 1$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq (1 + r_n) \cdot \|x - y\|$$

olacak şekilde $n \to \infty$ iken $r_n \to 0$ ile $\{r_n\}$ pozitif reel sayı dizisi varsa T dönüşümüne asimtotik olarak genişlemeyen dönüşüm adı verilir.

Tanım 3.2.5. X Banach uzayı, C, X in boş olmayan bir alt kümesi ve $F(T)$, T nin sabit noktalarının kümesi olsun. $T : C \to C$ dönüşümü her $x \in C$, her $x^* \in F(T)$ ve $n \geq 1$ için

$$\|T^n x - T^n x^*\| \leq (1 + r_n) \cdot \|x - x^*\|$$

olacak şekilde $n \to \infty$ iken $r_n \to 0$ ile $\{r_n\}$ pozitif reel sayı dizisi varsa T dönüşümüne asimtotik olarak sözde genişlemeyen dönüşüm adı verilir.

Tanım 3.2.6. X Banach uzayı, C, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. $T : C \to C$ dönüşümü her $x, y \in C$ ve $n \geq 1$ için

$$\left\|T^n x - T^n y\right\| \le L\left\|x - y\right\|$$

olacak şekilde $L>0$ sabiti varsa T dönüşümüne düzgün L-Lipschitzian adı verilir.

Asimtotik olarak genişlemeyen dönüşüm, sabit nokta kümesi boştan farklı olmak şartıyla aynı zamanda asimtotik olarak sözde genişlemeyen dönüşümdür. Tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 3.2.7. X Banach uzayı ve C, X in herhangi bir alt kümesi olsun. $T, I : C \to C$ lineer olmayan dönüşümleri verilsin. Her $x, y \in C$ için

$$\left\|Tx - Ty\right\| \le \left\|Ix - Iy\right\|$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne I -genişlemeyen dönüşüm adı verilir.

Tanım 3.2.8. X Banach uzayı ve C, X in herhangi bir alt kümesi olsun. $T, I : C \to C$ lineer olmayan dönüşümleri verilsin. Her $x \in C$ ve her $x^* \in F(T)$ için

$$\left\|Tx - x^*\right\| \le \left\|Ix - x^*\right\|$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne sözde I-genişlemeyen dönüşüm adı verilir.

Tanım 3.2.9. X bir Banach uzayı olsun. $x \in X$ ve bu x elemanına zayıf yakınsayan herhangi bir $\{x_n\}$ dizisi ile her x≠y için

$$\liminf_{n\to\infty} \left\|x_n - x\right\| < \liminf_{n\to\infty} \left\|x_n - y\right\|$$

ise o zaman X Opial şartını sağlar denir.

Tanım 3.2.10: X bir Banach uzayı ,C kümesi de X'nin boştan farklı kapalı bir alt kümesi olsun. $T : C \to C$ ye dönüşümü tanımlansın. C içinde $\{x_n\}$ sınırlı dizisi $\{x_n\}$, $x^* \in C$ zayıf yakınsak *ve* Tx_n 0'a kuvvetli yakınsar şartları $Tx = 0$ olmasını gerçeklerse T dönüşümüne 0 da yarı kapalı(demi-closed) dönüşüm denir.

Tanım 3.2.11. X Banach uzayı C , X in kapalı bir alt kümesi olsun. $T : C \to C$ ye dönüşümü tanımlansın. C içinde $\{x_n\}$ sınırlı dizisi ile $\lim_{n\to\infty} \left\|x_n - Tx_n\right\| = 0$ verilsin. $x_{n_i} \to x^* \in C$ (kuvvetli yakınsak) olacak şekilde $\{x_n\}$ in bir alt dizisi $\{x_{n_i}\}$ mevcutsa o zaman T dönüşümüne yarı kompakt(semi-compact) denir.

Lemma 3.2.12: X bir düzgün konveks Banach uzayı ve bütün pozitif tamsayılar için $0 < p \le t_n \le q < 1$ olsun. Ayrıca $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ X de bazı $r \ge 0$ için

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \le r, \limsup_{n\to\infty} \|y_n\| \le r \text{ ve}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \|t_n x_n + (1-t_n) y_n\| = r$$

şartlarını sağlayan iki dizi olsun.Bu durumda

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

olur (Schu,1991).

Lemma 3.2.13: $\{s_n\}$ ve $\{t_n\}$ $s_{n+1} \le s_n + t_n$ $(n \ge 1)$ şartını sağlayan iki negatif olmayan dizi olsunlar. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} t_n < \infty$ ise $\lim_{n\to\infty} s_n$ vardır. (Tan ve Xu, 1993).

Lemma 3.2.14: $p > 1$, $r > 0$ iki sabit sayı olsun. X düzgün konveks dir ancak ve ancak

$$\|ax + by + cz\|^p \le a\|x\|^p + b\|x\|^p + c\|x\|^p$$
$$- \max\{w_p(a,b)\, g(\|x-y\|), w_p(a,c)\, g(\|x-z\|), w_p(b,c)\, g(\|y-z\|)\}$$

tüm $x, y, z \in B_r(0), |0 = \{x \in X : \|x\| \le r\}$ ve $a, b, c \in [0,1], a+b+c = 1$ için olacak şekilde

$g : [0,\infty) \to [0,\infty), g(0) = 0$ sürekli kuvvetli artan ve konveks fonksiyonu vardır.(Ciric; Rafiq; Cakic; Ume,2010)

Bu çalışmada öncelikle S. H. Khan ve H. Fukar-ud-din (2005), Shahzad ve Udomene (2006), Ciric ve ark. (2010) çalışmaları göz önüne alınarak düzgün konveks bir Banach uzayında öteleme şemasının iki genişlemeyen dönüşüm için zayıf ve kuvvetli yakınsaklıkları tartışılmaktadır. Bu makalelerde elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak, genişlemeyen ve onun genelleşmeleri olan dönüşümlere uygulanabilirliği incelenmiştir. Daha sonra, verilen tanım ve lemmaların yardımıyla elde edilen öteleme şemaları kullanılarak kendinden kendi üzerine asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümün ve *I*-asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümün ortak sabit noktaya yaklaşımı elde edilmektedir.

4.KURAMSAL KAVRAMLAR

4.1. İki Asimtotik Olarak Genişlemeyen Dönüşümün İterasyon Dizilerinin Yakınsaklığı

Bu bölümde S.H. Khan ve H. Fukhar – ud – din (2005) çalışmaları gözönüne alınarak (4.1.1) de verilen ötelemenin genişlemeyen iki dönüşüm olan S ve T genişlemeyen dönüşümlerinin ortak sabit noktasına zayıf ve kuvvetli yakınsaklıklarının ispatları irdelenecektir.Burada, $F(S)\cap F(T)$, T ve S nin ortak sabit noktalarını göstermektedir.

Lemma 4.1.1: X normlu uzay ve C E nin boştan farklı sınırlı konveks bir alt kümesi olsun. $S,T{:}C\rightarrow C$ genişlemeyen dönüşümler olsun. $\{x_n\}$ dizisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty \ \ ve \ \ \sum_{n=1}^{\infty} c^{'}_n < \infty$$

ile birlikte

$\{x_n\}$ aşağıda tanımlandığı gibi bir dizi olsun.

$$x_1 = x \in C$$

$$x_{n+1} = a_n S y_n + b_n x_n + c_n u_n, \qquad (4.1.1)$$

$$y_n = a_n' T x_n + b_n' x_n + c_n' v_n, \ \mathrm{n} \geq 1$$

Burada $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ ve $\{a_n^{'}\},\{b_n'\},\{c_n'\}$ dizileri [0,1] aralığında $0<\delta\leq a_n$, $a'_n \leq 1-\delta < 1$ $\quad a_n + b_n + c_n = 1 = a_n^{'} + b_n^{'} + c^{'}_n$ ve $\{u_n\},\{v_n\}$ ise C de sınırlı dizilerdir. Eğer $F(S)\cap F(T)\neq\varnothing$ ise $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|x_n - x^*\right\|$ limiti her $x^* \in F(S)\cap F(T)$ için vardır (Khan ve Fukhar-ud-din;2005).

İspat: C sınırlı olduğundan dolayı $c_n > 0, M^{'} > 0$ vardır öyle ki $\left\|x_n - u_n\right\| < M$, $\left\|x_n - v_n\right\| < M^{'}$. $F(S)\cap F(T)\neq\varnothing$ olduğunu varsayalım.

$x^* \in F(S)\cap F(T)$ olsun. Buradan

$$\left\|x_{n+1} - x^*\right\| = \left\|a_n T y_n + b_n x_n + c_n u_n - x^*\right\|$$

$$=\left\| a_n\left(Ty_n - x^* + c_n\left(u_n - x_n\right) + c_n\left(u_n - x_n\right)\right)\right\|$$

$$\leq a_n\left\|Ty_n - x^*\right\| + a_n c_n\left\|x_n - u_n\right\| + \left(1-a_n\right)\left\|x_n - x^*\right\| + \left(1-a_n\right)c_n\left\|u_n - x_n\right\|$$
$$\leq \left\|x_n - x^*\right\| + c_n M + c_n M'$$

Lemma 3.2.13 den $\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - x^*\right\|$ her $x^* \in F\left(S\right)\cap F\left(T\right)$ için vardır.

Lemma 4.1.2: X bir düzgün konveks Banach uzayı ve C X nin boştan farklı sınırlı kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $S,T:C\to C$ genişlemeyen dönüşümler olsun. $\{x_n\}$ dizisi $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} c'_n < \infty$ ile birlikte (4.1.1) de tanımlandığı gibi bir dizi olsun. Eğer $F\left(S\right)\cap F\left(T\right)\neq\varnothing$ ise

$\lim_{n\to\infty}\left\|Sx_n - x_n\right\| = 0 = \lim_{n\to\infty}\left\|Tx_n - x_n\right\|$ olur. (Khan ve Fukhar-ud-din;2005)

İspat: Lemma 4.1.1 den $\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - x^*\right\|$ vardır.Bazı $r \geq 0$ için $\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - x^*\right\| = r$ olduğunu varsayalım. Şimdi

$$\left\|y_n - x^*\right\| = \left\|a'_n T^n x_n + b'_n x_n + c'_n v_n - x^*\right\|$$
$$= \left\|a'_n\left(T^n x_n - x +^* c'_n\left(v_n - x^*\right) + \left(1-a_n\right)\left(x_n - x^* + c_n\left(v_n - x_n\right)\right)\right)\right\|$$
$$\leq a'_n\left\|x_n - x^*\right\| + \left(1-a'_n\right)\left\|x_n - x^*\right\| + \left\|c'_n\left(v_n - x^*\right)\right\|$$
$$\leq \left\|x_n - x^*\right\| + c'_n M$$

Burada her iki tarafın limsup u alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\left\|y_n - x^*\right\| \leq r \tag{4.1.2}$$

elde edilir. Şimdi kabul edelim ki

$$\left\|Sy_n - x^* + c_n\left(u_n - x_n\right)\right\| \leq \left\|Sy_n - x^*\right\| + c_n\left\|u_n - x_n\right\|$$
$$\leq \left\|y_n - x^*\right\| + c'_n M$$

Burada her iki tarafın limsup alınırsa (4.1.2) i de kullanarak

$$\limsup_{n\to\infty}\left\|Sy_n - x^* + c_n\left(u_n - x_n\right)\right\| \leq r$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$\left\|x_n - x^* + c_n\left(u_n - x_n\right)\right\| \le \left\|x_n - x^*\right\| + \left\|c_n\left(u_n - x_n\right)\right\|$$

$$\le \left\|x_n - x^*\right\| + c_n M$$

ifadesinden de

$$\limsup_{n\to\infty}\left\|Sy_n - x^* + c_n\left(u_n - x_n\right)\right\| \le r$$

bulunur. Buradan

$\limsup_{n\to\infty}\left\|x_{n+1} - x^*\right\| = r$ bulunur ki bu da bize

$$\lim_{n\to\infty}\left\|a_n\left(Sy_n - x^* + c_n\left(u_n - x_n\right)\right) + \left(1 - a_n\right)\left(x_n - x^* + c_n\left(u_n - x_n\right)\right)\right\| = r$$

olduğunu verir. Lemma 4.1.1 uygulanırsa

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - Sy_n\right\| = 0$$

olduğu görülür.

Şimdi aşağıdaki ifadeyi inceleyelim.

$$\left\|x_n - Sx_n\right\| \le \left\|Sx_n - Sy_n\right\| + \left\|Sy_n - x_n\right\| \le \left\|x_n - y_n\right\| + \left\|Sy_n - x_n\right\|$$

$$= \left\|x_n - \left(a_n' T x_n + b_n' x_n + c_n' u_n\right)\right\| + \left\|x_n - Sy_n\right\|$$

$$= \left\|a_n'\left(x_n - Tx_n\right) + c_n'\left(x_n - v_n\right)\right\| + \left\|x_n - Sy_n\right\|$$

$$\le a_n'\left\|x_n - Tx_n\right\| + c_n'\left\|x_n - v_n\right\| + \left\|x_n - Sy_n\right\|$$

$$\le \left(1-\delta\right)\left\|x_n - Ty_n\right\| \le \left(1-\delta\right)c_n' M' + \left\|x_n - Sy_n\right\|$$

Her iki tarafın limsup alınırsa buradan

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - Sx_n\right\| \le 0$$

Bu bize $\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - Sx_n\right\| = 0$ olduğunu verir.

Aynı şekilde $\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - Tx_n\right\| = 0$ olduğu ispatlanabilir.

Son olarak

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - Sx_n\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|Tx_n - x_n\right\| = 0$$

oduğu görülür.

Böylece lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.3: X Opial şartını sağlayan bir düzgün konveks Banach uzayı C,S,T ve $\{x_n\}$ Lemma 4.1.1 deki gibi alınsın. Eğer $F(S)\cap F(T)\neq\varnothing$ ise $\{x_n\}$ dizisi *S* ve *T* nin ortak sabit noktalarına zayıf yakınsar. (Khan ve Fukhar-ud-din , 2005).

İspat: $x^*\in F(S)\cap F(T)$ olsun. Lemma 4.1.1 de ifade edildiği gibi $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|$ vardır. Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin $F(S)\cap F(T)$ de tek bir zayıf altdizisel limite sahip olduğunu ispatlayalım. Bunu ispatlamak için z_1 ve z_2 $\{x_{n_i}\}$ ve $\{x_{n_j}\}$ altdizilerinin zayıf limitleri olsun.

Lemma 4.1.2 yardımıyla

$$\lim_{n\to\infty}\|Sx_n-x_n\|=0$$

olduğunu ve Tanım 3.2.10 yardımıyla $I-S$ nin 0 a bağlı olarak demiclosed olduğunu görebiliriz. Bu bize $Sz_1=z_2$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde $Tz_1=z_2$ olduğu görülür. Tekrar benzer yolla $z_2\in F(S)\cap F(T)$ olduğu ispatlanabilir. Bunun için $z_1\neq z_2$ olsun. Opial koşulu ile

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|x_n-z_1\| &= \lim_{n_i\to\infty}\|x_{n_i}-z_1\| < \lim_{n_i\to\infty}\|x_{n_i}-z_2\|\\ &= \lim_{n_i\to\infty}\|x_n-z_2\| = \lim_{n_j\to\infty}\|x_{n_j}-z_2\| < \lim_{n_j\to\infty}\|x_{n_j}-z_1\|\\ &= \lim_{n\to\infty}\|x_n-z_1\|\end{aligned}$$

Bu ise bir çelişkidir. Dolayısı ile $\{x_n\}$, $F(S)\cap F(T)$ deki bir noktaya zayıf yakınsar.

Tanım 4.1.4: $S,T:C\to C$ iki dönüşüm olsun. $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ ve her $r\in(0,\infty)$ olmak üzere

$$f(0)=0\ ,\ f(r)>0\ \text{ ve}$$

$$f\big(d(x,F)\big)=\inf\left\{\|x-x^*\|: x^*\in F=F(S)\cap F(T)\right\}$$

olacak şekilde tanımlanan azalmayan bir f fonksiyonu her $x\in C$ için

$$f(\|x-Tx\|+\|x-Sx\|)\geq f(d(x,F))$$

eşitsizliği sağlanıyorsa *S* ve *T* dönüşümleri A' koşulunu sağlıyor denir. (Khan ve Fukhar-ud-din , 2005).

Teorem 4.1.5: X bir düzgün konveks Banach uzayı C ve $\{x_n\}$ Lemma 4.1.1 deki gibi alınsın. $S,T{:}C\rightarrow C$ A' şartını sağlayan iki genişlemeyen dönüşüm olsun. Eğer $F(S)\cap F(T)\neq\varnothing$ ise $\{x_n\}$ S ve T nin ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsar. (Khan ve Fukhar-ud-din , 2005).

İspat: Lemma 4.1.1 den her $x^*\in F(S)\cap F(T)$ için

$\lim_{n\to\infty}\left\|x_n-x^*\right\|$ vardır. Lemma 4.1.2 den

$\lim_{n\to\infty}\left\|Sx_n-x_n\right\|=0=\lim_{n\to\infty}\left\|Tx_n-x_n\right\|$ olur.

$$\left\|x_{n+1}-x^*\right\|\leq\left\|x_n-x^*\right\|+c_nM+c_n'M'$$

ifadesinin inf i alındığında

$$\inf_{x\in F}\left\|x_{n+1}-x^*\right\|\leq\inf_{x^*\in F}\left\|x_n-x^*\right\|+c_nM+c_n'M'$$

Bu ifade

$$d\left(x_{n+1},F\right)\leq d\left(x_n,F\right)+\left(c_nM+c_n'M'\right)$$

şeklinde ifade edilirse $\lim_{n\to\infty}d\left(x_n,F\right)$ in varlığı Lemma 3.2.13 yardımıyla gösterilir. A' koşulu ile

$$\lim_{n\to\infty}f\left(d\left(x,F\right)\right)=0$$

olur. f azalmayan bir fonksiyon ve $f(0)=0$ olduğundan dolayı

$$\lim_{n\to\infty}d\left(x,F\right)=0$$

Şimdi $\{x_n\}$ in bir $\{x_{n_j}\}$ ve $\{y_j\}$ altdizileri F nin altkümesi olsun öyleki

$$\left\|x_{n_j}-y_j\right\|<2^j$$

Buradan $\{y_j\}$ nin F de Cauchy dizisi olduğu ve dolayısı ile yakınsak olduğu elde edilir. $y_j\rightarrow y$ olsun. F kapalı olduğundan $y\in F$ olur ve dolayısı ile $x_{n_j}\rightarrow y$ yani $x_n\rightarrow y$ olur.Bu ise ispatı tamamlar.

4.2. İki Asimtotik Olarak Sözde Genişlemeyen Dönüşümün İterasyon Dizileri İçin Yakınsaklığı

Bu bölümde N. Shahzad ve A. Udomene (2006) çalışmaları gözönüne alınarak (4.2.1) de verilen ötelemenin asimtotik olarak sözde genişlemeyen iki dönüşüm olan S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktasına olan kuvvetli yakınsaklığı incelenecektir.

C kümesi reel Banach uzayı X'nin boştan farklı kapalı konveks bir alt kümesi olsun. S ve T: $C \to C$ asimtotik sözde genişlemeyen iki dönüşüm olsun.

Aşağıdaki öteleme şemasında $x_1 \in C$, $n \geq 1$ ve $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizileri $[0,1]$ aralığında alınarak çalışılmıştır.

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n S^n\left[(1-\beta_n T^n x_n)\right] \tag{4.2.1}$$

Teorem 4.2.1. X reel bir Banach uzayı ve C, X'nin boştan farklı kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $S, T : C \to C$ asimtotik olarak sözde genişlemeyen iki dönüşüm olsun

$\{u_n\}, \{v_n\} \subset [0,\infty)$ öyleki $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} v_n < \infty$ ve

$F = F(S) \cap F(T) := \{x \in K : Sx = Tx = x\} \neq \varnothing$ alalım.

$\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizilerini de $[0,1]$ de alalım. Keyfi bir $x_1 \in C$ den başlayacak şekilde (3.1.) deki gibi bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. Böylece

1) $\left\|x_{n+1} - x^*\right\| \leq (1+r_n)\left\|x_n - x_1^*\right\|$ (Bütün $n \geq 1, x^* \in F$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty$ olacak şekilde bazı $\{r_n\}$ dizileri için)

2) Sabit bir $M > 0$ sayısı vardır. öyleki

$\left\|x_{n+m} - x^*\right\| \leq M\left\|x_n - x_1^*\right\|$ (tüm $n,m \geq 1, \text{ve} \, x^* \in F$) (Shahzad ve Udomene, 2006).

Teorem 4.2.2. X reel bir düzgün konveks Banach uzayı ve C kümesi de X'nin boştan farklı konveks bir alt kümesi olsun. . $S, T : C \to C$ dönüşümleri, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$

ve $\sum_{n=1}^{\infty} v_n < \infty$ olacak şekilde $\{u_n\},\{v_n\} \subset [0,\infty)$ dizileri ve $F = F(S) \cap F(T) := \{x \in C : Sx = Tx = x\} \neq \varnothing$ ile birlikte düzgün sürekli asimptotik olarak sözde genişlemeyen iki dönüşüm olsun $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizileri de $\varepsilon \in (0,1)$ olacak şekilde $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ aralığında olsunlar. Keyfi bir $x_1 \in C$ için (4.2.1) de tanımlanan bir $\{x_n\}$ dizisi alalım.

$\lim_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0 = \lim_{n\to\infty} \|x_n - Sx_n\|$ olur. (Shahazad ve Udomene, 2006)

Teorem 4.2.3. *X* reel bir düzgün konveks Banach uzayı ve C kümeside *X*'nin boştan farklı konveks bir alt kümesi olsun. . $S,\ T:\ C \to C$ dönüşümleri, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} v_n < \infty$ olacak şekilde $\{u_n\},\{v_n\} \subset [0,\infty)$ dizileri ve $F = F(S) \cap F(T) := \{x \in C : Sx = Tx = x\} \neq \varnothing$ ile birlikte düzgün sürekli asimptotik olarak sözde genişlemeyen iki dönüşüm olsun $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizileri de $\varepsilon \in (0,1)$ olacak şekilde $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ aralığında olsunlar. Keyfi bir $x_1 \in C$ için (4.2.1) de tanımlanan bir $\{x_n\}$ dizisi alalım.

Ek olarak T ya da S kompakt ise $\{x_n\}$ dizisi ve S ve T nin sabit noktalarına kuvvetli yakınsar. (Shahzad, Udomene, 2006)

Sonuç 4.2.4: *X* reel bir düzgün konveks Banach uzayı ve C kümeside *X*'nin boştan farklı konveks bir alt kümesi olsun. . $S,\ T:\ C \to C$ dönüşümleri, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} v_n < \infty$ olacak şekilde $\{u_n\},\{v_n\} \subset [0,\infty)$ dizileri ve $F = F(S) \cap F(T) := \{x \in C : Sx = Tx = x\} \neq \varnothing$ ile birlikte düzgün sürekli asimptotik olarak sözde genişlemeyen iki dönüşüm olsun .$\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizileri de $\varepsilon \in (0,1)$ olacak şekilde $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ aralığında olsunlar. Keyfi bir $x_1 \in C$ için (4.2.1) de tanımlanan bir $\{x_n\}$ dizisi alalım.

Böylece $\{x_n\}$ S ve T nin bazı sabit noktalarına kuvvetli yakınsar (Shahzad, Udomene, 2006)

4.3. *I*-asimtotik Olarak Genişlemeyen Dönüşümün İterasyon Dizilerinin Yakınsaklığı

Bu bölümde *I*-asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin (4.3.1) ile alınan öteleme süreçlerinin kuvvetli ve zayıf yakınsaklıkları incelenmektedir.

Lemma 4.3.1. X normlu uzay ve *X'* in C boş olmayan konveks bir alt kümesi olsun.

$I;T:C\to C$ iki asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümler olsun.

$x_1\in C$

$$x_{n+1}=b_n x_n+a_n I^n y_n+c_n u_n \qquad (4.3.1)$$

$$y_n=b'_n x_n+a'_n T^n x_n+c'_n v_n,\ \ n\geq 1$$

Burada, $\{a_n\}\{b_n\},\{c_n\},\{a'_n\}\{b'_n\},\{c'_n\}\in[0,1]$ diziler olmak üzere $a_n+b_n+c_n=a'_n+b'_n+c'_n=1$ ve $\{u_n\},\{v_n\}$ C içinde sınırlı dizilerdir.

$\sum_{n=1}^{\infty}c_n+c'_n<\infty$. Eğer $F(T)\cap F(I)\neq\emptyset$ ise tüm $x^*\in F(T)\cap F(I)$ için $\lim_{n\to\infty}\left\|x_n-x^*\right\|$ vardır.

İspat:

$$M=\max\left\{\sup_{n\geq 1}\left\|u_n-x^*\right\|,\sup_{n\geq 1}\left\|v_n-x^*\right\|\right\}$$ ve $F(T)\cap F(I)\neq\emptyset$ olduğunu kabul edelim. $x^*\in F(T)\cap F(I)$ olsun.

$$\begin{aligned}\left\|y_n-x^*\right\|&=\left\|b'_n x_n+a'_n T^n x_n+c'_n v_n-x^*\right\|\\&=\left\|b'_n\left(x_n-x^*\right)+a'_n\left(Tx_n-x^*\right)+c'_n\left(v_n-x^*\right)\right\|\\&\leq b'\left\|x_n-x^*\right\|+a'_n\left\|Tx_n-x^*\right\|+c'_n\left\|v_n-x^*\right\|\\&\leq\left(1-a'_n\right)\left\|x_n-x^*\right\|+a_n\left\|Ix_n-x^*\right\|+c'_n\left\|v_n-x^*\right\|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq (1-a_n')\left\|x_n - x^*\right\| + a_n'k_n\left\|x_n - x^*\right\| + c_n'\left\|v_n - x^*\right\| \\
&\leq \left(1+(k_n-1)a_n'\right)\left\|x_n - x^*\right\| + c_n'M \\
&\leq k_n\left\|x_n - x^*\right\| + c_n'M \qquad (4.3.2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\|x_{n+1} - x^*\right\| &= \left\|b_n x_n + a_n I^n y_n + c_n u_n - x^*\right\| \\
&= \left\|b_n\left(x_n - x^*\right) + a_n\left(I^n y_n - x^*\right) + c_n\left(u_n - x^*\right)\right\| \\
&\leq (1-a_n)\left\|x_n - x^*\right\| + a_n\left\|I^n y_n - x^*\right\| + c_n\left\|u_n - x^*\right\| \\
&\leq (1-a_n)\left\|x_n - x^*\right\| + a_n k_n\left\|y_n - x^*\right\| + c_n M \qquad (4.3.3)
\end{aligned}
$$

(4.3.3) içinde (4.3.2) i yazalım.

$$
\begin{aligned}
\left\|x_{n+1} - x^*\right\| &= (1-a_n)\left\|x_n - x^*\right\| a_n k_n^2\left\|x_n - x^*\right\| + a_n k_n c_n' M + c_n M \\
&= \left(1+\left(k_n^2-1\right)a_n\right)\left\|x_n - x^*\right\| + a_n k_n c_n' M + c_n M \\
&\leq \left[1+\left(k_n^2-1\right)\right]\left\|x_n - x^*\right\| + M\left(a_n c_n' k_n + c_n\right)
\end{aligned}
$$

Bütün $x \geq 1$ için , $0 \leq x^2 - 1 \leq 2x(x-1)$ olduğundan,

$\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ hipotezinde $\sum_{n=1}^{\infty}\left(k_n^{\ 2} - 1\right) < \infty$ elde edilir. Sonuç olarak Lemma 3.2.13 den $x^* \in F(I) \cap F(T)$ için $\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - x^*\right\|$ vardır.

Lemma 4.3.2. X bir düzgün konveks Banach uzayı, C kümesi de X in boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. T kümesi de C üzerinde $L-$ Lipschitzian, $I-$ asimtotik olarak sözde genişlemeyen bir dönüşüm ve I yine C üzerinde Γ-Lipschitzian asimtotik olarak sözde genişlemeyen bir dönüşüm olsun öyle ki $F(T) \cap F(I) \neq \varnothing$ olsun. Herhangi bir $x \in C$ için (4.3.1) ile $\{x_n\}$ dizisini tanımlayalım. Eğer $F(T) \cap F(I) \neq \varnothing$ ise

$$
\lim_{n\to\infty}\left\|Tx_n - x_n\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|Ix_n - x_n\right\| = 0
$$

olur.

İspat : Lemma 4.3.1. den tüm $x^* \in F(T) \cap F(I)$ için $\lim \left\| x_n - x^* \right\|$ mevcut olduğu görülür. O zaman $\left\{ x_n - x^* \right\}$ sınırlıdır.

Şimdi $M_1 = \max \left\{ \sup_{n\geq1} \left\| x_n - x^* \right\|, \sup_{n\geq1} \left\| u_n - x^* \right\|, \sup_{n\geq1} \left\| v_n - x^* \right\| \right\}$ olacak şekilde alalım.

$$\begin{aligned}
\left\| y_n - x^* \right\|^p &= \left\| b_n' x_n + a_n' T^n x_n + c_n' v_n - x^* \right\|^p \\
&= \left\| b_n' \left(x_n - x^* \right) + a_n' \left(T^n x_n - x^* \right) + c_n' \left(v_n - x^* \right) \right\|^p \\
&\leq b_n' \left\| x_n - x^* \right\|^p + a_n' \left\| T^n x_n - x^* \right\| + c_n' \left\| v_n - x^* \right\|^p \\
&\quad - w_p \left(a_n', b_n' \right) g \left(\left\| x_n - T^n x_n \right\| \right) \\
&\leq \left(1 - a_n' \right) \left\| x_n - x^* \right\|^p + a_n' k_n^p \left\| I^n x_n - x^* \right\|^p + M_1^p c_n' \\
&= \left(1 + \left(k_n^{2p} - 1 \right) . a_n' \right) \left\| x_n - x^* \right\|^p + M_1^p c_n' \\
&\leq k_n^{2p} \left\| x_n - x^* \right\|^p M_1^p c_n'
\end{aligned}$$

$$\left\| y_n - x^* \right\|^p \leq k_n^{2p} \left\| x_n - x^* \right\|^p + M_1^p c_n' \tag{4.3.4}$$

olur.

$$\begin{aligned}
\left\| x_{n+1} - x^* \right\|^p &= \left\| b_n x_n + a_n I^n y_n + c_n u_n - x^* \right\|^p \\
&= \left\| b_n \left(x_n - x^* \right) + a_n \left(I^n y_n - x^* \right) + c_n \left(u_n - x^* \right) \right\|^p \\
&\leq b_n \left\| x_n - x^* \right\|^p + a_n \left\| I^n y_n - x^* \right\|^p + c_n \left\| u_n - x^* \right\|^p \\
&\quad - w_p \left(a_n, b_n \right) g \left(\left\| I_n y_n - x_n \right\| \right) \\
&\leq \left(1 - a_n \right) \left\| x_n - x^* \right\|^p + a_n k_n^p \left\| y_n - x^* \right\|^p + M_1^p c_n \\
&\quad - w_p \left(a_n, b_n \right) g \left(\left\| x_n - I^n y_n \right\| \right)
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

elde edilir.

Şimdi (4.3.4) ’i (4.3.5) içinde yerine yazalım.

$$\left\|x_{n+1}-x^*\right\|^p \leq \left(1+\left(k_n^{3p}-1\right)a_n\right)\left\|x_n-x^*\right\|^p + M_1^p k_n^p a_n c_n'$$

$$+M_1^p c_n - w_p\left(a_n,b_n\right)g\left(\left\|x_n-I^n y_n\right\|\right)$$

$$=\left\|x_n-x^*\right\|^p + \left(k_n^{3p}-1\right)a_n\left\|x_n-x^*\right\|^p + M_1^p k_n^p a_n c_n + M_1^p c_n - w_p\left(a_n,b_n\right)g\left(\left\|x_n-I^n y_n\right\|\right)$$

$$\leq\left\|x_n-x^*\right\|^p + \left(k_n^{3p}-1\right)\left(1-\delta\right)M_1^p + M_1^p k_n^p c_n + M_1^p c_n - w_p\left(a_n,b_n\right)g\left(\left\|x_n-I^n y_n\right\|\right)$$

$$=\left\|x_n-x^*\right\|^p + \left[\left(k_n^{3p}-1\right)\left(1-\delta\right)+k_n c_n\left(1-\delta\right)+c_n\right]+M_1^p - w_p\left(a_n,b_n\right)g\left(\left\|x_n-I^n y_n\right\|\right)$$

Böylece $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ olduğundan, tüm $n \geq n_0$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. O halde $c_n \leq \delta-\mu,\ \mu\in\left(0,\delta\right),\ \left\{b_n\right\}\subset\left[\delta,1-\delta\right],\delta\in\left[0,1\right]$ için alındığında

$$w_p\left(a_n,b_n\right)\geq\left(\delta-\mu\right)^p\delta+\left(\delta-\mu\right)\delta^p=\Omega_{p,\delta,\mu}$$ elde edilir.

$$\left\|x_{n+1}-x^*\right\|^p \leq \left\|x_n-x^*\right\|^p + M_1^p\left[\left(1-\delta\right)\left(k_n^{3p}-1\right)+\left(1-\delta\right)k_n^p c_n'+c_n\right]$$
$$-\Omega_{p,\delta,\mu}g\left(\left\|x_n-I^n y_n\right\|\right)$$

$$\Omega_{p,\delta,\mu}g\left(\left\|x_n-I^n y_n\right\|\right)\leq\left\|x_n-x^*\right\|^p-\left\|x_{n+1}-x^*\right\|^p+M_1'\gamma_n$$

(4.3.6)

Burada

$$\gamma_n=\left(1-\delta\right)\left(k_n^{3p}-1\right)+\left(1-\delta\right)k_n^p c_n'+c_n$$

Burada (4.3.6) teki eşitsizlikten bir $m>N_0$ doğal sayısı için

$$\Omega_{p,\delta,\mu}\sum_{n=N_0}^{m} g\left(\left\|x_n-I^n y_n\right\|\right)\leq\left\|x_{N_0}-x^*\right\|^p-\left\|x_{m+1}-x^*\right\|^p+\sum_{n=N_0}^{m}\gamma_n$$ elde edilir.

$$\Omega_{p,\delta,\mu}\sum_{n=N_0}^{m} g\left(\left\|x_n-I^n y_n\right\|\right)\leq\sum_{n=N_0}^{m}\left\|x_{N_0}-x^*\right\|^p-\left\|x_{m+1}-x^*\right\|^p+M_1^p\gamma_n$$

$$= \sum_{n=N_0}^{m} \left\|x_n - x^*\right\|^p - \left\|x_{n+1} - x^*\right\|^p + M_1{}^p \sum_{n=N_0}^{m} \gamma_n$$

$$= \left\|x_{n_0} - x_n\right\|^p - \left\|x_{n_0+1} - x^*\right\|^p + \left\|x_{n_0+1} - x^*\right\|^p - \left\|x_{n_0+2} - x^*\right\|^p + \ldots + \left\|x_m - x^*\right\|^p - \left\|x_{m+1} - x^*\right\|^p$$

$$= \left\|x_{n_0} - x^*\right\|^p - \left\|x_m - x^*\right\| + M_1{}^p \sum_{n=N_0}^{m} \gamma_n$$

$$\leq \left\|x_{n_0} - x^*\right\|^p - \left\|x_{m+1} - x^*\right\|^p + \sum_{n=N_0}^{m} \gamma_n$$

$$\leq \left\|x_{n_0} - x^*\right\|^p + \sum_{n=N_0}^{m} \gamma_n \qquad (4.3.7)$$

Lagrange Teoreminde $f(x) = x^q$ fonksiyonu $x \in [1,2]$ ve $q > 1$ için

$x^q - 1 \leq q.2^{q-1}(x-1)$ eşitsizliğinin doğru olduğu görülür.

$\sum_{n=1}^{\infty} k_n - 1 < \infty$ olduğu hipotezden kabul edilirse o zaman

$\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^q - 1) < \sum_{n=1}^{\infty} q.2^{q-1}(k_n - 1) = q.2^{q-1} \sum_{n=1}^{\infty} (k_n - 1)$ olacağından

$\sum_{n=1}^{\infty} k_n^q - 1 < \infty$ olur.

(4.3.7) eşitsizliğinde her iki tarafın limiti alınırsa

$\sum_{n=N_0}^{m} g\left(\left\|x_n - I_n^n y_n\right\|\right) < \infty$ elde edilir.

Buradan $\lim_{n\to\infty} g\left(\left\|x_n - I^n y_n\right\|\right) = 0$ bulunur.

g sıfır noktasında sürekli ve kuvvetli artan olduğundan

$\lim_{n\to\infty} \left\|x_n - I^n y_n\right\| = 0$ elde edilir.

$$\left\|x_n - x^*\right\| \le \left\|x_n - I^n y_n\right\| + \left\|I^n y_n - x^*\right\| \le \left\|x_n - I^n y_n\right\| + r_n \left\|y_n - x^*\right\|$$

her iki tarafın limitini alırsak

$$r = \lim_{n\to\infty}\left\|x_n - x^*\right\| \le \lim_{n\to\infty}\sup\left(\left\|x_n - I^n y_n\right\| + r_n\left\|y_n - x^*\right\|\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sup\left\|y_n - x^*\right\| \le r\,.$$

O zaman $\lim_{n\to\infty}\sup\left\|y_n - x^*\right\| = r$ olur.

$$\lim_{n\to\infty}\left\|b_n'\left(T^n x_n - x^* + c_n'\left(v_n - x_n\right)\right) + \left(1 - b_n'\right) + \left(x^n - x^*\right) + c_n'\left(v_n - x_n\right)\right\| = r$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left\|T^n x_n - x^* + c_n'\left(v_n - x_n\right)\right\| \le r$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left\|x_n - x^* + c_n'\left(v_n - x_n\right)\right\| \le r \qquad \text{olduğundan}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - T^n x_n\right\| = 0 \qquad \text{olur.}$$

Şimdi $\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - I^n x_n\right\|$ in sıfır olduğunu gösterelim.

$$\left\|x_n - I^n x_n\right\| \le \left\|I^n x_n - I^n y_n\right\| + \left\|I^n y_n - x_n\right\|$$
$$\le k_n\left\|x_n - y_n\right\| + \left\|I^n y_n - x_n\right\|$$
$$= k_n\left\|a_n'\left(x_n - T^n x_n\right) + c_n'\left(x_n - v_n\right)\right\| + \left\|I^n y_n - x_n\right\|$$
$$\le k_n a_n'\left\|\left(x_n - T^n x_n\right)\right\| + \left\|k_n c_n'\left(x_n - v_n\right)\right\| + \left\|I_n' y_n - x_n\right\|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x_n - I^n x_n\right\| = 0$$

Üstelik

$$\left\|x_{n+1} - Ix_{n+1}\right\| \le \left\|x_{n+1} - I^{n+1}x_{n+1}\right\| + \left\|I^{n+1}x_{n+1} - Ix_{n+1}\right\|$$

$$\leq \left\| x_{n+1} - I^n x_{n+1} \right\| + \Gamma \left\| x_{n+1} - I^n x_{n+1} \right\|$$

$$= \left(1+\Gamma\right) \left\| x_{n+1} - I^n x_{n+1} \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\left\| x_{n+1} - I^n x_{n+1} \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ olur.

Yani

$\lim_{n\to\infty} \left\| x_n - I x_n \right\| = 0$ elde edilir. (4.3.8)

Ayrıca $\left\| x_{n+1} - T x_{n+1} \right\| \leq \left\| x_{n+1} - T^n x_{n+1} \right\| + \Gamma \left\| x_{n+1} - T^n x_{n+1} \right\|$ olduğundan,

her iki tarafın limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left\| x_{n+1} - T x_{n+1} \right\| \leq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x_n - T x_n \right\| = 0 \qquad (4.3.9)$$

Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.3: X Opial şartını sağlayan bir düzgün konveks Banach uzayı I, T ve $\{x_n\}$ Lemma 4.3.2 deki gibi alınsın ve $F(I) \cap F(T) \neq \varnothing$ olsun. Eğer $E - T$ ve $E - I$ (E birim dönüşüm) dönüşümleri sıfırda yarı-kapalı ise $\{x_n\}$ dizisi I ve T nin ortak sabit noktalarına zayıf yakınsar.

İspat: $x^* \in F(I) \cap F(T)$ olsun. Lemma 4.3.1 de ifade edildiği gibi $\lim_{n\to\infty} \left\| x_n - x^* \right\|$ vardır. Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin $F(I) \cap F(T)$ de tek bir zayıf alt dizisel limite sahip olduğunu ispatlayalım. Bunu ispatlamak için z_1 *ve* z_2, $\left\{x_{n_i}\right\}$ ve $\left\{x_{n_j}\right\}$ altdizilerinin zayıf limitleri olsun.

Lemma 4.3.2 den

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x_n - I x_n \right\| = 0$$

ve *E-I (E* birim dönüşüm) 0 da yarı kapalı olduğundan, bu bize $I z_1 = z_1$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde $T z_1 = z_1$ olduğu görülür. Tekrar, benzer yolla

$z_2 \in F(I) \cap F(T)$ olduğu görülür. Şimdi bu limitin tekliğini gösterelim. Bunun için $z_1 \neq z_2$ olsun.Opial koşulu ile

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|x_n - z_1\| &= \lim_{n_i\to\infty}\|x_{n_i} - z_1\| < \lim_{n_i\to\infty}\|x_{n_i} - z_2\| \\ &= \lim_{ni\to\infty}\|x_{n_i} - z_2\| = \lim_{n_j\to\infty}\|x_{n_j} - z_2\| < \lim_{n_j\to\infty}\|x_{n_j} - z_1\| \\ &= \lim_{n\to\infty}\|x_n - z_1\|\end{aligned}$$

Bu ise bir çelişkidir.

Dolayısı ile $\{x_n\}$, $F(I) \cap F(T)$ nin ortak sabit noktasına zayıf yakınsar.

Teorem 4.3.4. *X, C, T, I,* $\{x_n\}$ Lemma 4.3.2 deki gibi alınsın. Eğer $x^* \in F(I) \cap F(T)$ ve *T* veya *I* dönüşümlerinden en az biri yarı-kompakt dönüşüm ise , o zaman $\{x_n\}$, *T* ve *I* dönüşümlerinin ortak bir noktasına kuvvetli olarak yakınsar.

İspat. *I* dönüşümünün yarı-kompakt olduğunu kabul edelim. *I* , yarı-kompakt dönüşüm, $\{x_n\}$ sınırlı, $\lim_{n\to\infty}\|x_n - Ix_n\| = 0$ olduğundan , $\{x_{n_j}\}$ x^* a kuvvetli yakınsayan $\{x_n\}$ nin bir altdizisi vardır . Ayrıca

$$\|Tx_{n_j} - x^*\| \leq \|Tx_{n_j} - x_{n_j}\| + \|x_{n_j} - Ix_{n_j}\| + \|Ix_{n_j} - Ix^*\| + \|Ix^* - x^*\|$$

Buradan

$\lim_{n\to\infty}\|Tx_{n_j} - x^*\| = 0$ elde edilir. $\{Tx_{n_j}\}$, x^* a kuvvetli yakınsak olduğu görülür.

T dönüşümü, $L > 0$ için düzgün *L*-Lipschitzian olduğundan , $Tx^* = x^*$ elde edilir. Yani

$$\|Tx^* - x^*\| = \lim_{n_j\to\infty}\|Tx_{n_j} - x_{n_j}\| = 0 \text{ ve } \|Ix^* - x^*\| = \lim_{n\to\infty}\|Ix_{n_j} - x_{n_j}\| = 0$$

bulunur.

Bu ise $x^* \in F(I) \cap F(T)$ olduğunu gösterir.

$\{x_{n_j}\}$, x^* a kuvvetli yakınsayan $\{x_n\}$ nin altdizisi ve $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x^*\|$ mevcut olduğundan

$\{x_n\}$, $x^* \in F(I) \cap F(T)$ ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

5.SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde kaynaklar kısmında verilen çalışmalar ışığında kendinden kendi üzerine asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin ve onun genişlemeleri olan dönüşümlerin sabit noktalarına, *I*-asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin ortak sabit noktalara yaklaşımı elde edilmeye çalışılmaktadır. Bundan sonraki çalışmalarda, iki genişlemeyen dönüşümün ve iki asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümün alınan öteleme süreçlerinin kuvvetli ve zayıf yakınsaklıkları ile elde edilen sonuçlar, *I*-genişlemeyen ve onun genelleşmeleri olan dönüşümler için elde edilebilir.

KAYNAKLAR

BAYRAKTAR, M., 1992. Fonksiyonel Analiz. Atatürk Üniversitesi Yayınları.

BROWDER, F. E., 1976. Nonlinear operators an nonlinear equations of evolution in Banach spaces, Proc Sympos Pure MATH.,vol.,18,no.2,Amer. Math. Soc. Providence R.I.,.

CIRIC, L., RAFIQ A., CAKIC N. and UME J.S.,2010. On fixed points of two asimptotically quasi-nonexpansive mappings, Int. J. of Appl. Math. And Mech., 6(4): 68-81.

DAS, G.and DEBATA, J.P.,1989. Fixed points of quasi-nonexpansive mappings, Indian J. Pure Appl. Math.Soc. 40, 113-17.

DİAZ, J.B. and METCALF F.T., 1969, On the set of sequential limit points of successive approximations, Trans.Amer.Math.Soc.135,459-485.

DOTSON, W.G.J.,1970. On the Mann iterativeprocess. Trans. Amer.Math.Soc., 149: 65–73.

GHOSH, M.K. and DEBNAHT, L., 1997. Convergence of Ishikawa iterates of quasi-nonexpansive mapping. J. Math. Anal. Appl., 207: 96–103.

GLOWINSKI, R. and TALLEC, P. L., 1989. Augmented Lagrangian and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics. SIAM, Philadelphia.

GOEBEL, K. and KIRK, W.A.,1972. A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings. Proc. Amer. Math. Soc., 35: 171–174.

GOEBEL, K. and KIRK, W.A., 1990. Topics in metric fixed point theory. Cambridge Studies in advanced mathematics 28, 252 pp

ISHIKAWA, S., 1974. Fixed points by a new iteration method. Proc. Amer. Math. Soc., 44: 147–150.

KHAN S.H. and FUKHAR-UD-DİN H., 2005. Weak and strong convergence of scheme with errors for two nonexpansive mappings, Nonlinear Analysis 61 1295-1301.

KOLMOGOROV, A.N. and FOMIN, S.V., 1970. Introductory Real Analysis. Prentice-Hall Inc. , London.

LIU, Q., 2001. Iterations sequence for asymptotically quasi-nonexpansive mapping with an error member. J. Math. Anal. Appl., 259: 18–24.

MANN, W.R., 1953. Mean value methods in iteration. Proc. Amer. Math. Soc., 4: 506-510.

NOOR, M.A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities. J. Math. Anal. Appl., 251: 217–229.

OPIAL, Z.,1967. Weak convergence of thesequence of successive approximations for nonexpansive mappings, Bull. Austral. Math. Soc. 73 591-597

PETRYSHYN, W.V. and WILLIAMSON, T.E.,1973. Strong and weak convergence of the sequence of successive approximations for quasi-nonexpansive mapping. J. Math. Anal. Appl., 43: 459–497.

RHOADES, B.E. and TEMİR S., 2006. Convergence theorems for I-nonexpansive mapping, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences,Article ID 63435, Pages1–4

ROYDEN, H. L., 1968. Real Analysis (2nd eddition). Mcmillan, New York.

SHAHZAD, N., 2004. Generalized I-nonexpansive maps and best appraximations in Banach spaces, Demonstratio Mathematica, Vol XXXVII No.3 597-600.

SHAHZAD, N. and UDOMENE A., 2006. Approximating common fixed points of two asimptotically quasi-nonexpansive mappings in Banach spaces, Fixed Points Theory and Applications , Article ID 18909, pages 1-10.

TAKAHASHİ, W. and TAMURA T.,1998. Convergence theorems for a pair of nonexpansive mappings, J.Convex Analysis 5 (1) 45-58.

TAN, K.K. and XU, H.K., 1992. The nonlinear ergodic theorem for asymptotically nonexpansive mapping in Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc., V 114, 2: 399–411.

TAN, K.K. and XU, H.K. , 1992 The nonlinear ergodic theorem for asymptotically nonexpansive mapping in Banach spaces, , Proc. Amer. Math. Soc., V 114, 2, , 399-411.

TEMİR S. and GUL O. 2007 , Convergence theorem for I-asymptotically quasi-nonexpansive mapping in Hilbert space, J. Math. Anal. Appl.,329 (2007) 759-765.

TEMİR S. , 2010 , Convergence theorems of a scheme with errors for I-asymptotically quasi-nonexpansive mappings, J. Nonlinear Sci. Appl.3,no:3, 222-233.

XU, B.L. and NOOR, M.A., 2002. Fixed-point iterations for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces. J. Math. Anal. Appl., 267: 444–453.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	MUSTAFA KÖROĞLU
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Ş.URFA 07/07/1977
Telefon	**:**	0 505 291 86 87
e-mail	**:**	mustafakoroglu@hotmail.com.tr

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	ŞANLIURFA ANADOLU LİSESİ	1995
Üniversite	:	HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ	2000
Yüksek Lisans	:		
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2000	MİLLİ EĞİTİM	ÖĞRETMEN

YABANCI DİLLER: İNGİLİZCE