

**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**AÇISAL MATHIEU DENKLEMİNİN CHEBYSHEV SANKİ-SPEKTRAL
YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

Mehmet Salih DAL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ŞANLIURFA
2017**

Doç. Dr. Haydar ALICI danışmanlığında, Mehmet Salih DAL'ın hazırladığı “**Açısai Mathieu denkleminin Chebyshev sanki-spektral yöntemi ile sayısal çözümleri**” konulu bu çalışma 29/12/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman : Doç. Dr. Haydar ALICI

Üye : Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hüseyin ALTUNDAĞ

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalı'nda Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini Onaylarım.

Prof. Dr. Halil Murat ALĞIN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu'ndaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ	iv
ÇİZELGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
1.1. Mathieu Diferansiyel Denklemleri	3
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	4
3. MATERYAL ve YÖNTEM	5
3.1. Chebyshev Polinomları	5
3.2. Türev Matrisleri	9
3.3. Chebyshev Sanki-Spektral Türev Matrisleri	12
3.4. Denklemin Sanki-Spektral Formülasyonu	19
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA	21
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	29
KAYNAKLAR	30
ÖZGEÇMİŞ	33

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

AÇISAL MATHIEU DENKLEMİNİN CHEBYSHEV SANKİ-SPEKTRAL YÖNTEMİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Mehmet Salih DAL

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Haydar ALICI

Yıl: 2017, sayfa: 33

Bu tezde, açısıl Mathieu denkleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları Chebyshev sanki-spektral yöntemi ile sayısal olarak hesaplanmıştır. Bunun için, önce Chebyshev türev matrisleri oluşturulmuş ardından yöntem denkleme uygulanarak sonuçlar çizelgelerde listelenmiştir. Yöntemin etkinliğini ortaya çıkarmak için literatürde var olan sayısal yöntemlerle karşılaştırmalar yapılmıştır.

ANAHTAR KELİMELEER: Açısıl Mathieu denklemi, klasik dik polinomlar, Chebyshev sanki-spektral yöntemi.

ABSTRACT

MSc Thesis

NUMERICAL SOLUTION OF THE ANGULAR MATHIEU EQUATION BY CHEBYSHEV PSEUDOSPECTRAL METHOD

Mehmet Salih DAL

**Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

**Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Haydar ALICI
Year: 2017, page: 33**

In this thesis, the eigenvalues and the eigenfunctions of the angular Mathieu equation is approximated by means of Chebyshev pseudospectral method. To this end, first the Chebyshev pseudospectral differentiation matrices are constructed. Then, the method is applied to the equation and the numerical results are tabulated. Comparison with the existing literature results are made to reveal the effectiveness of the method.

KEYWORDS: Angular Mathieu equation, classical orthogonal polynomials, Chebyshev pseudospectral methods.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımız boyunca desteklerini esirgemeyen, engin bilgileriyle beni bilgilendiren çok kıymetli ve saygıdeğer hocam Doç. Dr. Haydar ALICI'ya teşekkür ederim.

Ayrıca, tez jürisinde bulunan ve tezin son halini almasında önemli katkıları bulunan Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ ve Yrd. Doç. Dr. Hüseyin ALTUNDAĞ hocalarıma da teőekkürü borç bilirim.

Son olarak bana her koşulda ve her durumda destek olan çok deđerli aile bireylerime de teşekkür ederim.



ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa No
Şekil 3.1. Birinci mertebe Chebyshev sanki-spektral türev matrisi	15
Şekil 3.2. İkinci mertebe Chebyshev sanki-spektral türev matrisi	17
Şekil 4.1. Mathieu denkleminin $q = 1$ için ilk altı özfonksiyonu.	25
Şekil 4.2. Mathieu denkleminin $q = 10^2$ için ilk altı özfonksiyonu.	26
Şekil 4.3. Mathieu denkleminin $q = 10^4$ için ilk altı özfonksiyonu.	27
Şekil 4.4. Mathieu denkleminin $q = 10^6$ için ilk altı çift özfonksiyonu.	28



ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa No
Çizelge 4.1. $q = 1$ için Mathieu denkleminin ilk birkaç özdeğeri.	21
Çizelge 4.2. $q = 1$ için Mathieu denkleminin bazı büyük indisli özdeğerleri.	21
Çizelge 4.3. $q = 10^2$ için Mathieu denkleminin bazı özdeğerleri.	22
Çizelge 4.4. $q = 10^2$ için Mathieu denkleminin bazı özdeğerleri.	22
Çizelge 4.5. $q = 10^4$ için Mathieu denkleminin bazı özdeğerleri.	23
Çizelge 4.6. $q = 10^4$ için Mathieu denkleminin bazı yüksek indisli özdeğerleri.	23
Çizelge 4.7. $q = 10^6$ için Mathieu denkleminin bazı özdeğerleri.	24
Çizelge 4.8. $q = 10^6$ için Mathieu denkleminin bazı yüksek indisli özdeğerleri.	24



1. GİRİŞ

Fizik ve mühendislik gibi uygulamalı bilimlerde bir çok problem, L bir diferansiyel operatör olmak üzere, matematiksel olarak

$$Lu(x) = \lambda u(x), \quad x \in (a, b) \quad (1.1)$$

biçimindeki diferansiyel özdeğer problemi ile modellenir. Burada ayrıca sınır koşulları verilmelidir. Bu tip problemlerde kapalı formda çözüm mümkün olmadığı veya çözüm temel fonksiyonların bileşimi şeklinde ifade edilemediği durumlarda yaklaşık çözüm aranır. Bunun için literatürde, sonlu farklar, sonlu elemanlar, atış yöntemi ve spektral yöntemler gibi bir çok yöntem vardır. Spektral yöntemlerde $\phi_k(x)$ taban (baz) fonksiyonları olmak üzere, yaklaşımlar

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N u_k \phi_k(x) \quad (1.2)$$

kesilmiş seri açılımı ile tanımlanır. Burada bilinmeyen u_k değerlerine açılım katsayıları denir. Seçilen baz fonksiyonları

$$(\phi_k(x), \phi_l(x)) = \int_a^b \phi_k(x) \phi_l(x) \rho(x) d(x) = h_k \delta_{kl}, \quad k, l = 0, 1, \dots, N \quad (1.3)$$

anlamında $\rho(x)$ pozitif ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir. Burada h_k normalizasyon sabiti δ_{kl} ise Kronecker deltasıdır. Şimdi, yaklaşık anlamda sıfırlanması gereken

$$R_N = (L - \lambda)u_N \quad (1.4)$$

artık terimini tanımlayalım. Sıfırlama işlemi

$$(R_N, \psi_i)_{\bar{\rho}} = \int_a^b R_N(x) \psi_i(x) \bar{\rho}(x) d(x), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (1.5)$$

iç çarpımını sıfıra eşitleyerek yapılacak. Burada $\psi_i(x)$ test fonksiyonları, $\bar{\rho}$ ağırlık fonksiyonu ise $\phi_k(x)$ baz fonksiyonlarıyla ilişkilidir (Canuto ve ark., 1988). Test fonksiyonunun ve ağırlığın seçimi yöntemi tanımlar. Örneğin Galerkin spektral yönteminde ψ_i test fonksiyonları ile ϕ_i baz fonksiyonları aynıdır. Ayrıca $\bar{\rho}$ ağırlık fonksiyonu baz fonksiyonlarının ortogonalliği ile ilişkilidir, yani $\bar{\rho} = \rho$ Geleneksel Galerkin yöntemi (1.3) açılımındaki ϕ_i baz fonksiyonları homojen sınır koşullarını sağladığında uygulanır. (1.5) eşitliğinde Galerkin denklemleri

$$(R_N, \psi_i)_{\rho} = (Lu_N - \lambda u_N, \phi_i)_{\rho} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (1.6)$$

halini alır veya (1.3) eşitliğini kullanarak

$$\sum_{k=0}^N (L\phi_k, \phi_i)_\rho u_k = \lambda \sum_{k=0}^N (\phi_k, \phi_i)_\rho u_k, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.7)$$

yazılabilir. $B = (L\phi_k, \phi_i)_\rho$, $k = 0, 1, \dots, N$ iç çarpımları baz fonksiyonlarının ortogonalliğini kullanarak hesaplanır ve $(N + 1) \times (N + 1)$ tipinde bir kare matris elde edilir. (1.3) Eşitliğinden, son eşitlikteki $D = (\phi_k, \phi_i)_\rho$ iç çarpımının köşegen matris ürettiği açıktır, hatta normalize edilmiş $\phi_k/\sqrt{h_k}$ baz fonksiyonları kullanıldığında bu matris birim matris olur. Böylece (1.1) denkleminin ilk $N + 1$ yaklaşık öz değerleri $L = D^{-1}B$ matrisinin öz değerleriyle verilir. Eğer L operatörü öz eşlenik ise B ve dolayısıyla L matrisleri simetrik olur. Bu durumda Galerkin yöntemi Rayleigh-Ritz Yöntemi olarak adlandırılır. $(L\phi_k, \phi_i)_\rho$ iç çarpımlarını kapalı formda hesaplamının mümkün olmadığı durumlarda sayısal integrasyon kullanılmalıdır. Bu yöntem ise sayısal integrasyonla Galerkin yöntemi olarak bilinir. Dikkat edilirse yukarıda $N + 1$ tane Galerkin denklemi olduğu görülür. Bu sınır koşullarının baz fonksiyonları tarafından sağlanmasından kaynaklanır. Sağlanmadığı zaman, var olan bazdan sınır koşullarını sağlayan yeni bir baz elde edilir fakat yeni baz ortogonal olmayabilir. Bu yüzden bu yöntem çok kullanışlı değildir. Bunun yerine Tau yöntemi tercih edilir. Galerkin yöntemine benzemekle birlikte baz fonksiyonları sınır koşullarını sağlamak zorunda değildir. Bu yüzden sınır koşullarından kaynaklanan tamamlayıcı eşitliklere gerek duyulur. Yöntemin detaylı incelemesi için (Canuto ve ark., 2006; Gottlieb and Orszag, 1977) kaynakları incelenebilir. Test fonksiyonlarının

$$\psi_i = \delta(x - x_i) \quad (1.8)$$

Dirac delta fonksiyonları ve ağırlık fonksiyonunun $\bar{\rho} = 1$ olduğu durum sanki-spektral yöntem olarak adlandırılır. Burada $x_i \in (a, b)$, $i = 0, 1, \dots, N$ noktaları reel ve birbirinden farklıdır. (1.5) ve (1.8) den

$$\int_a^b R_N(x) \delta(x - x_i) dx = R_N(x_i), \quad x_i \in (a, b) \quad (1.9)$$

temel özelliği kullanılarak $R_N(x_i) = 0$ eşitliği elde edilir. Dolayısıyla Galerkin yönteminde $R_N(x)$ artık terimi bir anlamda sıfır iken sanki-spektral yöntemde artık terimi belli x_i noktalarında tam olarak sıfırdır. Spektral yöntemler arasında uygulanışı en kolay olanı sanki-spektral yöntemlerdir.

Spektral yöntemlerde, yaklaşık çözümle tam çözüm arasındaki fark, yani hata çok hızlı bir şekilde azalır. Bu dikkat çekici özellik "spektral doğruluk" olarak adlandırılır.

Fakat sonlu farklar yönteminde hata cebirsel olarak azalır. Bu farkın sebebi sonlu farkların düşük dereceli (Lokal) baz elemanların aksine spektral yöntemlerin yüksek dereceli (Global) baz elemanları kullanılmasıdır. Yani verilen bir noktada türevi hesaplamak için sonlu farklar noktanın küçük bir komşuluğuyla ilgili bilgiyi kullanırken spektral yöntemlerde bütün noktalar hesaplamaya dahil edilir (Trefethen, 2000). Bunun sonucu olarak sonlu farklar matrisi bantlı iken spektral yöntemlerinki doludur. Bununla birlikte, belirli bir doğruluk istendiğinde sonlu farkların matris boyutu spektral yöntemlerinkine göre çok daha büyüktür. Hatta bazen sonlu farklar istenilen doğruluğa hiç bir zaman ulaşamaz.

1.1. Mathieu Diferansiyel Denklemleri

(1.1) biçimindeki özel problemlerden biri de

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + 2q \cos(2x)y = \lambda y, \quad y(0) = y(\pi) = 0 \quad (1.10)$$

ifadesiyle verilen Mathieu diferansiyel denklemdir. Bu denklem İlk olarak 1868 yılında Fransız matematikçi Mathieu tarafından eliptik zarin titreşimleri incelenirken ortaya çıkmıştır (Mathieu, 1868). Helmholtz veya Laplace denkleminin eliptik koordinatlarda değişkenlerine ayırma yönteminin uygulanmasıyla ortaya çıkan denklemlerden açısal kısmı temsil edenidir. Mathieu denkleminin özdeğer ve özfonksiyonlarına, eliptik yapılardan akustik ve elektromagnetik saçılım (Courant ve Hilbert, 1966; Fang ve ark., 2009; Hamid, 2005; Mathews ve Walker, 1970), periyodik potansiyel etkisi altındaki parçacık (Froman, 1979), rezonans frekansı civarında moleküllerin titreşimsel spektroskopileri (Picket ve Shirts, 1991; Uzer ve Marcus, 1983) gibi birçok bilimsel konuda ihtiyaç duyulmaktadır. Bu denklemin çözümleri olan Mathieu fonksiyonlarının teorik yönleri Stratton (Stratton, 1935), McLachlan (McLachlan, 1947), Sips (Sips, 1949), Meixner ve Schäfke (Meixner ve ark., 1980) tarafından incelenmiştir.

Görüldüğü gibi eliptik geometride bir çok probleme, eliptik koordinatlarda değişkenlerine ayırma tekniği uygulandığında karşımıza Mathieu denklemleri çıkmaktadır. Bu yüzden, açısal Mathieu denkleminin keyfi bir q parametresi için yüksek doğrulukta sayısal çözümlerini elde etmek büyük önem arz etmektedir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Mathieu fonksiyonlarının kapalı formda basit bir gösterimi olmadığı için ele alınmaları kolay değildir (Sips, 1949). Bu yüzden, Mathieu fonksiyonları ve karşılık gelen özdeğerlerin sayısal hesabı için bir çok çalışma mevcuttur. Bunlar arasından birkaçını saymak gerekirse: Erricolo, Mathieu fonksiyonlarının açılım katsayılarını hesaplamak için Blanch algoritmasını kullanmıştır (Erricolo, 2006). Erricolo ve Carluccio, kompleks q değerleri için açısız ve radyal Mathieu fonksiyonlarını hesaplamak için bir program vermişlerdir (Erricolo ve Carluccio, 2013). Shirts, Mathieu denkleminin tamsayı olmayan mertebeden çözümleri ve karşılık gelen özdeğerleri için iki ayrı algoritma vermiştir (Shirts, 1993). Alhargan, tamsayı mertebeden Mathieu fonksiyonlarının sayısal hesabı için algoritmalar vermiştir (Alhargan, 2001). Coisson ve arkadaşları, Mathieu fonksiyonlarının hesabı için bir sayısal algoritma sunmuşlardır (Coisson ve ark., 2009). Cojocar, Mathieu fonksiyonları için Matlab programında bir araç kutusu hazırlamıştır (Cojocar, 2008). Yüksek mertebeden parçalı sabit perturbasyon tekniğini kullanan MATSLISE ise Mathieu özçiftlerini hesaplamak için Matlab dilinde yazılmış bir başka paket programdır (Ledoux ve ark., 2005).

Bu çalışmada ise (1.10) ile verilen açısız Mathieu denkleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını keyfi q değerleri için Chebyshev sanki-spektral yöntemi ile hesaplanacaktır. Dolayısı ile, 3. bölümde Chebyshev polinomlarının özellikleri incelenecektir. Chebyshev sanki-spektral türev matrisleri (birinci ve ikinci mertebeden) oluşturulacaktır. Ardından yöntem bir çok farklı q değeri için Mathieu denklemine uygulanacaktır. Sonuçlar ise 4. bölümde şekiller ve çizelgeler halinde verilerek yorumlanacaktır. Son olarak, 5. bölümde yöntemin olumlu ve olumsuz yönleri tartışılıp ileriye dönük öneriler yapılarak tez sonuçlandırılacaktır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde birinci tip Chebyshev polinomlarının sonraki bölümlerde bize lazım olan bazı önemli özelliklerini verip birinci ve ikinci mertebeden Chebyshev Sanki-Spektral türev matrislerini oluşturacağız.

3.1. Chebyshev Polinomları

Tanım 3.1 (Trigonometrik tanım) $x \in [-1, 1]$ olmak üzere birinci tip Chebyshev polinomları $n \geq 0$ için

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanımdan hemen

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x \quad (3.2)$$

olduğu kolayca görülür. Yukarıdaki tanımda

$$x = \cos \theta, \quad x \in [-1, 1] \quad (3.3)$$

ataması yapılırsa

$$T_n(x) := T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta), \quad \theta \in [0, \pi] \quad (3.4)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadeden faydalanarak,

$$T_{n+1}(\theta) = \cos[(n+1)\theta] = \cos(n\theta) \cos \theta - \sin(n\theta) \sin \theta \quad (3.5)$$

ve

$$T_{n-1}(\theta) = \cos[(n-1)\theta] = \cos(n\theta) \cos \theta + \sin(n\theta) \sin \theta \quad (3.6)$$

yazılabilir. Son iki eşitliğin taraf tarfa toplanmasıyla

$$T_{n+1}(\theta) + T_{n-1}(\theta) = 2 \cos(n\theta) \cos \theta \quad (3.7)$$

ifadesi elde edilir. Yeniden orjinal x değişkenine dönülmesiyle (3.7) eşitliği

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \quad (3.8)$$

halini alır. Bunun yeniden düzenlenmesiyle,

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0, \quad n \geq 2 \quad (3.9)$$

Chebyshev polinomlarının yineleme (rekurans) bağıntısı elde edilir. Artık (3.2) ve (3.9) eşitliklerinden $T_n(x)$ Chebyshev polinomlarını üretmek mümkündür. Örneğin,

$$\begin{aligned} T_2(x) &= 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Öte yandan (3.1) ifadesinin x değişkenine göre türevi alınır

$$\frac{d}{dx}T_n(x) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n \arccos x) \quad (3.10)$$

veya θ cinsinden

$$\frac{d}{dx}T_n(\theta) = \frac{n \sin(n\theta)}{\sin \theta} \quad (3.11)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde

$$xT_n(x) = \cos \theta \cos(n\theta) \quad (3.12)$$

olduğu göz önüne alınır

$$T_{n-1} - xT_n = \sin \theta \sin(n\theta) \quad (3.13)$$

bulunur. Bunu (3.11) denkleminde kullanarak

$$(1-x^2)T'_n(x) = -nxT_n(x) + nT_{n-1}(x) \quad (3.14)$$

türev içeren yineleme bağıntısı elde edilir.

Chebyshev polinomlarının ortogonalite özellikleri kosinüs fonksiyonlarının ortogonalite özelliklerinden faydalanarak elde edilebilir. Yani

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(m\theta) \cos(n\theta) d\theta &= \int_0^\pi \frac{1}{2} \{ \cos[(m+n)\theta] + \cos[(m-n)\theta] \} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin[(m+n)\theta]}{m+n} + \frac{\sin[(m-n)\theta]}{m-n} \right\} \Big|_0^\pi \\ &= \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & , m = n \neq 0 \\ \pi & , m = n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ifadesinde $T_n(x) = \cos(n\theta)$, $\cos \theta = x$ olduğu hatırlanırsa,

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & , m = n \neq 0 \\ \pi & , m = n = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

eşitliği bulunur. Bu da birinci tip Chebyshev polinomlarının $(-1, 1)$ aralığında $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ ağırlık fonksiyonu altında ortogonal olduğunu gösterir.

Bilindiği gibi

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + n^2y = 0 \quad (3.16)$$

adi diferansiyel denklemin lineer bağımsız çözümlerinden biri C keyfi sabit olmak üzere

$$y = C \cos(n\theta) \quad (3.17)$$

fonksiyonudur. (3.16) denkleminde $x = \cos \theta$, ($\theta = \arccos x$) dönüşümü yapılırsa

$$\frac{d}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d}{dx} = -\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} \quad (3.18)$$

ve

$$\frac{d^2}{d\theta^2} = \sin^2 \theta \frac{d^2}{dx^2} - \cos \theta \frac{d}{dx} = (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - x \frac{d}{dx} \quad (3.19)$$

operasyonel denklemleri elde edilir. Bu denklemler (3.16) denkleminde kullanılırsa

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + n^2y = 0 \quad (3.20)$$

diferansiyel denkleminde ulaşılır. Bu denklemin bir çözümü ise (3.17) ifadesinden

$$y = C \cos(n \arccos x) = CT_n(x) \quad (3.21)$$

olarak bulunur ki bu da birinci tip Chebyshev polinomlarının

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0 \quad (3.22)$$

diferansiyel denklemini sağladığını gösterir.

Tanım 3.1'de x bağımsız değişkeni yerine $-x$ alınırsa

$$\begin{aligned} T_n(-x) &= \cos(n \arccos(-x)) \\ &= \cos[n(\pi - \arccos(x))] \\ &= \cos(n\pi) \cos(\arccos x) + \sin(n\pi) \sin(\arccos x) \\ &= (-1)^n T_n(x) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Şimdi Chebyshev polinomlarının bazı özel değerlerine bakalım. Tanımdan

$$T_n(1) = 1, T_n(-1) = (-1)^n \quad (3.23)$$

olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca (3.11) eşitliğinden

$$T_n'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} T_n'(x) = \lim_{\theta \rightarrow 0} T_n'(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{n \sin(n\theta)}{\sin \theta} = n^2 \quad (3.24)$$

ve benzer şekilde

$$T_n'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} T_n'(x) = \lim_{\theta \rightarrow \pi} T_n'(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{n \sin(n\theta)}{\sin \theta} = (-1)^{n-1} n^2 \quad (3.25)$$

değerleri bulunur. Öte yandan (3.22) denklemini kullanarak

$$T_n''(x) = \frac{xT_n'(x) - n^2T_n(x)}{1 - x^2} \quad (3.26)$$

ifadesine ulaşılır. Bu ifade $x = 1$ noktasında $\left[\frac{0}{0}\right]$ tipinde bir belirsizliğe sahip olduğundan $T_n''(1)$ değerini hesaplamak için

$$T_n''(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xT_n'(x) - n^2T_n(x)}{1 - x^2} \quad (3.27)$$

limit durumuna bakmak gerekir. L'Hospital kuralı uygulanırsa

$$T_n''(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xT_n''(x) - (n^2 - 1)T_n'(x)}{-2x} \quad (3.28)$$

ifadesine ulaşılır ki buradan

$$T_n''(1) = \frac{n^2(n^2 - 1)}{3} \quad (3.29)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$T_n''(-1) = (-1)^n \frac{n^2(n^2 - 1)}{3} \quad (3.30)$$

değeri elde edilir. (3.22) denkleminin x değişkenine göre türetilip yukarıdaki işlemlerin tekrarlanmasıyla

$$T_n'''(1) = \frac{1}{15}(n^2 - 4)(n^2 - 1)n^2 \quad (3.31)$$

ve

$$T_n'''(-1) = \frac{(-1)^{n-1}}{15}(n^2 - 4)(n^2 - 1)n^2 \quad (3.32)$$

değerlerine ulaşılır. Bunlara ek olarak yine tanımdan

$$T_{2n}(0) = \cos(2n \arccos 0) = \cos(2n \frac{\pi}{2}) = (-1)^n \quad (3.33)$$

ve

$$T_{2n+1}(0) = \cos[(2n + 1) \arccos 0] = \cos((n + \frac{1}{2})\pi) = 0 \quad (3.34)$$

özel değeri elde edilir.

Teorem 3.2 Derecesi $n \geq 1$ olan Chebyshev polinomlarının $(-1, 1)$ aralığında

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.35)$$

noktalarında n tane basit reel kökleri vardır. Ayrıca $T_n(x)$ mutlak ekstremum değerlerini

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.36)$$

noktalarında alır ve bu ekstremum değerleri

$$T_n(x_k) = (-1)^k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.37)$$

ile verilir.

İspat. (3.4) eşitliğinden $T_n(\theta) = \cos(n\theta) = 0$ olması istenirse

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$$

olduğu görülür. Öte yandan $\bar{\theta}_k \in [0, \pi]$ olduğundan $k = 1, 2, \dots, n$ olmalıdır. Şimdi (3.11) eşitliğinde

$$T'_n(\theta) = n \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} = 0 \quad (3.38)$$

şartının sağlanması için $\sin(n\theta) = 0$ ve $\sin \theta \neq 0$ olmalıdır. Dolayısıyla

$$\theta_k = \frac{k\pi}{n} \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.39)$$

olarak bulunur. $\theta = 0$ ve $\theta = \pi$ noktalarından $T'_n(\theta)$ fonksiyonunun sıfır olmadığı (3.24) ve (3.25) eşitliğinden görülebilir. Şimdi (3.3) ifadesinden

$$x_k = \cos(\theta_k) = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

olduğu görülür. Son olarak $T_n(x_k) = T_n(\theta_k) = \cos(nk\pi/n) = (-1)^k$ olduğu açıktır. \square

3.2. Türev Matrisleri

Adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinde sanki-spektral yöntemlerin kullanımı Frazer, Jones ve Skan'a (Frazer ve ark., 1937) kadar uzanır. 1938'de Lanczos baz fonksiyonlarının seçiminin ve düğüm noktalarının dağılımının çözümün doğruluğu üzerinde kritik etkisi olduğunu gösterdi (Lanczos, 1938). 1957'de Clenshaw Chebyshev

seri açılımını başlangıç değer problemlerine uyguladı. Daha sonra 1967'de Villadsen ve Stewart (Villadsen ve Stewart, 1967) bu yöntemi sınır değer problemine uyguladı. Spektral yöntemler 1970'lerde adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için popüler bir yöntem oldu. Kısmi diferansiyel denklemlere ilk uygulayan ve aynı zamanda sanki-spektral denklemini ilk kullanan kişi Orszag olmuştur (Canuto ve ark., 2006).

Sanki-spektral yöntemler bir $y(x)$ fonksiyonunun $I_N y(x)$ olarak adlandırılan ve

$$I_N y(x) = P_N(x) = \sum_{n=0}^N \ell_n(x) y_n \quad (3.40)$$

ile verilen N . derece polinom interpolasyonu üzerine kurulur. Burada $y_n = y(x_n)$ değerleri $y(x)$ fonksiyonunun önceden seçilmiş $x = x_n$ $n = 0, 1, \dots, N$ noktalarındaki gerçek değerleridir (Funaro, 1992). Ayrıca her bir $n = 0, 1, \dots, N$ için $\ell_n(x)$ fonksiyonları

$$\phi_{N+1}(x) = \kappa \prod_{m=0}^N (x - x_m) \quad (3.41)$$

$x = x_m$ $m = 0, 1, \dots, N$ noktalarında reel ve birbirinden farklı $(N+1)$. derece polinom olmak üzere,

$$\ell_n(x) = \frac{\phi(x)}{(x - x_n)\phi'(x_n)} \quad (3.42)$$

şeklinde tanımlanan Lagrange interpolasyon polinomlarıdır. Lagrange polinomlarının en önemli özelliklerinden biri, δ_{mn} Kronecker delta olmak üzere,

$$\ell_n(x_m) = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (3.43)$$

ile verilir. Bu özelliklerden faydalanarak $P_N(x)$ interpolatının ve $y(x)$ fonksiyonunun en azından $x = x_m$, $m = 0, 1, \dots, N$ noktalarında çakıştığı, yani $y(x_m) = P_N(x_m)$ olduğu görülür. (3.41) ifadesinde κ sabiti teorik olarak bir anlam ifade etmese de, nümerik yöntemlerde önemli bir role sahiptir.

$P_N(x)$ interpolatının türevleri yardımıyla $y(x)$ fonksiyonunun türevleride yaklaşık olarak hesaplamak mümkündür. Dahası $y(x)$ fonksiyonunun x_n noktalarındaki $y^{(k)}(x_m)$ türev değerleri $y(x_m) = P_N(x_m)$ fonksiyon değerleri cinsinden belirlenebilir. Bunun için ilk olarak (3.40) ifadesinin k . mertebeden türevinin alınıp $x = x_m$ noktalarında hesaplanmasıyla

$$P_N^{(k)}(x_m) = \sum_{n=0}^N \ell_n^{(k)}(x_m) y_n, \quad m, n, k = 0, 1, \dots, N \quad (3.44)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi bu son eşitlik

$$D^{(k)} = [d_{(mn)}^{(k)}] = \ell_n^{(k)}(x_m), \quad m, n, k = 0, 1, \dots, N \quad (3.45)$$

olmak üzere

$$y^{(k)} = D^{(k)}y \quad (3.46)$$

matris-vektör formunda ifade edilebilir. Burada eşitliğin sol tarafındaki vektör $y^{(k)} = [P_N^k(x_0), P_N^k(x_1), \dots, P_N^k(x_n)]$ türev değerlerini ve sağ tarafındaki vektör $y = [y_0, y_1, \dots, y_N]^T$ fonksiyon değerlerini içeren $(N + 1)$ boyutlu sütun vektörleridir. (3.45) ifadesi ile tanımdan $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu $D^{(k)}$ kare matrisine “türev matrisi” denir.

Şimdi birinci ve ikinci mertebeden türev matrislerinin elemanlarını hesaplayalım. (3.42) ifadesinin x değişkenine göre türetilmesiyle

$$\ell_n'(x) = \frac{1}{\phi'(x_n)} \left[\frac{\phi'(x)}{x - x_n} - \frac{\phi(x)}{(x - x_n)^2} \right] \quad (3.47)$$

eşitliği elde edilir. (3.41) eşitliğinden $\phi(x_m) = 0$ olduğu göz önüne alınarak birinci mertebeye türev matrisinin köşegen dışı elemanı

$$d_{mn}^{(1)} = \frac{1}{x_m - x_n} \frac{\phi'(x_m)}{\phi'(x_n)}, \quad m \neq n \quad (3.48)$$

olarak bulunur. Köşegen elemanları ($m = n$) ise $x = x_n$ durumundaki belirsizlikten dolayı

$$d_{nn}^{(1)} = \lim_{x \rightarrow x_n} \ell_n'(x) \quad (3.49)$$

limiti ile bulunabilir. (3.49) ifadesinde belirsizliğin giderilmesiyle

$$d_{nn}^{(1)} = \lim_{x \rightarrow x_n} \frac{1}{2} \frac{\phi''(x)}{\phi'(x_n)} = \frac{1}{2} \frac{\phi''(x_n)}{\phi'(x_n)} \quad (3.50)$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla

$$d_{mn}^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{x_m - x_n} \frac{\phi'(x_m)}{\phi'(x_n)}, & m \neq n \\ \frac{1}{2} \frac{\phi''(x_n)}{\phi'(x_n)}, & m = n \end{cases} \quad (3.51)$$

şeklinde ifade edilir (Funaro, 1992). Benzer şekilde Lagrange polinomunun ikinci mertebeye türevinin

$$\ell_n''(x) = \frac{1}{\phi'(x_n)} \left[\frac{\phi''(x)}{(x - x_n)} - 2 \frac{\phi'(x)}{(x - x_n)^2} + 2 \frac{\phi(x)}{(x - x_n)^3} \right] \quad (3.52)$$

$x = x_m$ noktalarında ($m \neq n$) hesaplanmasıyla ikinci mertebe türev matrisinin köşegen dışı elemanları

$$d_{mn}^{(2)} = \frac{1}{x_m - x_n} \left[\frac{\phi''(x_m)}{\phi'(x_n)} - \frac{2}{(x_m - x_n)} \frac{\phi'(x_m)}{\phi'(x_n)} \right] \quad m \neq n$$

ve

$$d_{nn}^{(2)} = \lim_{x \rightarrow x_n} \ell_n''(x) = \lim_{x \rightarrow x_n} \frac{1}{3} \frac{\phi'''(x)}{\phi'(x)} = \frac{1}{3} \frac{\phi'''(x_n)}{\phi'(x_n)} \quad (3.53)$$

limiti ile de ikinci mertebe türev matrisinin köşegen elemanları bulunur. Sonuç olarak ikinci mertebe sanki-spektral türev matrisinin elemanları

$$d_{mn}^{(2)} = \begin{cases} \frac{1}{x_m - x_n} \left[\frac{\phi''(x_m)}{\phi'(x_n)} - \frac{2}{(x_m - x_n)} \frac{\phi'(x_m)}{\phi'(x_n)} \right], & m \neq n \\ \frac{1}{3} \frac{\phi'''(x_n)}{\phi'(x_n)}, & m = n \end{cases} \quad (3.54)$$

şeklinde ifade edilebilir (Funaro, 1992; Alıcı ve Taşeli, 2005). Daha yüksek mertebeden türev matrisinin elemanları da benzer şekilde elde edilebilir. Ancak uygulamalı bilimlerde birçok problem matematiksel olarak ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemlerle modellendiği için, daha yüksek mertebeden türev matrisleri burada hesaplanmayacaktır. Ayrıca bazı durumlarda, Örneğin Chebyshev sanki-spektral yönteminde, k . mertebeden türev matrisi, birinci mertebeden türev matrisinin k . kuvvetidir (Trefethen, 2000). Yani

$$D^{(k)} = [D^{(1)}]^k \quad k = 2, 3, \dots \quad (3.55)$$

şeklinde dir.

3.3. Chebyshev Sanki-Spektral Türev Matrisleri

Tanım 3.3 $T_N(x)$ birinci tip chebyshev polinomları olmak üzere

$$B(x) = (1 - x^2)T_N'(x) \quad (3.56)$$

polinomunun sıfırları Chebyshev-Gauss-Lobatto (CGL) noktaları olarak adlandırılır ve

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{N}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (3.57)$$

ifadesiyle verilirler.

Literatürde CGL noktaları

$$x_0 = 1 > x_1 > x_2 > \dots > x_{N-1} > x_N = -1 \quad (3.58)$$

şeklinde büyükten küçüğe sıralanır. Şimdi (3.41) eşitliğindeki $\phi(x)$ polinomu yerine (3.56) ifadesindeki $B(x)$ polinomunu, yani

$$\phi(x) = \kappa \prod_{m=0}^N (x - x_m) = (1 - x^2)T'_N(x) = B(x) \quad (3.59)$$

alalım. $B(x)$ polinomu da birbirinden farklı ve reel $N+1$ tane köke sahip olduğu için bunu yapmak mümkündür. Dolayısı ile birinci mertebeden Chebyshev sanki-spektral matrisinin elemanları (3.59) baz polinomunu (3.51) matrisinde kullanarak bulunabilir.

İlk olarak $d_{00}^{(1)}$ ve $d_{NN}^{(1)}$ elemanlarını hesaplayalım. (3.51) matrisinden ve (3.59) ifadesinden

$$d_{00}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\phi''(x_0)}{\phi'(x_0)} = \frac{1}{2} \frac{\phi''(1)}{\phi'(1)} \quad (3.60)$$

yazılabilir. (3.59) eşitliğinin türetilmesiyle

$$\phi'(x) = (1 - x^2)T''_N(x) - 2xT'_N(x) \quad (3.61)$$

ve

$$\phi''(x) = (1 - x^2)T'''_N(x) - 4xT''_N(x) - 2T'_N(x) \quad (3.62)$$

elde edilir. Son iki eşitlikte $x = 1$ alınıp (3.60) eşitliğinde kullanılırsa

$$d_{00}^{(1)} = \frac{1}{2} \left[1 + 2 \frac{T''_N(1)}{T'_N(1)} \right] \quad (3.63)$$

bulunur. Şimdi (3.24) ve (3.29) eşitliklerini kullanarak

$$d_{00}^{(1)} = \frac{2N^2 + 1}{6} \quad (3.64)$$

elde edilir. Benzer şekilde $x = -1$ alınıp gerekli cebirsel işlemler yapılarak

$$d_{NN}^{(1)} = -\frac{2N^2 + 1}{6} \quad (3.65)$$

olarak bulunur. Fakat bu defa hesaplamalarda (3.24) ve (3.29) yerine (3.25) ve (3.30) değerlerine ihtiyaç olduğu açıktır.

Köşegendeki diğer elemanlar (3.61) ve (3.62) eşitliklerinde $x = x_n$, $n = 1, \dots, N-1$ alınarak ve $T'_N(x_n) = 0$ gerçeğini kullanarak

$$d_{nn}^{(1)} = \frac{1}{2} \left[\frac{T'''_N(x_n)}{T''_N(x_n)} - \frac{4x_n}{1 - x_n^2} \right] \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.66)$$

şeklinde bulunur. Son eşitlikteki ilk kesrin değeri Chebyshev polinomlarının sağladığı diferansiyel denklemden faydalanılarak bulunabilir.

Yani (3.22) denkleminin her iki tarafı x değişkenine göre türetilip

$$(1 - x^2)T_N'''(x) - 3xT_N''(x) + (N^2 - 1)T_N'(x) = 0 \quad (3.67)$$

$x = x_n$ noktalarında hesaplanmasıyla

$$T_N'''(x_n) = \frac{3x_n}{1 - x_n^2} T_N''(x_n) \quad (3.68)$$

bulunur. Yine burada $T_N'(x_n) = 0$ olduğunu hatırlayalım. Son olarak bu ifadenin (3.66) eşitliğinde kullanılmasıyla

$$d_{NN}^{(1)} = -\frac{1}{2} \frac{x_n}{1 - x_n^2} \quad n = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (3.69)$$

köşegen terimleri elde edilir. Şimdi köşegen dışı elemanları elde edelim. Önce $m = 0$, $n = 1, 2, \dots, N - 1$ durumuna bakalım. Bu durumda (3.51) matrisindeki köşegen dışı elemanlar

$$d_{0n}^{(1)} = \frac{1}{1 - x_n} \frac{\phi'(1)}{\phi'(x_n)} \quad n = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (3.70)$$

şeklini alır. Son eşitlik (3.61) ifadesinde $x = 1$ ve $x = x_n$ alınarak

$$d_{0n}^{(1)} = \frac{1}{1 - x_n} \frac{-2T_N'(1)}{(1 - x_n^2)T_N''(x_n)}$$

şeklinde yazılabilir. Burada yine $T_N'(x_n) = 0$ olduğu unutulmamalıdır. (3.24) ve (3.22) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$d_{0n}^{(1)} = \frac{1}{1 - x_n} \frac{-2N^2}{-N^2 T_N(x_n)} = 2 \frac{(-1)^n}{1 - x_n} \quad n = 1, 2, \dots, N - 1$$

olduğu bulunur. $n = N$ için ise (3.24) ve (3.25) eşitliklerinden faydalanarak

$$d_{0N}^{(1)} = \frac{1}{1 - (-1)} \frac{\phi'(1)}{\phi'(-1)} = \frac{1}{2} \frac{-2N^2}{(-1)^{N-1} 2N^2} = \frac{1}{2} (-1)^N$$

bulunur. Benzer şekilde $m = N$, $n = 0$ için

$$d_{N0}^{(1)} = -\frac{1}{2} (-1)^N$$

olarak bulunur. $m = N$, $n = 1, 2, \dots, N - 1$ durumunda matris elemanları

$$d_{Nn}^{(1)} = \frac{1}{-1 - x_n} \frac{\phi'(-1)}{\phi'(x_n)}$$

halini alır ki bu da (3.46) ve (3.47) eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$d_{Nn}^{(1)} = \frac{-1}{1+x_n} \frac{(-1)^{N-1} 2N^2}{-N^2(-1)^n} = -2 \frac{(-1)^{N+n}}{1+x_n}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde $m = 1, 2, \dots, N-1$ $m = 0$ ve $m = 1, 2, \dots, N-1$ $n = N$ durumlarında matris elemanları sırasıyla

$$d_{m0}^{(1)} = -\frac{1}{2} \frac{(-1)^m}{1-x_m}, \quad m = 1, 2, \dots, N-1$$

ve

$$d_{mN}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{(-1)^{N+m}}{1+x_m}, \quad m = 1, 2, \dots, N-1$$

olarak elde edilir.

$$d_{mn}^{(1)} =$$

$\frac{2N^2+1}{6}$	$2 \frac{(-1)^n}{1-x_n}$	$\frac{1}{2}(-1)^N$
$\frac{1}{2} \frac{(-1)^m}{1-x_m}$	$\frac{(-1)^{m+n}}{x_m-x_n}$ $\frac{-x_n}{2(1-x_n^2)}$ $\frac{(-1)^{m+n}}{x_m-x_n}$	$\frac{1}{2} \frac{(-1)^{N+m}}{1+x_m}$
$-\frac{1}{2}(-1)^N$	$-2 \frac{(-1)^{N+n}}{1+x_n}$	$-\frac{2N^2+1}{6}$

Şekil 3.1. Birinci mertebeye Chebyshev sanki-spektral türev matrisi

Son olarak $1 \leq m, n \leq N-1$ durumunda köşegen dışı elemanlar

$$d_{mn}^{(1)} = \frac{1}{x_m-x_n} \frac{\phi'(x_m)}{\phi'(x_n)} = \frac{1}{x_m-x_n} \frac{T_N''(x_m)}{T_N''(x_n)}, \quad m, n = 1, 2, \dots, N-1$$

ifadesinden, Chebyshev polinomlarının sağladığı (3.22) diferansiyel denklemi kullanarak

$$d_{mn}^{(1)} = \frac{1}{x_m - x_n} \frac{-N^2 T_N(x_m)}{-N^2 T_N(x_n)} = \frac{1}{x_m - x_n} \frac{(-1)^m}{(-1)^n} = \frac{(-1)^{m+n}}{x_m - x_n}, \quad -1 \leq m, n \leq N-1$$

şeklinde bulunur. Burada $(-1)^{-n} = (-1)^n$ olduğu unutulmamalıdır. Yaptığımız bu hesaplamalar bir çizelgede özetlenirse birinci merteye Chebyshev sanki-spektral matrisinin yapısı açık bir şekilde görülebilir (Bkz. Şekil 3.1.).

Aslında

$$c_m = \begin{cases} 2, & m = 0 \text{ veya } N \\ 1, & m = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (3.71)$$

olmak üzere, birinci merteye Chebyshev türev matrisi

$$d_{mn}^{(1)} = \begin{cases} \frac{2N^2 + 1}{6}, & m = n = 0 \\ -\frac{2N^2 + 1}{6}, & m = n = N \\ \frac{-x_m}{2(1 - x_n^2)}, & m = n = 1, 2, \dots, N-1 \\ \frac{c_m (-1)^{m+n}}{c_n x_m - x_n}, & m \neq n, \quad m, n = 0, 1, \dots, N \end{cases} \quad (3.72)$$

şeklinde daha tıkHz bir yapıda da ifade edilebilir (Trefethen, 2000).

Benzer şekilde ikinci merteye Chebyshev Sanki-Spektral türev matrisinin elemanları

$$d_{mn}^{(2)} = \begin{cases} \frac{N^4 - 1}{15}, & m = n = 0, N \\ -\frac{(N^2 - 1)(1 - x_n^2) + 3}{3(1 - x_n^2)^2}, & 1 \leq m, n \leq N-1, m = N \\ \frac{(-1)^N}{3}(N^2 - 1), & m = 0, n = N \quad \text{ve} \quad m = N, n = 0 \\ (-1)^n \frac{2(2N^2 + 1)(1 - x_n) - 6}{3(1 - x_n)^2}, & m = 0, 1 \leq n \leq N-1 \\ (-1)^{N+n} \frac{2(2N^2 + 1)(1 + x_n) - 6}{3(1 + x_n)^2}, & m = N, 1 \leq n \leq N-1 \\ \frac{(-1)^m}{2} \frac{(x_m + 2)}{(1 - x_m^2)(x_m - 1)}, & 1 \leq m \leq N-1, n = 0 \\ \frac{(-1)^{N+m}}{2} \frac{(x_m - 2)}{(1 - x_m^2)(x_m + 1)}, & 1 \leq m \leq N-1, n = N \\ (-1)^{m+n} \frac{x_m^2 + x_m x_n - 2}{(1 - x_m^2)(x_m - x_n)^2}, & 1 \leq m, n \leq N-1, m \neq n \end{cases} \quad (3.73)$$

şeklinde bulunur veya düzenleme yapılırsa daha kompakt yapıda

$$d_{mn}^{(2)} = \begin{cases} \frac{N^4 - 1}{15}, & m = n = 0, N \\ \frac{(N^2 - 1)(1 - x_n^2) + 3}{3(1 - x_n^2)^2}, & 1 \leq m, n \leq N - 1, m = n \\ \frac{(-1)^n}{c_n} \frac{2(2N^2 + 1)(1 - x_n) - 6}{3(1 - x_n)^2}, & m = 0, 1 \leq n \leq N \\ \frac{2(-1)^{N+n}}{3c_n} \frac{(2N^2 + 1)(1 + x_n) - 6}{(1 + x_n)^2}, & m = N, 0 \leq k \leq N - 1 \\ \frac{(-1)^{m+n}}{c_n} \frac{x_m^2 + x_m x_n - 2}{(1 - x_m^2)(x_m - x_n)^2}, & 1 \leq m \leq N - 1, 0 \leq n \leq N, m \neq n \end{cases} \quad (3.74)$$

şeklinde ifade edilebilir. İkinci merteye Chebyshev sanki-spektral türev matrisi Şekil 3.2. ile de ifade edilebilir.

$$d_{mn}^{(2)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{N^4-1}{15} & (-1)^n \frac{2}{3} \frac{(2N^2+1)(1-x_n)-6}{(1-x_n)^2} & \frac{(-1)^N}{3} (N^2-1) \\ \hline \frac{(-1)^m}{2} \frac{x_m+2}{(1-x_m^2)(x_m-1)} & \begin{array}{c} (-1)^{m+n} \frac{x_m^2+x_m x_n-2}{(1-x_m^2)(x_m-x_n)^2} \\ - \frac{(N^2-1)(1-x_n^2)+3}{3(1-x_n^2)^2} \end{array} & \frac{(-1)^{N+m}}{2} \frac{x_m-2}{(1-x_m^2)(x_m+1)} \\ \hline \frac{(-1)^N}{3} (N^2-1) & (-1)^{N+n} \frac{2}{3} \frac{(2N^2+1)(1+x_n)-6}{(1+x_n)^2} & \frac{N^4-1}{15} \\ \hline \end{array}$$

Şekil 3.2. İkinci merteye Chebyshev sanki-spektral türev matrisi

Biz burada bu elemanların çıkarılışını tek tek vermeyeceğiz fakat örnek olarak $d_{00}^{(2)}$ elemanını hesaplayacağız. Bunun için (3.62) eşitliğini bir kez daha türevlendirerek

$$\phi_{N+1}'''(x) = (1 - x^2)T_N^{(4)}(x) - 6xT_N'''(x) - 6T_N''(x) \quad (3.75)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi (3.54) ifadesinden

$$d_{00}^{(2)} = \frac{1}{3} \frac{\phi'''(1)}{\phi'(1)} = \frac{T_N'''(1) + T_N''(1)}{T_N'(1)} \quad (3.76)$$

olur ve buradan (3.24), (3.29) ve (3.31) eşitlikleri kullanılarak

$$d_{00}^{(2)} = \frac{N^4 - 1}{15} \quad (3.77)$$

olarak bulunur.

Burada oluşturduğumuz birinci merteye türev matrisi MATLAB veya OCTAVE programlarında aşağıdaki şekilde ifade edilebilir. Dikkat edilirse bu program türev matrisinin köşegen elemanlarını (3.50) formülünden hesaplamak yerine

$$d_{nn}^{(1)} = - \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^N d_{mn}^{(1)} \quad (3.78)$$

ifadesinden hesaplanmaktadır. Yuvarlama hatalarının varlığında bu yöntemle oluşturulan türev matrisi daha kararlı olmaktadır. (Baltensperger ve Berrut, 1999; Baylis ve ark., 1994) (3.78) eşitliği şu şekilde elde edilebilir. $[1, 1, \dots, 1]^T$ verilerinin interpolantı $p(x) = 1$ sabit fonksiyonudur ve bütün x değerleri için $p'(x) = 0$ olduğundan $D^{(1)}$ türev matrisi $[1, 1, \dots, 1]^T$ vektörünü sıfır vektörüne götürmek zorundadır. Bu da (3.78) eşitliğini verir. Öte yandan ikinci merteye türev matrisi $D^{(2)}$ (3.55) eşitliğinden birinci merteye türev matrisinin karesi olarak hesaplanabilir. Bu tezde Chebyshev-Gauss-Lobatto noktalarını bulmak ve $D^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$ türev matrisini oluşturmak için **cheb.m** dosyasını kullanacağız.

cheb.m

```
% CHEB compute D = differentiation matrix, x = Chebyshev grid

function [D,x] = cheb(N)
if N ==0, D =0; x =1; return, end
x = cos(pi*(0:N)/N)';
c = [2; ones(N-1,1); 2].*(-1).^ (0:N)';
X = repmat(x,1,N+1);
dX = X-X';
D = (c*(1./c)') ./ (dX+(eye(N+1))); % off-diagonal entries
D = D - diag(sum(D')); % diagonal entries
```

3.4. Denklemin Sanki-Spektral Formülasyonu

Bu bölümde önce (1.10) ile verilen Mathieu denklemini daha kolay ele alınabilir bir forma dönüştürülecek. Ardından Chebyshev sanki-spektral yöntemi elde edilen yeni forma uygulanacaktır. (1.10) Mathieu denklemini $x \rightarrow x - \frac{\pi}{2}$ ötelemesi ile

$$-\frac{d^2y}{dx^2} - 2q \cos(2x)y = \lambda y, \quad y(\pm\pi/2) = 0 \quad (3.79)$$

biçiminde simetrik aralıkta da yazılabilir. Bağımsız değişken üzerinde

$$\xi = \cos(2x), \quad \xi \in (-1, 1) \quad (3.80)$$

dönüşümü ile

$$\begin{aligned} \cot x \frac{d}{dx} &\equiv -2(1 + \xi) \frac{d}{d\xi} \\ \frac{d^2}{dx^2} &\equiv 4(1 - \xi^2) \frac{d^2}{d\xi^2} - 4\xi \frac{d}{d\xi} \end{aligned} \quad (3.81)$$

operasyonel denklikleri elde edilir. Bu denkliklerden ikincisi (3.79) denkleminde yerine yazılırsa

$$(1 - \xi^2)y'' - \xi y' + \frac{1}{2}q\xi y = -\frac{1}{4}\lambda y, \quad y(-1) = 0 \quad (3.82)$$

denklemini elde edilir. Ardından bağımlı değişken üzerinde

$$y(\xi) = (1 + \xi)^{\frac{1}{2}}u(\xi) \quad (3.83)$$

dönüşümü ile

$$(1 - \xi^2)u'' + (1 - 2\xi)u' + \frac{1}{2}q\xi u = \mu u, \quad \mu = \frac{1}{4}(1 - \lambda) \quad (3.84)$$

denkleminde ulaşılır. Dikkat edilirse (3.83) dönüşümü ile (3.82) denklemindeki sınır koşulu otomatik olarak sağlandığından, (3.84) denkleminde herhangi bir sınır koşulu bulunmamaktadır. (3.83) ve (3.80) dönüşümleri ile orijinal değişkenlere dönülürse, (3.84) denkleminin, asıl denklemin çift özfonksiyonlarını

$$y_{2n}(x) = \cos x u_n(\cos 2x) \quad (3.85)$$

ve çift indisli özdeğerlerini

$$\lambda_{2n} = 1 - 4\mu_n \quad (3.86)$$

verdiği açıkça görülür. Öte yandan, tek özfonksiyonları ayrı bir şekilde ele alabilmek için (3.79) denklemine, ϕ çift bir fonksiyon olmak üzere

$$y(x) = \sin x \phi(x) \quad (3.87)$$

dönüşümü uygulanırsa

$$\phi'' + 2 \cot x \phi' + 2q \cos 2x \phi = -\lambda \phi, \quad \phi(\pm\pi/2) = 0 \quad (3.88)$$

denklemini elde edilir. Artık ϕ fonksiyonu çift olarak seçildiğinden, çift özfonksiyonlar için kullanılan (3.80) ve (3.83) dönüşümleri son denklem için de kullanılabilir. (3.80) dönüşümünün uygulanması ile

$$(1 - \xi^2)\phi'' - (1 + 2\xi)\phi' + \frac{1}{2}q\xi\phi = (1 - \lambda)\phi \quad (3.89)$$

denklemine ve (3.83) benzeri $\phi(\xi) = (1 + \xi)^{\frac{1}{2}}u(\xi)$ dönüşümünün uygulanmasıyla da

$$(1 - \xi^2)u'' - 3\xi u' + \frac{1}{2}q\xi u = \mu u, \quad \mu = \frac{1}{4}(4 - \lambda) \quad (3.90)$$

denklemine ulaşılır. Dönüşümlerle orijinal değişkenlere geri döndüğünde tek özfonksiyonlar

$$y_{2n+1}(x) = \sin x \cos x u_n(\cos 2x) \quad (3.91)$$

ve tek indisli özdeğerler

$$\lambda_{2n+1} = 4 - 4\mu_n \quad (3.92)$$

şeklinde elde edilir.

Tek ve çift indisli özçiftlerini ayrı ayrı ele almak, çözümleri belli bir doğrulukta elde etmek için gerekli matris boyutunu yarıya indirmektedir.

Şimdi, (3.40) ile verilen yaklaşık çözümün sırasıyla (3.84) ve (3.90) denklemlerinde yerine yazılmasından

$$\mathbf{B}_c = \text{diag}(1 - \xi_n^2)\mathbf{D}^{(2)} + \text{diag}(1 - 2\xi_n)\mathbf{D}^{(1)} + \text{diag}\left(\frac{1}{2}qx_n\right) \quad (3.93)$$

ve

$$\mathbf{B}_t = \text{diag}(1 - \xi_n^2)\mathbf{D}^{(2)} + \text{diag}(-3\xi_n)\mathbf{D}^{(1)} + \text{diag}\left(\frac{1}{2}qx_n\right) \quad (3.94)$$

olmak üzere

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \mu\mathbf{u} \quad (3.95)$$

ayrık sistemi elde edilir. Burada $\mathbf{D}^{(1)}$ ve $\mathbf{D}^{(2)}$ matrisleri sırasıyla birinci ve ikinci mertebeye Chebyshev sanki-spektral türev matrisleri olup elemanları (3.72) ve (3.74) eşitliklerinde verilmiştir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde Chebyshev Sanki-Spektral yöntemi kullanılarak Mathieu diferansiyel özdeğer probleminin yaklaşık çözümleri elde edilecektir. Bu denklemin çözümlerinin temel fonksiyonlar cinsinden bir temsili olmadığı için, bulunan sonuçlar literatürde var olan yaklaşık çözümlerle karşılaştırılarak yöntemin olumlu ve olumsuz yönleri tartışılacaktır.

Çizelge 4.1. $q = 1$ için Mathieu denkleminin ilk birkaç özdeğeri.

n	N	λ_n	(Ledoux ve ark., 2005)
0	6	-0.110 248 816 992	-0.110 248 816 992 09
1	7	3.917 024 772 998	3.917 024 772 998 47
2	6	9.047 739 259 809	9.047 739 259 809 38
3	6	16.032 970 081 406	16.032 970 081 405 79
4	7	25.020 840 823 290	25.020 840 823 289 76
5	7	36.014 289 910 628	36.014 289 910 628 22
6	8	49.010 418 249 424	49.010 418 249 423 86
7	8	64.007 937 189 250	66.007 937 189 249 87
8	9	81.006 250 326 632	81.006 250 326 632 57
9	9	100.005 050 675 159	100.005 050 675 159 45
10	10	121.004 166 761 269	121.004 166 761 269 12

Bütün çizelgelerde n özdeğer indeksini, N çizelgede verilen doğruluğu elde etmek için gerekli en küçük matris boyutunu ve λ Mathieu denkleminin özdeğerlerini göstermektedir. Çizelgelerdeki son sütunlar karşılaştırma amaçlı verilmiştir.

Çizelge 4.2. $q = 1$ için Mathieu denkleminin bazı büyük indisli özdeğerleri.

n	N	λ_n	(Ledoux ve ark., 2005)
100	53	10201.000 049 020	10201.000 049 020 267
200	103	40401.000 012 370	40401.000 012 376 229
500	253	2521001.000 001 990	2521001.000 001 992 01

Çizelge 4.1., Mathieu denkleminin $q = 1$ için ilk onbir özdeğerini listelemektedir. Dikkat edilirse oldukça küçük matris boyutlarında 13 – 15 basamak doğruluk elde edilmektedir. Yöntem sadece küçük indisli özdeğerler için değil, büyük indisli özdeğerler için de yüksek doğrulukta sonuçlar vermektedir. Çizelge 4.2., Mathieu denkleminin $q = 1$ için bazı büyük indisli özdeğerlerini içermektedir. Matris metotlarında λ_n özdeğerini

doğru veya yanlış, ekrana yazdırabilmek için matris boyutu N en az indeks değeri n kadar olmalıdır. Dikkat edilirse Çizelge 4.2.'de matris boyutu neredeyse özdeğer indeks değerinin yarısı kadardır.

Bunun sebebi ise denklemin bazı dönüşümler yardımıyla, tek ve çift indisli özçiftleri ayrı ayrı ele alabilen iki ayrı denkleme dönüştürülmesinden kaynaklanmaktadır. Bu durumda n . özdeğeri ekrana yazdırabilmek için gerekli en küçük matris boyutu $N = \frac{n}{2} + 1$ olur. Bu çalışmada, bu değeri sadece iki artırarak, yani $N = \frac{n}{2} + 3$ alarak, noktadan sonra 8 – 9 basamak doğruluk elde edilmiştir. Genellikle, matris metotlarında yaklaşık $2N/\pi$ kadar özdeğerin belli bir doğruluğa kadar elde edildiği hatırlanırsa (Boyd, 2005; Weideman ve Trefethen, 1988) yöntemin ne kadar etkili olduğu daha açık görülmektedir.

Çizelge 4.3. $q = 10^2$ için Mathieu denkleminin bazı özdeğerleri.

n	N	λ_n	(Ledoux ve ark., 2005)
0	14	-180.253 249 152 250	-180.253 249 152 253 55
1	15	-141.280 056 808 619	-141.280 056 808 618 64
2	15	-103.370 507 064 930	-103.370 507 064 927 96
3	16	-66.574 389 965 842	-66.574 389 965 844 45
4	17	-30.950 103 947 238	-30.950 103 947 234 39
5	18	3.432 563 359 324	3.432 563 359 325 90
6	18	36.488 219 665 731	36.488 219 665 732 29
7	18	68.109 193 500 159	68.109 193 500 163 39
8	19	98.155 153 397 326	98.155 153 397 326 15
9	19	126.442 980 323 036	126.442 980 323 040 42
10	19	152.777 761 733 867	152.777 761 733 867 01

Çizelge 4.3. $q = 10^2$ için Mathieu denkleminin ilk onbir özdeğerini listelemektedir. Oldukça küçük ($N = 14 - 19$) matris boyutlarında 13 – 15 basamak doğruluk elde edilmiştir.

Çizelge 4.4. $q = 10^2$ için Mathieu denkleminin bazı özdeğerleri.

n	N	λ_n	(Ledoux ve ark., 2005)
100	57	10201.490 210 811	10201.490 210 811 293
200	106	40401.123 762 613	40401.123 762 613 264
500	254	251001.019 920 320	251001.019 920 319 76

Çizelge 4.4. ise aynı q değeri için bazı yüksek indisli özdeğerleri içermektedir. Bu ise yöntemin sadece düşük indisli özdeğerler için değil, yüksek indisli özdeğerler için de iyi sonuç verdiğini göstermektedir.

Çizelge 4.5. $q = 10^4$ için Mathieu denkleminin ilk onbir özdeğerini içermektedir. Çizelge 4.3. ile karşılaştırılırsa, q değerinin büyümesi N matris boyutunun da artmasına sebep olmaktadır. Özel olarak $q = 100$ için λ_{10} değerini çizelgede verilen doğrulukta elde etmek için $N = 19$ iken, $q = 10^4$ iken λ_{10} değerini Çizelge 4.5.'de verilen doğrulukta elde etmek için gerekli matris boyutu $N = 56$ olmaktadır.

Çizelge 4.5. $q = 10^4$ için Mathieu denkleminin bazı özdeğerleri.

n	N	λ_n	(Ledoux ve ark., 2005)
0	39	-19800.250 313 678	-19800.250 313 678 396
1	41	-19401.252 830 234	-19401.252 830 234 724
2	42	-19003.261 035 980	-19003.261 035 976 768
3	45	-18606.278 776 913	-18606.278 776 913 539
4	48	-18210.309 948 445	-18210.309 948 445 429
5	49	-17815.358 496 419	-17815.358 496 419 274
6	51	-17421.428 418 215	-17421.428 418 214 986
7	52	-17028.523 763 865	-17028.523 763 864 923
8	54	-16636.648 637 207	-16636.648 637 207 334
9	55	-16245.807 197 075	-16245.807 197 075 153
10	56	-15856.003 658 521	-15856.003 658 521 551

Çizelge 4.6. ise $q = 10^4$ parametre değeri için bazı yüksek indisli özdeğerleri içermektedir. Yine Çizelge 4.3. ile karşılaştırıldığında N matris boyutundaki artış açıkça görülmektedir.

Çizelge 4.6. $q = 10^4$ için Mathieu denkleminin bazı yüksek indisli özdeğerleri.

n	N	λ_n	(Ledoux ve ark., 2005)
100	110	14142.729 835 080	14142.729 835 080 107
200	141	41663.743 094 080	41663.743 094 079 742
500	273	251200.302 140 360	251200.302 140 371 87

Çok büyük parametre değeri $q = 10^6$ için Mathieu denkleminin bazı özdeğerleri Çizelge 4.7.'de verilmiştir. Yine, q değeri büyüdükçe N matris boyutunun arttığı aşikardır. Fakat çok büyük q değerleri için bu artış dramatik olmaktadır. Bu da çok büyük q değerleri için yöntemi verimsizleştirmektedir. Bununla birlikte, çok büyük q değerleri için Mathieu denkleminin özdeğerleri bu çalışmada verilen yöntemle hala belli bir doğrulukta elde edilebilmektedir.

Son olarak, Çizelge 4.8. $q = 10^6$ için bazı yüksek indisli özdeğerleri listelemektedir. Matris boyutundaki hızlı artış yüksek indisli özdeğerlerde daha belirgin bir hal

almaktadır. Buna rağmen yöntem hala yüksek indisli özdeğerleri yüksek doğrulukta hesaplayabilmektedir.

Çizelge 4.7. $q = 10^6$ için Mathieu denkleminin bazı özdeğerleri.

n	N	λ_n	(Ledoux ve ark., 2005)
0	115	-1998000.250 031	-1998000.250 031 261 7
1	119	-1994001.250 281	-1994001.250 281 425 9
2	126	-1990003.251 096	-1990003.251 094 724 1
3	134	-1986006.252 847	-1986006.252 847 095 3
4	139	-1982010.255 916	-1982010.255 914 950 7
5	145	-1978015.260 675	-1978015.260 675 173 7
6	150	-1974021.267 506	-1974021.267 505 120 3
7	153	-1970028.276 782	-1970028.276 782 620 5
8	159	-1966036.288 886	-1966036.288 885 979 9
9	162	-1962045.304 193	-1962045.304 193 980 1
10	167	-1958055.323 086	-1958055.323 085 879 2

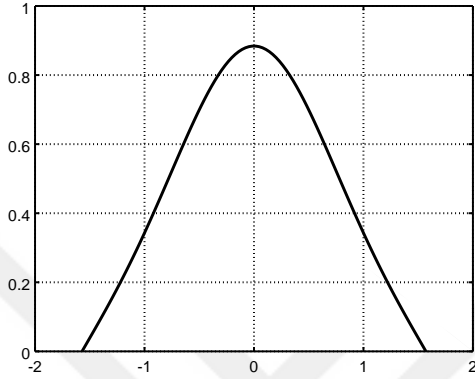
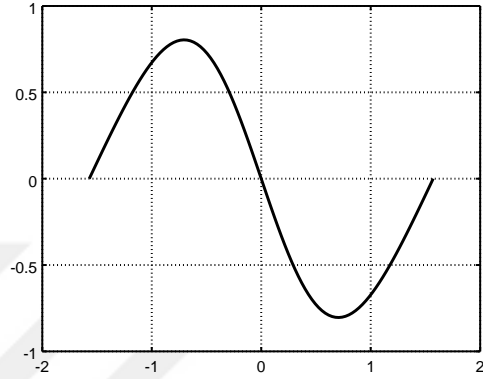
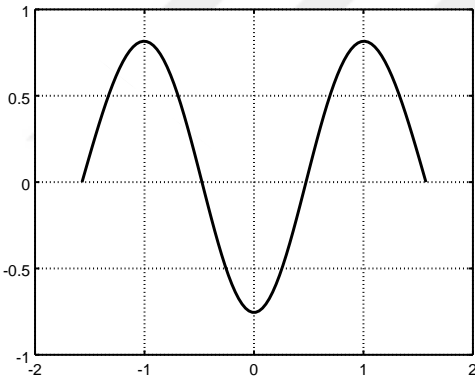
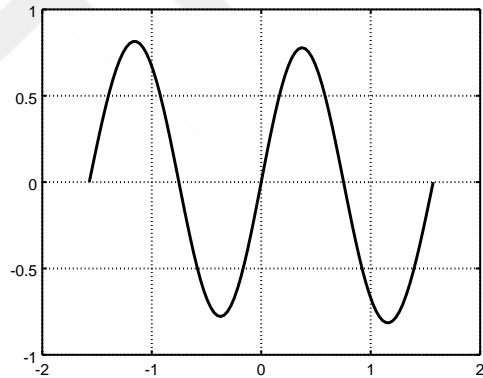
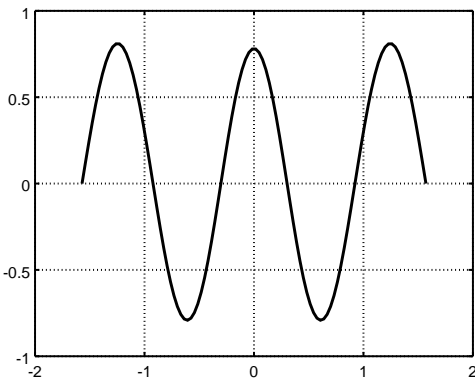
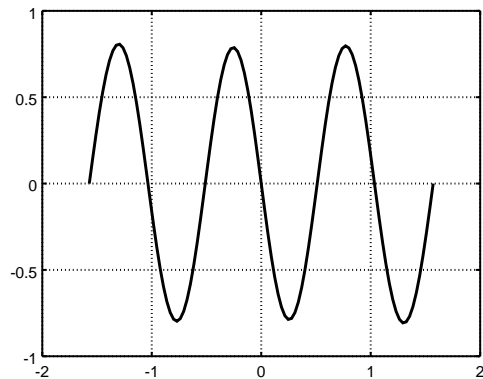
Şekil 4.1. ise $q = 1$ için Mathieu denkleminin bu çalışmada kullanılan yöntemle elde edilen ilk altı yaklaşık özfonksiyonunu içermektedir. Dikkat edilirse Sturm-Liouville teorisine uygun olarak $y_n(x)$ özfonksiyonunun $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığında n tane sıfırı olduğu açıkça görülmektedir. Mathieu fonksiyonları literatürde genellikle $L_2(0, 2\pi)$ normları π olacak şekilde normalize edilirler. Fakat bu çalışmada özfonksiyonlar $L_2(-\pi/2, \pi/2)$ normları 1 olacak şekilde normalize edilmiştir. Yani, bu çalışmada elde edilen özfonksiyonlar $\sqrt{\pi/2}$ ile genişletildiğinde $L_2(0, 2\pi)$ normları π olan periyodik Mathie fonksiyonları elde edilir.

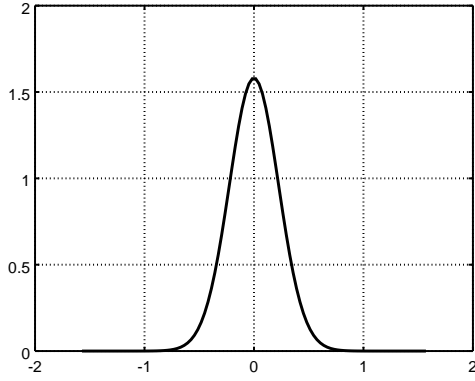
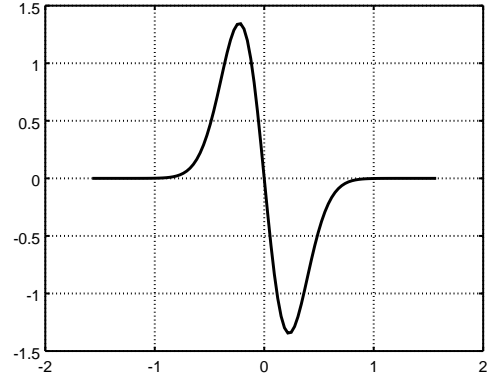
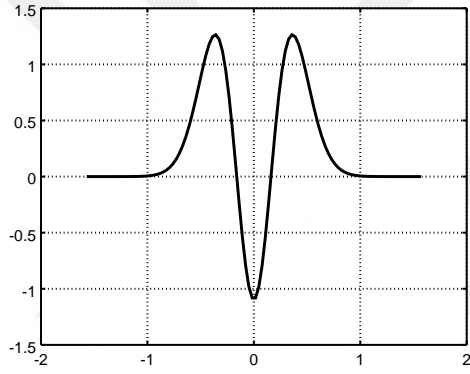
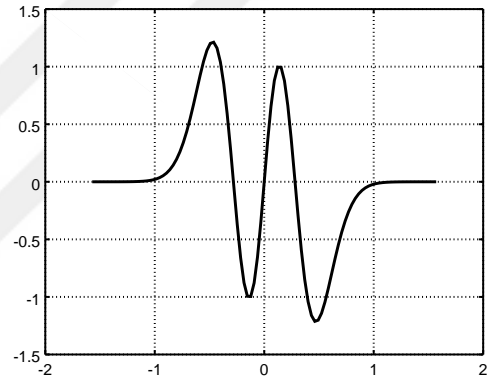
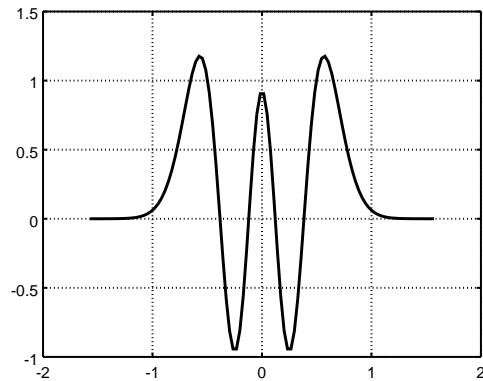
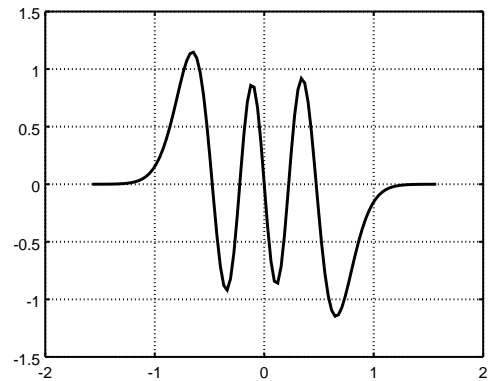
Çizelge 4.8. $q = 10^6$ için Mathieu denkleminin bazı yüksek indisli özdeğerleri.

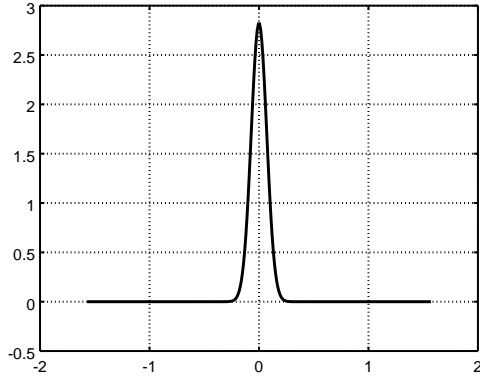
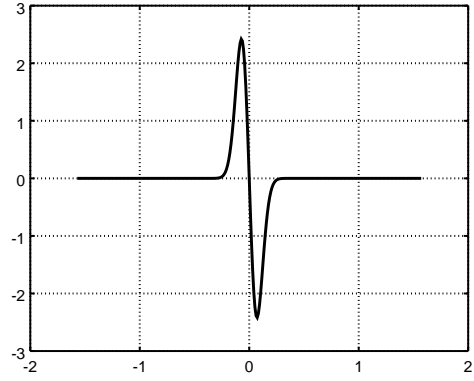
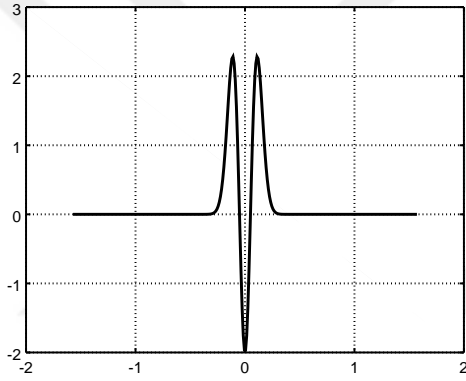
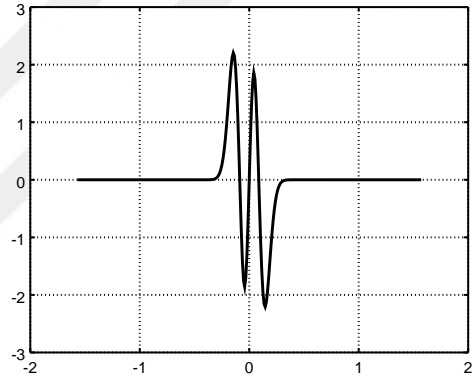
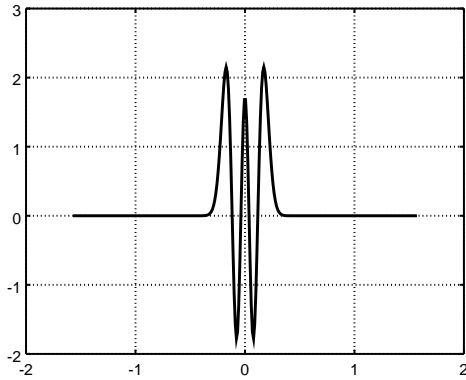
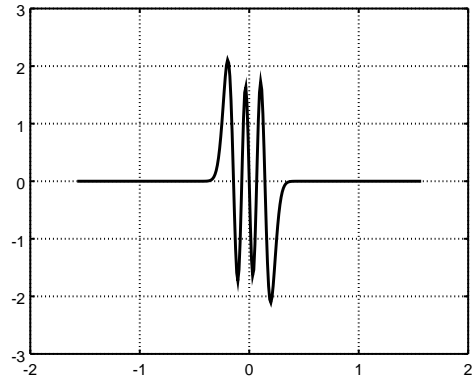
n	N	λ_n	(Ledoux ve ark., 2005)
100	362	-1603115.776 534	-1603115.776 533 968 3
200	484	-1218638.473 847	-1218638.473 847 030 9
500	724	-132647.388 340	-132647.388 340 274 10

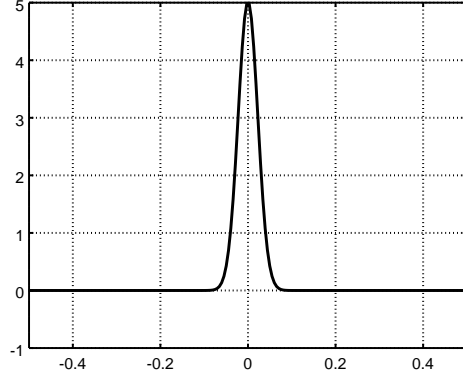
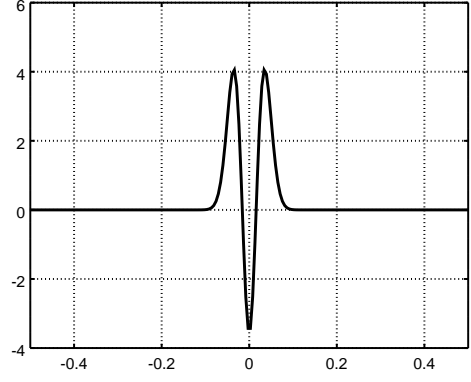
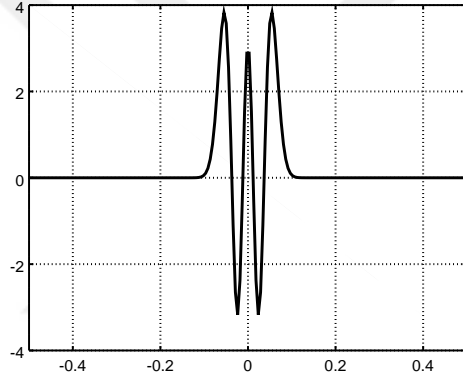
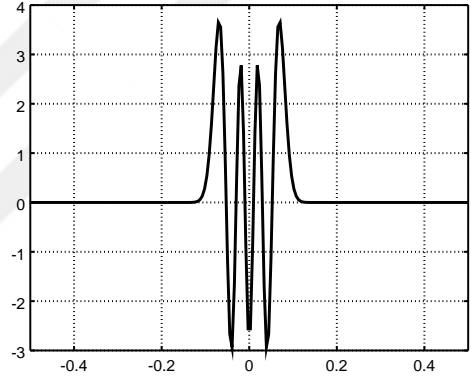
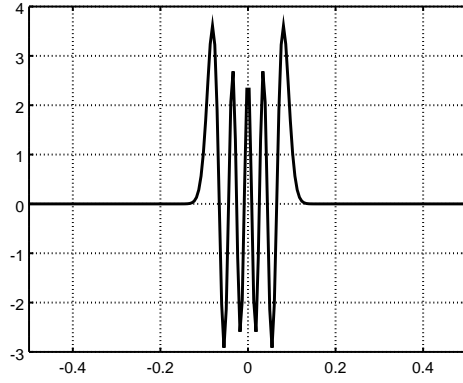
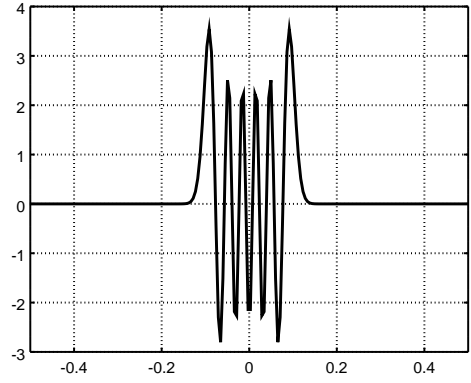
Şekil 4.2., 4.3. sırasıyla $q = 10^2$, $q = 10^4$ parametre değerleri için ilk altı yaklaşık özfonksiyonu içermektedir. Öte yandan, Şekil 4.4., $q = 10^6$ parametre değeri için ilk altı çift indisli yaklaşık özfonksiyonları içermektedir. Dikkat edilirse q değeri büyüdükçe özfonksiyonlar sıfırın komşuluğunda küçük bir aralığa sıkışmaktadır. Özelde $q = 10^6$ değeri için bu aralık yaklaşık olarak $(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$ şeklindedir.

Öte yandan (3.57) eşitliği ile verilen CGL noktaları $(-1, 1)$ aralığının uç noktaları etrafında daha yoğun, orijin etrafında ise daha seyrek bir dağılım göstermektedir. Bunun sonucunda ise bir çok nokta özfonksiyonun sıfıra çok yakın olduğu yerlerde gereksiz yere kullanılmaktadır. Parametre değeri büyüdükçe matris boyutundaki hızlı artışın sebebi işte budur.

(a) $y_0(x)$, $\lambda_0 = -0.110\ 248\ 816\ 992$ (b) $y_1(x)$, $\lambda_1 = 3.917\ 024\ 772\ 998$ (c) $y_2(x)$, $\lambda_2 = 9.047\ 739\ 259\ 809$ (d) $y_3(x)$, $\lambda_3 = 16.032\ 970\ 081\ 406$ (e) $y_4(x)$, $\lambda_4 = 25.020\ 840\ 823\ 290$ (f) $y_5(x)$, $\lambda_5 = 36.014\ 289\ 910\ 628$ Şekil 4.1. Mathieu denkleminin $q = 1$ için ilk altı özfonksiyonu.

(a) $y_0(x)$, $\lambda_0 = -180.253\ 249\ 152\ 25$ (b) $y_1(x)$, $\lambda_1 = -141.280\ 056\ 808\ 619$ (c) $y_2(x)$, $\lambda_2 = -103.370\ 507\ 064\ 930$ (d) $y_3(x)$, $\lambda_3 = -66.574\ 389\ 965\ 842$ (e) $y_4(x)$, $\lambda_4 = -30.950\ 103\ 947\ 238$ (f) $y_5(x)$, $\lambda_5 = 3.432\ 563\ 359\ 324$ Şekil 4.2. Mathieu denkleminin $q = 10^2$ için ilk altı özfonksiyonu.

(a) $y_0(x)$, $\lambda_0 = -19800.250\ 313\ 678$ (b) $y_1(x)$, $\lambda_1 = -19401.252\ 830\ 234$ (c) $y_2(x)$, $\lambda_2 = -19003.261\ 035\ 980$ (d) $y_3(x)$, $\lambda_3 = -18606.278\ 776\ 913$ (e) $y_4(x)$, $\lambda_4 = -18210.309\ 948\ 445$ (f) $y_5(x)$, $\lambda_5 = -17815.358\ 496\ 419$ Şekil 4.3. Mathieu denkleminin $q = 10^4$ için ilk altı özfonksiyonu.

(a) $y_0(x)$, $\lambda_0 = -1998000.250\ 031$ (b) $y_2(x)$, $\lambda_2 = -1990003.251\ 096$ (c) $y_4(x)$, $\lambda_4 = -1982010.255\ 916$ (d) $y_6(x)$, $\lambda_6 = -1974021.267\ 506$ (e) $y_0(x)$, $\lambda_0 = -1998000.250\ 031$ (f) $y_2(x)$, $\lambda_2 = -1990003.251\ 096$ Şekil 4.4. Mathieu denkleminin $q = 10^6$ için ilk altı çift özfonksiyonu.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tezde açısız Mathieu denkleminin $y(\pm\pi/2) = 0$ Dirichlet sınır koşulları altında özdeğer ve özfonksiyonları q parametresinin keyfi değerleri için Chebyshev sanki-spektral yöntemi ile yaklaşık olarak hesaplanmıştır. Farklı $1 \leq q \leq 10^6$ değerleri için yaklaşıksız özdeğerler çizelgelerde, özfonksiyonlar ise şekillerde sunulmuştur. Literatürde var olan sonuçlarla karşılaştırmalar yapılarak yöntemin etkinliği gözlemlenmiştir.

Parametre değeri büyüdükçe aynı doğruluğu elde etmek için gerekli matris boyutunun da arttığı, hatta çok büyük q değerleri için matris boyutunun dramatik olarak büyüdüğü gözlemlenmiştir. Bu da akıllara, $q = 10^{10}$ gibi çok büyük değerler için “daha verimli bir spektral şema kurulabilir mi?” sorusunu getirmektedir. Bunun ise ancak çok büyük q değerleri için dönüştürülmüş Chebyshev sanki-spektral yönteminin kullanımıyla (Bayliss and Turkel, 1992) veya özfonksiyonları daha iyi temsil edebilecek yeni baz fonksiyonlarının seçimiyle mümkün olabileceği düşünülmektedir. Bu yöndeki çalışmalarımız devam etmektedir ve sonuçlar gelecek çalışmalarımızda rapor edilecektir.

KAYNAKLAR

- ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I. A., 1970. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover, New York.
- ALHARGAN, F. A., 2001. Algorithms for the computation of all Mathieu functions of integer order. *ACM Trans. Math. Softw.*, 26(3):390–407.
- ALICI, H., SHEN, J., 2017. Highly Accurate Pseudospectral Approximations of the Prolate Spheroidal Wave Equation for Any Bandwidth Parameter and Zonal Wavenumber. *J. Sci. Comput.*, 71(2):804–821.
- ALICI, H. and TAŞELİ, H., 2005. The scaled Hermite-Weber basis in the spectral end pseudospectral pictures. *J. Math. Chem.*, 38:367-378.
- BALTENSPERGER, R. and BERRUT, J. P., 1999. The errors in calculating the pseudospectral differentiation matrices for Chebyshev-Gausso-Lobatto points. *Comput. Math. Appl.*, 37:41-88.
- BARAKAT, K.M.A. and ABODAYEH, T., 2005. The asimptotik iteration method for the angular spheroidal eigenvalue. *J.Phys. A Math.Gen.*, 38:1299–1304.
- BAYLISS, A. and TURKEL; E., 1992. Mappings and accuracy for Chebyshev pseudospectral approximations. *J. Comput. Phys.*, 101:349–359.
- BAYLISS, A., GOTTLIEB, D., MATKOWSY, B.J. and MINKOFF, M., 1989. An adaptive pseudospectralmethod for reaction dicusion problems. *J. Comput. Phys.*, 81:421–443.
- BAYLISS, A. CLASS, A. and MATKOWSKY, B. J., 1994. Roundoff error in computing derivatives using the Chebyshev differentiation matrix. *J. Comput. Phys.*, 116:380-383.
- BOYD, J.P., 2004. Prolate spheroidal wawefunctions as an alternative to Chebyshev and Legendre polynomials for spectral and pseudospectral algorithms. *J. Comput. Phys.*, 199:688-716.
- BOYD, J.P., 2005. Computation of grid points ,quadrature weights and derivates for spectral element methods using prolate spheroidal wawefunctions prolate elements. *ACM. Trans. Math. Softw.*, 31:149-165.
- CANUTO, C., HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A. and ZANG, T. A., 1988. Spectral Methods in Fluid Dynamics. Springer-Verlag, Berlin.
- CANUTO, C., HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A. and ZANG, T. A., 2006. Spectral Methods Fundamentals in Single Domains. Springer, Berlin Heidelberg.
- CLENSHAW, C.W., 1957. The numerical solution of lineer differential equations in Chebyshev series. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 53:134–149.
- COÏSSON, R., VERNIZZI, G. and YANG, X., 2009. Mathieu functions and numerical solutions of the Mathieu equation. *Proc. IEEE Int. Workshop Open-Source Softw. Sci. Comput.*, 3–10.
- COJOCARU, E., 2008. Mathieu functions computational toolbox implemented in Matlab. *ArXiv:0811.1970*.
- COURANT, R. and HILBERT, D., 1966. Method of Mathematical Physics. Vol. 1. Wiley Interscience.
- ERRICOLO, D., 2006. Algorithm 861: Fortran 90 subroutines for computing the expansion coefficients of Mathieu functions using Blanch’s algorithm. *ACM*

- Trans. Math. Softw., 32(4):622–634.
- ERRICOLO, D. and CARLUCCIO, G., 2013. Algorithm 934: Fortran 90 subroutines to compute Mathieu functions for complex values of the parameter. ACM Trans. Math. Softw., 40(1):19 pages. Article 8.
- FANG, Q., SHEN, J. and WANG, L-L. 2009. An efficient and accurate spectral method for acoustic scattering in elliptic domains. Numer. Math.-Theory ME, (2):258–274.
- FRAZER, R. A., JONES, W. P. and SKAN, S. W. 1937. Approximations to functions and to the solution of differential equations. Rep. and Mem., 1799.
- FROMAN, N., 1979. Dispersion relation for energy bands and energy gaps derived by the use of a phase-integral method, with an application to the Mathieu equation. J. Phys. A., 12:2355–2371.
- FUNARO, D., 1992. Polynomial Approximation of Differential Equations. Lecture Notes in Physics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- GOLUB, G.H. and WELSCH, J.H., 1969. Calculation of Gauss quadrature rules. Math. Comput., 23:221–230+s1–s10.
- GOTTLIEB, D. and ORSZAG, S.A., 1977. Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications. SIAM, Philadelphia.
- HAMID, A. K., 2005. Electromagnetic scattering from a dielectric coated conducting elliptic cylinder loading a semi-elliptic channel in a ground plane. J. of Electromagn. Waves and Appl., 19(2):257–269.
- HUANG, Z., XIAO, J. and BOYD, J.P., 2015. Adaptive radial basis function and hermite function pseudospectral methods for computing eigenvalues of the prolate spheroidal wave equation for very large bandwidth parameter. J. Comput. Phys., 281:269–284.
- KOSLOOF, D. and TAL-EZER, H., 1993. A modified Chephsev pseudospektral method with an $o(n^{-1})$ time step restriction. J. Comput. Phys., 104:457–469.
- LANCZOS, C. 1938. Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions. J. Math. Phys., 17:123–199.
- LEDOUX, V., VAN DAELE, M. and VANDEN BERGHE, G., 2005. MATSLISE: A matlab package for the numerical solution of Sturm-Liouville and Schrödinger equations. ACM Trans. Math. Softw., (31):532–554.
- MATHIEU, É., 1868. Mémoire sur le mouvement vibratoire d’une membrane de forme elliptique. J. Math. Pure Appl., 13:137–203.
- MATHEWS, J. and WALKER, R. L., 1970. Mathematical Methods of Physics (2 ed.). Benjamin/Cummings, Menlo Park, California.
- MCLANCHLAN, N. W., 1947. Theory and Application of the Mathieu Functions. Cambridge University Press.
- MEIXNER, J., SCHÄFKE, F. W. and WOLF, G., 1980. Mathieu Functions and Spheroidal Functions and Their Mathematical Foundations. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- NIKIFOROV, A.F. and UVAROV, V.B., 1988. Special Functions of Mathematical Physics. Birkhäuser, Basel.
- OGBURN, D., WATERS, C, SCIFFER, M. HOGAN J. end ABBOTT, P., 2014 A finite difference construction of the spheroidal wave function. Comput. Phys. Comm., 185:244-253.
- PICKET, T. J. and SHIRTS, R. B., 1991. Semiclassical quantization of vibrational systems using fast Fourier transform methods: Application to HDO stretches. J. Chem. Phys., 94(9):6036–6046.

- SCHMUTZHARD, S., HRYCAK, T. and FEICHTINGER, H., 2015. A numerical study of the Legendre-Galerkin method for the evaluation of the prolate spheroidal wavefunction. *Numer. Algorithms*, 68:691–710.
- SHIRTS, R. B., 1993. Algorithm 721 MTIEU1 and MTIEU2: Two subroutines to compute eigenvalues and solutions to Mathieu's differential equation for noninteger order. *ACM Trans. Math. Softw.*, 19(3):391–406.
- SHIRTS, R. B., 1993. The computation of eigenvalues and solutions of Mathieu's differential equation for noninteger order. *ACM Trans. Math. Softw.*, 19(3):377–390.
- SIPS, R. 1949. Représentation asymptotique des fonctions de Mathieu et des fonctions d'onde sphéroïdales. *Trans. Am. Math. Soc.*, 66:93–134.
- STRATTON, J. A., 1935. Spheroidal functions. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 21:51–56.
- TREFETHEN, L.N., 2000. *Spectral Methods in Matlab*. SIAM, Philadelphia.
- UZER, T. and MARCUS, R. A. 1983. Uniform semiclassical theory of avoided crossings. *J. Chem. Phys.*, 79(9):4412–4425.
- VILLADSEN, J. V. and STEWART, W. E., 1967. Solution of boundary value problems by orthogonal collocation. *Chem. Eng. Sci.*, 22:1483–1501.
- WEIDEMAN, J. A. C. and TREFETHEN, L. N., 1988. Eigenvalues of second-order spectral differentiation matrices. *SIAM J. Numer. Anal.*, 25:1279–1298.
- XIAO, H., ROKHLIN, V. and YARVIN, N., 2001. Prolate spheroidal wavefunctions, quadrature and interpolation. *Inverse Probl.*, 17:805–828.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Mehmet Salih DAL
Uyruğu : T.C
Doğum Yeri ve Tarihi: Şanlıurfa, 06.02.1987
Telefon : 0532 780 01 57
e-mail : mehmetalihdal@hotmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı	Bitirme Yılı
Lise	: Orhan Gazi Lisesi, Haliliye, Şanlıurfa	2004
Üniversite	: Adnan Menderes Üniversitesi, Merkez, Aydın	2008
Yüksek Lisans	: Fırat Üniversitesi, Merkez, Elazığ	2010

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2010 – 2013	Kozluk Lisesi	Matematik Öğretmeni
2013 – 2014	Akçakale Anadolu İmam Hatip Lisesi	Matematik Öğretmeni
2014 –	Şair Nabi Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni