T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HOMOJEN UZAYLAR VE LİE GRUPLARI

Yusuf DOĞAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2012

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZ

Yüksek Lisans Tezi

HOMOJEN UZAYLAR VE LİE GRUPLARI

Yusuf DOĞAN

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Abdullah YILDIRIM

Yıl:2012, Sayfa: 45

Bu tezde Homojen Uzaylar ve Lie Grupları ile ilgili yapılan çalışmalar incelenmiştir. İncelenen Homojen uzayların topolojik uzaylar ve manifoldlarla olan ilişkilerine değinilmiştir. Herhangi bir uzayın homojen olup olmadığı etkiler etkili olma ve geçişli olma özellikleri kullanılarak ispatlanmıştır. Ayrıca topolojik olarak açık veya kapalı olmanın homojenliği belirlediğine değinilmiştir. Tüm topolojik uzayların Homojen uzaylar olduğu ispatlanmıştır. Örneklerle homojen uzaylar ve homojen olmayan uzaylar kavratılmıştır. Lie gruplarının farklı tanımları yapılmış ve farklı örneklerle Lie grupları kavratılmıştır. Ayrıca Lie gruplarını alt grupları, Analitik Lie gruplarına ve Lie grupları çeşitlerine yer verilmiştir. Lie cebiri tanımlandı. Lie cebiri çeşitlerine değinilerek örneklerle açıklanmıştır. Lie grubu ile Lie cebiri arasındaki ilişki teoremle ispatlandı. Matris Lie grupları ve çatı demetleri kavratıldı.

ANAHTAR KELİMELER: Topolojik uzaylar, homojen uzaylar, lie grupları ve çeşitleri, lie cebiri.

ABSTRACT

Master Thesis

THE HOMOGENEOUS SPACES AND LIE GROUPS

Yusuf DOĞAN

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Abdullah YILDIRIM

Year:2012, Page: 45

In this thesis, the studies about Homogeneous Spaces and Lie Groups are examined.It is mentioned about the connection between Homogeneous Spaces and Topological Spaces and Manifolds. Whether any Space's being homogeneous or not is proved by using it's being effectine and transitive. And also, it is mentioned that Topological opennness or Topological Closure determines homogenity. It is proved that all topological Spaces are Homogeneous Spaces. Homogeneous and nohomogeneous Spaces are tought with examples.Different definitions are made and different examples are tought. And also Lie Group's Subtitles, Analitical Lie Groups and Lie Group kinds are mentioned. Lie Algebra is definited. Lie algebras are explained with different examples. The connection between Lie Group and Lie algebra are proved with theorems. Matris Lie Group and Frame Bundle are tought

KEY WORDS: topological spaces, homogeneous spaces, lie groups and types, the lie algebra space,

TEŞEKKÜR

Uzun süren çaba ve zahmetler sonucu hazırlamış olduğum bu tezde benden her türlü desteğini esirgemeyen sayın danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Abdullah YILDIRIM'a teşekkürü bir borç bilirim. Maddi ve manevi olarak her zaman yanımda olan anne- babam Cennet-Mehmet DOĞAN'a, tezimi yazarken yardım eden kardeşim Osman DOĞAN'a, yine bu yoğun çalışmalarım sürecinde bana manevi olarak destek olan eşim Sevda DOĞAN'a ayrıca çok değerli arkadaşlarım Yunus ÖZİŞÇİ ve Habib DEMİRTAŞ'a çok teşekkür ederim.

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$<,>$	: İç Çarpım
$\mathbb{C}$	: Kompleks Vektör Uzayı
S_1^2	: Lorentz Birim Küresi
$\|,\|$	: Norm
H_0^{2-}	: Past-Pointing Dual Hiperbolik Birim Küre
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar
V	: Reel Vektör Uzayı
$\wedge$	: Vektörel Çarpım
S^2	:E^3 de küre
O(n)	:ortogonal matrisler ailsi
D	:Riemann konneksiyonu
K	:Kesitsel eğrilik
g	:Metrik tensör
L_{V}	:Lie türevi
[,]	:Lie parantez operatörü
∇	:Gradiend fonksiyonu
M	:Diferensiyellenebilir reel manifold
$T_{M}(P)$	:$P \in M$ noktasındaki tanjant uzay

1 GİRİŞ

Bir M manifoldu üzerinde bir G grubu izometrik olarak etki ediyorsa, yani $G \subset Is(M)$ ise M ye bir Riemann G-manifoldu denir.Riemann G- manifoldların Diferansiyel geometrisi Palais ve Teng'in "Critacal point teori and supmanifold geometry" ve Berntvd'nin "Submanifolds and holonomy" isimli kitaplarında sistematik biçimde incelenmiştir.

Riemann G- manifoldları incelemede kullanılan en önemli araçlarda biri tubular normal komşulukların varlığı yardımıyla normal dilimlerin varlıgının elde edilmesidir. Burada dilim temsili tanımlanır ve dilim temsili bir yörüngenin tanjant düzlemine aşikar olarak etki eder. Ayrıca asli yörüngelerin varlığı gösterilebilir. Bir M riemann G- manifoldunun asli yörüngelerinin cümlesi M de açık ve yoğundur. Dolayısıyla sürekli bir fonksiyonun asli yörüngeler üzerindeki karekteri M nın tamamında aynıdır. Bu kolayliğin yanında asli yörüngelerin 1872 de Felix Klein'nin Erlange proğramını geliştirmesiyle Geometri aksimatik yapıdan kurtulup daha cebirsel bir tabana oturtulmuştur. Bu anlamda bir geometri, bir X homojen uzayı ve geometrinin simetri grubu olan bir Lie grubunun geçişli bir etkisi olarak tanımlanmaktadır.

Geometri bu etki yardımıyla elde edilen

$$g: \quad X \quad \longrightarrow \quad X$$

$g \in G$ döşümleri altında değişmez kalan özellikler ve bir $g \in G$ için $gH_1 = H_2$ olacak şekilde altcümleleri incelenir.

Modern Diferansiyel geometri açısından bir manifoldun dönüşüm gruplarını incelenmesi çok önemlidir. Palais tarafından verilen genel formülasyondan, bir Riemann manifoldun izometri grubunun bir Lie grubu olduğu ve bu grubun manifold üzerine diferansiyellenebilir olarak etki ettiği görülmektedir. Bir M Riemann manifoldunun $Is(M)$ izometri grubunun yapısı iyi bilinmektedir. Örneğin Riemann manifoldu kompakt olduğunda izometri grubuda kompakt olur.Amerikalı ve Fransız matematikçiden oluşan ekip, dört yıl çalışarak, Norveçli matematikçi

Sophus Lie'nin 1887'de bulduğu 'Lie grubu' adlı matematiksel yapının E8 adlı bölümünün sırrını çözmeyi başardı. Amerikan Matematik Enstitüsü Bilim Komisyonu Başkanı Prof. Peter Sarnak bu sayede, bilgisayarla karmaşık problemlerin çözülmesi için yapılan hesaplamaların kolaylaşacağını açıkladı.

E8'in gizeminin çözülmesini sağlamak için yapılan tüm hesaplamaların kâğıda yazılması halinde, Manhattan büyüklüğünde bir bölgenin yüzölçümüne denk geli yor. Araştırmada bilgisayarların sadece birkaç yıl önce geliştirilen hesaplama kapasitesinden faydalanıldı. Şifrenin çözülmesi için bilgisayarda yapılan hesaplamalar 60 gigabyte yer kaplıyor.

Bu çalışmada ise temel tanım ve teoremler ışığında Homojen uzaylar ve bir uzayın homojenliğinin gösterilmesi konusuna yer verildi. Homojen uzayların topolojik uzaylarla olan bağlantısı gösterildi. Lie gruplarının tanım ve çeşitleri ile Lie cebiri konuları ayrıntılı şekilde irdelendi. Lie grubu ile Lie cebiri arasındaki bağlantılar gözler önüne serildi. Ayrıca Matris Lie Grubu ve Çatı Demetleri konusu örnek ve teoremlerle açıklandı.

1.1 Ana Kavramlar

Tanım 1.1.1. G, boştan farklı bir cümle ve

$$\bullet : \quad G \times G \quad \longrightarrow \quad G$$

de bir ikili işlem olsun. Eğer bu ikili işlem $a, b \in G$

$$a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$$

özelliğini sağlarsa G ye **yarıgrup** denir(Adams 1996).

Tanım 1.1.2. G, boştan farklı bir cümle olsun.

$$\begin{array}{rccc} \bullet : & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (x,y) & \longrightarrow & x \bullet y \end{array}$$

işlemi aşağıdaki özellikleri sağlarsa $(G, \bullet)$ ikilisine bir **grup** denir.

i $\forall x, y, z \in G$ için $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$,

ii $\forall x \in G$ için $e \bullet x = x \bullet e = x$ olacak şekilde G de bir tek e birim elemanı vardır.

iii $\forall x \in G$ için $x \bullet x' = x' \bullet x = e$ olacak şekilde G de bir tek x' inversi vardır(Adams 1996).

Tanım 1.1.3. $(G, \bullet)$ bir grup olsun. G grubu $\bullet$ işlemine göre değişimli ise, yani $\forall x, y \in G$ için $x \bullet y = y \bullet x$ sağlanıyorsa, G ye **değişimli grup** denir.

Tanım 1.1.4. $(G, \bullet)$ bir grup ve $H \neq \varnothing$, $H \subseteq G$ olsun. $(H, \bullet)$ bir grup ise bu gruba $(G, \bullet)$ grubunun bir **altgrubu** denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.5. $(G, \bullet)$ bir grup, $H \leq G$ olsun. $\forall x \in G$, $\forall h \in H$ için $xhx' \in H$ önermesi doğru ise H altgrubuna G grubunun **normal altgrubu** denir ve $H \subset G$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.6. $(G, \bullet)$ bir grup ve e, G grubunun $\bullet$ işlemine göre birim elemanı olsun. Grubun $\{e\}$ ve kendisinden başka normal alt grubu yoksa G grubuna **basit grup** denir(Baez 2002).

Tanım 1.1.7. $(G, \bullet)$, $(H, \circ)$ iki grup olsun

$$\begin{array}{rccll} f: & G & \longrightarrow & H & \\ & (a \bullet b) & \longrightarrow & f(a \bullet b) = & f(a) \circ f(b) \end{array}$$

özelliğini sağlayan f fonksiyonuna G den H bir **homomorfizm** denir(Balcı 1978) Eğer $(G, +)$ ve $(H, +)$ birer toplam grubu iseler yukarıdaki tanım $\forall a, b \in G$ için

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$

şeklini alır(Hacısalihoğlu 1980).

Tanım 1.1.8. $f : G \longrightarrow H$ homomorfizmi $1:1$ ve örten ise bu homomorfizme **izomorfizm** denir(Balcı 1978).

Tanım 1.1.9. $f : G \longrightarrow G$ izomorfizmine G nin **otomorfizmi** denir.

Tanım 1.1.10. G grubunun keyfi ve sabit bir elemanı a olsun. a ya göre G nin

$$\begin{array}{rccl} f_a: & G & \longrightarrow & G \\ & x & \longrightarrow & f_a(x) = axa^{-1} \end{array}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona G nin **iç otomorfizmi** denir(Balcı 1982).

Tanım 1.1.11. Boş olmayan bir cümle A ve bir K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f: A \times A \to V$$

fonsiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş bir **afin uzay** denir(Hacısalihoğlu 1980).

i $\forall\ P, Q, R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$

ii $\forall\ P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P,Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

Tanım 1.1.12. Bir reel afin uzat A ve A ile birleşen vektör uzayı V olsun.V de bir iç çarpım işlemi olarak

$$\begin{array}{rccl} \langle , \rangle: & V \times V & \to & R \\ & (x,y) & \to & \langle x,y \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} xi.yi \quad \begin{array}{c} x = (x_1, x_2, ...x_n) \\ y = (y_1, y_2.....y_n) \end{array} \end{array}$$

öklid iç çarpımn tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı kavramları tanımlanabilir. Böylece A afin uzayıda yeni bir ad olarak **öklid uzay**ı adını alır(Hacısalihoğlu 1980).

Tanım 1.1.13.

$$\begin{array}{rccl} d: & E^n \times E^n & \to & R \\ & (x,y) & \to & d(x,y) = \|xy\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_{i-}x_{i})^2} \end{array}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna E^n öklid uzayında **uzaklık fonksiyonu** ve $d(x,y)$ reel sayısına da $x, y \in E^n$ noktaları arasındaki **uzaklık** denir.

Tanım 1.1.14. X boş olmayan bir cümle ve τ ailesi de $P(X)$ kuvvet cümlesinin herhangi bir alt cümlesi olsun. Eğer $\tau \subset P(X)$ aşağıdaki özellikleri sağlarsa,τ ya X üzerinde bir topoloji,(X,τ) ikilisine bir **topolojik uzay** denir(Hacısalihoğlu 1980).

i $X, \varnothing \in \tau$,

ii τ da alınan her sayıda elemanların birleşimi τ ya aittir; yani I herhangi bir indis cümlesi olmak üzere $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \tau$ için τ dır

iii τ da alınan her sonlu sayıda elemanlarının kesişimi τ ya aittir; yani, I sonlu indis cümlesi olmak üzere $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \in \tau$ için $\in \tau$ dır.

Örnek 1.1.1. E^n öklid uzayı bir topolojik uzaydır. Çünkü üzerinde tanımlı olan metrik ile daima bir τ topolojisine sahiptir.

Tanım 1.1.15. Bir X cümlesi üzerindeki bir topolojik yapı τ olsun. τ nun her bir elemanına X bir **açık alt cümlesi** denir.

Tanım 1.1.16. Bir topolojik uzay X olsun. Eğer X boş olmayan farklı iki açık alt cümlenin birleşimi olarak yazılamıyor ise X e **irtibatlı topolojik uzay** denir.
(Hacısalihoğlu 1980)

Tanım 1.1 .17. Bir X cümlesi topolojik grup ve aynı zaman da irtibatlı topolojik uzay ise X e **irtibatlı topolojik grup** denir.

Örnek 1.1.2. R reel sayılar cümlesibir irtibatlı topolojik uzay ve bir irtibatlı topolojik gruptur.

Teorem 1.1.1. Bir irtibatlı topolojik uzay X olsun. X in kendisinden ve boş cümleden başka hem açık hem kapalı olan başka bir açık alt cümlesi yoktur.

Tanım 1.1.19. (X,τ) bir topolojik uzay ve X in her bir alt kümesi Y olsun. $\forall A_i \in \tau$ için $Y \bigcap A_i$ cümlesi Y de açık küme olarak tanımlanıyor.
Y de böyle tanımlanan topolojiye X de **indirgenmiş relatif topoloji** denir (Hacısalihoğlu 1980).
Tanım 1.1.20. X bir topolojik uzay olsun. Farklı iki $p, q \in X$ noktalarının

X deki açık komşuları, sırası ile,U ve V olsun. Eğer $U \cap V = \varnothing$ olabilecek U ve V şeklinde seçmek mümkün ise X topolojik uzayına bir **Hausdorff uzayı** denir(Hacısalihoğlu 1980).

Örnek 1.1.3. E^n ,n-boyutlu öklit uzayı,bir hausdorff uzayıdır.

Tanım 1.1.21. X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. Bir $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu için,

i f sürekli,
ii f^{-1} mevcut,
iii f^{-1}sürekli,

ise f fonksiyonuna X den Y ye bir **homeomorfizm (topolojik dönüşüm)** denir(Hacısalihoğlu1980).

Tanım 1.1.22. Bir $(G, \bullet)$ grubu ve bir (X, τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa (G, X, τ) üçlüsüne bir **topolojik grup** denir.

i X in noktalarının cümlesi ile G nin elemanlarının cümlesi aynıdır,
ii

$$\begin{array}{rccc} \bullet : & X \times X & \longrightarrow & X \\ & (a, b) & \longrightarrow & a \bullet b^{-1} \end{array}$$

İşlemi süreklidir. Burada G ye topolojik uzayın **temel grubu** ve X e de topolojik uzayın **temel uzayı** denir(Balcı 1998).

Tanım 1.1.23. M bir topolojik uzay olsun. Eğer

i M bir Hausdorff uzaydır,
ii M nin her bir açık alt cümlesi E^n veya E^n nin açık alt cümlesine homeomorftur,
iii M sayılabilir çoklukta alt cümlelerle örtülebilir,

önermeleri sağlanıyorsa M ye n-boyutlu **topolojik manifold** denir (Hacısalihoğlu1980).

Örnek 1.1.4. E^n in kendisi bir topolojik manifolddur.

Örnek 1.1.5. R reel sayılar cümlesi üzerinde mxn tipindeki bütün matrislerin cümlesi R_n^m olsun.

$$\begin{array}{rccc} f: & R_n^m & \rightarrow & E^{mn} \\ & [a_{ij}] & \rightarrow & (a_{11}, a_{12}, ...a_{m1}, ...a_{mn}) \end{array}$$

döşümü birebir ve örtendir. Bu birebir tekabülden dolayı R_n^m bir mn-manifold dur.

Tanım 1.1.24. M bir C^∞ manifold olsun.M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarını halkası $C^\infty(M, R)$ olmak üzere

$$\langle , \rangle : \quad \chi(M)x\chi(M) \quad \rightarrow \quad C^\infty(M, R)$$

i Simetrik
$\forall p \in M, X_p, Y_p \in \chi(M)$ için

$$\langle X_p, Y_p\rangle = \langle Y_p, X_p\rangle$$

ii Bilineer
$\forall p \in M, a, b \in R, X_p, Y_p \in W_p, Z_p \in \chi(M)$ için

$$\langle aX_p + bY_p, Z_p\rangle = a\langle X_p, Y_p\rangle + b\langle Y_p, Z_p\rangle$$

ve

$$\langle X_p, aW_p + bZ_p\rangle = a\langle X_p, W_p\rangle + b\langle X_p, Z_p\rangle$$

iii Pozitif tanımlıdır;
a $X_p \neq 0$ için $\langle X_p, X_p\rangle$‹0
b $X_p = 0$ ise $\langle X_p, X_p\rangle = 0$
özelikleri sağlanıyorsa $\langle , \rangle$ ye M üzerinde **Riemann iç çarpımı** denir. M üzerindeki bu Riemann iç çarpımın tanımlanması ile elde edilen
$(M, \langle , \rangle)$ ikilisine **Riemann manimoldu** denir(Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 1.1.25. M bir C^∞ manifold olmak üzere,

$$\langle , \rangle : \quad \chi(M)x\chi(M) \quad \rightarrow \quad C^\infty(M, R)$$

şeklinde tanımlı simetrik.bilineer.non dejenere fonksiyona M üzerinde **metrik tensör** denir. Bu metrik tensörün indeksine M **manifoldunun indeksi** denir ve ν ile gösterilir.

Tanım 1.1.26. **boyM = n** olma üzere $(M, \langle , \rangle)$ çifti yarı-Riemann manifoldu olsun.Eğer $n \geq 2$ ve $\nu = 1$ ise $(M, \langle , \rangle)$ çiftine bir **Lorenz manifoldu** denir(Grauret 1976).

Tanım 1.1.27. E^n nin iki alt cümlesi U ve V olsun. Bir $\psi : U \to V$ fonksiyonu için;

i $\psi \in C^k(U, V)$,
ii $\psi^{-1} : V \to U, \psi^{-1} \in C^k(V, U)$,

önermeleri sağlanıyorsa ψ ye C^k sınıfından **diffeomorfizm** denir(Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 1.1.28. M bir topolojik manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından differensiyellenebilir yapı tanımlanırsa M ye C^k sınıfından **differensiyellenebilir manifold** denir.

Tanım 1.1.29. M $n-$boyutlu bir manifold ve M nin $k-$boyutlu alt manifoldu $\overline{M}$ olmak üzere $\forall p \in M$ noktası için M de bir U ve $\overline{M}$ de bir $\overline{U}$ koordinat komşuluğu var ve

$$U = \{m \in U' | x'_{k+1}(m) = \ldots = x_{n'}(m) = 0\}$$

ise $\overline{M}$ ye M nin bir **alt manifoldu** denir(Hacısalihoğlu 1980).

Tanım 1.1.30. $(V, \oplus, F, +, \cdot, \odot)$olmak üzere V cümlesi F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun ve $\circledast$ işlemi

$$\begin{array}{rccc} \circledast : & VxV & \to & V \\ & (a,b) & \to & a \circledast b \end{array}$$

olmak üzere

i $\forall a, b \in V$ ve $\forall \theta \in F$ için $(\theta \odot a) \circledast b = \theta \odot (a \circledast b)$
ii $\forall a, b, c \in V$ için $(a \oplus b) \circledast c = (a \circledast c) \oplus (b \circledast c)$
iii $\forall a, b, c \in V$ için $a \circledast (b \oplus c) = (a \circledast b) \oplus (a \circledast c)$ özellikleri sağlanıyorsa

$(V, \oplus, F, +, \cdot, \odot)$ yapısına **cebir** denir.
Eğer $\forall a, b, c \in V$ için

i $a \circledast (b \circledast c) = (a \circledast b) \circledast c$ sağlanırsa V ye **birleşimli cebir**

ii $c \circledast b = b \circledast c$ sağlanıyorsa V ye **değişimli cebir**

iii $c \circledast e = e \circledast c = c$ sağlanıyorsa V ye **birim cebir** denir.

Tanım 1.1.31. $T_A(P)$ tanjant vektörlerinin cümlesi olsun.

$$\oplus : \; T_A(P) \times T_A(P) \longrightarrow T_A(P)$$

ve

$$\odot : \; \mathbb{R} \times T_A(P) \longrightarrow T_A(P)$$

olmak üzere $\{T_A(P), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ vektör uzayına, A afin uzayının $P \in A$ noktasındaki **tanjant uzayı** denir(Hacısalihoğlu 1980).

Tanım 1.1.32. Bir M diferensiyellenebilir manifoldu ve bir G grubu verilmiş olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanırsa (M, G) ikilisine bir **Lie grubu** denir.

i M nin noktaları G'nin elemanları ile çakışır.

ii

$$\begin{array}{rccc} G_\alpha : & GxG & \longrightarrow & G \\ & (a,b) & \longrightarrow & ab^{-1} \end{array}$$

dönüşümü diferensiyellebilirdir(Hacısalihoğlu 1980).

Tanım 1.1.33. V bir $\mathbb{R}$ cismi üzerinde vektör ve $[,] : V \times V \longrightarrow V$ dönüşümü de

i Bilineeri

ii $\forall X, Y \in V$ için $[X, Y] = -[Y, X]$,

iii $\forall X, Y, Z \in V$ için $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

şartları sağlıyor ise $[,]$ dönüşümüne V üstünde bir **Lie (parantez) operatörü** denir(Hacısalihoğlu 1980).

Teorem 1.1.2. $\chi(E^n)$ üstünde $[,]$ lie oparatörü verilsin.bu durumda
$\forall X, Y \in \chi(E^n)$ ve $\forall f, g \in \mathbb{C}^\infty(E^n, R)$ için

i $[X, Y](fg) = f [X, Y](g) + g [X, Y](f)$

ii $[fX, gY] = f(Xg)Y - g(Yf)X + fg\,[X, Y]$

iii $[X, X] = 0$

Tanım 1.1.34. G bir Lie grubu olsun.Eğer G nın elemanları kapalı va sınırlı bir aralıkta ise G ye **kompakt lie grubu** denir.

Tanım 1.1.35. G bir Lie grubu olsun.

$$\alpha : (R, +) \to G$$

Lie grub homomorfizmine G ni **1- parametreli alt grubu** denir.

Tanım 1.1.36. H, G grubunun bir alt cümlesi olsun.Eğer H da alınan her iki eleman sürekli bir eğri ile birleştirilebilirse H'a **irtibatlıdır** denir.

Tanım.1.1.37. Bir Lie grubunun bütün irtibatlı alt cümleleri tarafından kapsanan elemanına **Lie grubunun bileşeni** denir.

Tanım 1.1.38. Karakteristiği sıfır olan bir $\mathbb{R}$ cismi üzerinde Lie operatörü ile tanımlanan lineer bir uzaya **Lie cebiri** denir(Adams 1996).

Tanım 1.1.39. g bir lie cebiri,b de g nin bir alt vektör uzayı olsun.$X \in b$ ve $Y \in g$ olmak üzere $[X, Y] \in b$ bağlanıyor ise b ye g nin **ideali** denir.

Tanım 1.1.40. G ve H birer Lie grup olmak üzere, eğer

$$\varphi : G \longrightarrow H$$

dönüşümü hem differensiyellenebilir hem de temel grupların bir grup homomorfizmi ise φ ye bir **Lie grup homomorfizmi** denir(Hacısalihoğlu 1980).

2 ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Tanım 2.1. V ve W aynı bir F cismi üzerinde tanımlanan iki vektör uzayı olsun. Bir

$$A : V \longrightarrow W$$

dönüşümü $\forall \alpha, \beta \in V, \forall c \in F$ için

- $A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta)$
- $A(c\alpha) = cA(\alpha)$

aksiyomlarını sağlanıyor ise bu dönüşüme **lineerdir (homomorfizim)** denir (Hacısalihoğlu 2000).

Örnek 2.1.

$$\begin{array}{rccl} A: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & X = (x_1, x_2) & \longrightarrow & A(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1 x_2) \end{array}$$

Tanım 2.2. V,$W\,(= V)$ aynı bir F cismi üzerinde tanımlanan iki vektör uzayı olsun. Bir

$$A : V \xrightarrow{lineer} V$$

dönüşümüne **lineer endomorfizim** denir.

Tanım 2.3. V,W aynı bir F cismi üzerinde tanımlanan iki vektör uzayı olsun. Bir

$$A : V \xrightarrow[\ddot{O}rten]{lineer} W$$

dönüşümüne **lineer epimorfizim** denir.

Örnek 2.2. Düzlemde sabit açılı dönme bir epimorfizimdir.

$$\begin{array}{rccl} A: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & X = (x_1, x_2) & \longrightarrow & A(x_1, x_2) = (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta, x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta) \end{array}$$

Tanım 2.4. V,W aynı bir F cismi üzerinde tanımlanan iki vektör uzayı olsun. Bir

$$A: \ V \ \underset{\substack{1:! \\ \text{Örten}}}{\xrightarrow{lineer}} \ W$$

dönüşümüne **lineer izomorfizim** denir(Hacısalihoğlu 1980).

Örnek 2.3. Ortogonal bazları ortonal bazlara dönüştüren dönüşüm bir lineer izomorfizimdir.

Tanım 2.5. V bir F cismi üzerinde tanımlanan vektör uzayı olsun. Bir

$$A: \ V \ \underset{\substack{1:! \\ \text{Örten}}}{\xrightarrow{lineer}} \ V$$

dönüşümüne **lineer otomorfizim** denir.

Tanım 2.6. V ve W aynı bir F cismi üzerinde tanımlanan iki vektör uzayı olsun.

$$Hom\,(V,W) = \left\{A : A : V \xrightarrow{lineer} W\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1. Her lineer dönüşümüne karşilik bir matris ve her matrise karşilik da bir lineer dönüşüm vardir.

Tanım 2.7. F üzerindeki bir vektör uzayı için $Hom\,(V,V)$ cümlesi V nin endomorfizimler cümlesi olarak bilinir. Bu uzay $gl\,(V)$ ile gösterilir.

Tanım2.8. Bir F cismi üzerinde bir V vektör uzayının otomorfizimlerinin cümlesi çarpma işlemine göre bir gruptur. Bu gruba **lineer grup** denir ve $GL(n,F)$ ile gösterilir; burada $n = boyV$ dir

Tanım 2.9. Ortogonal matrisler cümlesi

$$O\,(n) = \left\{A \in GL(n,F) : AA^T = I_n \text{ veya } \det A = \pm 1\right\}$$

ile gösterilir.

Örnek 2.4. Düzlemde yansıma matrisi bir ortogonal matristir

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Tanım 2.10. Özel ortogonal matrisler cümlesi

$$SO(n) = \left\{ A \in O(n) : AA^T = I_n \text{ veya } \det A = 1 \right\}$$

ile gösterilir.

Örnek 2.5. Düzlemde sabit açılı dönme matrisi bir özel ortogonal matristir

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Örnek 2.6. Lie grubu teorisi, küre gibi simetrik objelere dayanıyor. E8, 248 boyutlu bir matematiksel yapı.Lie gruplarının doğadaki simetriyi anlayabilmemiz için yaratılan soyut matematiksel nesnelerdir klasik Lie grupları hakkında hemen her şeyin bilinmemekte, istisnai Lie grupları hakkında ise hala birçok bilinmeyen bulunmaktadır.Norveçli Sophus Lie, cebirsel değişmezler ve diferansiyel denklemler kuramlarına önemli katkıda bulunmuştu.

E8 grubunun temsilleri bilinmezken şimdi bilinmektedir. Bu kadar çok kaliteli matematikçinin uzun süre çalışması matematikte enderdir. Buluşun henüz kavramsal değeri olmasa da kuramsal fizikte önemli uygulamaları olacağı düşünülmektedir Doğanın temel güçlerinin ortak kuramını oluşturmayı amaçlayan 'birleştirilmiş alan kuramı' gibi... Bunun da teknik ve hatta felsefi ve kozmolojik sonuçları olabilir. Zaman gösterecektir.

3 MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Materyal

Bu çalışmada incelediğimiz kaynaklar; internet üzerinden veya kütüphanelerden ulaştığımız makale veya kitaplardan elde edilmiştir.

3.2 Yöntem

Elde edilen çalışmalarda temel tanım ve teoremler ışığında homojen uzaylar incelenmiş. Homojen uzayların topolojik uzaylarla olan ilişkileri gözler önüne serilmiştir. Tüm bunlar yapılırken karşılaştırma yönteminden yararlanılmıştır. Ayrıca Lie grupları ve Lie cebiri de araştırılarak bunlar arasındaki bağıntıya değinil miştir. Örnekleme yöntemi ile var olan ilişkiler ispatlanmıştır.

4 ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1 Homojen Uzaylar

Tanım 4.1.1. M bir topolojik uzay ve G de bir topolojik grup olsun.

$$\begin{array}{rlll} \gamma: & G \times M & \longrightarrow & M \\ & (g, X) & \longrightarrow & \gamma(g, X) = \gamma_g(X) = gX \end{array}$$

olarak tanımlanan γ dönüşümünde G , M ye **etki(action)** ediyor denir. Bu anlamda G cümlesine **etkiler(action)** in cümlesi de denir(Güner 1996).

Tanım 4.1.2. G nin birim elemanı e ve $\forall X \in M$ için;

$$\gamma(e, X) = \gamma_e(X) = eX = X$$

ise G, M üzerinde **etkilidir** denir(Güner 1996).

Tanım 4.1.3. Eğer herhangi iki X , $Y \in M$ için $Y = gX$ olacak şekilde bir $g \in G$ bulunabiliyor ise G ye M üzerinde **geçişlidir** denir(Güner 1996).

Tanım 4.1.4. Bir M manifoldu ile bir G topolojik dönüşümler grubu verilmiş olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa G ye M üzerinde bir **topolojik dönüşümler grubu** denir(Oshima 2000).

i

$$\begin{array}{rlll} \gamma: & G \times M & \longrightarrow & M \\ & (g, X) & \longrightarrow & \gamma(g, X) = gX \end{array}$$

ii $(g_1 g_2)X = g_1(g_2 X)$, $\forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall X \in M$

iii G nin birim elemanı e olmak üzere $\forall X \in M$ için $eX = X$

Tanım 4.1.5. M bir manifold ve G de bir grup olsun. Şayet G, M üzerinde etkili ve geçişli ise M ye G grubunun **homogen uzayı** denir(Oshima 2000).

Örnek 4.1.1. $O\ (n) = \{A : A \in \mathbb{R}_n^n,\ detA = 1\}$ ve

$$S^{n-1} = \left\{ \overrightarrow{X} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{E}^n : \left\| \overrightarrow{X} \right\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1 \right\}$$

olmak üzere $S^{n-1}, \{O(n), \circ\}$ grubunun homogen uzayıdır. Gerçekten;

i özelik sağlanır: $A \in O(n)$ ve $\forall X \in S^{n-1}$ için

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & O(n) \times S^{n-1} & \longrightarrow & S^{n-1} \\ & (A, X) & \longrightarrow & \varphi(A, X) \ = AX \end{array}$$

dir. Çünkü $\|X\| = \|AX\| = 1$ dir. Ohalde **(i).** özeliği sağlanır.

ii özelik de sağlanır: $\forall A, B \in O(n)$ için $(AB)X = A(BX), \forall X \in S^{n-1}$ dir.

iii özelik de sağlanır:

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & O(n) \times S^{n-1} & \longrightarrow & S^{n-1} \\ & (I, X) & \longrightarrow & \varphi(I, X) \ = IX \ = X \end{array}$$

olduğundan $O(n)$, S^{n-1} üzerinde etkilidir. Ayrıca $\forall X, Y \in S^{n-1}$ için $Y = AX$ olacak şekilde bir $A \in O(n)$ vardır. O halde $O(n)$, S^{n-1} üzerinde geçişlidir. Geçişlilik için bir başka ifade daha verebiliriz.

$e_1, e_2, ..., e_n \in S^{n-1}$ ve $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ...\overrightarrow{e_n}\}$ ortonormal bir baz olsun. Ayrıca; $v_1, v_2, ...,$ $v_n \in S^{n-1}$ ve $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\}$ de bir başka ortonormal baz olsun. O zaman biri $e_j \in S^{n-1}$ ve diğeri de $v_j \in S^{n-1}$ için $v_j = Ae_j$ olacak şekilde bir $A \in O(n)$ vardır. Bunu bir dönüşüm ile $A = [\sigma_{ij}]$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & O(n) \times S^{n-1} & \longrightarrow & S^{n-1} \\ & ([\sigma_{ij}], e_j) & \longrightarrow & \varphi([\sigma_{ij}], e_j) \ = [\sigma_{ij}]e_j \ = v_j \in S^{n-1} \end{array}$$

biçiminde de yazabiliriz. Dolayısıyla $O(n)$, S^{n-1} üzerinde geçişlidir.

Örnek 4.1.2. Homojen olmayan uzaylara örnek olarak $[0, 1]$ uzayını verebiliriz.

Teorem 4.1.2. Sierpinski topolojik uzayı bir tamamen homojen-olmayan uzay örneğidir(Adams 1996).

İspat: Bu uzay $X = \{a, b\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \varnothing, \{a\}\}$ şeklinde olup, kendi üzerine bütün bire-bir örten fonksiyonları bağıntı dilinde
$i = \{(a, a), (b, b)\}$ ve $f = \{(a, b), (b, a)\}$'dır. Ancak f sürekli değildir,$\{a\}$açık olmasına karşın;$f^{-1}[\{a\}] = \{b\}$ açık değil.

Örnek 4.1.3. Her topolojik grup homojendir, bunun bir sonucu olarak alışılmış topolojiyle birlikte R homojendir.

Bunun dışında her küme üzerinde kurulabilecek ayrık , bitişik , eşsonlu ve eşsayılabilir topolojiler,R^n, S^n (nokta, çember, küre, ...) ve özel olarak R'ye homeomorf olduğuna göre $(0, 1)$ uzayı homojen uzaylara örnektir.

4.2 Lie Grupları

Lie grupları öyle gruplardır ki aynı zamanda birer diferensiyellenebilen manifolddurlar. Bu da Lie grubunun bir diferensiyellenebilen grup olduğunu ifade eder.

Tanım 4.2.1. Bir M diferensiyellenebilir manifoldu ve bir G grubu verilmiş olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa (M, G) ikilisine bir **Lie grubu** denir(Hacısalihoğlu 1980).

- M nin noktaları G nin elemanları ile çakışır.
- $$\begin{array}{lcc} . \ M \times M & \longrightarrow & M \\ (a, b) & \longrightarrow & a.b^{-1} \end{array}$$

işlemi her yerde diferensiyellenebilirdir. M ye Lie grubunun **temel manifoldu** ve G ye de **temel grubu**denir. Buna göre kısaca bir Lie grubunu şu şekilde de tanımlayabiliriz:

Tanım 4.2.2. G bir grup ve $(a, b) \to ab^{-1}$ şeklinde tanımlanan $\cdot : GxG \longrightarrow G$ grup işlemi C^{∞}sınıfından diferensiyellenebilir olsun. Eğer G bir diferensiyellenebilir manifold ise G ye bir **Lie grubu** denir(Hacısalihoğlu 1980).

Lie grubu bir grup olduğundan grup işlemine göre bir etkisi elemanı vardır. Bu tanımdan çıkan sonuçlar:

- G bir Lie grubu olsun. O zaman $\forall a \in G$ için

  $$\cdot \quad a \longrightarrow a^{-1}$$

  dönüşümü C^{∞}sınıfından diferensiyellenebilirdir. Gerçekten grubun etkisiz elemanı e ise

  $$\cdot \quad a \longrightarrow (e,a)$$

  ve

  $$(e,a) \longrightarrow ea^{-1} = a^{-1}$$

  dönüşümleri C^{∞}sınıfındandırlar ve bileşimleri olan

  $$\cdot \quad a \longrightarrow (e,a) \longrightarrow ea^{-1} = a^{-1}$$

  dönüşümü de C^{∞}sınıfından olur.

- G bir Lie grubu olsun. O zaman $\forall a, b \in G$ için

$$(a,b) \longrightarrow ab$$

dönüşümü C^{∞}sınıfından diferensiyellenebilirdir. Gerçekten

$$\begin{array}{lcc} .\ G \times G & \longrightarrow & G \\ (a,b) & \longrightarrow & a.b^{-1} \end{array}$$

ve

$$(a.b^{-1}) \longrightarrow a.b$$

dönüşümleri C^{∞}sınıfındandırlar ve bileşimleri olan

$$\cdot \quad (a,b) \longrightarrow a.b^{-1} \longrightarrow (a,b)$$

dönüşümü de C^{∞} sınıfından olur.

Tanım 4.2.3. G bir analitik manifold aynı zamanda bir grup ,grup işlemi $\odot$

olsun.$\odot$ grup işlemine göre $\forall y \in G$ nin inversi y^{-1} olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} \odot: & GxG & \rightarrow & G \\ & (x.y) & \rightarrow & x \odot y^{-1} \end{array}$$

işlemi analitik ise, G bir **analitik Lie grubudur**(Hacısalihoğlu 1980).

Örnek 4.2.1. n-boyutlu öklid uzayı E^n olsun. E^n bir C^∞ Manifold ve toplama işlemine göre bir gruptur.Ayrıca

$$\begin{array}{rccc} +: & E^n x E^n & \rightarrow & E^n \\ & (x,y) & \rightarrow & x+(-y) \end{array}$$

işlemi C^∞ olduğundan E^n bir Lie grubudur.

Tanım 4.2.4. G sonlu sayıda elemana sahip bir Lie grubu ve G ye izomorf olan dönüşüm grubu sürekli ise , G ye **sonlu sürekli Lie grubu** denir.

Teorem 4.2.1. G_1 ve G_2 iki Lie grubu ve grup işlemleri sırasıyla $\odot$ ve $\boxdot$ olsun.

$$\begin{array}{rccc} \odot, \boxdot: & (G_1\, xG_2)x(G_1\, xG_2) & \rightarrow & (G_1\, xG_2) \\ & ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) & \rightarrow & (x_1 \odot y_1^{-1}, x_2 \boxdot y_2^{-1}) \end{array}$$

çarpım grup işlemi ile $G_1\, xG_2$ bir Lie grubudur(Baez 2002).

Tanım 4.2.5. G bir Lie grubu ,grup işlemi $\odot$,**a** $\in G$ belli bir eleman olsun.

$$\begin{array}{rccc} L_{a:} & G & \rightarrow & G \\ & g & \rightarrow & L_a(g) = a \odot g \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} R_a: & G & \rightarrow & G \\ & g & \rightarrow & R_a(g) = g \odot a \end{array}$$

biçiminde tanımlı dönüşümlere sırasıyla,$a \in G$ ile belirli **sol öteleme** ve **sağ öteleme** denir(Balcı 1982).

Bir Lie grubu G, grup işlemi $\odot$ olsun g lie grubu üzerinde tanımlı sol ve sağ ötelemeler için aşağıdaki özellikler sağlanır.

Özelik 4.2.1.

$$L_{g_1} \odot L_{g_2} = L_{g_1 \odot g_2}, \forall g_1, g_2 \in G$$
$$R_{g_1} \odot R_{g_2} = R_{g_1 \odot g_2}, \forall g_1, g_2 \in G$$

Özelik 4.2.2.

$$L_{g_1} \odot R_{g_2} = R_{g_2} \odot L_{g_1}, \forall g_1, g_2 \in G$$

Özelik 4.2.3. $\forall g \in G$ için L_g ve R_g birebir ve örtendir ve $\odot$ grup işlemine göre $g \in G$ nin inversi g^{-1} olmak üzere

$$(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$$

$$(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$$

dir.

Tanım 4.2.6. G_1 ve G_2 iki Lie grubu,grup işlemleri sırasıyla $\odot$ ve $\boxdot$ olsun. Bir $F : G_1 \to G_2$ dönüşümü diferansiyellenebilir ve $\forall g_1, g_2 \in G$ için

$$\begin{array}{cccc} F: & G_1 & \to & G_2 \\ & F(g_1 \odot g_2) & \to & F(g_1) \boxdot F(g_2) \end{array}$$

eşitliği sağlanıyorsa , F ye G_1 den G_2 ye bir **Lie grup homomorfizmidir** denir(Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 4.2.2. G_1 ve G_2 iki Lie grubu $F : G_1 \to G_2$ bir Lie grup homomorfizmi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1 $e_1 \in G_1$ birim elemanı, $e_2 \in G_2$ birim elemanı olmak üzere

$$F(e_1) = e_2$$

dir

2 $\forall g_1 \in G_1$ için ters elemanı g_1^{-1} olmak üzere

$$(F(g_1))^{-1} = F(g_1^{-1})$$

dir.

3 G_2 grup işlemi $\boxdot$ olmak üzere $\boxdot$ işlemine göre $F(G_1)$ kapalıdır.

4 G_1 bir değişmeli grup ise $\forall g_1, g_2 \in G_1$ için,

$$F(g_1) \boxdot F(g_2) = F(g_2) \boxdot F(g_1)$$

dir(Fegan 1991).

Sonuç 4.2.1. G_1ve G_2 iki Lie grubu,$F : G_1 \to G_2$ bir Lie grup homomorfizmi olsun. Bu durumda $F(G_1) \subset G_2$ bir Lie alt grubudur.

Tanım 4.2.7. M bir topolojik uzay olsun. başlangıç ve bitiş noktası $x_0 \in M$ olan kapalı eğrilerin denklik sınıfıda $[\alpha]\ [\beta] = [\alpha, \beta]\,,\ [\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$ olsun.Bu durumda $[e_{x_0}]$ birim eleman olmak üzere bir grup yapısı vardır.Bu gruba **temel grup** denir ve $\alpha_1(M, x_0)$ ile gösterilir. Bu yapı

$$\alpha_1(M, x_0) = \{[\alpha] \mid \alpha(x_0), x_0 \in I\}$$

şeklindedir.

Önerme 4.2.1. Temel grup bir Lıe grubudur(Grauret 1976).

İspat 4.2.1.

$$\alpha_1(M, x_0) = \{[\alpha] \mid \alpha(x_0), x_0 \in I\}$$

Bir temel grup olsun. Buna göre

$$\alpha_G = \alpha_1(M, x_0) x \alpha_1(M, x_0) \to \alpha_1(M, x_0)$$

$$\begin{array}{rccc} \alpha_G = & \alpha_1(M, x_0) x \alpha_1(M, x_0) & \to & \alpha_1(M, x_0) \\ & ([\alpha]\,, [\beta]) & \to & [\alpha] \cdot [\beta]^{-1} \end{array}$$

şeklinde tanımlansın.α_G nin differansiyellenebilir olduğunu gösterelim: α nın denklik sınıfının tanımından

$$[\alpha] = \left\{ \beta \mid \alpha \sim \beta, h : IxI \ \underrightarrow{\underline{sürekli}}\ M \right\}$$

dır. Bir fonksiyonun diferansiyellenebilmesi için o fonsiyonun her bileşeninin diferansiyellenebilmesi gerekir. Burada h bileşik fonksiyon olup

$$\begin{array}{rccc} h: & IxI & \xrightarrow{\text{sürekli}} & M \\ & (t,s) & \rightarrow & h(t,s) \end{array}$$

dır. Ayrıca $\alpha_1(M, x_0)$ bir topolojik gruptur ve t, s bir parametre olduğundan h diferansiyellenebilirdir. Dolayısıyla

$$[\alpha]\,[\beta]^{-1} = [\alpha]\left[\beta^{-1}\right] = \left[\alpha\beta^{-1}\right]$$

dan α_G diferansiyellenebilirdir. Bu da ispatı tamamlar.

4.3 İrtibatlı Lie Grupları

Tanım 4.3.1. (M, τ) bir topolojik uzay ve $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$ olmak üzere herhangi $A, B \subset M$ verilsin.A^t ve B^t sırasıyla A ve B cümlelerinin tümleyeni olmak üzere, eğer

$$A^t \cap B \neq \varnothing \vee A \cap B^t \neq \varnothing$$

ise A ve B cümlelerine **irtibatlı cümleler** denir. Eğer

$$A^t \cap B = \varnothing \wedge A \cap B^t = \varnothing$$

ise A ve B cümlelerine **irtibatlı olmayan cümleler** denir(Kachi 1999).

Tanım 4.3.2. (M, τ) bir topolojik uzayı verilsin. Eğer M cümlesi boştan farklı , irtibatlı olmayan iki altcümlesinin birleşimine eşit ise (M, τ) uzayına **irtibatlı olmayan uzay** veya **irtibatsız uzay** denir. Eğer M cümlesi boştan farklı , irtibatlı iki cümlenin birleşimine eşit ise (M, τ) uzayına **irtibatlı uzay** denir(Price 1977).

Tanım 4.3.3. G Lie grubunun birim elemanını kapsayan G_1 bileşenine **öz irtibatlı bileşen** denir.

Tanım 4.3.4. Bir G Lie grubu birçok irtibatlı G_i bileşenlerinden oluşur. Bu G_i bileşenleri genellikle kendi aralarında irtibatsizdır. Her bir G_i irtibatlı bileşeni Γ diskret alt grubunun bazı γ_i diskret ötelemeleri tarafından G_1 alt grubu ile elde edilir. Bu yüzden bir lie grubu , G_1 ile diskret alt grublarının çarpımı

$$G = G_1 x \Gamma$$

olarak tanımlanır(Minura 1970).

Örnek 4.3.1. $G = GL(n, R)$ nin bir Lie grubu olduğunu gösterip irtibatlılığını inceleyelim.$G = GL(n, R)$ olsun. $i, j = 123......n$ olmak üzere x_{ij} matris elemanlarını düşünelim.

$x = x_{ij} \in G = GL(n, R)$ nin bir elemanını R^{n^2}de bir nokta olarak düşünebiliriz. Çünkü

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & R^{n^2} & \rightarrow & R \\ & x & \rightarrow & \det x \end{array}$$

dönüşümü süreklidir.ve $\varphi^{-1}(0), R^{n^2}$ de kapalıdır. Bu sebeble $GL(n, R)$ de $(\varphi^{-1}(0))$ tümleyeni R^{n^2}nin analitik açık bir alt manifoldunun açık bir alt cümlesidir.
$z = xy^{-1}$ elemanının z_{ij} koordinatları x_{ls} ve y_{tu} nun rasyonel fonksiyonları olarak tanımlanabilir. Bu rasyonel fonksiyonun paydaları $GL(n, R)$ de sıfırdan farklıdır. Böylece $xy \rightarrow xy^{-1}$ dönüşümü analitiktir ve sonuç olarak $GL(n, R)$ de bir Lie gruptur.$G = GL(n, R)$ irtibatlı değildir. Eğer irtibatlı olsaydı det fonksiyonu sürekli olduğundan $detG = R - (0)$ irtibatlı olurdu. Bu ise bir çelişkidir.

Örnek 4.3.2. $(\mathbb{R}^n, +)$ grubu ile R^n manifoldu bir Lie grubu tanımlar Bu Lie grubunu da R^n ile gösterebiliriz.

Örnek 4.3.3. $\mathbb{GL}(n, \mathbb{C}) = \{A | A = [aij] \in \mathbb{C}^n_n, detA \neq 0,$matris çarpımı$\}$.

i $Re(a_{ij})$ ve$\dot{I}m(a_{ij})$ ile a_{ij} nin reel ve imajiner kısımlarını gösterelim.

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n^2} \\ & A & \longrightarrow & \phi(A) \end{array} \tag{1}$$

dönüşümünü ele alalım. Bu dönüşümde A ya $\phi(A)$ noktası karşılık gelir. $\phi(A)$nın koordinatları $Re(a_{ij}), Im(a_{ij})$ şeklinde $2n^2$ tane reel sayılardır.
Böylece

$$\phi : GL(n, C) \longrightarrow M \subset R^{2n^2}$$

homoeomorfizimi elde edilir. Bu homeomorfizimde R^{2n^2}nin $GL(n, C)$ ye homeomortik olan M altcümlesinin noktaları

$$a_{ij} = Re(a_{ij}) + \sqrt{-1}\dot{I}m(a_{ij})$$

lerle birebir tekabül ederler.

Topolojik grup tanımındaki g_2 aksiyomunda gösterdiğimiz gibi R^{2n^2} deki $GL(n, C)$ ye homeomorf olan M altcümlesi açıktır. O halde bu M altcümlesi bir manifolddur. Böylece $i)$ in sağlandığı görülür.

ii Diğer taraftan

$$a \longleftrightarrow A = [a_{ij}] \text{ ve } b^{-1} \longleftrightarrow B^{-1} = \left[\frac{B_{ij}}{|B|}\right]$$

için

$$ab^{-1} \longrightarrow AB^{-1} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \frac{B_{ki}}{|B|}$$

şeklinde tanımlanan matris çarpımı işleminde

$$Re\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \frac{B_{ki}}{|B|}\right]$$

ve

$$Im\left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \frac{B_{ki}}{|B|}\right]$$

fonksiyonları $Re(a_{ij})$, $Re(b_{ij})$,$Im(a_{ij})$ve $Im(b_{ij})$ nin rasyonel fonksiyonları olarak ifade edilebilirler, öyle ki bu

rasyonel fonksiyonların paydaları $GL(n, C)$ $detA \neq 0$ olduklarından

$$(a, b) \longrightarrow ab^{-1}$$

işlemi diferensiyellenebilirdir.

$$\begin{array}{cccc} f: & E^n & \longrightarrow & E^m \\ & (u_1, \ldots, u_n) & \longrightarrow & (f_1(u_3, \ldots, u_n), \ldots, f_m(u_1, \ldots, u_n)) \end{array}$$

fonksiyonu diferensiyellenebilirdir $\Longleftrightarrow \forall(f_i(u_3,\dots,u_n):E^n \longrightarrow R$ fonksiyonu diferensiyellenebilirdir. Burada

$$MxM \longrightarrow M$$

$$f: E^{n^2}xE^{n^2} \longrightarrow E^{n^2}$$

fonksiyonu

$$f:(a,b) \longrightarrow ab^{-1}$$

şeklindedir.

$$a \leftrightarrow [a_{ij}]$$

$$b \longleftrightarrow [b_{ij}] \Rightarrow b^{-1} \longleftrightarrow \frac{B_{ji}}{|B|}$$

dır. Burada

$$\begin{aligned} a &= (x_1, x_2 \dots x_{n^2}) \text{ ve } a_{ij} = x_i + (j-1)n & (2) \\ b &= (y_1, y_2 \dots y_{n^2}) \text{ ve } b_{ij} = y_i + (j-1)n & (3) \end{aligned}$$

dır. Buna göre

$$ab^{-1} = (f_1, f_2 \dots f_{n^2})$$

ve

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{ik} b_{kj}}{|B|} = \sum_{k=1}^{n} x_i + (j-1)n \frac{y_i + (j-1)n}{|B|}$$

dır.

(2) ve (3) fonksiyonları diferensiyellenebilir olduklarından bunların çarpım ve toplamlarından oluşan

$$f_i = \sum_{k=1}^{n} x_i + (j-1)n \frac{y_i + (j-1)n}{|B|}$$

fonksiyonları da diferensiyellenebilirdir, dolayısıyla f de dif. bilir olur.
Böylece $(M, GL(n,C))$ ikilisi bir Lie grup'udur.

Örnek 4.3.4.

$$C^* = \{a + ib | a + ib \neq 0 + i0; a, b \in R\}$$

cümlesini kompleks sayıların çarpımı işlemiyle bir grup yapabiliriz. Bu grup C^*diferensiyellenebilir kompleks manifoldu ile birlikte bir Lie grubudur.

Örnek 4.3.5. $S^1 \subset C^*$birim çemberi C^*daki çarpma işlemine göre bir gruptur. S^1 diferensiyellenebilir manifoldu ile bu grup bir Lie grubudur.

Örnek 4.3.6. G ve H birer Lie grubu olsunlar.

$a_1, b_1 \in G$ ve $a_2, b_2 \in H$ olmak üzere

$$\begin{array}{llll} .: & (G \times H) \times (G \times H) & \longrightarrow & (G \times H) \\ & ((a_1, a_2), (b_1, b_2)) & \longrightarrow & (a_1, a_2)(b_1, b_2) \quad = (a_1 b_1, a_2 b_2) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemine göreGxH çarpım cümlesi bir grup'dur. G ve H ya tekabül eden dif.bilir manifoldların çarpımı olan dif.bilir manifold ile bu GxH grubu bir Lie grubudur. Çünkü yukarıdaki çarpma işlemi dif.bilirdir.

Örnek 4.3.7. n-tor denenT^n ($n > 0$, tam sayı) cümlesi

$$T^n = S^1 \times S^1 \times .... \times S^1..(\text{n tane})$$

şeklinde S^1 Lie grubunun kendisiyle n-defa çarpımından elde edilir. Örnek 5. 5. deki gibi Lie gruplarının çarpımı da bir Lie grup olacağından T^n de bir Lie grubudur.

Örnek 4.3.8.

$$\{A = [a_{ij}] \in R_n^n, i > j \text{ için } \ a_{ij} = 0\}$$

şeklindeki üst-üçgensel matrislerin cümlesi matris çarpımı işlemine göre bir Lie grubudur.

Örnek 4.3.9. $R^* = R - \{0\}$ alalım ve $K = R^* x R$ bir çarpım manifoldu olsun. K daki grup yapısı

$$\begin{array}{llll} .: & (R^* \times R) \times (R^* \times R) & \longrightarrow & (R^* \times R) \\ & ((a_1, b_1), (a, b)) & \longrightarrow & (a_1, b_1)(a, b) \quad = (a_1 a, a_1 b + b_1 \end{array}$$

şeklinde tanımlanırsa K bir Lie grubu olur. Bu Lie grubu R^2 nin afin hareket

($det \neq 0$ olan afin dönüşüm) lerinin grubudur. Gerçekten $(a,b) \in K$ olmak üzere, $\forall(x,y) \in R^2$ elemanını bir $(x\prime, y\prime) \in R^2$

$$(a,b) \longrightarrow \begin{bmatrix} x\prime \\ y\prime \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

elemanına dönüştürürsek

$$x\prime = ax + by, a \in R^* \Rightarrow a \neq 0$$

$$y\prime = 0x + 1y$$

$$det \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = a \neq 0$$

olur ki dönüşüm R^2 de bir afin harekettir. Böylece K nın elemanları R^2 nin afin hareketlerine karşılık gelirken K'daki çarpma işlemide R^2 nin afin hareketlerinin bileşim işlemine karşılık gelir: Bunu kısaca şu şekilde göstermek mümkündür.

$$f_1 : (a,b) \longrightarrow \begin{bmatrix} x\prime \\ y\prime \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, a \neq 0,$$

$$f_2 : (a_1, b_1) \longrightarrow \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x\prime \\ y\prime \end{bmatrix}, a_1 \neq 0, z$$

$$\begin{aligned} f_2.f_1 \quad &: \quad ((a_1, b_1), (a,b)) \longrightarrow (a_1, b_1)(a,b) = (a_1 a, a_1 b + b_1) \longrightarrow \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 a & a_1 b + b_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} . a_1 a \neq 0 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{bmatrix} a_1 a & a_1 b + b_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dır.

Örnek 4.3.10. $K = GL(n,R)xR^n$ çarpım manifoldunu ele alalım. K da grup yapısını şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$\begin{array}{llll} \odot : & (K \times K) & \longrightarrow & K \\ & ((A_1,B_1),(A,B)) & \longrightarrow & (A_1,B_1)\odot(A,B) \quad = (A_1A, A_1B+B_1) \end{array}$$

işlemi K da bir grup yapısıdır, yani$(K,\odot)$ ikilisi bir gruptur. Bu grup yapısı ile K bir Lie grubu olur. Bu Lie grubu R^{n+1}in afin hareketlerinin grubudur. Gerçekten, $\forall(A,B) \in K$ elemanını R^{n+1} deki bir

$$f_1 : (A,B) \longrightarrow \begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}, detA \neq 0\text{afin dönüşümüne eşlersek}$$

$$f_2 : (A_1,B_1) \in K \longrightarrow \begin{bmatrix} Y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix}, detA_1 \neq 0,$$

ve dolayısıyla K daki çarpma işlemi de

$$\begin{aligned} f_2.f_1 \quad &: \quad ((A_1,B_1),(A,B)) \longrightarrow (A_1,B_1)(A,B) \\ &= \quad (A_1A, A_1B+B_1) \longrightarrow \begin{bmatrix} Y'' \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \quad \begin{bmatrix} AA_1 & A_1B+B_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}, det(A_1A) \neq 0, \end{aligned}$$

şeklinde R^{n+1} in bir afin hareketine karşılık gelir. Zira

$$\begin{aligned} (A_1,B_1)(A,B) \quad &= \quad (A_1A, A_1B+B_1) \longrightarrow \begin{bmatrix} AA_1 & A_1B+B_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \quad \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dir.

4.4 Lie Altgrupları

Tanım 4.4.1. (G,M) bir Lie grubu (K,N) de bir diğer Lie grubu olsun. Aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa (K,N) ikilisinin(G,M) nin bir **Lie altgrubu** denir(Çitil 2003).

i **N** temel manifoldu M temel manifoldunun altmanifoldudur.$(N \subset M)$
ii K temel grubu G temel grubunun altgrubudur,$(G \subset K)$
$(GL(n,C), R^{2n^2}$ Lie grubunun alt lie grupları :

Örnek 4.4.1. $GL(n,R) = \{A|A = [a_{ij}] \in R^n_n, detA \neq 0\}$olmak üzere $(GL(n,R), R^{n^2})$ lie grubu $(GL(n,C), R^{2n^2}\ )$ lie grubunun bir alt Lie grubuna izomorftur.

Örnek 4.4.2. $O(n) = \{A|A = [a_{ij}] \in R^n_n, A^{-1} = A^t\}$ olmak üzere $(O(n); R^{\frac{n(n-1)}{2}})$ lie grubu $(GL(n,C), R^{2n^2})$ lie grubunun bir alt grubuna izomoftur. Benzer şekilden şunları da verebiliriz :

Örnek 4.4.3. $O(n,C) = \{A|A = [a_{ij}] \in C^n_n; A^{-1} = A^t\}$ olmak üzere $(O(n), R^{n(n-1)})$,

Örnek 4.4.4. $U(n) = \{A|A = [a_{ij}] \in C^n_n, AA^* = I_n, A^* = A^{-t}\}$ olmak üzere$(U(n), R^{n^2})$,

Örnek 4.4.5. $SL(n,C) = \{A|A = [a_{ij}] \in C^n_n; \dot{I}zA = 0\}$ olmak üzere $(SL(n,C), R^{2(n^2-1)})$,

Örnek 4.4.6. $SL(n,R) = \{A|A = [a_{ij}] \in R^n_n; \dot{I}zA = 0\}$ olmak üzere $(SL(n,R), R^{n^2-1})$,

Örnek 4.4.7. $SO(n) = SL(n,C) \cap O(n)$, olmak üzere $(SO(n), R^{\frac{n(n-1)}{2}})$

Teorem 4.4.1. *$GL(n,C), SL(n,C), U(n), SU(n), GL(n,R), SL(n,R)$, $O(n), SO(n), O(n,C), A(n)$ve $A(n,C)$gruplarının her birinde etkisiz eleman (birim elemanı) ın öyle bir komşuluğu vardır ki bu komşuluk r boyutlu bir reel karteziyen uzayın bir açık altcümlesine homeomorftur. Burada r aşağıdaki şekildedir:*

$GL(n,C)$ *için* $r = 2n^2$ $; SL(n,R)$ *için*

$$r = n^2 - 1$$

$SL(n,C)$ $için$ $r = 2n^2 - 2$ $;O(n)$ $için$

$$r = \frac{n(n-1)}{2}$$

$U(n)$ $için$ $r = n^2$ $;SO(n)$ $için$

$$r = \frac{n(n-1)}{2}$$

$SU(n)$ $için$ $r = n^2 - 1$ $;O(n,C)$ $için$

$$r = n(n-1)$$

$GL(n,R)$ $için$ $r = n^2$ $;A(n)$ $için$

$$r = \frac{(n-1).(n-2)}{2}$$

$A(n,C)$ için

$$r = (n-1)(n-2)$$

4.5 Lie Cebirleri

Tanım 4.5.1. gl bir reel vektör uzayı olsun yani $gl = \{V, \oplus, R, +, \cdot, o\}$. gl üzerinde bracket operatörü denen bir

$$\begin{array}{rcccc} [,] & : & gl \times gl & \xrightarrow{\underline{bilineer}} & gl \\ & & (x,y) & \longrightarrow & [,](x,y) = [x,y] \end{array}$$

dönüşümü

i $[x,y] = -[y,x]$. (ters-simetriği özelliği)

ii $[[x,y],z] + [[y,z].x] + [[z,x].y] = 0$(Jacobi özdeşliği), olacak şekilde tanımlanırsa gl vektör uzayına yani $(gl,[,])$ ikilisine bir Lie Cebiri denir ve kısaca gl ile gösterilir.

Her bir Lie grubuna eşlik eden sonlu boyutlu bir Lie cebiri vardır. Bu nedenle Lie grupları teorisi Lie Cebirleri ile Lie grupları arasındaki bağlılığa önemli bir yer ayırır. Böylece Lie grubunun özellikleri bu gruba karşılık gelen Lie cebirine birer özellik olarak aksettirilir. Bu teoride, örneğin, irtibatlı, basit irtibatlı Lie grupları bir izomorfizim altında kendilerine ait olan Lie Cebirleri tarafından tamamen belirtilebilirler. Bunun içindir ki bu cins Lie gruplarını incelemek yerine olanların Lie cebirlerini incelemek mümkün olur.

Teorem 4.5.1. M bir birleşimli cebir ve cebir işlemi $\odot$ olsun. Bu durumda $\forall x, y \in M$ için,

$$\begin{array}{rccc} [,]: & MxM & \rightarrow & M \\ & (x,y) & \rightarrow & [x,y] = x \odot y - y \odot x \end{array}$$

şeklinde tanımlı $[,]$ işlemi ile M bir lie cebiridir(Kachi 1999).

Teorem 4.5.2. L_1 ve L_2 aynı F cismi üzerinde iki Lie cebiri olsunlar. Bu durumda

$$\begin{array}{rccc} [,] & (L_1xL_2)x(L_1xL_2) & \rightarrow & (L_1xL_2) \\ & ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) & \rightarrow & ([x_1,y_1],[x_2,y_2]) \end{array}$$

şeklinde tanımlı işlem ile L_1xL_2 bir Lie cebiridir(Kachi 1999).

Örnek 4.5.1. M bir manifold olsun. M üzerindeki diferensiyellenebilir bütün vektör alanlarının vektör uzayı $X(M)$ olduğuna göre$X(M)$ üzerinde

$$\begin{array}{rccc} [,]: & X(M)xX(M) & \longrightarrow & X(M) \\ & X_m, Y_m) & \longrightarrow & [X,Y]_m \end{array}$$

$$[X,Y]_m(f) = X_m(Yf) - Y_m(Xf)$$

şeklinde tanımlanan bracket operatörü ile $X(M)$ bir Lie cebiri olur.

Örnek 4.5.2. **V** herhangi bir vektör uzayı olsun. Eğer **V** üzerinde

$$[\ ,]: VxV \longrightarrow V$$

bracket operatörü bir sıfır fonksiyonu ise V bu operatör ile bir Lie Cebiri olur ve abelian Lie Cebiri adı ile anılır.

Örnek 4.5.3.

$$gl(n,R) = \{A | A = [a_{ij}] \in R_n^n\}$$

vektör uzayı üzerinde bracket operatörünü

$$\begin{array}{rlcl} [\ ,\ ]: & gl(n,R)xgl(n,R) & \longrightarrow & gl(n,R) \\ & (A,B) & \longrightarrow & [A,B] = AB - BA \end{array}$$

olarak tanımlarsak $gl(n,R)$ vektör uzayı bir Lie Cebiri olur.

Örnek 4.5.4. 2-boyutlu bir vektör uzayı V ve V nin bir bazı $\{x,y\}$ olsun,

$$\begin{array}{rlcl} [\ ,\ ]: & VxV & \xrightarrow{bilineer} & V \\ & (x,y) & \longrightarrow & [x,y] = y \end{array}$$

ve

$$[x,x] = [y,y] = 0$$

şeklinde bir bilineer operatör ile V bir Lie Cebir olur.

Örnek 4.5.5. 3-boyutlu reel vektör uzayı R^3 üzerinde iyi bilinen

$$\begin{array}{rlcl} \Lambda: & R^3xR^3 & \longrightarrow & R^3 \\ & (X,Y) & \longrightarrow & X\Lambda Y = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \end{array}$$

şeklinde tanımlanan dış çarpım (vektörel çarpım) hem bilineerdir hem de $\forall X,Y,Z \in R^3$ için

i

$$X\Lambda Y = -Y\Lambda X$$

ii

$$(X\Lambda Y)\Lambda Z + (Y\Lambda Z)\Lambda X + (Z\Lambda X)\Lambda Y = 0$$

(Jacobi özdeşliği) özelliklerine sahiptir. O halde R^3 vektör uzayı Λ işlemiyle birlikte bir Lie Cebirdir.

Örnek 4.5.6. $\{R^3, \oplus, R, +, \cdot, \odot\}$sistemi 3-boyutlu reel vektör uzayıdır. Bu uzayda

$$\langle , \rangle : \quad R^3xR^3 \quad \rightarrow \quad R$$

iç çarpımı tanımladığımız zaman 3-boyutlu reel iç çarpım uzayını uzayını elde ederiz. Artık R^3 te bir metrik tanımlamak mümkün olur. Böylece R^3te uzunluk,açı,alan ve hacim ölçebiliriz.

R^3 yatan bir eğrinin, bir yüzeyim veya bir yüzey parçasının diferansiyel geomet risinden bahsedebilmek için R^3 vektör uzayında bir Lie oparatörü (bracket'i) tanımlamak zorunda kalırız. R^3 için böyle bir operatör örneği, iyi bilindiği gibi

$$\begin{array}{rcc} \langle , \rangle : \quad R^3xR^3 & \rightarrow & R \\ (x, y) & \rightarrow & [,]\,(x, y) = [x, y] = x \wedge y \end{array}$$

şeklinde tanımlanan ve vektör çarpımı(dış çarpım) denen

$$x \wedge y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

çarpımıdır. Burada $\{e_1, e_2, e_3\}$ standart baz ve $X = (x_1, x_2, x_3)$ ile $Y = (y_1, y_2, y_3)$ de bu baza göre koordinatlardır.

Bu çarpımın bir Lie braceti olduğu , yani Lie cebir aksiyomlarını sağladığı açıktır. O halde R^3 vektör uzayında vektörel çarpımı tanımlamakla onu bir Lie cebiri yapmış oluruz ve diferensiyel geometriyi bu cebirde ele alabiliriz.

4.6 Lie Altcebirler

Tanım 4.6.1. gl bir Lie Cebiri olsun. Bir $hl \subset gl$ altuzayı için

$$\forall X, Y \in hl \Longrightarrow [X, Y] \in hl$$

İse hl uzayına gl nin bir **altcebiridir** denir. Bir $hl \subset gl$ altcebiri gl den indirgenen bracket operatörü altında bir Lie cebiridir. Bir G Lie grubunun bir altgrubu H ve gl ile hl de bunların, sırası ile birer Lie cebirleri olsun. O zaman

$$\phi : H \longrightarrow G$$

dönüşümüne karşılık bir

$$\phi_1 : hl \longrightarrow \phi_1(hl) \subset gl$$

izomorfizimi mevcuttur, burada $\phi_1(hl)$ cebiri gl cebirinin bir alt cebiridir.

Altgruplar ile altcebirlerin varlık ve tekniğine dair teoremler, altmanifoldlar için olduğu gibi, literatürde mevcuttur.

Örnekler 4.6.1. $gl(n, C)$ Lie cebirinin Lie altcebirleri :

$$\forall A, B \in gl(n, C) \text{ için } \quad [A, B] = AB - BA$$

şeklindeki Lie bracketini $gl(n, C)$ nin aşağıdaki altuzaylarına indirgeyerek
$gl(n, C)$ Lie Cebiri için birer Lie altcebiri elde edilir.
$(O(n), [,])$, $(O(n, C), [,]), (U(n)), [,]), (sl(n, C), [,]), (sl(n, R), [,])$
$(sl(n, R), [,]), (sO(n), [,]), (sU(n)), [,]), (A(n), [,])$

Tanım 4.6.2. Bir Lie grubu G, G üzerinde tanımlı sol invaryant vektör alanlarının vektör uzayı $\chi_L(G)$ olsun. $\forall X, Y \in \chi_L(G)$ için $[X, Y] = XY - YX$ şeklinde tanımlı Lie parantez oparatörü ile $\chi_L(G)$ bir Lie cebiridir. Bu Lie cebirine G **Lie grubunun Lie cebiri** denir ve **q** ile gösterilir(Hacısalihoğlu 1980).

Sonuç 4.6.1. G bir Lie grubu $e \in G$ birim eleman,G nin Lie cebiri q olsun. $T_G(e)$ ile q arasında bir $1 : 1$ tekabül vardır.

4.7 Matris Lie Grupları ve Çatı Demetleri

$\forall X \in E^n$ noktasına bir$T_{E^n}(X)$ bir vektör uzayı (E^n in X deki tanjant uzayı) bağlanabilir. Böylece her bir diferensiyellenebilir

$$\Psi : E^n \longrightarrow E^m$$

dönüşümü $\forall X \in E^n$noktasında bir

$$\Psi_* : T_{E^n}(X) \longrightarrow T_{E^m}\Psi((X))$$

lineer dönüşümü indirgenebilir. Bu indirgenme bize iki kolaylık sağlar;

(i) Herhangi birΨ diferensiyellenebilir dönüşümü yerine daha özel olan Ψ_* lineer dönüşümünü kullanabilme.

(ii) E^n in farklı noktalarına bağlanmış olan tanjant uzayların karşılaştırılması. E^n in farklı noktalarındaki tanjant uzaylar izomorfiktirler. Fakat öyle bir izomorfizm bulmalıyız ki E^n üzerindeki metrik yapı E^n in farklı noktalarındaki tanjant uzayları karşılaştırmada kullanılabilsin. Böylece herhangi bir Lie grubu paralelizm kavramını önemli rolünden dolayı daha şimdiden tanımış olacağız.

$$R(n) = \{R|E^n \longrightarrow E^n, d(R(x), R(y)) = d(x, y) : \forall x, y \in E^n\}$$

cümlesinin elemanları olan R dönüşümlerine E^n in **katı hareketleri** (rigid Motions) denir. $R(n)$ cümlesi bileşim (çarpma) işlemine göre bir gruptur. $O(n) \in R(n)$dir. Burada $O(n)$ ortogonal grup (dönme grubu) olup E^n in $(0.0 \ldots ..., 0)$ noktasını sabit bırakır. $T(n)$ ise E^n in ötelemelerinin grubunu göstermektedir, yani $T \in T(n)$ ise$\forall(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ için

$$T(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + t_1, \ldots, x_n + t_n), t_i \in R.$$

Diğer taraftan $O(n)$ in elemanları R_0 ile, $T(n)$ in elemanları T ile ve $R(n)$ in elemanları da R ile gösterilirse

$$R = T\prime R_0 \text{ve } R = R_0 T, T\prime \neq T$$

Şeklinde gösterilebilirler. $T(n)$ in elemanlarına **birer öteleme** veya birer **paralelizimdir** denir(Balcı 1993).

Tanım 4.7.1. G ve H iki farklı grup olsun.

$$f : G \longrightarrow H$$

dönüşümüne bir grup homomorfizmi denir. Eğer

$$\forall a, b \in G$$

için

$$f(a.b) = f(a).f(b)$$

ise

i $N = \{a \in G : f(a) = e^{'}, \qquad e^{'}$ ile H nin birim elemanı gös.)

altcümlesi G nin bir altgrubudur. Bu altgruba f nin çekirdeği denir.

ii (Bir grubun normal Altgrubu)

$G\prime$ ile G nin herhangi bir altgrubunu gösterelim.

Eğer $a \in G\prime$ ve $x \in G \Longrightarrow xax^{-1} \in G\prime$ ise $G\prime$ altgrubuna G nin bir **normal altgrubu** denir(Balcı 1993).

Örnek 4.7.1. $T(n)$ öteleme grubu $R(n)$ grubunun bir altgrubudur. Ayrıca

$$\forall T \in T(n) \ veR \in R(n)$$

için

$$RTR^{-1} \in T(n)$$

dir. Çünkü

$$R = T\prime R_0 = R_0 T, (T\prime \neq T)$$

$$\begin{aligned} RTR^{^{-1}} &= (T\prime R_0)T(R_0T)^{^{-1}} = (T\prime R_0)T(T^{^{-1}}R_0T^{^{-1}}) \\ &= (T\prime R_0)(TT^{^{-1}})R_{_0}^{^{-1}} = T\prime R_{_0}R_{_0}^{^{-1}} = T\prime \in T(n) \end{aligned}$$

dır. O halde $T(n)$ altgrubu $R(n)$ in bir normal altgrubudur.

$$RTR^{-1} \in T(n)$$

olduğundan $T(n)$ grubu $R(n)$ in bir normal altgrubudur.

$$R_0 = [g_{ij}] \in O(n)$$

şeklinde gösterilirse

$$R : E^n \longrightarrow E^n$$

dönüşümü

$$Y = R_{_0}X + T$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan da matris formu ile

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ y_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & . & g_{1n} & t_1 \\ . & . & . & . \\ g_{n1} & . & g_{nn} & t_n \\ 0 & . & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Bu da bize

$$R(n) = GL(n+1, R)$$

olduğunu gösterir. O halde $R(n)$ de bir Lie grubudur. Özel olarak $RoT = I_n$ alınabileceğinden

$$R(n) = T(n)$$

olur. O halde $T(n)$ de bir Lie grubudur. Sadece

$$R = R_0 T = T\prime R_0, R_0 \neq I$$

formundaki dönüşümler bir grup değildir. Zira R_1 ve R_2 bu cins iki dönüşüm ise, örneğin,

$$R_1 = T_1 R_{01}, R_2 = R_{02} T_2$$

olsun. Eğer

$$R_{02} = R_{01}^{-1} R_1 R_2 = T_1 R_{01} R_{01}^{-1} T_2 = T_1 T_2$$

olur ki bu çarpma işleminin bir grup işlemi olamadığını gösterir. O halde sadece dönme ($\neq$ ve öteleme) den oluşan genel dönmeler cümlesi bir grup değildir. Dolayısıyla bu cümle inceleme dışındadır. Herhangi bir $x, y \in E^n$nokta çifti için tek $a \in T(n)$ ötelemesi vardır. Öyle ki

$$a(x) = y$$

dir. O halde

$$a : E^n \longrightarrow E^n$$

dönüşümü

$$a_* : T_{E^n}(x) \longrightarrow T_{E^n}(y)$$

şeklinde bir lineer dönüşüm ile ifade edilebilir. a^* birebirdir.

Tanım 4.7.2.

$$a_* : T_{E^n}(x) \longrightarrow T_{E^n}(y)$$

lineer dönüşümüneT_{E^n} den T_{E^n}**paralel hareket** (paralel replacement) denir.

$$\forall y \in E^n, y = (y_1, \ldots, y_n)$$

için

$$a = (a_1, \ldots, a_n) \in E^n$$

olmak üzere

$$x = a(y) = y + a = (y_1 + a_1, \ldots, y_n + a_n)$$

yazılabilir. Çünkü a dönüşümünün jacobian matrisi

$$a_* \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)|_x = \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)|_y$$

den

$$j(a, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

dir(Balcı 1993)

5 SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bilindiği üzere eğer X bir topolojik uzay olmak üzere her $a, b \in X$ eleman ikilisi için X'in kendi üzerine $f(a) = b$ olmasını sağlayacak bir f homeomorfizmi bulunabiliyorsa X'e homojen topolojik uzay denir. Buna göre bir topolojik uzayın homojen olmasının anlamı; o uzayın her noktada aynı komşuluk düzenine ve dolayısıyla aynı yapıya/özelliklere sahip olması demektir.

Her topolojik grup homojendir, bunun bir sonucu olarak alışılmış topolojiyle birlikte R homojendir, zaten bunu R'nin her noktasında benzer yerel bazlara sahip olmasından anlıyoruz. Bunun dışında her küme üzerinde kurulabilecek ayrık (discrete), bitişik (indiscrete), eşsonlu (cofinite) ve eşsayılabilir topolojiler, R^n, S^n (nokta, çember, küre, ...) ve özel olarak R'ye homeomorf olduğuna göre $(0, 1)$ uzayı homojen uzaylara örnektir. Bunun dışında soracağım soruya cevap bulmak için uğraşırken keşfettiğim ilginç bir homojen topolojik uzay örneği de, bir X kümesi üzerinde tanımlanabilen bütün topolojik uzayların çarpım uzayıdır. ($X = R$ aldığımızda karşımıza gerçekten ilginç bir uzay çıkıyor.)

Homojen olmayan uzaylara örnek olarak $[0, 1]$uzayını verebiliriz. Gerçekten 0 ve 1 uç noktaları özel noktalar olduğundan, herhangi bir homeomorfizm ya $f(0) = 0$ ya da $f(0) = 1$'i sağlar. Diğer taraftan, 0 ile 1 arasındaki her a ve b nokta ikilisi için $f(a) = b$ olacak şekilde bir homeomorfizm bulunabilir. Buna göre $[0, 1]$ homojen değilse bile, onun homojen alt uzayları vardır. Bir de bu kavramın aşırı karşıtını göz önüne almaya çalışalım. Eğer hiçbir $a, b \in X$, $a \neq b$ ikilisi için X'ten X'e$f(a) = b$ olacak şekilde bir homeomorfizm yoksa X'e tamamen homojen-olmayan uzay diyelim. $i : X \to X$, $i(x) = x$ birim homeomorfizminden farklı bir f homeomorfizmi bulunabilseydi, $f \neq i$ olduğundan X'in en az bir a noktasında $f(a) \neq i(a) = a$ olup a ile $f(a)$ arasında bir homojenlik bulunurdu. Buna göre tamamen homojen-olmayan uzaylar, tam olarak; kendi üzerine bir tek (i) homeomorfizmi bulunan yani homeomorfizm grubu tek elemanlı (aşikar, trivial) grup olan topolojik uzaylardır. Sierpinski topolojik uzayı bir tamamen homojen-olmayan uzay örneğidir. Bu uzay $X = \{a, b\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \phi, \{a\}\}$şeklinde olup, kendi üzerine bütün bire-bir örten fonksiyonları bağıntı dilinde $i = \{(a, a), (b, b)\}$ ve $f = \{(a, b), (b, a)\}$'dır. Ancak f sürekli değildir, $\{a\}$ açık olmasına karşın; $f^{-1}[\{a\}] = \{b\}$ açık değil. Bu sebeple X'in kendi üzerine tek homeomorfizmi i birim homeomorfizmidir.

Lie gruplarının farklı tanımları yapılarak teorem ve örneklerle açıklanmaya çalışıldı. Lie gruplarının çeşitlerine değinildi ve birbiri ile olan bağlantısı gösterildi. Son olarak Lie cebirinin tanımı ve konu ile ilgili teoremler verildi. Lie grubunun Lie cebiri ile olan ilişkisi ispatlandı. Her Lie grubunun bir Lie cebiri olduğu gösterildi.

Homojenlik özelliğine sahip uzaylarda limit, süreklilik, türev ve integral gibi konuların nasıl olduğu araştırılabilir. Uzayın homojen olmadığı durumlarda bu işlemlerin nasıl yapılabileceği incelenmelidir Lie gruplarının homojen uzaylarla olan bağlantısı araştırılıp limit, süreklilik, türev ve integrale olan etkisi gözler önüne serilebilir.

KAYNAKLAR

HACISALİHOĞLU, H.H., 1977. Study Map of a Circle. Journal of the Faculty of Science of Karadeniz Technical University, Ankara, 1(7) : 69-80.

HACISALİHOĞLU, H.H., 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi.GaziÜniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, 3(2), 55s.

ADAMS, F.J., 1996. Lectures on Exceptional Lie Groups.The Universty of Chicago Press, Chicago, 145s.

O'NEILL, B., 1983. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity.Academic Press, London, ENGLAND, 460p.

BALCI, S., 1978. Homotopi ve Bir Uzayın Esas Grubu. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü, Yülsek Lisans Tezi, Ankara, 96s.

BALCI, S. 1981. Bir Topolojik Uzayın Esas Gruplarının Demeti ve İlgili Karakterisazyonlar. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimler Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara, 38s.

BALCI, S. 1982. The Sheaf of The Fundemental Groups. Commun. Fac. Sci.Üniversitesi Ankara, Ser. Al Mathematiques, Tome 32; 59-65.

BALCI, S., 1993. Characterization of Abelianized Normal Covaring Spaces. Via Global Sections. Jour. Inst. Math. And Comp. Sei. Math. Ser. 6(2): 129-135.

BALCI, S., 1994. On the Solutıon of the Lifting Problem on Abelian Covaring Spaces.

Pure and Applied Mathamatica Sciences. 39(1): 69-77.

HACISALİHOĞLU, H.H., 1977. Study Map of a Circle. Journal of the Faculty of Science of ,Karadeniz Technical University, Ankara, 1(7) : 69-80.

HACISALİHOĞLU, H.H., 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi

Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Ankara, 55s.

HACISALİHOĞLU, H.H., 2010. Lineer Cebir Cilt 1 Ders Kitabı. HacısalihoğluYayınları, 69-583

HACISALİHOĞLU, H.H., 2005. 2 ve 3 Boyutlu Uzaylarda Analitik Geometri Ders Kitabı. Hacısalihoğlu Yayınları, 69s.

O'NEILL, B., 1983. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. Academic Press, London, ENGLAND, 460p

UĞURLU, H.H., and ÇALIŞKAN, A. , 1997. The Study Mapping for Directed Space-like and Time-like Lines in Minkowski 3-space. Mathematical and computational Applications 1(2): 8-142.

VELDKAMP, G.R.,1976. On the Use of Dual Numbers, Vectors and Matrices in Instantaneous. Spatial Kinematics, Mech Math Theory, 11: 141-156.

YAGLOM, I.M., 1979. A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis. Springer-Verlag, New York, U.S.A., 332p.

HACISALİHOĞLU, H.H., 1980. Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş. Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi,Elazığ, 65-83s.

HACISALİHOĞLU,H.H., 2000. Diferansiyel Geometri Cilt1 Ders Kitabı. Hacısalihoğlu Yayınları, 83-268.

ÇİTİL, M., 2003. Kompakt İstisnai Lie Gruplarının Homotopi Gruplarının Demeti. Ankara Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Ankara, 193s.

ÖZGEÇMİŞ

24.08.1987 yılında Kahramanmaraş'ın Andırın İlçesi'nde doğdu. İlköğretimine Andırın'da Efirağızlı İlköğretim Okulu'nda başladı ve Yunus Emre Pansiyonlu İlköğretim Okulu'nda tamamladı. Daha sonra Kahramanmaraş İbrahim Çalık Lisesi'nde ortaöğretimini 2004 yılında tamamladı. 2005 yılında Dicle Üniversitesi Matematik Bölümü'nü kazandı. 2009 yılında mezun olup aynı yıl Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladı. Halen Harran Üniversitesi'nde öğrenimine devam etmektedir ve Diyarbakır Silvan Lisesinde matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, gerekli tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, Lineer cebir ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde homojen uzaylar konusu ayrıntılı bir şekilde tanımlanmıştır. Örnek 4.1 yapılan homojen uzayların tanımı uygun şekilde çözülmüştür. Ayrıca homojen olma ile topolojik uzaylar arasında olan ilişkide göz önüne serilmiştir. Diğer bölümlerde ise Lie grubu ve çeşitleri ile Lie cebir hakkında ayrıntılı bilgi verildi. Örnekler ve teoremlerle konular anlaşılır hale getirildi. Lie grubu ile Lie cebiri arasında olan bire bir ilişki açıklanmıştır. Sonuç olarak homojen uzaylar ve Lie grupları hakkında bilgi verildi

SUMMARY

This thesis consist of five chapters. First chapter is devoted to the introduction. In first part; it is mentioned about the studies about the subject.In second part; necessary definitios and theorems are mentioned .In third part; Definitions an theorems about Lineer Algebra are given.In forth part ;The Homogeneous Space subject is explained in detail.Example 4.1 The definitions of Homogeneous Spaces are explained properly. And also, the connection between being homogeneous and Topological Spaces is explained.In other part, detailed information about Lie Groups and kinds Lie algebra, is given. The subject is made comprehensiple with examples and theorems. The mutual connection between Lie Groups and Lie Algebras is mentioned.As a result the information about Homogeneous Spaces and Lie Groups is given.

.